Правительство Российской Федерации

Федеральное государственное автономное
образовательное учреждение высшего
профессионального образования
Национальный исследовательский университет
"Высшая школа экономики"

ОТЧЁТ
По индивидуальному заданию
По курсу «Моделирование систем и процессов»

ФИО студента	Номер группы	Номер варианта
Индюченко Никита Андреевич	БПМ212	3.3

Москва 2024 г.

Условие задачи

Модель взаимодействия для двух сосуществующих популяций с численностями X_{1t}, X_{2t} и внутривидовым самоограничением численностей по логистическому типу.

$$\frac{dX_1}{dt} = a_1 X_1 \left(1 + b_1 X_2 - \frac{X_1}{k_1}\right)$$
$$\frac{dX_2}{dt} = a_2 X_2 \left(1 + b_2 X_1 - \frac{X_2}{k_2}\right)$$

где a_i, b_i, k_i $(i = 1, 2)$ - положительные параметры модели, заданные следующим образом:

$$a_1 = 1 \times 10^{-1}, \quad a_2 = 3 \times 10^{-1}, \quad b_1 = 3 \times 10^{-4}, \quad b_2 = 3 \times 10^{-4}, \quad k_1 = 2 \times 10^4, \quad k_2 = 2 \times 10^4$$

Начальные условия:

$$X_1(0) = 2 \times 10^4,$$
$$X_2(0) = 2 \times 10^4.$$

Указание

Прежде, чем исследовать заданные модели аналитически и численно, привести уравнения системы к безразмерному и масшабированному виду с помощью замен:

$$t = T_0 \tilde{t},$$
$$a_j = \frac{1}{T_0} \tilde{a}_j,$$
$$T_0 = 10^2 \quad \text{(в единицах времени)}.$$

для 3-ей модели

$$\begin{cases} X_1 & = X_1(0) \left(\tilde{X}_1\right) \\ X_2 & = X_2(0) \left(\tilde{X}_2\right) \end{cases}$$

При такой замене коэффициенты в новой системе становятся безразмерными:

Для 3-ей модели:

$$\tilde{b}_1 = b_1 * X_2(0)$$
$$\tilde{b}_2 = b_2 * X_1(0)$$
$$\tilde{k}_1 = k_1/X_1(0)$$
$$\tilde{k}_2 = k_2/X_2(0)$$

Задания по каждой из этих моделей:

а) Привести уравнения системы к безразмерному и масшабированному виду с помощью замен:

Решение:

Для параметров:

$$\tilde{a}_1 = a_1 * T_0$$
$$\tilde{a}_1 = 10^{-1} * 10^2 = 10^1$$

$$\tilde{a}_2 = a_2 * T_0$$
$$\tilde{a}_2 = 3 * 10^{-1} * 10^2 = 3 * 10^1$$

$$\tilde{b}_1 = b_1 * X_2(0)$$
$$\tilde{b}_1 = 3 * 10^{-4} * 2 * 10^4 = 6$$

$$\tilde{b}_2 = b_2 * X_1(0)$$
$$\tilde{b}_2 = 3 * 10^{-4} * 2 * 10^4 = 6$$

$$\tilde{k}_1 = k_1/X_1(0)$$
$$\tilde{k}_1 = 2 * 10^4/(2 * 10^4) = 1$$

$$\tilde{k}_2 = k_2/X_2(0)$$
$$\tilde{k}_2 = 2 * 10^4/(2 * 10^4) = 1$$

$$\tilde{t} = t/T_0$$
$$\tilde{t} = t/10^2$$

Для функций:

$$\tilde{X}_1 = X_1/X_1(0)$$
$$\tilde{X}_1 = X_1/(2*10^4)$$

$$\tilde{X}_2 = X_2/X_2(0)$$
$$\tilde{X}_2 = X_2/(2*10^4)$$

Выпишем теперь систему с новыми переменными

$$\frac{d\tilde{X}_1}{d\tilde{t}} = \tilde{a}_1\tilde{X}_1\left(1+\tilde{b}_1*\tilde{X}_2-\frac{\tilde{X}_1}{\tilde{k}_1}\right)$$
$$\frac{d\tilde{X}_2}{d\tilde{t}} = \tilde{a}_2\tilde{X}_2\left(1+\tilde{b}_2*\tilde{X}_1-\frac{\tilde{X}_2}{\tilde{k}_2}\right)$$

