Модель Холлинга-Таннера и Предельные Циклы

15 июня 2024 г.

Индюченко Н.А.

Пятко Л.А.

Дата: 13.05.2024

1 Введение

Модель Холлинга-Таннера — это математическая модель, используемая в экологии для описания взаимодействия хищника и жертвы. В этой модели учитываются как насыщение хищника (то есть ситуация, когда рост популяции хищника замедляется при высоком уровне добычи), так и логистический рост популяции жертвы (когда рост популяции жертвы замедляется по мере приближения к емкости окружающей среды).

2 Математическая модель

Обычно модель Холлинга-Таннера записывается в виде двух дифференциальных уравнений:

$$\frac{dx}{dt} = rx\left(1 - \frac{x}{K}\right) - \frac{myx}{A+x} \tag{1}$$

$$\frac{dy}{dt} = sy\left(1 - \frac{hy}{x}\right) \tag{2}$$

где:

- x — плотность популяции жертвы,
- y — плотность популяции хищника,
- r — коэффициент роста популяции жертвы,
- K — емкость окружающей среды для жертвы,
- m — коэффициент поедания жертвы хищником,
- A — параметр насыщения хищника,
- s — коэффициент роста популяции хищника,
- h — коэффициент, характеризующий, насколько популяция хищника зависит от популяции жертвы.

3 Стационарные точки

3.1 Координаты стационарных точек

Решая систему уравнений:

$$\begin{cases} rx\left(1 - \dfrac{x}{K}\right) - \dfrac{myx}{A+x} = 0 \\ sy\left(1 - \dfrac{hy}{x}\right) = 0 \end{cases}$$

Нетрудно получить три стационарные точки:

$$\begin{aligned} S_1 &= \big(K, 0\big) \\ S_2 &= \big(h\alpha + h\beta, \alpha + \beta)\big) \\ S_3 &= \big(h\alpha - h\beta, \alpha - \beta)\big) \end{aligned} \tag{3}$$

Где

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{K(hr - m) - Ahr}{2h^2 r} \\ \beta &= \frac{\sqrt{A^2h^2r^2K^2(hr-m)^2 + 2AhKr(m+hr)}}{2h^2 r} \end{aligned} \tag{4}$$

Причем можно заметить, что $\forall A, h, r, m, K, s$:

$$\begin{aligned} \alpha + \beta > 0 \\ \alpha - \beta < 0 \end{aligned} \tag{5}$$

Поэтому имеет смысл рассматривать только точки $S1$ и $S2$.

3.2 Устойчивость

Якобиан системы в точке (x, y) имеет вид:

$$J = \begin{pmatrix} r - \frac{2rx}{K} - \frac{Amy}{(A+x)^2} & -\frac{mx}{A+x} \\ \frac{hsy^2}{x^2} & s - \frac{2hsy}{x} \end{pmatrix} \tag{6}$$

В точке $S_1 = (K, 0)$ он принимает вид:

$$J = \begin{pmatrix} -r & -\frac{Km}{A+K} \\ 0 & s \end{pmatrix} \tag{7}$$

Собственные значения $\lambda_1 = -r, \lambda_2 = s$ действительные разных знаков, поэтому это седло.

4 Предельные циклы

4.1 Условия возникновения

В модели Холлинга-Таннера с этими обозначениями также могут возникать предельные циклы — устойчивые периодические колебания численности популяций жертвы (x) и хищника (y). Это происходит, когда динамика системы не стабилизируется на стационарном состоянии, а вместо этого популяции продолжают колебаться вокруг этого состояния.

Для возникновения предельного цикла в модели Холлинга-Таннера важны следующие условия:

1. **Теорема** Система Холлинга-Тэннера имеет устойчивый предельный цикл, если

$$\frac{r}{K}\left(\frac{K - A - 2}{1 + A}\right) > s.$$

4.2 Анализ параметров

Если параметры модели таковы, что равновесное состояние системы является неустойчивым, система может переходить к периодическим решениям, то есть к предельным циклам. В этом случае, даже небольшие отклонения от равновесия приводят к циклическим изменениям численностей популяций жертвы (x) и хищника (y), которые сохраняются во времени.

