Правительство Российской Федерации

Федеральное государственное автономное
образовательное учреждение высшего
профессионального образования
Национальный исследовательский университет
"Высшая школа экономики"

ОТЧЁТ
По индивидуальному заданию
По курсу «Моделирование систем и процессов»

ФИО студента	Номер группы	Номер варианта
Индюченко Никита Андреевич	БПМ212	3.3

Москва 2024 г.

Условие задачи

Модель взаимодействия для двух сосуществующих популяций с численностями X_{1t}, X_{2t} и внутривидовым самоограничением численностей по логистическому типу.

$$\frac{dX_1}{dt} = a_1 X_1 \left(1 - \frac{b_1 X_2}{k_1}\right)$$
$$\frac{dX_2}{dt} = a_2 X_2 \left(1 - \frac{b_2 X_1}{k_2}\right)$$

где a_i, b_i, k_i $(i = 1, 2)$ - положительные параметры модели, заданные следующим образом:

$$a_1 = 1{\times}10^{-1}, \quad a_2 = 3{\times}10^{-1}, \quad b_1 = 3{\times}10^{-4}, \quad b_2 = 3{\times}10^{-4}, \quad k_1 = 2{\times}10^{4}, \quad k_2 = 2{\times}10^{4}$$

Начальные условия:

$$X_1(0) = 2 \times 10^4,$$
$$X_2(0) = 2 \times 10^4.$$

Указание

Прежде, чем исследовать заданные модели аналитически и численно, привести уравнения системы к безразмерному и масштабированному виду с помощью замен:

$$t = T_0 \tilde{t},$$
$$a_j = \frac{1}{T_0} \tilde{a}_j,$$
$$T_0 = 10^2 \quad \text{(в единицах времени)}.$$

для 3-ей модели

$$\begin{cases} X_1 & = X_1(0) \left(\tilde{X}_1\right) \\ X_2 & = X_2(0) \left(\tilde{X}_2\right) \end{cases}$$

При такой замене коэффициенты в новой системе становятся безразмерными:

Для 3-ей модели:

$$\tilde{b}_1 = b_1 * X_2(0)$$
$$\tilde{b}_2 = b_2 * X_1(0)$$
$$\tilde{k}_1 = k_1 / X_1(0)$$
$$\tilde{k}_2 = k_2 / X_2(0)$$

Задания по каждой из этих моделей:

а) Привести уравнения системы к безразмерному и масштабированному виду с помощью замен:

Решение:

Для параметров:

$$\tilde{a}_1 = a_1 / T_0$$
$$\tilde{a}_1 = 10^{-1} / 10^2 = 10^{-3}$$

$$\tilde{a}_2 = a_2 / T_0$$
$$\tilde{a}_2 = 3 * 10^{-1} / 10^2 = 3 * 10^{-3}$$

$$\tilde{b}_1 = b_1 * X_2(0)$$
$$\tilde{b}_1 = 3 * 10^{-4} * 2 * 10^4 = 6$$

$$\tilde{b}_2 = b_2 * X_1(0)$$
$$\tilde{b}_2 = 3 * 10^{-4} * 2 * 10^4 = 6$$

$$\tilde{k}_1 = k_1 / X_1(0)$$
$$\tilde{k}_1 = 2 * 10^{-4} / (2 * 10^4) = 10^{-8}$$

$$\tilde{k}_2 = k_2 / X_2(0)$$
$$\tilde{k}_2 = 2 * 10^{-4} / (2 * 10^4) = 10^{-8}$$

$$\tilde{t} = t / T_0$$
$$\tilde{t} = t / 10^2$$

Для функций:

$$\tilde{X}_1 = X_1/X_1(0)$$
$$\tilde{X}_1 = X_1/(2*10^4)$$

$$\tilde{X}_2 = X_2/X_2(0)$$
$$\tilde{X}_2 = X_2/(2*10^4)$$

Выпишем теперь систему с новыми переменными

$$\frac{d\tilde{X}_1}{d\tilde{t}} = \tilde{a}_1\tilde{X}_1\left(1 - \frac{\tilde{b}_1\tilde{X}_2}{\tilde{k}_1}\right)$$
$$\frac{d\tilde{X}_2}{d\tilde{t}} = \tilde{a}_2\tilde{X}_2\left(1 - \frac{\tilde{b}_2\tilde{X}_1}{\tilde{k}_2}\right)$$

