Правительство Российской Федерации

Федеральное государственное автономное
образовательное учреждение высшего
профессионального образования
Национальный исследовательский университет
"Высшая школа экономики"

ОТЧЁТ
По индивидуальному заданию
По курсу «Моделирование систем и процессов»

ФИО студента	**Номер группы**	**Номер варианта**
Индюченко Никита Андреевич	БПМ212	3.3

Москва 2024 г.

Условие задачи

Модель взаимодействия для двух сосуществующих популяций с численностями X_{1t}, X_{2t} и внутривидовым самоограничением численностей по логистическому типу.

$$\frac{dX_1}{dt} = a_1 X_1 \left(1 - \frac{b_1 X_2}{k_1}\right)$$
$$\frac{dX_2}{dt} = a_2 X_2 \left(1 - \frac{b_2 X_1}{k_2}\right)$$

где a_i, b_i, k_i $(i = 1, 2)$ - положительные параметры модели, заданные следующим образом:

$a_1 = 1{\times}10^{-1}$, $\quad a_2 = 3{\times}10^{-1}$, $\quad b_1 = 3{\times}10^{-4}$, $\quad b_2 = 3{\times}10^{-4}$, $\quad k_1 = 2{\times}10^{4}$, $\quad k_2 = 2{\times}10^{4}$

Начальные условия:

$$X_1(0) = 2 \times 10^4,$$
$$X_2(0) = 2 \times 10^4.$$

Указание

Прежде, чем исследовать заданные модели аналитически и численно, привести уравнения системы к безразмерному и масшабированному виду с помощью замен:

$$t = T_0 \tilde{t},$$
$$a_j = \frac{1}{T_0} \tilde{a}_j,$$
$$T_0 = 10^2 \quad \text{(в единицах времени)}.$$

для 3-ей модели

$$\begin{cases} X_1 &= X_1(0) \left(\tilde{X}_1\right) \\ X_2 &= X_2(0) \left(\tilde{X}_2\right) \end{cases}$$

При такой замене коэффициенты в новой системе становятся безразмерными:

Для 3-ей модели:

$$\tilde{b}_1 = b_1 * X_2(0)$$
$$\tilde{b}_2 = b_2 * X_1(0)$$
$$\tilde{k}_1 = k_1 / X_1(0)$$
$$\tilde{k}_2 = k_2 / X_2(0)$$

Задания по каждой из этих моделей:

а) Привести уравнения системы к безразмерному и масшабированному виду с помощью замен:

Решение:

Для параметров:

$$\tilde{a}_1 = a_1 / T_0$$
$$\tilde{a}_1 = 10^{-1}/10^2 = 10^{-3}$$

$$\tilde{a}_2 = a_2 / T_0$$
$$\tilde{a}_2 = 3 * 10^{-1}/10^2 = 3 * 10^{-3}$$

$$\tilde{b}_1 = b_1 * X_2(0)$$
$$\tilde{b}_1 = 3 * 10^{-4} * 2 * 10^4 = 6$$

$$\tilde{b}_2 = b_2 * X_1(0)$$
$$\tilde{b}_2 = 3 * 10^{-4} * 2 * 10^4 = 6$$

$$\tilde{k}_1 = k_1 / X_1(0)$$
$$\tilde{k}_1 = 2 * 10^{-4}/(2 * 10^4) = 10^{-8}$$

$$\tilde{k}_2 = k_2 / X_2(0)$$
$$\tilde{k}_2 = 2 * 10^{-4}/(2 * 10^4) = 10^{-8}$$

$$\tilde{t} = t / T_0$$
$$\tilde{t} = t / 10^2$$

Для функций:

$$\tilde{X}_1 = X_1/X_1(0)$$
$$\tilde{X}_1 = X_1/(2 * 10^4)$$

$$\tilde{X}_2 = X_2/X_2(0)$$
$$\tilde{X}_2 = X_2/(2 * 10^4)$$

Выпишем теперь систему с новыми переменными

$$\frac{d\tilde{X}_1}{d\tilde{t}} = \tilde{a}_1\tilde{X}_1\left(1 - \frac{\tilde{b}_1\tilde{X}_2}{\tilde{k}_1}\right)$$
$$\frac{d\tilde{X}_2}{d\tilde{t}} = \tilde{a}_2\tilde{X}_2\left(1 - \frac{\tilde{b}_2\tilde{X}_1}{\tilde{k}_2}\right)$$

