Coq による三角形三色問題の証明

橋本 翔太　木村 大輔

Coq とは数学の証明作成を支援するプログラミング言語である．Coq と人間は対話的なやりとりをしながら証明作成をおこなうことで誤りを排除した信頼できる証明を得られる．三角形三色問題とは n 段の逆三角形に配置された六角形のマスに対して，隣り合う 2 マスとそれらに接する下の段のマスの色が 3 色とも同じか 3 色とも異なるように 3 色で塗り分けたとき，逆三角形の端点の 3 マスの色も 3 色とも同じか 3 色とも異なるような段数の一般項を求める問題である．この問題は雑誌「数学セミナー」の「エレガントな解答もとむ」欄に出題されており，一般項は 3^k 段の形で表せることが示されている．本研究では，数学セミナーでの証明を Coq で形式化して証明を完成させた． Coq に実装する際には，幾何的な直観に頼った側面のある元の議論を論理に基づいた形式的な証明に直すことができた．

1　はじめに

Coq [1] とは数学の定理や補題，主張の正しさを保証するためのソフトウェアの 1 つである．証明の作成中の各場面で示すべき主張（サブゴール）に対して人間がサブゴールを示すための次の一手を指示すると Coq は次のサブゴールを提示し，人間の次の一手を待つ．このような対話的なやりとりにより Coq は証明の完成の手助けをする．こういったソフトウェアを定理証明支援系と呼ぶ．証明の規模が大きくなると，複雑な場合分けの漏れがあったり計算ミスなど機械的操作のミスにより人間は誤った証明をしてしまうことがある．Coq の支援を受けることで，このような誤りが排除された信頼できる証明を得ることができる．また，Coq はプログラミング言語でもあるため，作成した証明の複製が容易である．Coq を用いて作成した証明ファイルを公開することで他の人がライブラリとして利用することができる．既に示された定理は保証済みのものとして，多くの人が各々の目的達成のために利用することができる．このように，公開された証明 1 つ 1 つがたとえ小さな証明であっても組み合わせることで規模の大きな証明の定理を示しやすくなる．

本研究では，Coq + SSReflect を用いて三角形三色問題の証明の形式化を完成させた．†1 SSReflect [2] [3] は「証明によるリーズニングよりも計算を積極的に用いた方が証明は簡略化される」(ポワンカレ原理) のポリシーに基づいて設計された Coq の拡張ライブラリである．簡単な同値変形で示すことができる命題論理や等式・不等式に関する主張の証明などは論理式として推論で示すよりもブール型の項と見なして変形した方が効率がよく，SSReflect はその機能を提供する．

三角形三色問題 [4] [5] [6] とは，次のような問題である：n 段の逆三角形に配置された正六角形のすべてのマスを異なる 3 色を用いて色分けをする．ただし，隣り合う 2 マスとそれらに接する下の段のマスの色は，どれも同じかどれも異なるように塗り分ける．このとき，逆三角形の段数が 3, 9, 27 段の場合 †2 は，

A formal proof for the three-colored triangle problem on Coq

Shota Hashimoto, 東邦大学大学院理学研究科, Toho University.

Daisuke Kimura, 東邦大学大学院理学研究科, Toho University.

†1 `https://github.com/SyotaHashimoto/ThreeColor` から完成させた Coq のコードをダウンロードすることができる．

†2 本稿では 0 段目, 1 段目, 2 段目,. . . と数える.「n 段の逆三角形」と書いた場合，一辺のマスの個数は $n+1$

規則に従ったどのような色の塗り方をしても逆三角形の端点の 3 マスの色はどれも同じかどれも異なるが，一般にはこのような性質は成り立たない．このような性質を満たす段数の一般項は何か？という問題である．この問題の解決方法は大きく分けて 3 つの方法が知られている．[4]

1. パスカルの三角形の値を mod 3 としたものをマスの色と対応させて使い，代数学での *Lucas* の定理と関係のある命題を示すことで解決する方法.
2. 逆三角形のマスの塗り方が n 個の独立パターンに分解できること利用して，重ね合わせの原理を用いることで解決する方法.
3. 比較的少ない段数で成立する段数を調べて段数の規則性 (数列) を見つけ出し，この数列から予測できる段数の一般項を推測する方法.

3 の方法において一般項が 3^k 段であると推測されており，推測された一般項の段数でないならば逆三角形の塗り方の規則に従わない反例が存在することも知られている.

本研究では 3. の方法で推測して得られた一般項が必要十分条件になっていることを Coq+SSReflect を用いて証明した．Coq に実装するにあたって，三角形三色問題は幾何的な側面を多くもつ問題であるためこのままでは Coq にコードとして実装することができない．そこで，三角形のマスの状況を表現する論理式を用意し，色塗り規則を公理化することで三角形三色問題の状況を形式化した．また，十分条件の証明の方法としては一般項に現れる自然数 k に関する数学的帰納法を用いて証明した．一方で，必要条件は対偶法と n について場合分けをすることで証明した.

本論文は第 2 章では三角形三色問題の証明の概要について述べる．第 3 章では三角形三色問題の証明を Coq に実装するために必要な準備について述べる．第 4 章では実際に Coq に実装した三角形三色問題の証明について述べる．第 5 章ではまとめを述べる．

個である．

2　三角形三色問題の概要

三角形三色問題について述べる前に調和性の定義と調和彩色三角形の定義について先に述べる.

定義 2.1 (調和性). 3 つのマスに塗られている色がすべて同じか相異なるとき，この 3 マスは調和性を満たす，または，調和しているという.

例 2.2. 図 1 のような 3 マスの組は調和性を満たしているが，図 2 のような 3 マスの組は調和性を満たしていない.

図 1　調和性を満たす 3 色の組

図 2　調和性を満たさない 3 色の組

次に三角形三色問題について述べる．$n(>0)$ 段 [†3] の逆三角形に配置された六角形のマスがある．最上段のそれぞれのマスには 3 色 (赤，黄，青) のうち 1 色がランダムに塗られており，次の規則に従って上から下へ 3 色 (赤，黄，青) を用いて塗る．規則は次の 2 つである.