Подстановка

$$\frac{d\tilde{X}_1}{d\tilde{t}} = 10^{-3}\tilde{X}_1\left(1 - \frac{6\tilde{X}_2}{10^{-8}}\right)$$
$$\frac{d\tilde{X}_2}{d\tilde{t}} = 3 \times 10^{-3}\tilde{X}_2\left(1 - \frac{6\tilde{X}_1}{10^{-8}}\right)$$

b) Исследовать полученную систему ОДУ аналитически: точки покоя, их тип/устойчивость по первому приближению; вблизи каждой их точек покоя: общее решение линеаризованной системы вблизи этой точки, фазовый портрет;

Решение:

Точки равновесия можно найти, приравняв правые части уравнений к нулю:

$$\begin{cases} \frac{d\tilde{X}_1}{dt} = 0 \\ \frac{d\tilde{X}_2}{dt} = 0 \end{cases}$$

Это приводит к системе уравнений:

$$\begin{cases} X_1\left(1 - \frac{6X_2}{10^{-8}}\right) = 0 \\ X_2\left(1 - \frac{6X_1}{10^{-8}}\right) = 0 \end{cases}$$

Точки покоя:

1. $(0, 0)$
2. $\left(\frac{10^{-8}}{6}, 0\right)$
3. $(0, \frac{10^{-8}}{6})$
4. $\left(\frac{10^{-8}}{6}, \frac{10^{-8}}{6}\right)$

Вычислим якобиан:

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial \tilde{X}_1}\left(10^{-3}\tilde{X}_1\left(1 - \frac{6\tilde{X}_2}{10^{-8}}\right)\right) & \frac{\partial}{\partial \tilde{X}_2}\left(10^{-3}\tilde{X}_1\left(1 - \frac{6\tilde{X}_2}{10^{-8}}\right)\right) \\ \frac{\partial}{\partial \tilde{X}_1}\left(3 \times 10^{-3}\tilde{X}_2\left(1 - \frac{6\tilde{X}_1}{10^{-8}}\right)\right) & \frac{\partial}{\partial \tilde{X}_2}\left(3 \times 10^{-3}\tilde{X}_2\left(1 - \frac{6\tilde{X}_1}{10^{-8}}\right)\right) \end{pmatrix}$$

$$J = \begin{pmatrix} 10^{-3}\left(1 - \frac{6 \cdot 0}{10^{-8}}\right) & -10^{-3} \cdot \frac{6 \cdot 10^{-8}}{10^{-8}} \\ -3 \times 10^{-3} \cdot \frac{6 \cdot 10^{-8}}{10^{-8}} & 3 \times 10^{-3}\left(1 - \frac{6 \cdot 0}{10^{-8}}\right) \end{pmatrix}$$

Для точки (0,0)

Полностью вымирают оба вида

Чтобы найти собственные значения для точки $(0, 0)$, мы должны решить характеристическое уравнение для матрицы якобиана J в этой точке. Характеристическое уравнение имеет вид:

$$\det(J - \lambda I) = 0$$

где λ - собственное значение, J - матрица якобиана, а I - единичная матрица.

Для точки $(0, 0)$ матрица якобиана:

$$J = \begin{pmatrix} 10^{-3} & 0 \\ 0 & 3 \times 10^{-3} \end{pmatrix}$$

Подставим J в характеристическое уравнение и решим его:

$$\det\left(\begin{pmatrix} 10^{-3} & 0 \\ 0 & 3 \times 10^{-3} \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = 0$$

$$\det\begin{pmatrix} 10^{-3} - \lambda & 0 \\ 0 & 3 \times 10^{-3} - \lambda \end{pmatrix} = 0$$

$$(10^{-3} - \lambda)(3 \times 10^{-3} - \lambda) = 0$$

Теперь решим это квадратное уравнение:

$$\lambda^2 - (10^{-3} + 3 \times 10^{-3})\lambda + 10^{-3} \times 3 \times 10^{-3} = 0$$

$$\lambda^2 - 4 \times 10^{-3}\lambda + 3 \times 10^{-6} = 0$$

Теперь используем формулу дискриминанта $D = b^2 - 4ac$:

$$D = (-4 \times 10^{-3})^2 - 4 \times 3 \times 10^{-6}$$

$$D = 16 \times 10^{-6} - 12 \times 10^{-6}$$

$$D = 4 \times 10^{-6}$$

Теперь найдем собственные значения, используя формулу:

$$\lambda = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$$

$$\lambda = \frac{-(-4 \times 10^{-3}) \pm \sqrt{4 \times 10^{-6}}}{2}$$

$$\lambda = \frac{4 \times 10^{-3} \pm 2 \times 10^{-3}}{2}$$

$$\lambda_1 = \frac{4+2}{2} \times 10^{-3} = 3 \times 10^{-3}$$

$$\lambda_2 = \frac{4-2}{2} \times 10^{-3} = 1 \times 10^{-3}$$

Таким образом, собственные значения для точки $(0,0)$ равны 3×10^{-3} и 1×10^{-3}.