Подстановка

$$\frac{d\tilde{X}_1}{d\tilde{t}} = 10\tilde{X}_1\left(1+6\tilde{X}_2-\tilde{X}_1\right)$$
$$\frac{d\tilde{X}_2}{d\tilde{t}} = 3\times 10\tilde{X}_2\left(1+6\tilde{X}_1-\tilde{X}_2\right)$$

b) Исследовать полученную систему ОДУ аналитически: точки покоя, их тип/устойчивость по первому приближению; вблизи каждой их точек покоя: общее решение линеаризованной системы вблизи этой точки, фазовый портрет;

Решение:

Точки равновесия можно найти, приравняв правые части уравнений к нулю:

$$\begin{cases} \frac{d\tilde{X}_1}{dt} = 0 \\ \frac{d\tilde{X}_2}{dt} = 0 \end{cases}$$

Это приводит к системе уравнений:

$$\begin{cases} \tilde{X}_1 * 10\left(1+6\tilde{X}_2-\tilde{X}_1\right) = 0 \\ \tilde{X}_2 * 30\left(1+6\tilde{X}_1-\tilde{X}_2\right) = 0 \end{cases}$$

Точки покоя:

$$
\begin{aligned}
1.(0,0)\\
2.(0,1)\\
3.(1,0)\\
4.(-1/5,-1/5)
\end{aligned}
$$

Вычислим якобиан:

$$
f_1(\tilde{X}_1,\tilde{X}_2) = 10 * \tilde{X}_1\left(1 + 6\tilde{X}_2 - \tilde{X}_1\right)
$$
$$
f_2(\tilde{X}_1,\tilde{X}_2) = 30 * \tilde{X}_2\left(1 + 6\tilde{X}_1 - \tilde{X}_2\right)
$$

$$
J = \begin{bmatrix} 10 - 20\tilde{X}_1 + 60\tilde{X}_2 & 60\tilde{X}_1 \\ 180\tilde{X}_2 & 30 + 180\tilde{X}_1 - 60\tilde{X}_2 \end{bmatrix}
$$

1 Точка (0,0)

Для точки (0,0)

Полностью вымирают оба вида

$\mathrm{J}(0{,}0) = \begin{bmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 30 \end{bmatrix}$
Лямбда 1 = 10, Лямбда 2 = 30
Точка (0,0) - неустойчивый узел

$$\begin{cases} \dfrac{d\widetilde{X_1}}{d\widetilde{t}} = 10\widetilde{X_1} \\ \\ \dfrac{d\widetilde{X_2}}{d\widetilde{t}} = 30\widetilde{X_2} \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} \widetilde{X_1} \\ \widetilde{X_2} \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{10\widetilde{t}} + C_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{30\widetilde{t}}$$