- 隣り合う 2 つのマスの色が同じとき，同じ色を間にある 1 段下のマスに塗る.
- 隣り合う 2 つのマスの色が異なるとき，どちらとも違う第三の色を間にある 1 段下のマスに塗る.

すなわち，逆三角形の隣接する 3 つのマスはすべて調和性を満たすように色を塗る．図 3 は $n = 9$ のときに規則に従って 3 色で塗った三色三角形である．このとき，最下段のマスの色は赤であり，最上段の両端のマスは黄，青であるから最上段の両端のマスの色と最下段のマスの色について調和性を満たしているこ

†3　先述の通り段数の数え方は 0 段目, 1 段目, 2 段目,... である.

とが分かる． $n=9$ の場合は図 3 の塗り方でなくと

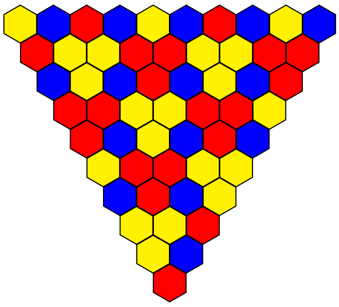

図 3　三色三角形（$n=9$ のとき）

も逆三角形の 3 つの頂点のマスは調和性を満たすことが観察できる．

このことから次のような仮説が考えられる．

(仮説)　最上段をどのように塗っても最上段の両端のマスの色と最下段のマスの色は調和性を満たす．

数学セミナー誌で出題された三角形三色問題は次の 2 つの問題のことである [5]．

1. $n=9$ のとき仮説が成立することを証明せよ．
2. $n=9$ 以外に仮説が成立する段数が存在するか調べ，存在するならば n の一般式を求めよ．

この問題については既に解答が得られており，一般に $n=3^k$ 段の逆三角形において仮説が成立することを示す次の定理が示されている．

定義 2.3 (調和彩色三角形)．3 つの端点のマスに塗られている色が調和性を満たしている三色三角形を調和彩色三角形 ($well-coloredtriangle$) という．

定理 2.4. $n(>0)$ 段の逆三角形に配置されたマス対して，最上段のマスを 3 色で任意に塗った後，規則に従って残りのマスに色を塗ったとき

$(\exists k.n=3^k) \Leftrightarrow n$ 段の逆三角形は常に調和彩色三角形．

本節ではこの定理の証明を Coq で実装するにあたり，証明の概要について述べる．

2.1　十分条件

定理 2.4 を証明するにあたって，十分条件と必要条件に分けて話を進める．ここでは定理 2.4 の十分条件である補題 2.5 の証明の概要について述べる．

補題 2.5 (十分条件)．n 段の逆三角形に配置されたマス対して，最上段のマスを 3 色で任意に塗った後，規則に従って残りのマスに色を塗ったとき

$(\exists k.n=3^k) \Rightarrow n$ 段の逆三角形は常に調和彩色三角形．

補題 2.5 を証明するためには論理同値である次の命題を証明すればよい．

$\forall k.(n=3^k \Rightarrow n$ 段の逆三角形は常に調和彩色三角形)．

これは k に関する数学的帰納法を用いて証明する．

- $k=0$ のときは $n=1$ となり明らかに成立する．
- k のとき成立すると仮定する．すなわち，3^k 段の三色三角形ならば常に調和彩色三角形であると仮定する．ここで各マスに塗られている色を図 4 のように表す．ただし，図中の c_y^x は左から x 個目，上から y 段目のマスに塗られている色を表している． ここで，図 4 の中にある 3^k 段の逆

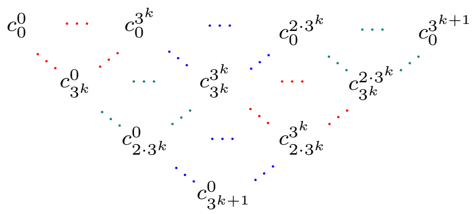

図 4　三色三角形（$n=3^{k+1}$ のとき）

三角形に注目する．注目する逆三角形を 3 つ端点のマスの色を組にして表すことにすると，上から 0 段目から 3^k 段目の間にある逆三角形は次の 3 個である．

$$\left(c_0^0, c_0^{3^k}, c_{3^k}^0\right), \quad \left(c_0^{3^k}, c_0^{2\cdot 3^k}, c_{3^k}^{3^k}\right),$$
$$\left(c_0^{2\cdot 3^k}, c_0^{3^{k+1}}, c_{3^k}^{2\cdot 3^k}\right).$$

また，上から 3^k 段目から $2\cdot 3^k$ 段目の間にある逆三角形は次の 2 個である．

$$\left(c_{3^k}^0, c_{3^k}^{3^k}, c_{2\cdot 3^k}^0\right), \quad \left(c_{3^k}^{3^k}, c_{3^k}^{2\cdot 3^k}, c_{2\cdot 3^k}^{3^k}\right).$$

さらに，上から $2\cdot 3^k$ 段目から 3^{k+1} 段目の間にある逆三角形は次の 1 個である．

$$\left(c_{2\cdot 3^k}^0, c_{2\cdot 3^k}^{3^k}, c_{3^{k+1}}^0\right).$$

これらの 6 個の 3^k 段の逆三角形はすべて帰納法の仮定により常に調和彩色三角形である．よって，調和彩色三角形の定義より最上段のマスの 4 色 $c_0^0, c_0^{3^k}, c_0^{2\cdot 3^k}, c_0^{3^{k+1}}$ から最下段のマスの $c_{3^{k+1}}^0$ の色が得られる．さらにこのとき，最上段のマス

の 4 色 $c_0^0, c_0^{3^k}, c_0^{2\cdot 3^k}, c_0^{3^{k+1}}$ から得られた色 $c_{3^{k+1}}^0$ は 2 色 $c_0^0, c_0^{3^{k+1}}$ のみからでも得られる．これは色の場合分けをすることで証明できるが，詳細は補題 3.9 で述べる．したがって，最上段の両端のマスに塗られている色 $c_0^0, c_0^{3^{k+1}}$ から規則に従うことで最下段の色 $c_{3^{k+1}}^0$ を得られるので調和性を満たす．すなわち，3^{k+1} 段の逆三角形は常に調和彩色三角形である．

2.2　必要条件

次は定理 2.4 の必要条件である補題 2.6 の証明の概要について述べる．

補題 2.6 (必要条件)．$n(>0)$ 段の逆三角形に配置されたマス対して，最上段のマスを 3 色で任意に塗った後，規則に従って残りのマスに色を塗ったとき

n 段の逆三角形は常に調和彩色三角形 $\Rightarrow (\exists k. n = 3^k)$.

