Модель Холлинга-Таннера и Предельные Циклы

17 июня 2024 г.

Индюченко Н.А.

Пятко Л.А.

Дата: 17.06.2024

1 Введение

Модель Холлинга-Таннера — это математическая модель, используемая в экологии для описания взаимодействия хищника и жертвы. В этой модели учитываются как насыщение хищника (то есть ситуация, когда рост популяции хищника замедляется при высоком уровне добычи), так и логистический рост популяции жертвы (когда рост популяции жертвы замедляется по мере приближения к емкости окружающей среды).

2 Математическая модель

Обычно модель Холлинга-Таннера записывается в виде двух дифференциальных уравнений:

$$\frac{dx}{dt} = rx\left(1 - \frac{x}{K}\right) - \frac{myx}{A + x} \tag{1}$$

$$\frac{dy}{dt} = sy\left(1 - \frac{hy}{x}\right) \tag{2}$$

где:

- x — плотность популяции жертвы,
- y — плотность популяции хищника,
- r — коэффициент роста популяции жертвы,
- K — емкость окружающей среды для жертвы,
- m — коэффициент поедания жертвы хищником,
- A — параметр насыщения хищника,
- s — коэффициент роста популяции хищника,
- h — коэффициент, характеризующий, насколько популяция хищника зависит от популяции жертвы.

3 Стационарные точки

3.1 Координаты стационарных точек

Решая систему уравнений:

$$\begin{cases} rx\left(1 - \dfrac{x}{K}\right) - \dfrac{myx}{A + x} = 0 \\ sy\left(1 - \dfrac{hy}{x}\right) = 0 \end{cases}$$

Нетрудно получить три стационарные точки:

$$
\begin{aligned}
S_1 &= \big(K, 0\big) \\
S_2 &= \big(h\alpha + h\beta, \alpha + \beta)\big) \\
S_3 &= \big(h\alpha - h\beta, \alpha - \beta)\big)
\end{aligned}
\tag{3}
$$

Где

$$
\begin{aligned}
\alpha &= \frac{K(hr - m) - Ahr}{2h^2 r} \\
\beta &= \frac{\sqrt{A^2h^2r^2K^2(hr-m)^2 + 2AhKr(m+hr)}}{2h^2 r}
\end{aligned}
\tag{4}
$$

Причем можно заметить, что $\forall A, h, r, m, K, s$:

$$
\begin{aligned}
\alpha + \beta > 0 \\
\alpha - \beta < 0
\end{aligned}
\tag{5}
$$

Поэтому имеет смысл рассматривать только точки $S1$ и $S2$.

3.2 Характер точки

Матрица Якоби системы в точке (x, y) имеет вид:

$$
J = \begin{pmatrix} r - \frac{2rx}{K} - \frac{Amy}{(A+x)^2} & -\frac{mx}{A+x} \\ \frac{hsy^2}{x^2} & s - \frac{2hsy}{x} \end{pmatrix}
\tag{6}
$$

В точке $S_1 = (K, 0)$ он принимает вид:

$$
J = \begin{pmatrix} -r & -\frac{Km}{A+K} \\ 0 & s \end{pmatrix}
\tag{7}
$$

Собственные значения $\lambda_1 = -r, \lambda_2 = s$ действительные разных знаков, поэтому это седло.

В точке S_2 матрица Якоби выглядит значительно сложнее:

$$
J = \begin{pmatrix} r - \frac{2rh(\alpha+\beta)}{K} - \frac{Am(\alpha+\beta)}{(A+h(\alpha+\beta))^2} & -\frac{mh(\alpha+\beta)}{A+h(\alpha+\beta)} \\ \frac{s}{h} & -s \end{pmatrix}
\tag{8}
$$

Собственные значения выглядят совсем страшно, но полученные значения можно проанализировать с помощью компьютера. Откуда получается, что точка S_2 может быть особой точкой следующих видов: устойчивый узел, устойчивый фокус, центр, неустойчивый фокус.

4 Бифуркации

Нетрудно доказать, что в данной системе не может быть седлоузловой бифуркации, так как не бывает таких значений парамтеров при которых $S_1 = S_2$. Единственной возможной бифуркацией является бифуркация Андронова-Хопфа. Эта бифуркация происходит при переходе пары комплексных собственных значений через мнимую ось. То есть нужно решить $Re(\lambda_i) = 0$. Решая получим точку бифуркации удовлетворяющую равенству:

$$s - \frac{r(K - A - 2)}{K(1 + A)} = 0$$

5 Примеры бифуркации

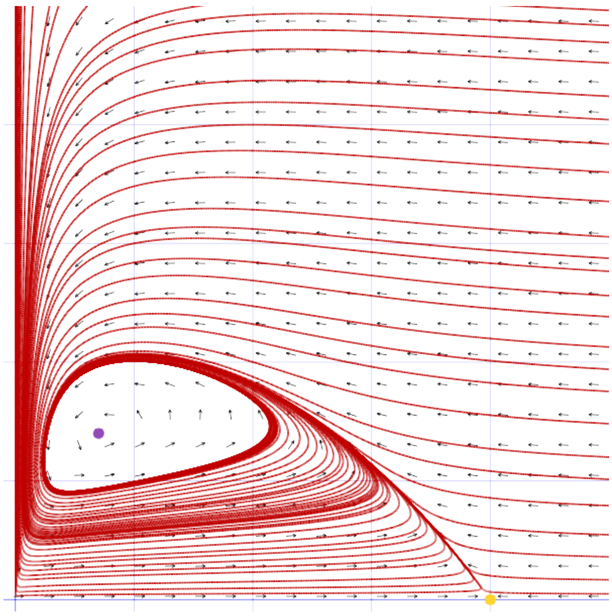

Рис. 2: Фазовый портрет с K = 4, r = 10, A = 1, m = 10, s = 1, h = 1/2

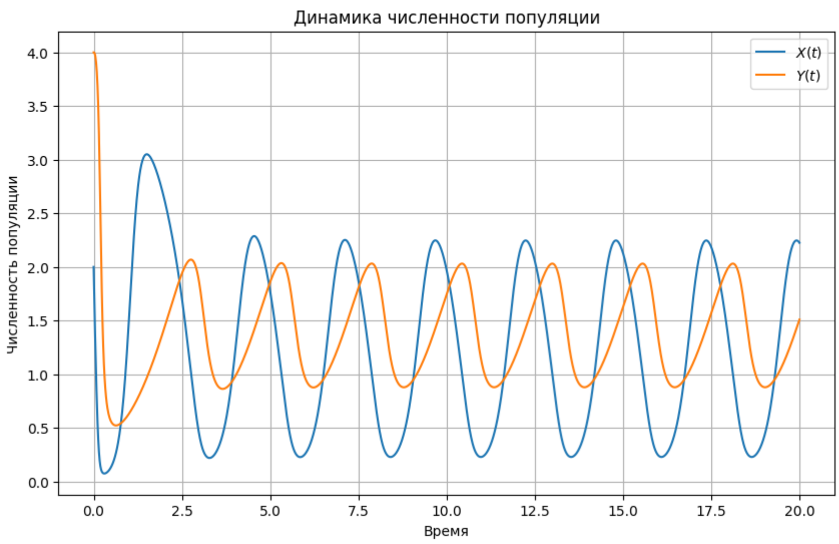

Рис. 3: Динамика популяции с K = 4, r = 10, A = 1, m = 10, s = 1, h = 1/2

Как видно в системе существует один устойчивый предельный цикл. Стационарная точка (0.7, 1.4) являетя неустойчивым фокусом.

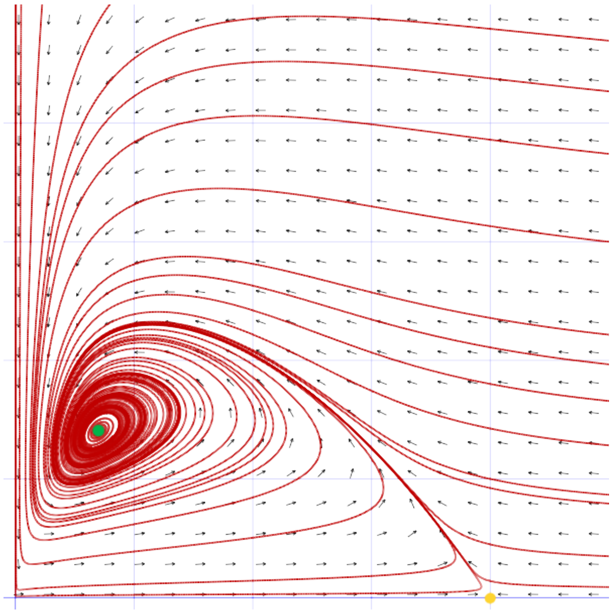

Рис. 4: Фазовый портрет с K = 4, r = 10, A = 1, m = 10, s = 2, h = 1/2

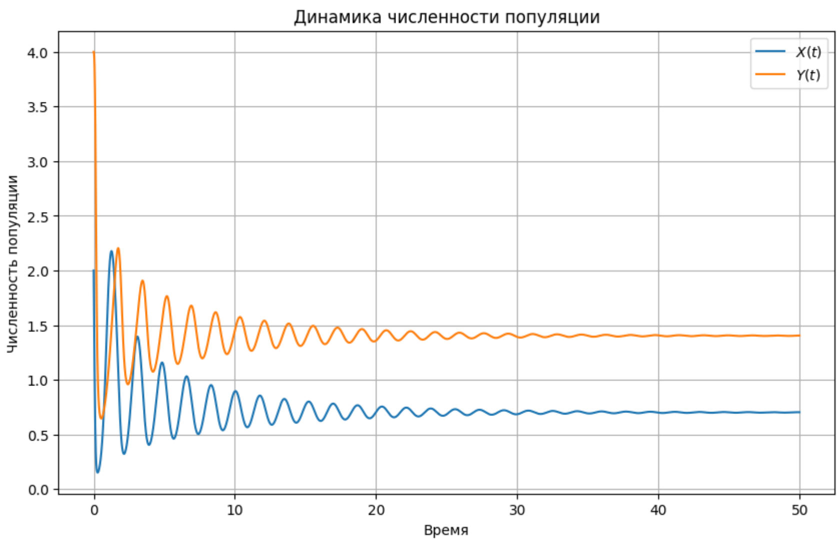

Рис. 5: Динамика популяции с K = 4, r = 10, A = 1, m = 10, s = 2, h = 1/2

В этой системе стационарная точка уже являетя устойчивым фокусом и "притягивает"к себе все точки находящиеся в области $x > 0, y > 0$

6 Литература:

1. Модель системы «хищник-жертва» Холлинга-Тэннера.
2. Динамика популяций. Уравнения Вольтерра-Лотка.
3. Сайт для построения фазовых портретов.
4. Код на Python для построения фазовых портретов и нахождение особых точек.
5. Элементы теории бифуркаций часть 1. динамические системы