Подстановка

$$\frac{d\tilde{X}_1}{d\tilde{t}} = 10^{-3}\tilde{X}_1\left(1 - \frac{6\tilde{X}_2}{10^{-8}}\right)$$
$$\frac{d\tilde{X}_2}{d\tilde{t}} = 3 \times 10^{-3}\tilde{X}_2\left(1 - \frac{6\tilde{X}_1}{10^{-8}}\right)$$

b) Исследовать полученную систему ОДУ аналитически: точки покоя, их тип/устойчивость по первому приближению; вблизи каждой их точек покоя: общее решение линеаризованной системы вблизи этой точки, фазовый портрет;

Решение:

Точки равновесия можно найти, приравняв правые части уравнений к нулю:

$$\begin{cases} \frac{d\tilde{X}_1}{dt} = 0 \\ \frac{d\tilde{X}_2}{dt} = 0 \end{cases}$$

Это приводит к системе уравнений:

$$\begin{cases} X_1\left(1 - \frac{6X_2}{10^{-8}}\right) = 0 \\ X_2\left(1 - \frac{6X_1}{10^{-8}}\right) = 0 \end{cases}$$

Точки покоя:

1. $(0, 0)$
2. $\left(\frac{10^8}{6}, 0\right)$
3. $(0, \frac{10^8}{6})$
4. $\left(\frac{10^8}{6}, \frac{10^8}{6}\right)$

Вычислим якобиан:

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial \tilde{X}_1}\left(10^{-3}\tilde{X}_1\left(1 - \frac{6\tilde{X}_2}{10^{-8}}\right)\right) & \frac{\partial}{\partial \tilde{X}_2}\left(10^{-3}\tilde{X}_1\left(1 - \frac{6\tilde{X}_2}{10^{-8}}\right)\right) \\ \frac{\partial}{\partial \tilde{X}_1}\left(3 \times 10^{-3}\tilde{X}_2\left(1 - \frac{6\tilde{X}_1}{10^{-8}}\right)\right) & \frac{\partial}{\partial \tilde{X}_2}\left(3 \times 10^{-3}\tilde{X}_2\left(1 - \frac{6\tilde{X}_1}{10^{-8}}\right)\right) \end{pmatrix}$$

$$J = \begin{pmatrix} 10^{-3}\left(1 - \frac{6 \cdot 0}{10^{-8}}\right) & -10^{-3} \cdot \frac{6 \cdot 10^{-8}}{10^{-8}} \\ -3 \times 10^{-3} \cdot \frac{6 \cdot 10^{-8}}{10^{-8}} & 3 \times 10^{-3}\left(1 - \frac{6 \cdot 0}{10^{-8}}\right) \end{pmatrix}$$

Для точки (0,0)

Полностью вымирают оба вида

Чтобы найти собственные значения для точки $(0, 0)$, мы должны решить характеристическое уравнение для матрицы якобиана J в этой точке. Характеристическое уравнение имеет вид:

$$\det(J - \lambda I) = 0$$

где λ - собственное значение, J - матрица якобиана, а I - единичная матрица.

Для точки $(0, 0)$ матрица якобиана:

$$J = \begin{pmatrix} 10^{-3} & 0 \\ 0 & 3 \times 10^{-3} \end{pmatrix}$$

Подставим J в характеристическое уравнение и решим его:

$$\det\left(\begin{pmatrix} 10^{-3} & 0 \\ 0 & 3 \times 10^{-3} \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = 0$$

$$\det\begin{pmatrix} 10^{-3} - \lambda & 0 \\ 0 & 3 \times 10^{-3} - \lambda \end{pmatrix} = 0$$

$$(10^{-3} - \lambda)(3 \times 10^{-3} - \lambda) = 0$$

Теперь решим это квадратное уравнение:

$$\lambda^2 - (10^{-3} + 3 \times 10^{-3})\lambda + 10^{-3} \times 3 \times 10^{-3} = 0$$

$$\lambda^2 - 4 \times 10^{-3}\lambda + 3 \times 10^{-6} = 0$$

Теперь используем формулу дискриминанта $D = b^2 - 4ac$:

$$D = (-4 \times 10^{-3})^2 - 4 \times 3 \times 10^{-6}$$

$$D = 16 \times 10^{-6} - 12 \times 10^{-6}$$

$$D = 4 \times 10^{-6}$$

Теперь найдем собственные значения, используя формулу:

$$\lambda = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$$

$$\lambda = \frac{-(-4 \times 10^{-3}) \pm \sqrt{4 \times 10^{-6}}}{2}$$

$$\lambda = \frac{4 \times 10^{-3} \pm 2 \times 10^{-3}}{2}$$

$$\lambda_1 = \frac{4+2}{2} \times 10^{-3} = 3 \times 10^{-3}$$

$$\lambda_2 = \frac{4-2}{2} \times 10^{-3} = 1 \times 10^{-3}$$

Таким образом, собственные значения для точки $(0,0)$ равны 3×10^{-3} и 1×10^{-3}.