補題 2.6 の証明では対偶法を用いた後に，n に関する場合分けをして証明する．補題 2.6 の対偶は以下の通り．

$\neg\,(\exists\ k.n = 3^k) \Rightarrow \neg($ n 段の逆三角形は常に調和彩色三角形 $)$.

したがって，$\neg(\exists k.n = 3^k)$ を仮定したとき，次の各場合について調和彩色三角形にならない最上段のマスの塗り方を挙げればよい．場合分けの仕方は次の 3 つである．

1. n が偶数
2. n が奇数 かつ $3^k < n \leq 2\cdot 3^k$
3. n が奇数 かつ $2\cdot 3^k + 1 \leq n < 3^{k+1}$

各場合について調和彩色三角形にならないような最上段のマスの塗り方は次の通り．

- 1. のときは最上段のマスを黄，青の順で交互に塗る．すると，黄，青を交互に塗られているので第 1 段目のマスは規則よりすべて赤色で塗られている．さらに，規則より最下段のマスまですべて赤で塗られている．したがって，n が偶数であるから最上段の両端のマスは黄であり，最下段のマスの色が赤であるから調和性を満たさないので調和彩色三角形でない．
- 2. のときは最上段のマスを外側の両端のマスから内側の方に向かって黄，青の順で 2 色を用いて対称的に交互に塗る．すると，補題 2.5 より最上段から 3^k 段下のマスは調和彩色三角形の定義より黄，青の順で交互に塗られている．これは 1. の場合に帰着できるので最下段のマスの色は赤である．したがって，最上段の両端のマスの色は黄であり，最下段のマスの色が赤であるから調和性を満たさないので調和彩色三角形でない．

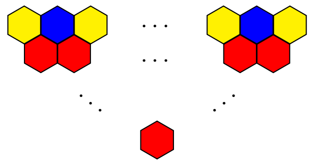

図 5　n が偶数

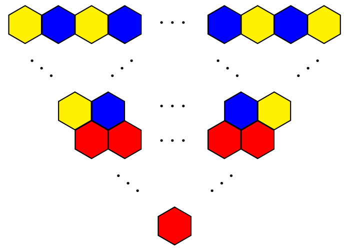

図 6　n が奇数 かつ $3^k < n \leq 2\cdot 3^k$

- 3. のときは最上段のマスを両端のマスからそれぞれ 3^k マス内側の方に向かって黄，その他の内側のマスを青を用いて対称的に塗る．このとき，黄で塗られている内側のマスは $n - 2\cdot 3^k + 1$ マスである．すると，補題 2.5 より調和彩色三角形の定義から最上段から 3^k 段下のマスの色を推測できる．よって，最上段から 3^k 段下のマスにおいて，外側から $n - 2\cdot 3^k + 1$ マスはすべて赤で塗られている．さらに，補題 2.5 より最上段から $2\cdot 3^k$ 段下のマスの色も調和彩色三角形の定義よりすべて赤と推測できる．したがって，最上段の両端のマスの色は青であり，最下段のマスの色が赤であるから調和性を満たさないので調和彩色三角形でない．

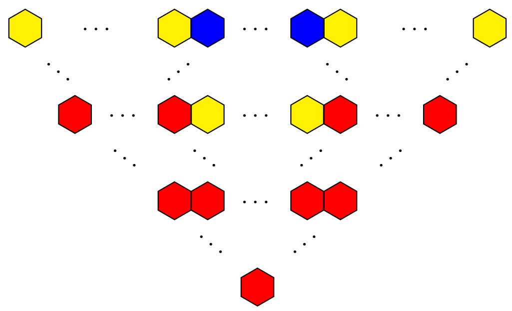

図 7　n が奇数 かつ $2 \cdot 3^k + 1 \leq n < 3^{k+1}$

3　Coq に実装するための準備

3.1　定義

三角形三色問題のような幾何的な直観に基づく問題や前節で述べたような証明を Coq に実装するには，図形の状況を表現する論理式を用意し，それらを用いて問題の暗黙の前提や色塗り規則などを公理化することで形式化する必要がある．ここでは実装する際に用いた定義や公理について述べる．

定義 3.1 ($Color$)．マスに塗る色の集合を次のように定義する．

$$Color \stackrel{def}{=} \{red, yel, blu\}$$

このとき，red は red，yel は yellow，blu は blue を表している．以降，red を r，yel は y，blu は b として略記することもある．

定義 3.2 (mix)．$mix : (Color \times Color) \to Color$ を以下で定義する．

$$\begin{aligned} &(r,r) \mapsto r, \quad (r,y) \mapsto b, \quad (r,b) \mapsto y, \\ &(y,r) \mapsto b, \quad (y,y) \mapsto y, \quad (y,b) \mapsto r, \\ &(b,r) \mapsto y, \quad (b,y) \mapsto r, \quad (b,b) \mapsto b. \end{aligned}$$

演算 mix は塗り方の規則を再現するための関数である．引数となる 2 色が同じ場合は同じ色を返し，異なる場合は 2 色とも異なる第三の色を返す関数である．

定義 3.3 ($colorYB$)．$colorYB : (\mathbb{N}\times\mathbb{N}\times\mathbb{N}) \to Color$ を以下で定義する．

$$colorYB(x,n,z) \stackrel{def}{=} \begin{cases} yel & (0 \leq z-x \leq n \land z-x \text{ が奇数}) \\ blu & (0 \leq z-x \leq n \land z-x \text{ が偶数}) \\ blu & (otherwise) \end{cases}$$

