Coqによる三角形三色問題の証明

橋本 翔太　木村 大輔

東邦大学大学院理学研究科

2021年9月1日

日本ソフトウェア科学会第38回大会

研究の背景

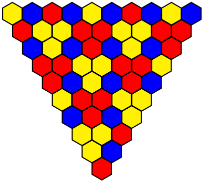
Coq

- 人間と対話的に証明を完成させることのできる定理証明支援系

三角形三色問題

- 規則に従って塗り分けられた三角形に配置されたマスに関する問題
- 『数学セミナー』にて出題（証明済）

色塗り規則



色の塗られた三角形

研究の背景

調和性

3つのマスに塗られている色がすべて同じか相異なるとき，この3マスは調和しているという．

調和性を満たす　　調和性を満たさない

調和彩色三角形

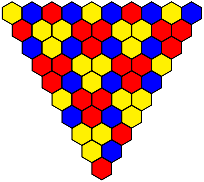
3つの端点のマスに塗られている色が調和性を満たしている三色三角形を調和彩色三角形 (*Well-Colored Triangle*) という．

研究の背景

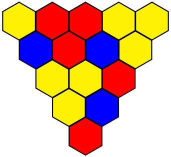
三角形三色問題（数学セミナー）

最上段のマスのどのような塗り方に対しても調和彩色三角形になる段数 n を求めよ.

［解答］$n = 3^k$ のとき（証明済）



段数 $n = 9$



段数 $n = 4$

研究の概要

研究の成果

$\forall k, n, x, y \in \mathbb{N}, n > 0 \Rightarrow$
$(n = 3^k \Leftrightarrow \forall c_0, c_1, c_2 \in \mathit{Color}, \mathit{WellColoredTriangle}(x, y, n, c_0, c_1, c_2))$
を Coq で証明した.

問題であった点

- 幾何的な問題をどのようにして形式化するか
- 暗黙のうちに仮定されてしまっていることを見落としやすい

［解決法・工夫点］

- 三角形三色問題の暗黙の前提を明確化し，幾何的な状況を論理式で表現することで公理化した.

定義

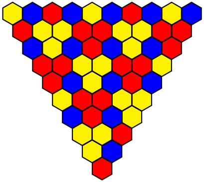
Color

マスに塗る色の集合を次のように定義する.

$$\mathit{Color} \stackrel{def}{=} \{\mathit{red}, \mathit{yel}, \mathit{blu}\}$$

$\mathit{Cpos}(x, y, c)$

左から x 番目，上から y 段目のマスに塗られている色が c である.



左の調和彩色三角形において，

- $\mathit{Cpos}(0, 0, \mathit{yel})$
- $\mathit{Cpos}(9, 0, \mathit{blu})$
- $\mathit{Cpos}(0, 9, \mathit{red})$

定義とその性質

$\textit{mix}(c_0, c_1)$

$\textit{mix} : (\textit{Color} \times \textit{Color}) \to Color$ を以下で定義.

$$
\begin{array}{ccc}
(\textit{red}, \textit{red}) \mapsto \textit{red}, & (\textit{red}, \textit{yel}) \mapsto \textit{blu}, & (\textit{red}, \textit{blu}) \mapsto \textit{yel}, \\
(\textit{yel}, \textit{red}) \mapsto \textit{blu}, & (\textit{yel}, \textit{yel}) \mapsto \textit{yel}, & (\textit{yel}, \textit{blu}) \mapsto \textit{red}, \\
(\textit{blu}, \textit{red}) \mapsto \textit{yel}, & (\textit{blu}, \textit{yel}) \mapsto \textit{red}, & (\textit{blu}, \textit{blu}) \mapsto \textit{blu}.
\end{array}
$$

mixCut（*mix* の性質）

$\forall c_0, c_1, c_2, c_3 \in Color,$
$\textit{mix}(\textit{mix}(\textit{mix}(c_0, c_1), \textit{mix}(c_1, c_2)), \textit{mix}(\textit{mix}(c_1 c_2),\ \textit{mix}(c_2, c_3))) = \textit{mix}(c_0, c_3).$

（左辺） — $\textit{mix}(\textit{mix}(c_0, c_1), \textit{mix}(c_1, c_2))$ — $\textit{mix}(c_0, c_1)$ — c_0

$\textit{mix}(c_1, c_2)$ — c_1

$\textit{mix}(\textit{mix}(c_1, c_2), \textit{mix}(c_2, c_3)))$ — $\textit{mix}(c_1, c_2)$ — c_2