Следовательно характер точки (0,0) - неустойчивый узел

Для вычисления якобиана для точки $\left(\frac{10^{-8}}{6}, 0\right)$ мы должны использовать значения переменных $\tilde{X}_1 = \frac{10^{-8}}{6}$ и $\tilde{X}_2 = 0$, а затем вычислить соответствующие частные производные. После этого мы найдем собственные значения.

Вымирает 2-ая популяция

Якобиан системы в точке $\left(\frac{10^{-8}}{6}, 0\right)$:

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial \tilde{X}_1} & \frac{\partial f_1}{\partial \tilde{X}_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial \tilde{X}_1} & \frac{\partial f_2}{\partial \tilde{X}_2} \end{pmatrix}$$

где $f_1(\tilde{X}_1, \tilde{X}_2) = 10^{-3}\tilde{X}_1\left(1 - \frac{6\tilde{X}_2}{10^{-8}}\right)$ и $f_2(\tilde{X}_1, \tilde{X}_2) = 3 \times 10^{-3}\tilde{X}_2\left(1 - \frac{6\tilde{X}_1}{10^{-8}}\right)$.

Подставляя координаты особой точки $\left(\frac{10^{-8}}{6}, 0\right)$:

$$J = \begin{pmatrix} 10^{-3} & 0 \\ 0 & 3 \times 10^{-3} \end{pmatrix}$$

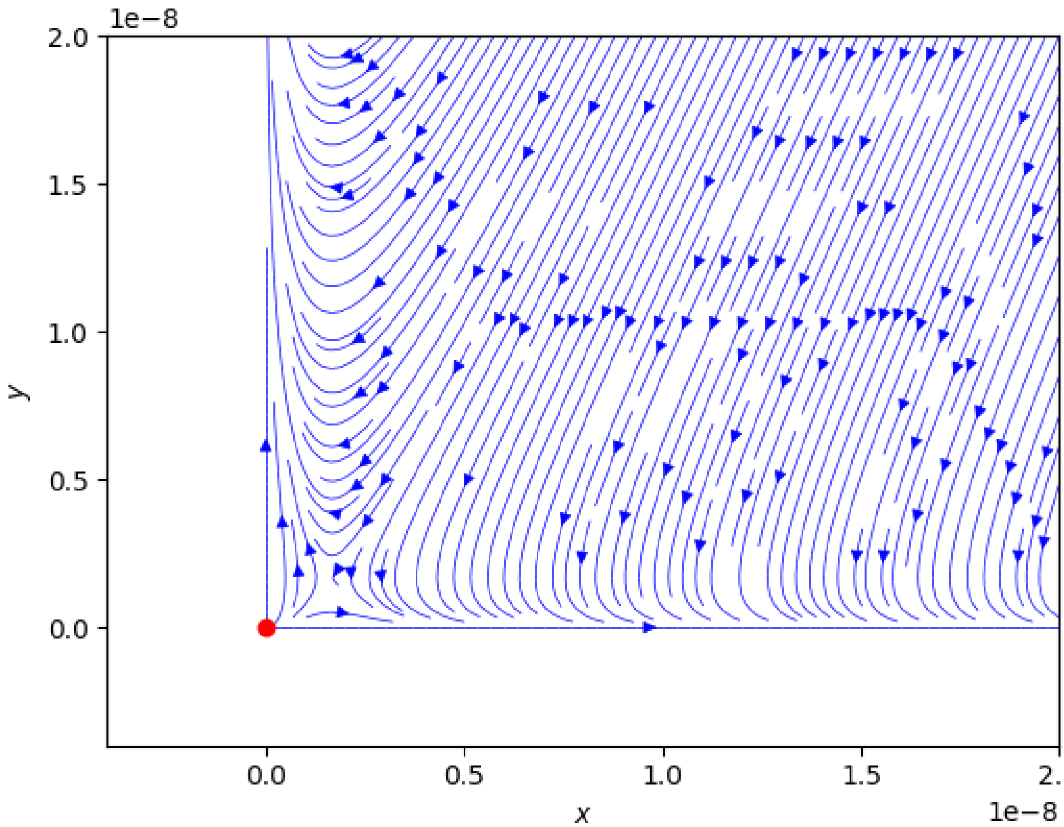

Рис. 1: Фазовый портрет точки (0,0)