$colorYB$ は補題 2.6 の証明において n が偶数のときの最上段のマスの塗り方を表した関数である．一番左端にあるマスを基準（左から x 番目のマス）としたときに，基準から右に z 番目のマスを指定するときには $z-x$ を用いて指定している．$z-x$ は基準となるマスから離れているマス数を表しており，相対的に最上段のマスを指定している．また，$colorYB$ は最上段のマスを交互に塗っていることを $z-x$ の偶奇によって再現している．

定義 3.4 ($colorYBBY$)．$colorYBBY : (\mathbb{N}\times\mathbb{N}\times\mathbb{N}) \to Color$ を以下で定義する．

$$colorYBBY(x,n,z) \stackrel{def}{=} \begin{cases} yel & (0 \leq z-x \leq n/2 \land z-x \text{ が偶数}) \\ yel & (n/2+1 \leq z-x \leq n \land z-x \text{ が奇数}) \\ blu & (0 \leq z-x \leq n/2 \land z-x \text{ が奇数}) \\ blu & (n/2+1 \leq z-x \leq n \land z-x \text{ が偶数}) \\ yel & (otherwise) \end{cases}$$

$colorYBBY$ は補題 2.6 の証明において n が奇数 かつ $3^k < n \leq 2 \cdot 3^k$ のときの最上段のマスの塗り方を表した関数である．$colorYB$ と同様にして基準となるマスから離れているマス数を用いて相対的に最上段のマスを 1 つ指定している．また，$0 \leq z-x \leq n/2$ の範囲では左端のマスから偶数番目のときは yel，奇数番目のときは blu を塗り，$n/2+1 \leq z-x \leq n$ の範囲では塗る色が入れ替わる．このようにして，$colorYBBY$ は外側から内側に向かって対称的に最上段のマスを交互に塗っていることを $z-x$ の偶奇によって再現している．

定義 3.5 ($colorBYB$)．$colorBYB : (\mathbb{N}\times\mathbb{N}\times\mathbb{N}\times\mathbb{N}) \to Color$ を以下で定義する．

$$colorBYB(x,n,k,z) \stackrel{def}{=} \begin{cases} yel & (3^k \leq z-x \leq n-3^k) \\ blu & (otherwise) \end{cases}$$

$colorBYB$ は補題 2.6 の証明において n が奇数かつ $2 \cdot 3^{k'} + 1 \leq n < 3^{k'+1}$ のときの最上段のマスの塗り方を表した関数である．$colorYBBY$ は基準となるマスから右に 3^k 番目から $n-3^k$ 番目までマスの色を黄色で塗り，その他を青で塗ることで再現している．

定義 3.6 ($Cpos$)．$x, y \in \mathbb{N}$，$c \in Color$ に対して，$Cpos(x,y,c)$ を以下の述語として定義する．

$Cpos(x, y, c) \overset{def}{\Longleftrightarrow}$ 左から x 番目，上から y 番目のマスに塗られている色が c である．

さらに，逆三角形に配置されたマスにおいて左から x 番目，上から y 番目のマスの座標を (x, y) と表す．[†4]

例 3.7. 図 3 において，逆三角形の 3 つの端点のマスに関するそれぞれの命題 $Cpos(0, 0, yel)$，$Cpos(9, 0, blu)$，$Cpos(0, 9, red)$ は正しい．

定義 3.8 ($WellColoredTriangle$)**.** $x, y, n \in \mathbb{N}$，$c_0, c_1, c_2 \in Color$ に対して，$WellColoredTriangle(x, y, n, c_0, c_1, c_2)$ を次のように定義する．

$WellColoredTriangle(x, y, n, c0, c1, c2) \overset{def}{\Longleftrightarrow}$

$(Cpos(x, y, c_0) \wedge Cpos(x+n, y, c_1) \wedge Cpos(x, y+n, c_2)) \Rightarrow c_2 = mix(c_0, c_1)$.

$WellColoredTriangle$ は定義 2.3 で述べた n 段の調和彩色三角形の定義を $Cpos$ や mix を用いて論理式に書き直したものである．x，y は逆三角形の左端のマス (x, y) を基準として定めるために用いており，n は逆三角形の一辺の長さを表しており，3 つのマス $(x, y), (x+n, y), (x, y+n)$ に塗られている色は調和性を満たしている ($c_2 = mix(c_0, c_1)$) ことを表している．

3.2 公理

ここからは三角形三色問題を再現するための 4 つ公理を述べる．

公理 1 (C_exists)**.** $\forall\, x, y \in \mathbb{N}$ に対して，$\exists\, c \in Color$, $Cpos(x, y, c)$.

この公理はすべてのマスには色が塗られていることを表している．

公理 2 (C_uniq)**.** $\forall x, y \in \mathbb{N}, \forall c_0, c_1 \in Color$ に対して，$(Cpos(x, y, c_0) \wedge Cpos(x, y, c_1)) \Rightarrow c_0 = c_1$.

この公理は 1 つのマスに 2 色塗られているときは，その 2 色が同じ色であることを表している．すなわち，1 つのマスに塗れる色は 1 色までであることを表している．

公理 3 (C_mix)**.** $\forall x, y \in \mathbb{N}$，$\forall c_0, c_1, c_2 \in Color$ に対して，$(Cpos(x, y, c_0) \wedge Cpos(x+1, y, c_1) \wedge Cpos(x, y+1, c_2)) \Rightarrow c_2 = mix(c_0, c_1)$.

この公理は隣接する 2 つのマスの色に演算 mix を適用すると間にある 1 段下のマスの色が決まるという三角形三色問題の規則をしている．

公理 4 (C_paint)**.** $\forall x, y, i \in \mathbb{N}, \forall f : \mathbb{N} \to Color$ に対して，$Cpos(x+i, y, f(x+i))$.

この公理における f は最上段のマスの塗り方を関数として表している．すなわち，最上段のマスはすべて好きな色を塗ることができることを表している．

3.3 補題

次に証明を円滑に進めていくために用いた補題について述べる．

補題 3.9 ($mixCut$)**.** $\forall c_0, c_1, c_2, c_3 \in Color$ に対して，$mix(mix(mix(c_0, c_1), mix(c_1, c_2)), mix(mix(c_1, c_2), mix(c_2, c_3))) = mix(c_0, c_3)$.