Следовательно характер точки (0,0) - неустойчивый узел

Для вычисления якобиана для точки $\left(\frac{10^8}{6}, 0\right)$ мы должны использовать значения переменных $\tilde{X}_1 = \frac{10^8}{6}$ и $\tilde{X}_2 = 0$, а затем вычислить соответствующие частные производные. После этого мы найдем собственные значения.

Вымирает 2-ая популяция

Вычислим якобиан для точки $\left(\frac{10^8}{6}, 0\right)$:

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial \tilde{X}_1}\left(10^{-3}\tilde{X}_1\left(1 - \frac{6\tilde{X}_2}{10^{-8}}\right)\right) & \frac{\partial}{\partial \tilde{X}_2}\left(10^{-3}\tilde{X}_1\left(1 - \frac{6\tilde{X}_2}{10^{-8}}\right)\right) \\ \frac{\partial}{\partial \tilde{X}_1}\left(3 \times 10^{-3}\tilde{X}_2\left(1 - \frac{6\tilde{X}_1}{10^{-8}}\right)\right) & \frac{\partial}{\partial \tilde{X}_2}\left(3 \times 10^{-3}\tilde{X}_2\left(1 - \frac{6\tilde{X}_1}{10^{-8}}\right)\right) \end{pmatrix}$$

Затем подставим значения переменных $\tilde{X}_1 = \frac{10^8}{6}$ и $\tilde{X}_2 = 0$:

$$J\left(\frac{10^8}{6}, 0\right) = \begin{pmatrix} 10^{-3}\left(1 - \frac{6 \cdot 0}{10^{-8}}\right) & -10^{-3} \cdot \frac{6 \cdot 0}{10^{-8}} \\ -3 \times 10^{-3} \cdot \frac{6 \cdot \frac{10^8}{6}}{10^{-8}} & 3 \times 10^{-3}\left(1 - \frac{6 \cdot \frac{10^8}{6}}{10^{-8}}\right) \end{pmatrix}$$

$$J\left(\frac{10^8}{6}, 0\right) = \begin{pmatrix} 10^{-3} & 0 \\ -3 \times 10^{-3} & 3 \times 10^{-3} \end{pmatrix}$$

Теперь найдем собственные значения для этого якобиана. Для этого решим характеристическое уравнение:

$$\det\left(\begin{pmatrix} 10^{-3} & 0 \\ -3 \times 10^{-3} & 3 \times 10^{-3} \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = 0$$

$$\det\begin{pmatrix} 10^{-3} - \lambda & 0 \\ -3 \times 10^{-3} & 3 \times 10^{-3} - \lambda \end{pmatrix} = 0$$

$$(10^{-3} - \lambda)(3 \times 10^{-3} - \lambda) = 0$$

Это приводит к квадратному уравнению:

$$\lambda^2 - (10^{-3} + 3 \times 10^{-3})\lambda + 10^{-3} \times 3 \times 10^{-3} = 0$$

Решим это уравнение, и найдем собственные значения.

$$\lambda^2 - (10^{-3} + 3 \times 10^{-3})\lambda + 10^{-3} \times 3 \times 10^{-3} = 0$$

$$\lambda^2 - 4 \times 10^{-3}\lambda + 3 \times 10^{-6} = 0$$

Теперь используем формулу дискриминанта $D = b^2 - 4ac$:

$$D = (-4 \times 10^{-3})^2 - 4 \times 10^{-3} \times 3 \times 10^{-6}$$

$$D = 16 \times 10^{-6} - 12 \times 10^{-6}$$

$$D = 4 \times 10^{-6}$$

Теперь найдем собственные значения, используя формулу:

$$\lambda = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$$

$$\lambda = \frac{-(-4 \times 10^{-3}) \pm \sqrt{4 \times 10^{-6}}}{2}$$

$$\lambda = \frac{4 \times 10^{-3} \pm 2 \times 10^{-3}}{2}$$

$$\lambda_1 = \frac{4+2}{2} \times 10^{-3} = 3 \times 10^{-3}$$

$$\lambda_2 = \frac{4-2}{2} \times 10^{-3} = 1 \times 10^{-3}$$

Таким образом, собственные значения для точки $\left(\frac{10^8}{6}, 0\right)$ равны 3×10^{-3} и 1×10^{-3}.