Собственные значения найдем из уравнения:

$$\begin{vmatrix} 10^{-3} - \lambda & 0 \\ 0 & 3 \times 10^{-3} - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

Вычислим определитель:

$$(10^{-3} - \lambda)(3 \times 10^{-3} - \lambda) = 0$$

Корни этого уравнения дают собственные значения:

$$\lambda_1 = 10^{-3} \quad \text{и} \quad \lambda_2 = 3 \times 10^{-3}$$

Следовательно - точка $\left(\frac{10^{-8}}{6}, 0\right)$ **- неустойчивый узел**

Точка $(0, \frac{10^{-8}}{6})$

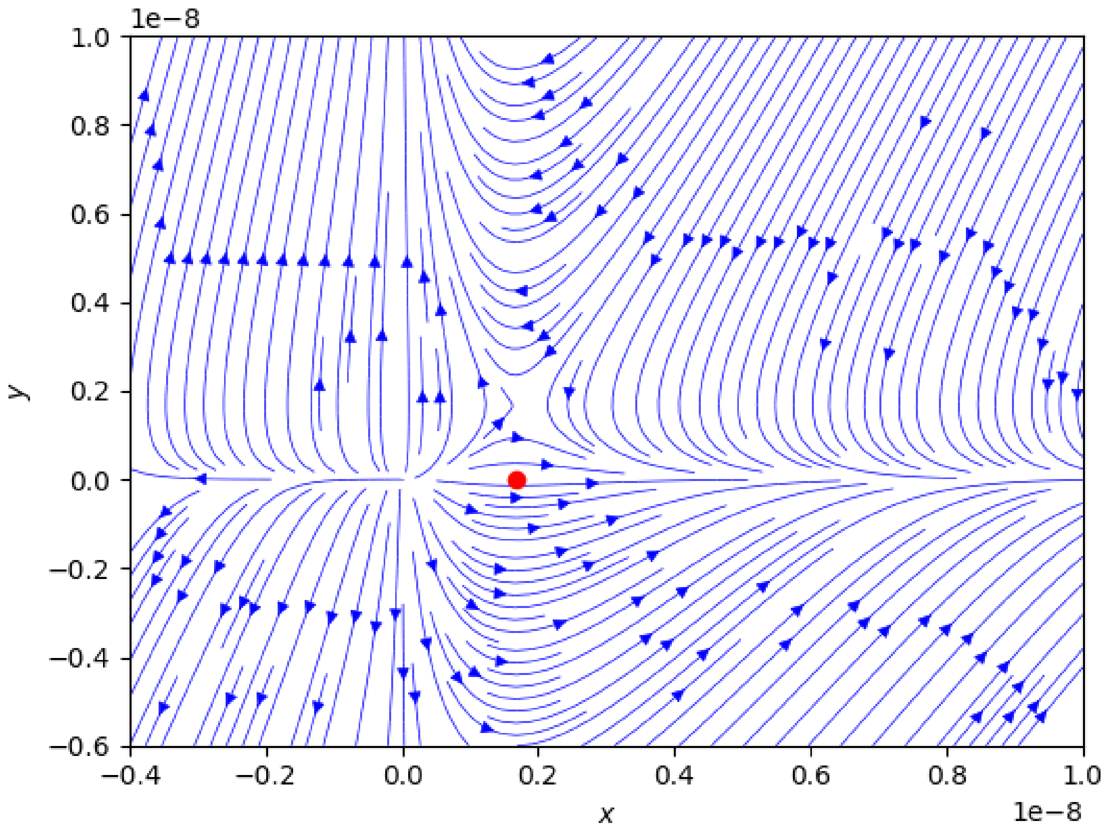

Рис. 2: Фазовый портрет точки $\left(\frac{10^{-8}}{6}, 0\right)$

Вымирает 1-ая популяция

Значения частных производных в точке $(0, \frac{10^{-8}}{6})$:

$$\frac{\partial f_1}{\partial \tilde{X}_1} = 10^{-3}\left(1 - \frac{6 \cdot \frac{10^{-8}}{6}}{10^{-8}}\right) = 10^{-3}\,(1-1) = 0$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial \tilde{X}_2} = -10^{-3} \cdot 10^{-8} \cdot 0 = 0$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial \tilde{X}_1} = -3 \times 10^{-3} \cdot 10^{-8} \cdot \frac{10^{-8}}{6} = -\frac{1}{2}$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial \tilde{X}_2} = 3 \times 10^{-3}\left(1 - \frac{6 \cdot 0}{10^{-8}}\right) = 3 \times 10^{-3}$$