$mixCut$ は演算 mix のもつ性質を論理式にしたものであり，mix と 4 色を用いて表された色は 2 色のみを用いて書き換えることができることを表している．証明する際には各色が 3 通りずつ取り得るので合計 $3^4 = 81$ 通りの場合分けをおこなって mix の計算をすれば証明することができる．三角形三色問題の十分条件 (補題 2.5) を証明する際に用いる補題である．

補題 3.10 ($AllRed$)**.** $\forall x, y, n \in \mathbb{N}$ に対して，$(\forall i. \in \mathbb{N},\ (0 \le i \le n \Rightarrow Cpos(x+i, y, red))) \Rightarrow Cpos(x, y+n, red)$.

三角形三色問題の必要条件 (補題 2.6) の証明において，n がどの場合でもすべてのマスが赤に塗られている段があることに帰着させて矛盾を導いている．$AllRed$ により，すべてのマスが赤で塗られている段があるときは最下段のマスは赤であることを推測できるという補題である．

補題 3.11 ($falseColor$)**.** $\forall x, y \in \mathbb{N}$, $\forall c_0, c_1 \in Color$ に対して，$(c_0 \neq c_1 \wedge Cpos(x, y, c_0) \wedge Cpos(x, y, c_1)) \Rightarrow \bot$.

$falseColor$ は $3^2 = 9$ 通りの場合分けと公理 2 より証明できる．同じマスに対して異なる色が塗れてしまっているときには矛盾するという補題である．三角形三色問題の必要条件 (補題 2.6) の証明において，

†4 マスの座標の表し方は Coq に実装しておらず $Cpos$ のみ実装している．

最下段の色が赤で塗られることと補題 2.5 より矛盾を導くときに用いる．

4　Coq における三角形三色問題

4.1　十分条件

補題 2.5 を Coq に実装するために論理式の形にしたものが次の定理 4.1 である．

定理 4.1 (十分条件)**.** $\forall k, n, x, y \in \mathbb{N}$, $\forall c_0, c_1, c_2 \in Color$, $n = 3^k \Rightarrow WellColoredTriangle(x, y, n, c_0, c_1, c_2)$.

証明．k に関する数学的帰納法を用いて証明する．$k = 0$ のときは $n = 1$ となるので明らかに成立する．次に k のとき成立すると仮定して $k+1$ のときも成立することを示す．公理 1 より図 8 にように 10 色の c^x_y が存在する．以降，それぞれのマスに存在する色を図 8 のように名前をつけておくと，$Cpos$ を用いた命題が 10 個得られる． 次にこれらの 10 色が塗

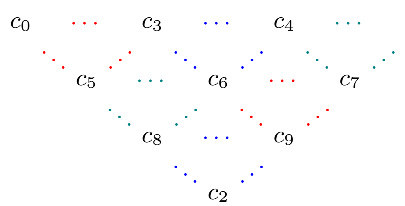

図 8　三色三角形（$n = 3^{k+1}$ のとき）

られているマスを頂点としている 6 個の 3^k 段の三色三角形三角形は調和三角形であることを示す．これは k に関する数学的帰納法の仮定からすぐに示せる．すると，ここまでに証明した 10 個の $Cpos$ に関する命題と 6 個の 3^k 段の調和三角形三角形に関する命題から $c_2 = mix(mix(mix(c_0, c_3), mix(c_3, c_4)), mix(mix(c_3, c_4), mix(c_4, c_1)))$ が導け，$mixCut$ より $c_2 = mix(c_0, c_1)$ が成立する．したがって，逆三角形の 3 つの頂点に塗られているマスは調和性を満たすので，$WellColoredTriangle(x, y, 3^{k+1}, c_0, c_1, c_2)$. □

4.2　必要条件

補題 2.6 を Coq に実装するために論理式の形にしたものが次の定理 4.2 である．

定理 4.2 (必要条件)**.** $\forall k, n, x, y \in \mathbb{N}$, $c_0, c_1, c_2 \in Color$, $n > 0 \Rightarrow WellColoredTriangle(x, y, n, c_0, c_1, c_2) \Rightarrow n = 3^k$.

次の補題 4.3 を証明することで示す．

補題 4.3. $\forall n, x, y \in \mathbb{N}$, $n > 0 \Rightarrow \neg(\exists k \in \mathbb{N}$, $n = 3^k) \Rightarrow \neg(\forall c \in Color$, $\forall f : \mathbb{N} \to Color$, $WellColoredTriangle(x, y, n, f(x), f(x+n), c)$.

補題 4.3 を証明するためには

- $n > 0$
- $\neg(\exists k \in \mathbb{N}, n = 3^k)$,
- $\forall c \in Color$, $\forall f : \mathbb{N} \to Color$,
  $WellColoredTriangle(x, y, n, f(x), f(x+n), c)$

を仮定して矛盾を示せばよい．今回は n に関する場合分けをしてから各場合において矛盾を導く．

4.2.1　n が偶数

n が偶数のときは補題 4.4，4.5 を 2 つ証明してから，補題 4.6 を証明して矛盾を導く．

補題 4.4 ($EvenA$)**.** $\forall x, y, n \in \mathbb{N}$, $n > 0 \Rightarrow (\forall i \in \mathbb{N}, (0 \leq i \leq n \Rightarrow Cpos(x+i, y, colorYB(x, n, (x+i))))) \Rightarrow \forall i \in \mathbb{N}, (0 \leq i \leq n-1 \Rightarrow Cpos(x+i, y+1, red))$.

