Coqによる三角形三色問題の証明

橋本 翔太

木村大輔 研究室

2022年2月17日(木)

2021年度情報科学専攻 修士1年中間発表会

研究の背景

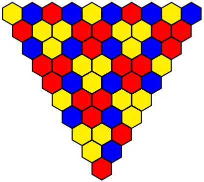
Coq

- 人間と対話的に証明を完成させることのできる定理証明支援系

三角形三色問題

- 規則に従って塗り分けられた三角形に配置されたマスに関する問題
- 『数学セミナー』にて出題（証明済）

色塗り規則



色の塗られた三角形

研究の背景

Coq

人間と対話的に証明を完成させることのできる定理証明支援系

Coq の利点

- 証明の受け渡しが容易
- 機械的操作のミスを排除
- 場合分けの漏れの防止
- 簡単な主張は自動証明

```
Variable A X Y Z : P.
Hypothesis Ind : (~A → ⊥) → A.

Lemma syllogism :
 (X → Y) ∧ (Y → Z) → (X → Z).
Proof.
  move=> [XtoY_is_true YtoZ_is_true X_is_true].
  apply: YtoZ_is_true.
  by exact: XtoY_is_true.
Qed.
```

Coq の表示画面

研究の背景

調和性

3 つのマスに塗られている色がすべて同じか相異なるとき，この 3 マスは調和しているという.

調和性を満たす　　調和性を満たさない

調和彩色三角形

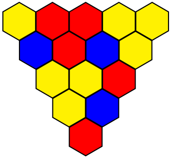
3 つの端点のマスに塗られている色が調和性を満たしている三色三角形を調和彩色三角形 (Well-Colored Triangle) という.

研究の背景

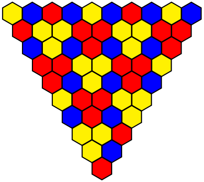
三角形三色問題（数学セミナー）

最上段のマスのどのような塗り方に対しても調和彩色三角形になる段数 n を求めよ．

［解答］ $n = 3^k$ のとき（証明済）



段数 $n = 4$
調和彩色三角形でない



段数 $n = 9$
調和彩色三角形である

研究の概要

研究の成果

`n > 0 ⇒ (∃k, n = 3^k) ⇔ WellColoredTriangle x n` を Coq で証明した.

問題であった点

- 幾何的な問題をどのようにして形式化するか
- 暗黙のうちに仮定されてしまっていることを見落としやすい

[解決法・工夫点]

- 三角形三色問題の暗黙の前提を明確化
- 幾何的な状況を関数を用いて論理式で表現

定義

集合 Color

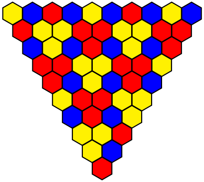
マスに塗る色の集合 Color の定義を以下で与える：

```
Inductive Color : Set := red |yel |blu.
```

彩色関数 colfun

`nat -> nat -> Color` を型にもつ関数

`colfun x y` は左から x 番目，上から y 段目のマスに塗る色を表す．



左の調和彩色三角形において，

- `colfun 0 0 = yel`
- `colfun 9 0 = blu`
- `colfun 0 9 = red`

定義とその性質

関数 mix

関数 mix の定義を以下で与える：

```
Definition mix c0 c1 :=
match c0, c1 with
| red, red => red
| red, yel => blu
| red, blu => yel
| yel, red => blu
| yel, yel => yel
| yel, blu => red
| blu, red => yel
| blu, yel => red
| blu, blu => blu
end.
```

定義

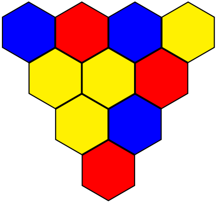
述語 CFun，Triangle，WellColoredTriangle

述語 CFun，Triangle，WellColoredTriangle の定義を以下で与える：

```
Definition CFun colfun :=
  ∀ x y, colfun x y.+1 = mix (colfun x y) (colfun x.+1 y)
Definition Triangle colfun x y n :=
  colfun x (y + n) = mix (colfun x y) (colfun (x + n) y)
Definition WellColoredTriangle x n :=
  ∀ colfun, CFun colfun → Triangle colfun x 0 n
```

上記の述語は以下を表している：

- CFun・・・互いに隣接する 3 マスは調和性を満たす.
- Triangle・・・3 つの端点のマスが調和性を満たす.
- WellColoredTriangle・・・調和彩色三角形である.



証明の方針

目標

`n > 0` ⇒ `(∃k, n = 3^k)` ⇔ `WellColoredTriangle x n`

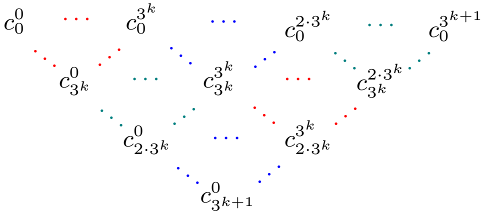
- 十分条件（帰納法）
  - `CFun colfun` ⇒ `Triangle colfun x y (3^k)`

- 必要条件（対偶法）
  - `~odd n` ⇒ `~WellColoredTriangle x n`
  - `3^k < n` ≤ `(3^k).*2` ⇒ `odd n` ⇒ `~WellColoredTriangle x n`
  - `(3^k).*2.+1` ≤ `n < 3^k.+1` ⇒ `~WellColoredTriangle x n`

十分条件の証明

十分条件

`CFun colfun ⇒ Triangle colfun x y (3^k)`



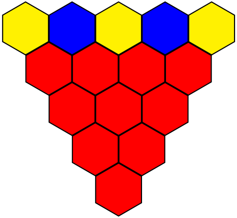
k に関する数学的帰納法を用いて証明する.