Примеры параметров, которые могут способствовать возникновению предельных циклов:

- Высокий коэффициент роста жертвы r.
- Высокий коэффициент поедания жертвы хищником m.
- Низкий уровень насыщения хищника A.

Анализ предельных циклов в модели Холлинга-Таннера может быть выполнен с помощью численных методов и фазовых портретов, которые позволяют визуализировать траектории системы в пространстве состояний.

4.3 Достаточные условия возникновения предельных циклов:

Характер особой точки

1. **Седло**
2. **Узел**
3. **Фокус**

5 Поведение системы при различных значениях параметров бифуркации

Поведение системы Холлинга-Таннера существенно зависит от значений параметров модели. Изменение ключевых параметров может привести к бифуркациям — качественным изменениям в динамике системы.

5.1 Параметры бифуркации

Основные параметры, изменение которых может вызывать бифуркации, включают:

- Коэффициент роста жертвы (r)
- Емкость окружающей среды (K)
- Коэффициент поедания жертвы хищником (m)
- Параметр насыщения хищника (A)
- Коэффициент роста хищника (s)
- Коэффициент зависимости хищника от жертвы (h)

5.2 Типы бифуркаций

Некоторые из наиболее распространенных типов бифуркаций в системе Холлинга-Таннера включают:

1. **Бифуркация Хопфа**: Когда равновесное состояние теряет устойчивость и возникают периодические колебания (предельный цикл).

2. **Седло-узловая бифуркация**: Когда две стационарные точки (одно устойчивое и одно неустойчивое) сливаются и аннигилируют.

5.3 Примеры бифуркаций

Пример 1:

- Коэффициент роста жертвы $r = 0.5$
- Емкость окружающей среды $K = 10$
- Коэффициент поедания жертвы хищником $m = 0.1$
- Параметр насыщения хищника $A = 1$
- Коэффициент роста хищника $s = 0.1$
- Коэффициент зависимости хищника от жертвы $h = 0.1$

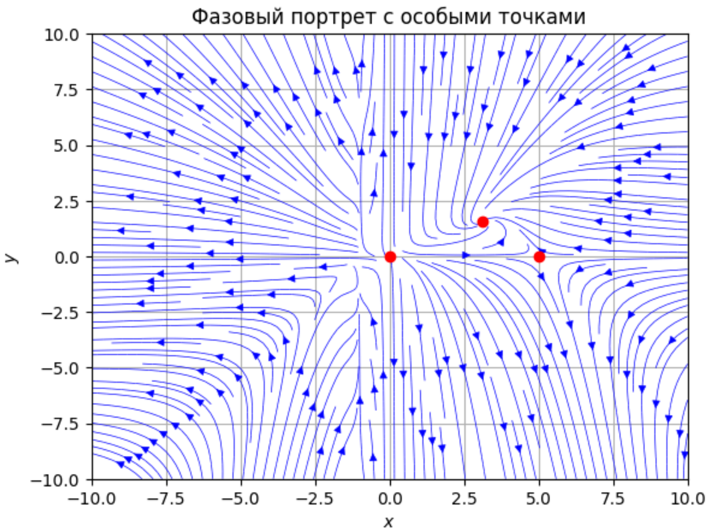

Рис. 2: Фазовый портрет с особыми точками

1. Точка 1: $x = 2.4055246 \times 10^{-317}$, $y = -2.01673907187 \times 10^{-313}$

2. Точка 2: $x = 3.108495282778671$, $y = 1.5542476415879256$

3. Точка 3: $x = 4.999999999999673$, $y = 4.658627163043427 \times 10^{-13}$

Пример 2:

- $r = 10$
- $K = 7$
- $m = 10$
- $A = 1$
- $s = 2$
- $h = 1$

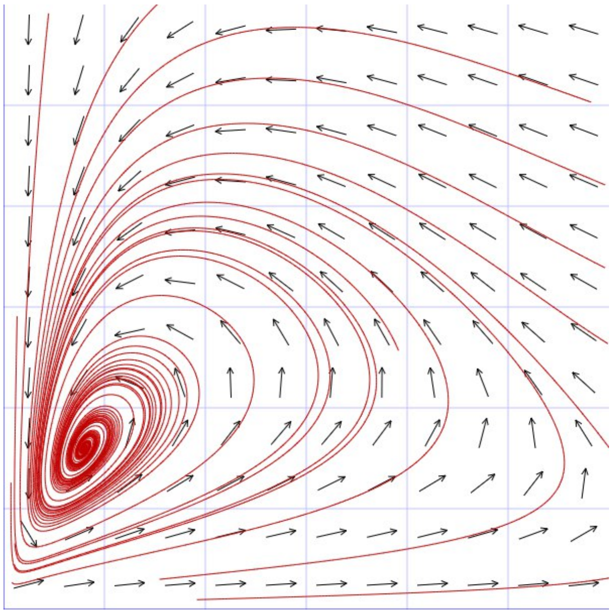

Рис. 3: Фазовый портрет с K = 7, r = 10, A = 1, m = 10, s = 2, h = 1

Найдём решение с различными начальными условиями:

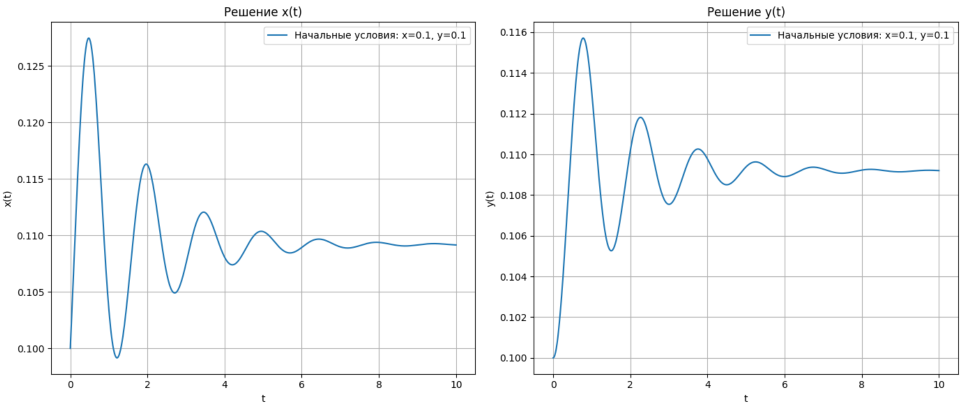

Рис. 4: Фазовый портрет с K = 7, r = 10, A = 1, m = 10, s = 2, h = 1 x(0) = 0.1, y = 0.1

Пример 3:

- $r = 10$
- $K = 7$
- $m = 10$
- $A = 1$
- $s = 4$
- $h = 1$

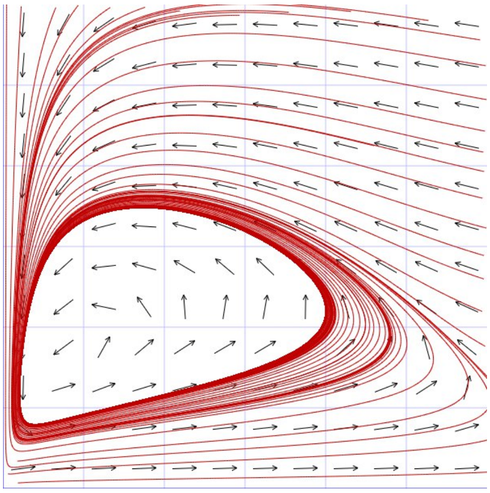

Рис. 5: Фазовый портрет с K = 7, r = 10, A = 1, m = 10, s = 4, h = 1

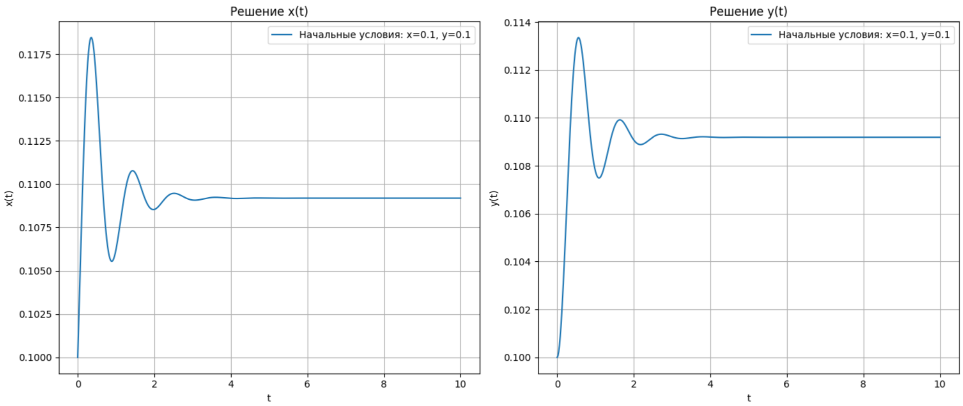

Рис. 6: Фазовый портрет с K = 7, r = 10, A = 1, m = 10, s = 4, h = 1 x(0) = 0.1, y = 0.1

5.4 Вывод:

При увеличении s (коэффициента роста хищника) можно сказать, что при одинаковой начальной плотности популяции и жертвы, и хищника следует, что динамика колебания численности обоих видов "быстрее"затухают с течением времени и стремиться к 0.109.

6 Стационарные точки

Для нахождения стационарных точек приравняем производные к нулю и решим получившуюся систему алгебраических уравнений:

$$rx\left(1-\frac{x}{K}\right)-\frac{myx}{A+x}=0 \tag{8}$$

$$sy\left(1-\frac{hy}{x}\right)=0 \tag{9}$$

Рассмотрим каждое уравнение отдельно.

6.1 Уравнение для x

$$rx\left(1-\frac{x}{K}\right)-\frac{myx}{A+x}=0 \tag{10}$$

Вынесем x за скобки:

$$x\left[r\left(1-\frac{x}{K}\right)-\frac{my}{A+x}\right]=0 \tag{11}$$

Получаем два случая:
1. $x=0$ 2. $r\left(1-\frac{x}{K}\right)=\frac{my}{A+x}$
Для второго случая:

$$r-\frac{rx}{K}=\frac{my}{A+x} \tag{12}$$

Приведем к общему знаменателю:

$$r(A+x) - \frac{rx(A+x)}{K} = my \quad (13)$$

$$rA + rx - \frac{rxA}{K} - \frac{rx^2}{K} = my \quad (14)$$

$$rA + rx - \frac{rx(A+x)}{K} = my \quad (15)$$

Умножим на K:

$$rAK + rxK - rx(A+x) = myK \quad (16)$$

$$rAK + rxK - rxA - rx^2 = myK \quad (17)$$

$$rxK - rx^2 = myK - rAK \quad (18)$$

$$rx(K-x) = myK - rAK \quad (19)$$

$$x = \frac{myK - rAK}{r(K-x)} \quad (20)$$

6.2 Уравнение для y

$$sy\left(1 - \frac{hy}{x}\right) = 0 \quad (21)$$

Вынесем y за скобки:

$$y\left[s\left(1 - \frac{hy}{x}\right)\right] = 0 \quad (22)$$

Получаем два случая:
1. $y = 0$
2. $s\left(1 - \frac{hy}{x}\right) = 0$
Рассмотрим второй случай:

$$1 - \frac{hy}{x} = 0 \quad (23)$$

$$\frac{hy}{x} = 1 \quad (24)$$

$$y = \frac{x}{h} \quad (25)$$

Таким образом, стационарные точки определяются как:
1. $(x, y) = (0, 0)$ 2. (x, y), где x удовлетворяет уравнению ($x = \frac{myK-rAK}{r(K-x)}$) и $y = \frac{x}{h}$.

7 Заключение

Модель Холлинга-Таннера представляет собой важный инструмент для понимания динамики популяций в экологии. Она позволяет учитывать сложные взаимодействия между хищником и жертвой и анализировать устойчивость и поведение популяций во времени. Предельные циклы в этой модели являются примером сложного поведения, которое может возникать в таких системах.

8 Литература:

1. Модель системы «хищник-жертва» Холлинга-Тэннера.
2. Динамика популяций. Уравнения Вольтерра-Лотка.
3. Сайт для построения фазовых портретов.
4. Код на Python для построения фазовых портретов и нахождение особых точек.
5. Элементы теории бифуркаций часть 1. динамические системы