Теперь составим матрицу Якоби:

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 3 \times 10^{-3} \end{pmatrix}$$

Характеристическое уравнение:

$$\det(J - \lambda I) = 0$$

$$\det \begin{pmatrix} -\lambda & 0 \\ -\frac{1}{2} & 3 \times 10^{-3} - \lambda \end{pmatrix} = 0$$

$$\lambda(-\lambda) - 0 \times (-\frac{1}{2}) = 0$$

$$\lambda^2 - 3 \times 10^{-3}\lambda = 0$$

$$\lambda(\lambda - 3 \times 10^{-3}) = 0$$

Отсюда получаем два собственных значения:

$$\lambda_1 = 0$$

$$\lambda_2 = 3 \times 10^{-3}$$

Так как оба собственных значения имеют положительные действительные части, особая точка $(0, \frac{10^{-8}}{6})$ является неустойчивым узлом.

Точка $(\frac{10^8}{6}, \frac{10^8}{6})$

Обе популяции выживают

Вычислим частные производные и подставим значения из точки $\left(\frac{10^8}{6}, \frac{10^8}{6}\right)$:

$$\frac{\partial f_1}{\partial \tilde{X}_1} = 0$$
$$\frac{\partial f_1}{\partial \tilde{X}_2} = -6 \times 10^{-3}$$
$$\frac{\partial f_2}{\partial \tilde{X}_1} = -18 \times 10^{-3}$$
$$\frac{\partial f_2}{\partial \tilde{X}_2} = 0$$

Составляем матрицу Якоби:

$$J = \begin{pmatrix} 0 & -6 \times 10^{-3} \\ -18 \times 10^{-3} & 0 \end{pmatrix}$$