1. 帰納法の仮定より 3^k 段の三色三角形は調和彩色三角形.
2. 最上段の 4 色 $c_0^0, c_0^{3^k}, c_0^{2\cdot 3^k}, c_0^{3^{k+1}}$ と mix を用いて最下段の色が得られる.
3. mix の性質より，最上段の 2 色 $c_0^0, c_0^{3^{k+1}}$ を用いて最下段の色が得られる.
4. 3^{k+1} 段も調和彩色三角形であることが示せた.

必要条件の証明

必要条件（ n が偶数のとき ）

`~odd n` $\Rightarrow$ `~WellColoredTriangle x n`



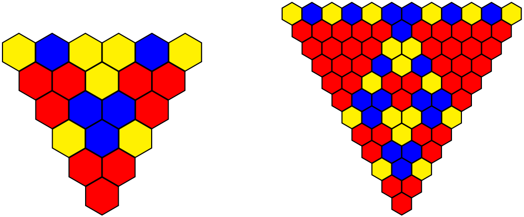
$n = 4$ のとき

1. 最上段の両端のマスからそれぞれ黄，青の順で対称的に交互に塗る．
2. 1 段下において，マスはすべて赤で塗られる．
3. 最下段のマスは赤が塗られているので矛盾．

必要条件の証明

必要条件（ n が奇数 かつ $3^k < n \leq 3^k \cdot 2$ のとき）

```
3^k < n ≤ (3^k).*2 ⇒ odd n ⇒ ~WellColoredTriangle x n
```



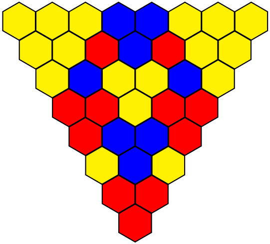
$n = 5$ $(k = 1)$ のとき　　$n = 11$ $(k = 2)$ のとき

1. 最上段の両端のマスからそれぞれ黄，青の順で対称的に交互に塗る.
2. 3^k 段下において，外側から黄，青の順で対称的に交互に塗られる.
3. さらに，1 段（最上段から $3^k + 1$ 段）下において，マスはすべて赤で塗られる.
4. 最下段のマスは赤が塗られているので矛盾.

必要条件の証明

必要条件（ n が奇数 かつ $3^k \cdot 2+1 \leq n < 3^{k+1}$ のとき）

`(3^k).*2.+1` $\leq$ `n < 3^k.+1` $\Rightarrow$ `~WellColoredTriangle x n`



$n = 7$ $(k = 1)$ のとき

1. 最上段の両端のマスからそれぞれ 3^k マス内を黄，その他を青で対称的に塗る．
2. 3^k 段下において，外側から $n - 2 \cdot 3^k + 1$ マスはすべて赤で塗られる．
3. さらに，3^k 段（最上段から $2 \cdot 3^k$ 段）下において，マスはすべて赤で塗られる．
4. 最下段のマスは赤が塗られているので矛盾．

研究のまとめ

研究の成果

`n > 0 ⇒ (∃k, n = 3^k) ⇔ WellColoredTriangle x n` を Coq で証明した.

問題であった点

- 幾何的な問題をどのようにして形式化するか
- 暗黙のうちに仮定されてしまっていることを見落としやすい

［解決法・工夫点］

- 三角形三色問題の暗黙の前提を明確化
- 幾何的な状況を関数を用いて論理式で表現

中間発表のまとめ

2021 年 4 月現在

- 卒業論文（学部）
- 三角形三色問題の十分条件のみを形式化
- コード数は約 380 行

2021 年 2 月現在

- 日本ソフトウェア科学会第 38 回にて発表
- 『Coq による三角形三色問題』として論文を投稿中
- Coq を用いて三角形三色問題の必要十分条件を形式化
- Coq の拡張ライブラリ（SSReflect）を用いてコードを改良
- コード数は約 360 行

参考文献

- “The Coq Proof Assistant”, https://coq.inria.fr/.
- “The SSReflect proof language”, https://coq.inria.fr/refman/proof-engine/ssreflect-proof-language.html.
- 萩原学, アフェルド・レナルド, “Coq/SSReflect/MathComp による定理証明”, 森北出版, 2018.
- 西山豊, “エレガントな解答をもとむ 出題 2”, 数学セミナー, 4 月号, pp.87–91, 2013.
- 西山豊, “数学を楽しむ/三角形三色問題”, 現代数学, Vol.47, No.10, pp.36–41, 2014.
- Y. Nishiyama, “THE THREE-COLOR TRIANGLE PROBLEM”, International Journal of Pure and Applied Mathematics, Vol.85, No.1, pp.69–81, 2013.