補題 4.4 は最上段のマスの色を関数 $colorYB$ で塗ると，最上段より 1 段下の段のマスの色はすべて赤であることを表している．

証明．$0 \leq i \leq n-1$ を満たす i を任意にとると，$Cpos(x+i, y, colorYB(x, n, x+i))$，$Cpos(x+i+1, y, colorYB(x, n, x+i+1))$ が導ける．公理 1 より $Cpos(x+i, y+1, c)$ となる $c \in Color$ が存在するので，存在するこの色に c と名前をつけると公理 3 より $c = mix(colorYB(x, n, x+i), colorYB(x, n, x+i+1))$ が成立する．

- i が偶数のとき
  $colorYB$ の定義より，$colorYB(x, n, x+i) = blu$, $colorYB(x, n, x+i+1) = yel$ であるから $c = red$.
- i が奇数のとき
  $colorYB$ の定義より，$colorYB(x, n, x+i) = yel$, $colorYB(x, n, x+i+1) = blu$ であるから $c = red$.

よって，i の遇奇にかかわらず $c = red$ となるので

$Cpos(x+i, y+1, red)$. □

補題 4.5 (*EvenB*). $\forall x, y, n, \in \mathbb{N}, n > 0 \Rightarrow \forall i \in \mathbb{N}, (0 \le i \le n \Rightarrow Cpos(x+i, y, colorYB(x, n, x+i))) \Rightarrow Cpos(x, y+n, red)$.

補題 4.5 は最上段のマスの色を関数 $colorYB$ で塗ると，最下段のマスの色は赤になるということを表している．

証明. 補題 4.4 より $\forall i \in \mathbb{N}$, $(0 \le i \le n-1 \Rightarrow Cpos(x+i, y+1, red))$．さらに，補題 3.10 より $Cpos(x, y+n, red)$. □

補題 4.6 (*Even*). $\forall x, y, n \in \mathbb{N}$, $(n > 0 \wedge odd(n) = false) \Rightarrow \neg(\forall c \in Color, \forall f : \mathbb{N} \to Color, WellColoredTriangle(x, y, n, f(x), f(x+n), c))$.

ただし，補題 4.6 の中にある $odd(n)$ は次のように SSReflect で定義されている関数である．

自然数 n に対して，

$$odd(n) \stackrel{def}{=} \begin{cases} true & (n \text{ が奇数}) \\ false & (otherwise) \end{cases}$$

証明. 公理 4 より $f = colorYB$ とすると $Cpos(x, y, colorYB(x, n, x))$，$Cpos(x+n, n, colorYB(x, n, x+n))$．このとき，0 と n は偶数であり，$0 \le 0 \le n$，$0 \le n \le n$ を満たすので $colorYB(x, n, x) = colorYB(x, n, x+n) = yel$. さらに，公理 1 より $Cpos(x, y+n, c)$ となる $c \in Color$ が存在するので，存在するこの色に c と名前をつける．すると，仮定より $WellColoredTriangle(x, y, n, colorYB(x, n, x), colorYB(x, n, x+n), c)$ であるから $c = yel$ となり，$Cpos(x, y+n, yel)$．一方で，補題 4.5 より $Cpos(x, y, red)$ となるので補題 3.11 より矛盾が導ける． □

4.2.2 n が奇数 かつ $3^k < n \le 2 \cdot 3^k$

n が奇数 かつ $3^{k'} < n \le 2 \cdot 3^k$ のときは補題 4.7，4.8，4.9 を証明してから，補題 4.10 を証明して矛盾を導く．

補題 4.7 (*ShortOddA*). $\forall x, y, n, k \in \mathbb{N}$, $(3^k < n \le (3^k \cdot 2) \wedge odd(n) = true) \Rightarrow (\forall i \in \mathbb{N}, 0 \le i \le n \Rightarrow Cpos(x+i, y, colorYBBY(x, n, x+i))) \Rightarrow (\forall i \in \mathbb{N}, 0 \le i \le n-3^k \Rightarrow Cpos(x+i, y+3^k, colorYB(x, n-3^k, x+i)))$.

補題 4.7 は最上段のマスの色を関数 $colorYBBY$ で塗ると，最上段より 3^k 下の段のマスは黄，青で交互に塗ってあることを表している．

証明. $0 \le i \le n-3^k$ を満たす i を任意にとると，$0 \le i \le n$，$0 \le i+3^k \le n$ であるから $Cpos(x+i, y, colorYBBY(x, n, x+i))$，$Cpos(x+i+3^k, y, colorYBBY(x, n, x+i+3^k))$ が導ける．公理 1 より $Cpos(x+i, y+3^k, c)$ となる $c \in Color$ が存在するので，存在するこの色に c と名前をつける．すると，定理 4.1 より $WellColoredTriangle(x+i, y, 3^k, colorYBBY(x, n, x+i), colorYBBY(x, n, x+i+3^k), c)$ だから $c = mix(colorYBBY(x, n, x+i), colorYBBY(x, n, x+i+3^k))$ が成立する．さらに，n は奇数であり $0 \le i \le n/2$，$n/2+1 \le i+3^k \le n$ を満たすので $colorYBBY$，$colorYB$ の色が i の遇奇によって定まる．

- i が偶数のとき
  $colorYBBY$ の定義より $colorYBBY(x, n, x+i) = yel$，$colorYBBY(x, n, x+i+3^k) = yel$ であり，$colorYB$ の定義より $colorYB(x, n-3^k, x+i) = yel$. よって，$c = mix(yel, yel) = yel = colorYB(x, n-3^k, x+i)$.
- i が奇数のとき
  $colorYBBY$ の定義より $colorYB(x, n, x+i) = blu$，$colorYB(x, n, x+i+3^k) = blu$ であり，$colorYB$ の定義より $colorYB(x, n-3^k, x+i) = blu$ よって，$c = mix(blu, blu) = blu = colorYB(x, n-3^k, x+i)$.

以上より，i の遇奇にかかわらず $colorYBBY(x, n, x+i) = colorYB(x, n-3^k, x+i)$ となるので $Cpos(x+i, y+3^k, colorYB(x, n-3^k, x+i))$. □

補題 4.8 (*ShortOddB*). $\forall x, y, n, k \in \mathbb{N}$, $(3^k < n \le 3^k \cdot 2 \wedge odd(n) = true) \Rightarrow (\forall i \in \mathbb{N}, 0 \le i \le n \Rightarrow Cpos(x+i, y, colorYBBY(x, n, x+i))) \Rightarrow (\forall i \in \mathbb{N}, 0 \le i \le n-3^k-1 \Rightarrow Cpos(x+i, y+3^k+1, red))$.