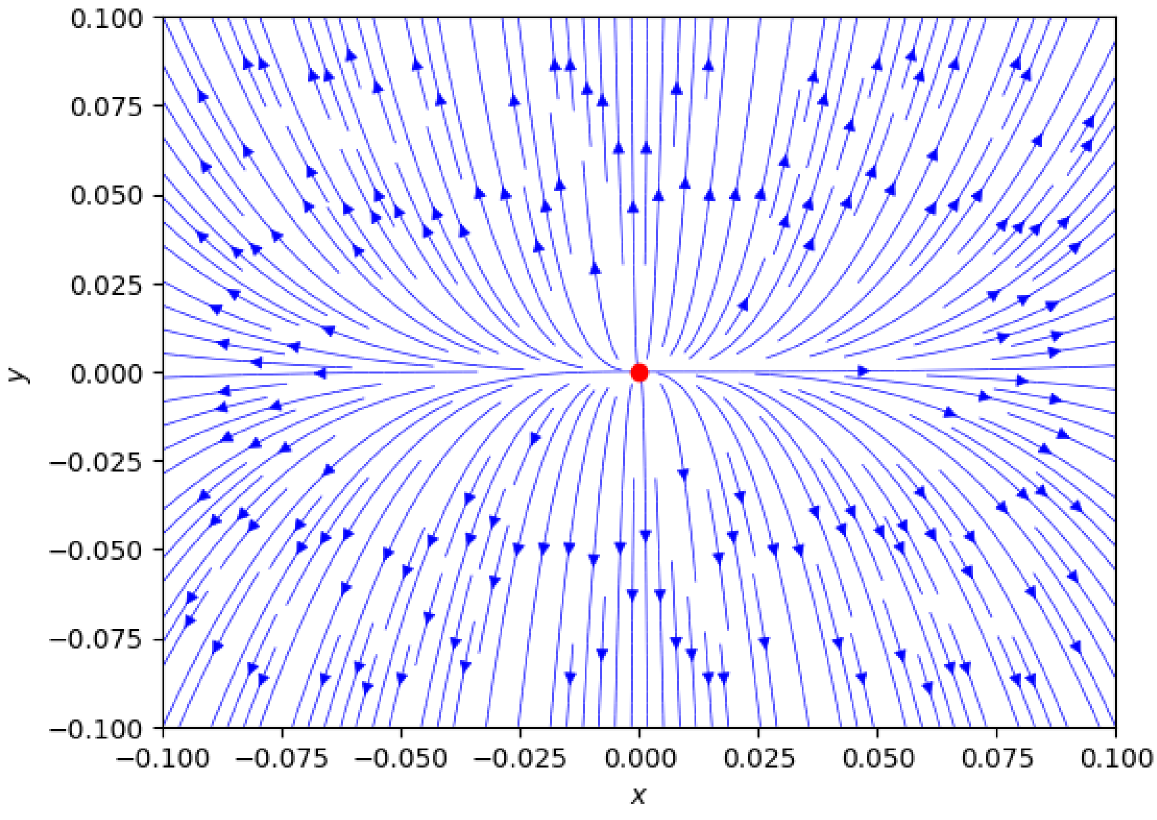

Рис. 1: Фазовый портрет точки (0,0)

2 Точка (0,1)

Для точки (0,1)

Вымирает 1-ая популяция

J = $\begin{bmatrix} 70 & 0 \\ 180 & -30 \end{bmatrix}$
Лямбда 1 = 70, Лямбда 2 = -30
Точка (0,1) - седло (неустойчивая)

$$\begin{cases} \dfrac{d\widetilde{X_1}}{d\widetilde{t}} = 70\widetilde{X_1} \\ \dfrac{d\widetilde{X_2}}{d\widetilde{t}} = 180\widetilde{X_1} - 30\widetilde{X_2} \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} \widetilde{X_1} \\ \widetilde{X_2} \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{9}{5} \end{pmatrix} e^{70\widetilde{t}} + C_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-30\widetilde{t}}$$