Следовательно характер точки $\left(\frac{10^8}{6}, 0\right)$ - неустойчивый узел

Точка $(0, \frac{10^8}{6})$

Вымирает 1-ая популяция

Для вычисления якобиана для точки $(0, \frac{10^8}{6})$ мы должны использовать значения переменных $\tilde{X}_1 = 0$ и $\tilde{X}_2 = \frac{10^8}{6}$, а затем вычислить соответствующие частные производные. После этого мы найдем собственные значения.

Вычислим якобиан для точки $(0, \frac{10^8}{6})$:

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial \tilde{X}_1}\left(10^{-3}\tilde{X}_1\left(1 - \frac{6\tilde{X}_2}{10^{-8}}\right)\right) & \frac{\partial}{\partial \tilde{X}_2}\left(10^{-3}\tilde{X}_1\left(1 - \frac{6\tilde{X}_2}{10^{-8}}\right)\right) \\ \frac{\partial}{\partial \tilde{X}_1}\left(3 \times 10^{-3}\tilde{X}_2\left(1 - \frac{6\tilde{X}_1}{10^{-8}}\right)\right) & \frac{\partial}{\partial \tilde{X}_2}\left(3 \times 10^{-3}\tilde{X}_2\left(1 - \frac{6\tilde{X}_1}{10^{-8}}\right)\right) \end{pmatrix}$$

Затем подставим значения переменных $\tilde{X}_1 = 0$ и $\tilde{X}_2 = \frac{10^8}{6}$:

$$J\left(0, \frac{10^8}{6}\right) = \begin{pmatrix} 10^{-3}\left(1 - \frac{6 \cdot \frac{10^8}{6}}{10^{-8}}\right) & -10^{-3} \cdot \frac{6 \cdot \frac{10^8}{6}}{10^{-8}} \\ -3 \times 10^{-3} \cdot \frac{6 \cdot 0}{10^{-8}} & 3 \times 10^{-3}\left(1 - \frac{6 \cdot 0}{10^{-8}}\right) \end{pmatrix}$$

$$J\left(0, \frac{10^8}{6}\right) = \begin{pmatrix} 10^{-3}\left(1 - 10^8\right) & -10^{-3} \cdot 10^8 \\ 0 & 3 \times 10^{-3} \end{pmatrix}$$

Теперь найдем собственные значения для этого якобиана. Для этого решим характеристическое уравнение:

$$\det\left(\begin{pmatrix} 10^{-3}\left(1 - 10^8\right) & -10^{-3} \cdot 10^8 \\ 0 & 3 \times 10^{-3} \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = 0$$

$$\det\begin{pmatrix} 10^{-3}\left(1 - 10^8\right) - \lambda & -10^{-3} \cdot 10^8 \\ 0 & 3 \times 10^{-3} - \lambda \end{pmatrix} = 0$$

$$\left(10^{-3}\left(1 - 10^8\right) - \lambda\right)\left(3 \times 10^{-3} - \lambda\right) = 0$$

$$\lambda^2 - \left(10^{-3}\left(1 - 10^8\right) + 3 \times 10^{-3}\right)\lambda + \left(10^{-3}\left(1 - 10^8\right) \times 3 \times 10^{-3}\right) = 0$$

$$\lambda^2 - 4 \times 10^{-3}\lambda + 3 \times 10^{-6} = 0$$

Теперь используем формулу дискриминанта $D = b^2 - 4ac$:

$$D = (-4 \times 10^{-3})^2 - 4 \times 10^{-3} \times 3 \times 10^{-6}$$

$$D = 16 \times 10^{-6} - 12 \times 10^{-6}$$

$$D = 4 \times 10^{-6}$$

Теперь найдем собственные значения, используя формулу:

$$\lambda = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$$

$$\lambda = \frac{-(-4 \times 10^{-3}) \pm \sqrt{4 \times 10^{-6}}}{2}$$

$$\lambda = \frac{4 \times 10^{-3} \pm 2 \times 10^{-3}}{2}$$

$$\lambda_1 = \frac{4+2}{2} \times 10^{-3} = 3 \times 10^{-3}$$

$$\lambda_2 = \frac{4-2}{2} \times 10^{-3} = 1 \times 10^{-3}$$

Таким образом, собственные значения для точки $\left(0, \frac{10^8}{6}\right)$ равны 3×10^{-3} и 1×10^{-3}.