補題 4.8 は最上段のマスの色を関数 $colorYBBY$ で塗ると，最上段から 3^k+1 下の段のマスはすべて赤

であるということを表している．

証明．補題 4.7 より $\forall i \in \mathbb{N}, (0 \leq i \leq n - 3^k \Rightarrow Cpos(x+i, y+3^k, colorYB(x, n-3^k, x+i))$．さらに，補題 4.4 より $\forall i \in \mathbb{N}, (0 \leq i \leq n - 3^k - 1 \Rightarrow Cpos(x+i, y+3^k+1, red))$． □

補題 4.9 ($ShortOddC$)**.** $\forall x, y, n, k \in \mathbb{N},\ (3^k < n \leq (3^k \cdot 2) \wedge odd(n) = true) \Rightarrow (\forall i \in \mathbb{N}, 0 \leq i \leq n \Rightarrow Cpos(x+i, y, colorYBBY(x, n, x+i))) \Rightarrow Cpos(x, y+n, red)$.

補題 4.9 は最上段のマスの色を関数 $colorYBBY$ で塗ると，最下段のマスの色は赤になるということを表している．

証明．補題 4.8 より $\forall i \in \mathbb{N}, (0 \leq i \leq n - 3^k - 1 \Rightarrow Cpos(x+i, y+3^k+1, red))$．さらに，補題 3.10 より $Cpos(x, y+n, red)$． □

補題 4.10 ($ShortOdd$)**.** $\forall x, y, n, k \in \mathbb{N},\ (3^k < n \leq (3^k \cdot 2) \wedge odd(n) = true) \Rightarrow \neg(\forall c \in Color, \forall f : \mathbb{N} \rightarrow Color,\ WellColoredTriangle(x, y, n, f(x), f(x+n), c)$.

証明．公理 4 より $f = colorYBBY$ とすると，$Cpos(x, y, colorYBBY(x, n, x))$ が成立する．同様にして，$Cpos(x, n,\ colorYBBY(x, n, x+n))$ も成立する．このとき，n が奇数であるから $colorYBBY(x, n, x) = colorYBBY(x, n, x+n)$ となる．公理 1 より $Cpos(x, y+n, c)$ となる $c \in Color$ が存在するので，存在するこの色に c と名前をつける．すると，仮定より $WellColoredTriangle(x, y, n, colorYBBY(x, n, x),$ $colorYBBY\ (x, n, x+n), c)$ であるから $c = mix(colorYBBY(x, n, x),\ colorYBBY\ (x, n, x+n))$．よって，$colorYBBY(x, n, x) = yel$ であるから $c = mix(yel, yel) = yel$ となり，$Cpos(x, y+n, yel)$．一方で，補題 4.9 より $Cpos(x, y+n, red)$ となるので補題 3.11 より矛盾が導ける． □

4.2.3 n が奇数 かつ $2 \cdot 3^k + 1 \leq n < 3^{k+1}$

n が奇数 かつ $2 \cdot 3^k + 1 \leq n < 3^{k+1}$ のときは補題 4.11，4.12，4.13 を証明してから，補題 4.14 を証明して矛盾を導く．

補題 4.11 ($LongOddA$)**.** $\forall k, n, x, y \in \mathbb{N},\ (3^k \cdot 2 + 1 \leq n < 3^{k+1}) \Rightarrow (\forall i \in \mathbb{N}, (0 \leq i \leq n \Rightarrow Cpos(x+i, y, colorBYB(x, n, k, x+i)))) \Rightarrow (\ (\forall i \in \mathbb{N}, (0 \leq i \leq n - 3^k \cdot 2 \Rightarrow Cpos(x+i, y+3^k, red))) \wedge (\forall i \in \mathbb{N}, (3^k \leq i \leq n - 3^k \Rightarrow Cpos(x+i, y+3^k, red)))\ )$.

補題 4.11 は最上段のマスの色を関数 $colorBYB$ で塗ると，最上段より 3^k 下の段のマスは外側から $n - 2 \cdot 3^k + 1$ マスはすべて赤で塗られていることを表している．

証明．$3^k \cdot 2 + 1 \leq n < 3^{k+1}$ を満たす n をとる．

- $0 \leq i \leq n - 3^k \cdot 2$ を満たすように任意に i をとると，$0 \leq i \leq n$，$0 \leq i \leq 3^k - 1$ を満たすので，$Cpos(x+i, y, colorBYB(x, n, k, x+i))$ であり，$colorBYB(x, n, k, x+i) = blu$ が導ける．よって，$Cpos(x+i, y, blu)$．また，$0 \leq i + 3^k \leq n$，$3^k \leq i + 3^k \leq n - 3^k$ を満たすので，$Cpos(x+i+3^k, y, colorBYB(x, n, k, x+i+3^k))$ であり，$colorBYB(x, n, k, x+i+3^k) = yel$ が導ける．よって，$Cpos(x+i+3^k, y, yel)$．公理 1 より $Cpos(x+i, y+3^k, c)$ となる $c \in Color$ が存在するので，存在するこの色に c と名前をつける．すると，定理 4.1 より $WellColoredTriangle(x+i, y, 3^k, blu, yel, c)$ だから $c = mix(blu, yel) = red$ が成立する．よって，$Cpos(x+i, y+3^k, red)$．
- $3^k \leq i \leq n - 3^k$ を満たすように任意に i をとると，$0 \leq i \leq n$，$3^k \leq i \leq n - 3^k$ を満たすので，$Cpos(x+i, y, colorBYB(x, n, k, x+i))$ であり，$colorBYB(x, n, k, x+i) = yel$ が導ける．よって，$Cpos(x+i, y, yel)$．また，$0 \leq i + 3^k \leq n$，$n - 3^k + 1 \leq i + 3^k \leq n$ を満たすので，$Cpos(x+i+3^k, y, colorBYB(x, n, k, x+i+3^k))$ であり，$colorBYB(x, n, k, x+i+3^k) = yel$ が導ける．よって，$Cpos(x+i+3^k, y, blu)$．公理 1 より $Cpos(x+i, y+3^k, c)$ となる $c \in Color$ が存在するので，存在するこの色に c と名前をつける．すると，定理 4.1 より $WellColoredTriangle(x+i, y, 3^k, yel, blu, c)$ だから $c = mix(yel, blu) = red$