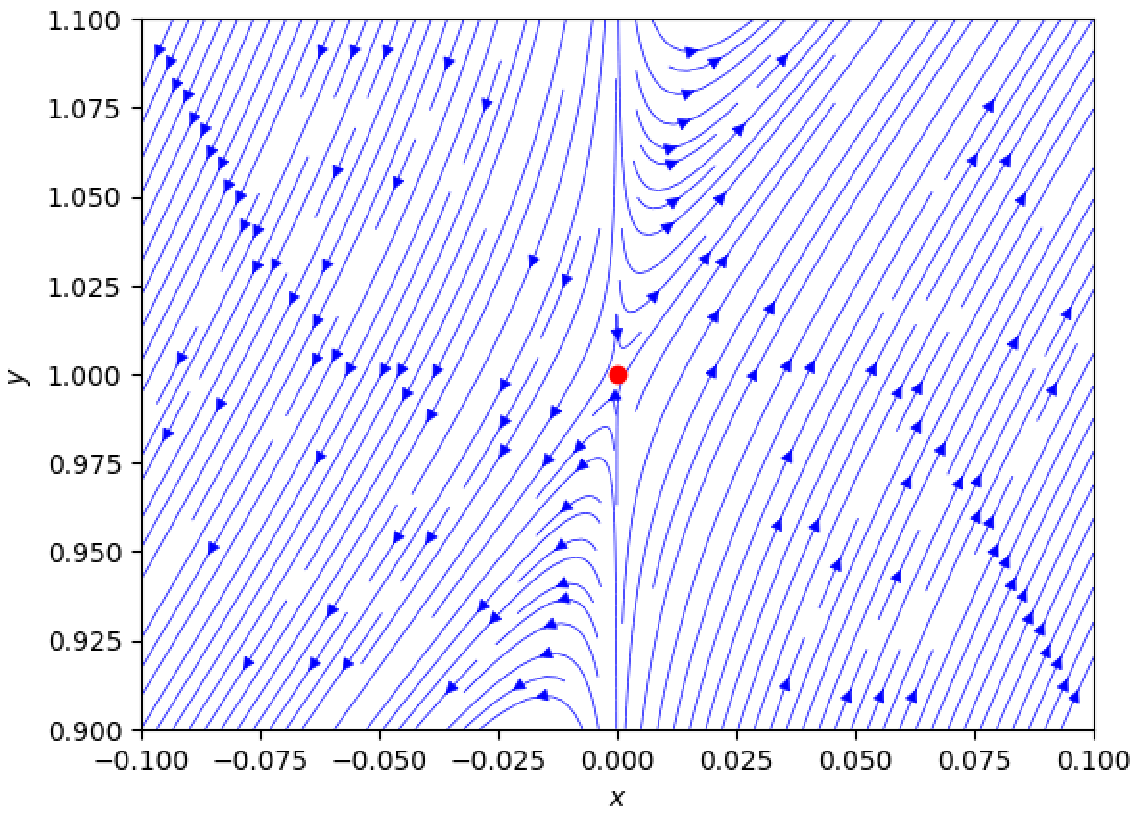

Рис. 2: Фазовый портрет точки (1,0)

3 Точка (1,0)

Для точки (1,0)

Вымирает 2-ая популяция

Значение матрицы J в точке $(1,0)$ составляет:
J $= \begin{bmatrix} -10 & 60 \\ 0 & 210 \end{bmatrix}$
Лямбда 1 = -10, Лямбда 2 = 210
Точка (1,0) - седло (неустойчивая)

$$\begin{cases} \dfrac{d\widetilde{X_1}}{d\widetilde{t}} = -10\widetilde{X_1} + 60\widetilde{X_2} \\ \dfrac{d\widetilde{X_2}}{d\widetilde{t}} = 230\widetilde{X_2} \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} \widetilde{X_1} \\ \widetilde{X_2} \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-10\widetilde{t}} + C_2 \begin{pmatrix} \frac{3}{11} \\ 1 \end{pmatrix} e^{210\widetilde{t}}$$