Следовательно характер точки $\left(0, \frac{10^8}{6}\right)$ - неустойчивый узел

Точка $(\frac{10^8}{6}, \frac{10^8}{6})$

Обе популяции выживают

Для вычисления якобиана для точки $\left(\frac{10^8}{6}, \frac{10^8}{6}\right)$ мы должны использовать значения переменных $\tilde{X}_1 = \frac{10^8}{6}$ и $\tilde{X}_2 = \frac{10^8}{6}$, а затем вычислить соответствующие частные производные. После этого мы найдем собственные значения.

Вычислим якобиан для точки $\left(\frac{10^8}{6}, \frac{10^8}{6}\right)$:

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial \tilde{X}_1}\left(10^{-3}\tilde{X}_1\left(1 - \frac{6\tilde{X}_2}{10^{-8}}\right)\right) & \frac{\partial}{\partial \tilde{X}_2}\left(10^{-3}\tilde{X}_1\left(1 - \frac{6\tilde{X}_2}{10^{-8}}\right)\right) \\ \frac{\partial}{\partial \tilde{X}_1}\left(3 \times 10^{-3}\tilde{X}_2\left(1 - \frac{6\tilde{X}_1}{10^{-8}}\right)\right) & \frac{\partial}{\partial \tilde{X}_2}\left(3 \times 10^{-3}\tilde{X}_2\left(1 - \frac{6\tilde{X}_1}{10^{-8}}\right)\right) \end{pmatrix}$$

Затем подставим значения переменных $\tilde{X}_1 = \frac{10^8}{6}$ и $\tilde{X}_2 = \frac{10^8}{6}$:

$$J\left(\frac{10^8}{6}, \frac{10^8}{6}\right) = \begin{pmatrix} 10^{-3}\left(1 - \frac{6 \cdot \frac{10^8}{6}}{10^{-8}}\right) & -10^{-3} \cdot \frac{6 \cdot \frac{10^8}{6}}{10^{-8}} \\ -3 \times 10^{-3} \cdot \frac{6 \cdot \frac{10^8}{6}}{10^{-8}} & 3 \times 10^{-3}\left(1 - \frac{6 \cdot \frac{10^8}{6}}{10^{-8}}\right) \end{pmatrix}$$

$$J\left(\frac{10^8}{6},\frac{10^8}{6}\right)=\begin{pmatrix}10^{-3}\,(1-1) & -10^{-3}\\ -3\times10^{-3} & 3\times10^{-3}\,(1-1)\end{pmatrix}$$

$$J\left(\frac{10^8}{6},\frac{10^8}{6}\right)=\begin{pmatrix}0 & -10^{-3}\\ -3\times10^{-3} & 0\end{pmatrix}$$

Теперь найдем собственные значения для этого якобиана. Для этого решим характеристическое уравнение:

$$\det\left(\begin{pmatrix}0 & -10^{-3}\\ -3\times10^{-3} & 0\end{pmatrix}-\lambda\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right)=0$$

$$\det\begin{pmatrix}-\lambda & -10^{-3}\\ -3\times10^{-3} & -\lambda\end{pmatrix}=0$$

$$(-\lambda)(-\lambda)-(-10^{-3}\times-3\times10^{-3})=0$$

$$\lambda^2-9\times10^{-6}=0$$

$$\lambda^2-9\times10^{-6}=0$$

Теперь найдем собственные значения, решив это квадратное уравнение. Для этого используем формулу дискриминанта:

$$D=b^2-4ac$$

где $a=1$, $b=0$ и $c=-9\times10^{-6}$. Подставим значения и решим:

$$D=(0)^2-4\times1\times(-9\times10^{-6})=36\times10^{-6}$$

Теперь найдем собственные значения, используя формулу:

$$\lambda=\frac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}$$

Подставим значения:

$$\lambda_{1,2}=\frac{0\pm\sqrt{36\times10^{-6}}}{2\times1}$$

$$\lambda_1=\frac{\sqrt{36\times10^{-6}}}{2}=\frac{6\times10^{-3}}{2}=3\times10^{-3}$$

$$\lambda_2=\frac{-\sqrt{36\times10^{-6}}}{2}=-\frac{6\times10^{-3}}{2}=-3\times10^{-3}$$

Таким образом, собственные значения для точки $\left(\frac{10^8}{6},\frac{10^8}{6}\right)$ равны 3×10^{-3} и -3×10^{-3}.

Следовательно характер точки $\left(\frac{10^8}{6},\frac{10^8}{6}\right)$ - седло - неустойчивая