$\textit{mix}(c_2, c_3)$ — c_3

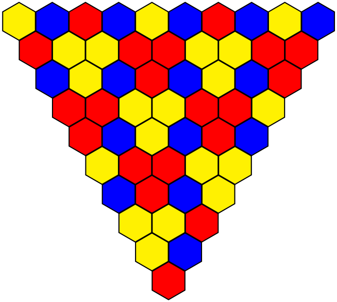
定義

WellColoredTriangle(x, y, n, c_0, c_1, c_2)

WellColoredTriangle$(x, y, n, c_0, c_1, c_2) \overset{def}{\Longleftrightarrow}$
$(\mathit{Cpos}(x, y, c_0) \wedge \mathit{Cpos}(x + n, y, c_1) \wedge \mathit{Cpos}(x, y + n, c_2)) \Rightarrow c_2 = \mathit{mix}(c_0, c_1)$.

c_y^x：左から x 個目，上から y 段目のマスに塗られている色

$c_0 = c_y^x$ $\qquad$ $c_1 = c_y^{x+n}$



$c_2 = c_{y+n}^x$

公理

C_exists

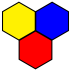
$\forall x, y \in \mathbb{N}, \exists c \in \textit{Color}, \textit{Cpos}(x, y, c).$

- すべてのマスには何かしらの色が塗られている.

C_mix

$\forall x, y \in \mathbb{N}, \forall .c \in \textit{Color},$
$(\textit{Cpos}(x, y, c_0) \wedge \textit{Cpos}(x+1, y, c_1) \wedge \textit{Cpos}(x, y+1, c_2)) \Rightarrow c_2 = \textit{mix}(c_0, c_1).$

- 色塗り規則に従って塗られている.

$\textit{Cpos}(x, y, c_0)$  $\textit{Cpos}(x+1, y, c_1)$

$\textit{Cpos}(x, y+1, c_2)$

公理

C_uniq

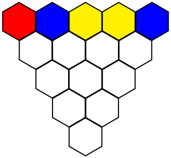
$\forall x, y \in \mathbb{N}, \forall c_0, c_1 \in \mathit{Color},\ (\mathit{Cpos}(x, y, c_0) \wedge \mathit{Cpos}(x, y, c_1)) \Rightarrow c_0 = c_1.$

- 1 つのマスに塗れる色は 1 色までである．

C_paint

$\forall x, y, i \in \mathbb{N}, \forall f : \mathbb{N} \to Color, Cpos(x + i, y, f(x + i)).$

- 最上段のマスは好きな塗り方ができる．



証明の方針

目標

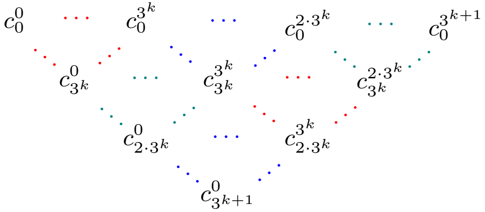
$\forall k, n, x, y \in \mathbb{N}, n > 0 \Rightarrow$
$(n = 3^k \Leftrightarrow \forall c_0, c_1, c_2 \in \mathit{Color}, \mathit{WellColoredTriangle}(x, y, n, c_0, c_1, c_2))$

- 十分条件
  - $n = 3^k \Rightarrow \mathit{WellColoredTriangle}(x, y, n, c_0, c_1, c_2)$
- 必要条件（対偶を場合分けして示す）
  - $Even(n) \Rightarrow$
    $\neg(\forall c \in Color, \forall f : \mathbb{N} \to Color, WCT(x, y, n, f(x), f(x+n), c))$
  - $(Odd(n) \wedge 3^k < n \leq 3^k \cdot 2) \Rightarrow$
    $\neg(\forall c \in Color, \forall f : \mathbb{N} \to Color, WCT(x, y, n, f(x), f(x+n), c))$
  - $(Odd(n) \wedge 3^k \cdot 2 + 1 \leq n < 3^{k+1}) \Rightarrow$
    $\neg(\forall c \in Color, \forall f : \mathbb{N} \to Color, WCT(x, y, n, f(x), f(x+n), c))$

十分条件の証明

十分条件

$n = 3^k \Rightarrow \mathit{WellColoredTriangle}(x, y, n, c_0, c_1, c_2)$



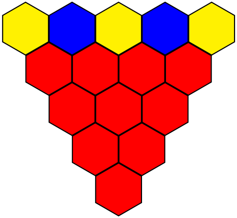
k に関する数学的帰納法を用いて証明する.