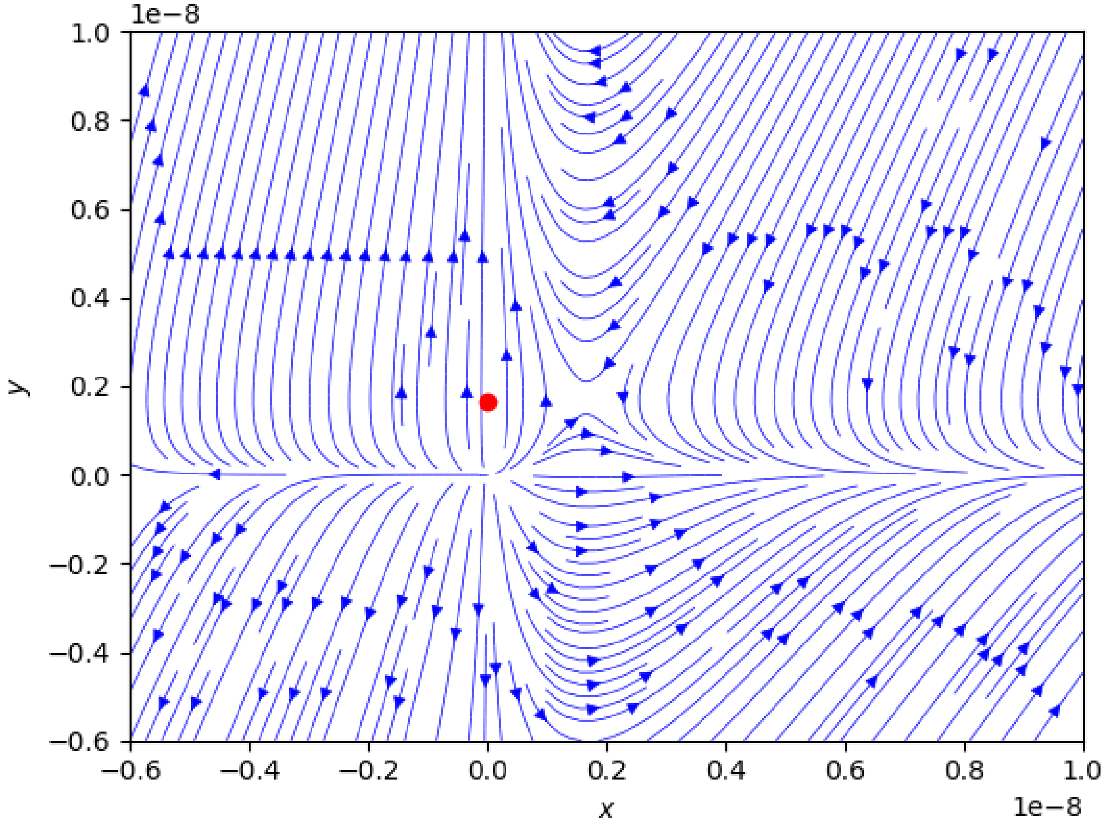

Рис. 3: Фазовый портрет точки $(0, \frac{10^{-8}}{6})$

Характеристическое уравнение:

$$\det(J - \lambda I) = 0$$

$$\begin{vmatrix} -\lambda & -6 \times 10^{-3} \\ -18 \times 10^{-3} & -\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$(-\lambda)(-\lambda) - (-6 \times 10^{-3})(-18 \times 10^{-3}) = 0$$

$$\lambda^2 - 108 \times 10^{-6} = 0$$

Решая это квадратное уравнение, мы получаем:

$$\lambda^2 = 108 \times 10^{-6}$$

$$\lambda = \pm\sqrt{108 \times 10^{-6}}$$

$$\lambda = \pm\sqrt{108} \times 10^{-3}$$

.

Следовательно характер точки $\left(\frac{10^8}{6}, \frac{10^8}{6}\right)$ - седло - неустойчивая

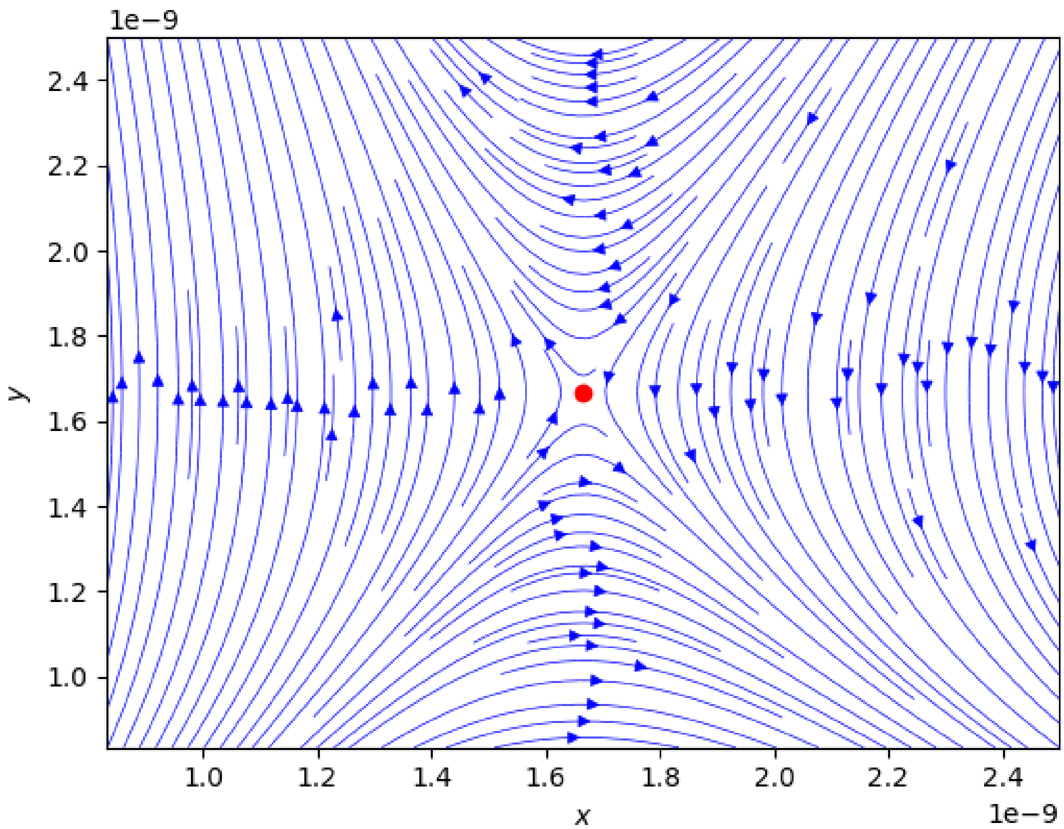

Рис. 4: Фазовый портрет точки $(\frac{10^{-8}}{6}, \frac{10^{-8}}{6})$