が成立する．よって，$Cpos(x+i, y+3^k, red)$. $\square$

補題 4.12 (*LongOddB*)**.** $\forall k, n, x, y \in \mathbb{N}$, $(3^k \cdot 2 + 1 \leq n < 3^{k+1}) \Rightarrow (\forall i \in \mathbb{N}, (0 \leq i \leq n \Rightarrow Cpos(x+i, y, colorBYB(x, n, k, x+i)))) \Rightarrow \forall i \in \mathbb{N}, (0 \leq i \leq n - 3^k \cdot 2 \Rightarrow Cpos(x+i, y+3^k \cdot 2, red)$.

補題 4.12 は最上段のマスの色を関数 $colorBYB$ で塗ると，最上段から $3^k \cdot 2$ 下の段のマスはすべて赤で塗られていることを表している．

証明．$0 \leq i \leq n - 3^k \cdot 2$ を満たす i を任意にとると，補題 4.11 より $Cpos(x+i, y+3^k, red)$．また，$3^k \leq i + 3^k \leq n - 3^k$ であるから補題 4.11 より $Cpos(x+i+3^k, y+3^k, red)$．公理 1 より $Cpos(x+i, y+3^k, c)$ となる $c \in Color$ が存在するので，存在するこの色に c と名前をつける．すると，定理 4.1 より $WellColoredTriangle(x+i, y, 3^k, red, red, c)$ だから $c = mix(red, red) = red$．よって，$Cpos(x+i, y+3^k \cdot 2, red)$. $\square$

補題 4.13 (*LongOddC*)**.** $\forall k, n, x, y \in \mathbb{N}$, $(3^k \cdot 2+1 \leq n < 3^{k+1}) \Rightarrow (\forall i \in \mathbb{N}, (0 \leq i \leq n \Rightarrow Cpos(x+i, y, colorBYB(x, n, k, x+i)))) \Rightarrow Cpos(x, y+n, red)$.

補題 4.13 は最上段のマスの色を関数 $colorBYB$ で塗ると，最下段のマスは赤になることを表している．

証明．補題 4.12 より $\forall i \in \mathbb{N}, (0 \leq i \leq n - 3^k \cdot 2 \Rightarrow Cpos(x+i, y+3^k \cdot 2, red)$. さらに，補題 3.10 より $Cpos(x, y+n, red)$. $\square$

補題 4.14 (*LongOdd*)**.** $\forall x, y, n, k \in \mathbb{N}$, $(3^k \cdot 2 + 1 \leq n < 3^{k+1}) \Rightarrow \neg(\forall c \in Color, \forall f : \mathbb{N} \to Color, WellColoredTriangle(x, y, n, f(x), f(x+n), c)$.

証明．公理 4 より $f = colorBYB$ とすると $Cpos(x, y, colorBYB(x, n, , k, x))$，$Cpos(x, n, colorBYB(x, n, k, x+n))$．公理 1 より $Cpos(x, y+n, c)$ となる $c \in Color$ が存在するので，存在するこの色に c と名前をつける．すると，仮定より $WellColoredTriangle(x, y, n, colorBYB(x, n, k, x), colorBYB(x, n, k, x+n))$ であるから $c = mix(colorBYB(x, n, k, x), colorBYB(x, n, k, x+n))$．よって，$0 \leq 0 \leq 3^k - 1$，$n - 3^k + 1 \leq n \leq n$ より $colorBYB(x, n, k, x) = colorBYB(x, n, x+n, k) = blu$ であるから $c = mix(blu, blu) = blu$ となり，$Cpos(x, y+n, blu)$．一方で，補題 4.13 より $Cpos(x, y+n, red)$ となるので補題 3.11 より矛盾が導ける． $\square$

最後に補題 4.6，4.10，4.14 を用いて 4. 2 節の冒頭で述べた定理 4.2 を証明する．

定理 4.2 の証明．補題 4.6，4.10，4.14 より補題 4.3 が導ける．このとき，$\neg(\forall c \in Color, \forall f : \mathbb{N} \to Color, WellColoredTriangle(x, y, n, f(x), f(x+n), c)$ は n 段の調和彩色三角形となるような最上段の塗り方が存在しないということなので，n 段の三色三角形は調和彩色三角形でないことと同値である．したがって，$\neg(\exists k \in \mathbb{N}, n = 3^k) \Rightarrow \neg(\forall c_0, c_1, c_2 \in Color, WellColoredTriangle(x, y, n, c_0, c_1, c_2)$．この命題は定理 4.2 の対偶となるので定理 4.2 が示された． $\square$

以上より，定理 4.1（十分条件），定理 4.2（必要条件）が成立するので，定理 2.4（必要十分条件）が示された．

5 まとめ

本研究では公理等を適切に定めることで三角形三色問題の状況を再現しつつ，三角形三色問題の証明の形式化を Coq（SSReflect）を用いて完成させることができた．

参考文献

[1] "The Coq Proof Assistant", https://coq.inria.fr/.

[2] "The SSReflect proof language", https://coq.inria.fr/refman/proof-engine/ssreflect-proof-language.html.

[3] 萩原学, アフェルド･レナルド, "Coq/SSReflect/MathComp による定理証明", 森北出版, 2018.

[4] 西山豊, "エレガントな解答をもとむ 出題 2"，数学セミナー, 4 月号, pp.87–91, 2013.

[5] 西山豊, "数学を楽しむ/三角形三色問題", 現代数学, Vol.47, No.10, pp.36–41, 2014.

[6] Y. Nishiyama, "THE THREE-COLOR TRIANGLE PROBLEM", International Journal of Pure and Applied Mathematics, Vol.85, No.1, pp.69–81, 2013.