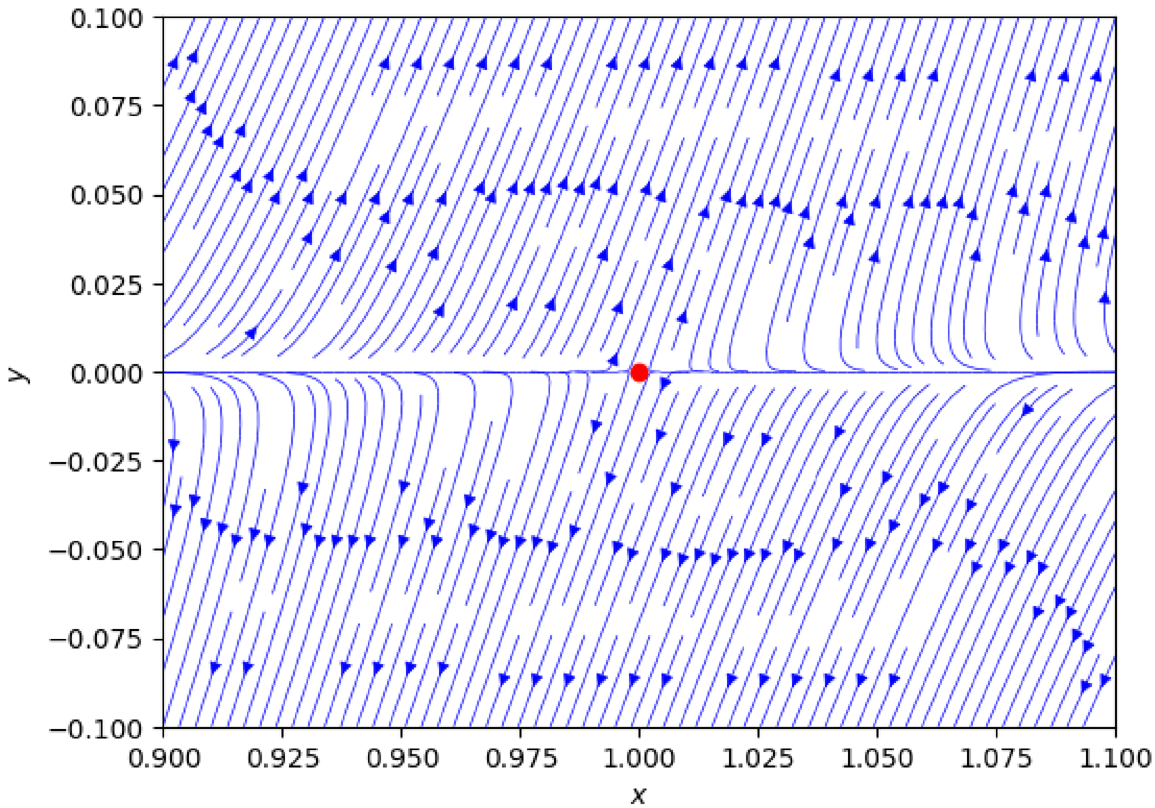

Рис. 3: Фазовый портрет точки (1,0)

4 Точка (-1/5,-1/5)

Точка $\left(-\frac{1}{5}, -\frac{1}{5}\right)$

Обе популяции выживают

J $= \begin{bmatrix} 2 & -12 \\ -36 & 42 \end{bmatrix}$

Лямбды $=$ 22 - $8\sqrt{13}; 22 + 8\sqrt{13}$

Следовательно характер точки $\left(-\frac{1}{5}, -\frac{1}{5}\right)$ **- седло, неустойчивое**

c) Решить численно задачу Коши с заданными начальными условиями, построить графики зависимостей $X_1(t)$, $X_2(t)$ до времен t порядка 10^4 (до $t = 10^2$, см. указание).

Решение:

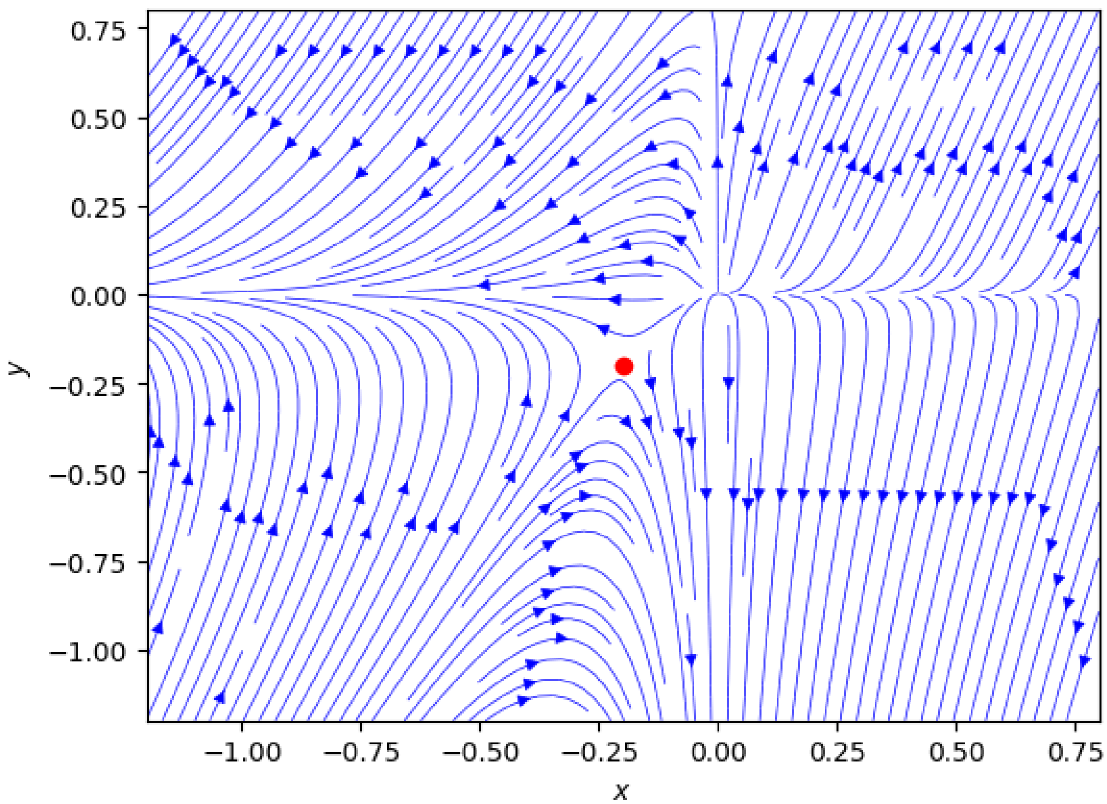

Рис. 4: Фазовый портрет точки (1/5,1/5)