1. 帰納法の仮定より 3^k 段の三色三角形は調和彩色三角形.
2. 最上段の 4 色 $c_0^0, c_0^{3^k}, c_0^{2\cdot 3^k}, c_0^{3^{k+1}}$ と mix を用いて最下段の色が得られる.
3. mix の性質より, 最上段の 2 色 $c_0^0, c_0^{3^{k+1}}$ を用いて最下段の色が得られる.
4. 3^{k+1} 段も調和彩色三角形であることが示せた.

必要条件の証明

必要条件（ n が偶数のとき ）

$Even(n) \Rightarrow$
$\neg(\forall c \in Color, \forall f : \mathbb{N} \to Color, WCT(x, y, n, f(x), f(x+n), c))$



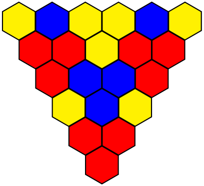
$n = 4$ のとき

1. 最上段の両端のマスからそれぞれ黄，青の順で対称的に交互に塗る．
2. 1 段下において，マスはすべて赤で塗られる．
3. 最下段のマスは赤が塗られているので矛盾．

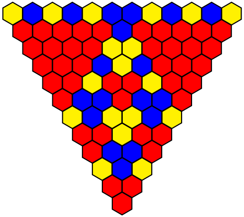
必要条件の証明

必要条件（ n が奇数 かつ $3^k < n \leq 3^k \cdot 2$ のとき）

$(Odd(n) \wedge 3^k < n \leq 3^k \cdot 2) \Rightarrow$
$\neg(\forall c \in Color, \forall f : \mathbb{N} \rightarrow Color, WCT(x, y, n, f(x), f(x+n), c))$



$n = 5$ $(k = 1)$ のとき



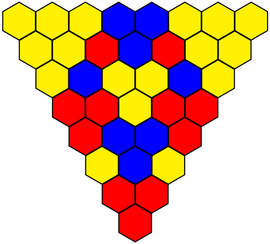
$n = 11$ $(k = 2)$ のとき

1. 最上段の両端のマスからそれぞれ黄，青の順で対称的に交互に塗る．
2. 3^k 段下において，外側から黄，青の順で対称的に交互に塗られる．
3. さらに，1 段（最上段から $3^k + 1$ 段）下において，マスはすべて赤で塗られる．
4. 最下段のマスは赤が塗られているので矛盾．

必要条件の証明

必要条件（ n が奇数 かつ $3^k \cdot 2 + 1 \leq n < 3^{k+1}$ のとき）

$(Odd(n) \land 3^k \cdot 2 + 1 \leq n < 3^{k+1}) \Rightarrow$
$\neg(\forall c \in Color, \forall f : \mathbb{N} \to Color, WCT(x, y, n, f(x), f(x+n), c))$



$n = 7$ $(k = 1)$ のとき

1. 最上段の両端のマスからそれぞれ 3^k マス内を黄，その他を青で対称的に塗る.
2. 3^k 段下において，外側から $n - 2 \cdot 3^k + 1$ マスはすべて赤で塗られる.
3. さらに，3^k 段（最上段から $2 \cdot 3^k$ 段）下において，マスはすべて赤で塗られる.
4. 最下段のマスは赤が塗られているので矛盾.

研究のまとめ

研究の成果

$\forall k, n, x, y \in \mathbb{N}, n > 0 \Rightarrow$
$(n = 3^k \Leftrightarrow \forall c_0, c_1, c_2 \in \mathit{Color}, \mathit{WellColoredTriangle}(x, y, n, c_0, c_1, c_2))$
を Coq で証明した.

問題であった点

- 幾何的な問題をどのようにして形式化するか
- 暗黙のうちに仮定されてしまっていることを見落としやすい

［解決法・工夫点］

- 三角形三色問題の暗黙の前提を明確化し，幾何的な状況を論理式で表現することで公理化した.

参考文献

- "The Coq Proof Assistant", https://coq.inria.fr/.
- "The SSReflect proof language", https://coq.inria.fr/refman/proof-engine/ssreflect-proof-language.html.
- 萩原学, アフェルド・レナルド, "Coq/SSReflect/MathComp による定理証明", 森北出版, 2018.
- 西山豊, "エレガントな解答をもとむ 出題 2", 数学セミナー, 4 月号, pp.87–91, 2013.
- 西山豊, "数学を楽しむ/三角形三色問題", 現代数学, Vol.47, No.10, pp.36–41, 2014.
- Y. Nishiyama, "THE THREE-COLOR TRIANGLE PROBLEM", International Journal of Pure and Applied Mathematics, Vol.85, No.1, pp.69–81, 2013.