5 Зависимость X1 и X2 от времени

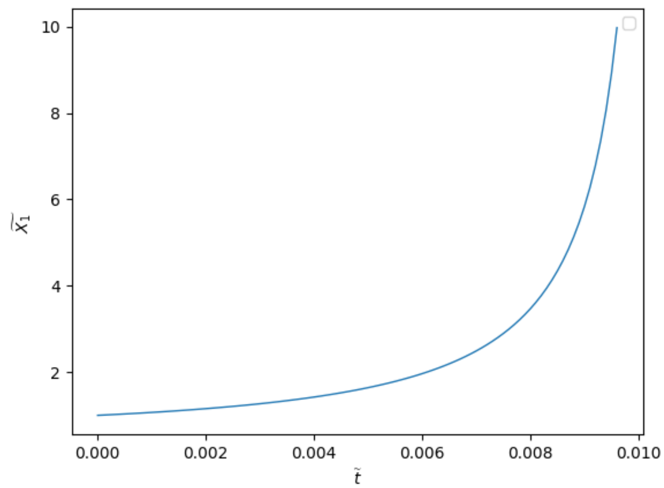

Рис. 5: Зависимость $\tilde{X}_1$ от t

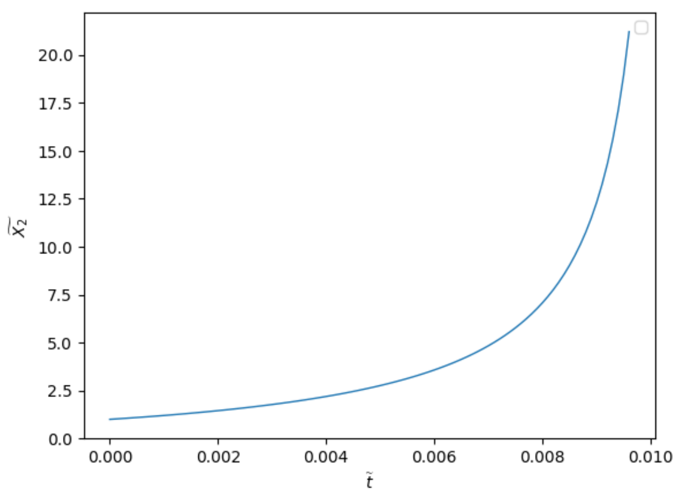

Рис. 6: Зависимость $\tilde{X}_2$ от t

6 Общий фазовый портрет

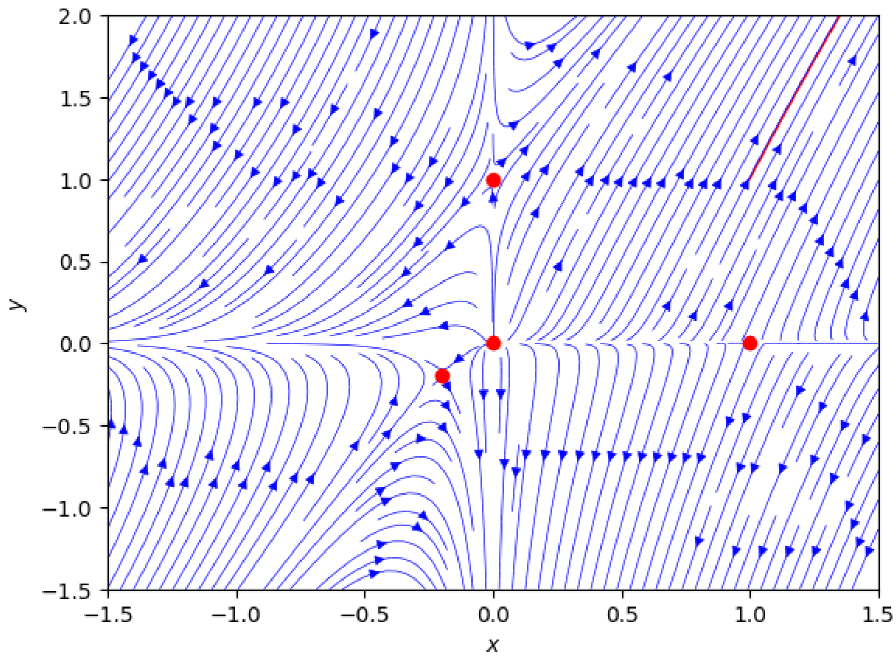

Рис. 7: Фазовый портрет