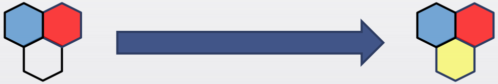
三角形三色問題

n 段の逆三角形に配置された六角形のマスを上から下へ**規則1，2**に従い3色で塗り分ける.

<規則1>　隣り合う色が同じ　　とき　同じ色を間にある下のマスに塗る.

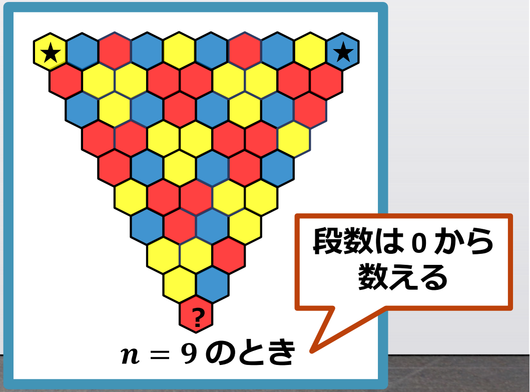
<規則2>　隣り合う色が異なる　とき　第三の色を間にある下のマスに塗る.



[仮説]　最下段の色は最上段の両端の色を隣に並べて
規則1 または 規則2に従った色になる.

問題1　$n = 9$ のときに仮説が成り立つことを証明せよ.

問題2　9 段以外に仮説が成立する段数が存在するかを調べ，
存在するならば n の一般式を求めよ.



三角形三色問題の通常の証明

赤:0, 黄:1, 青:2

マスを塗るための色の集合を $Color \coloneqq \{0,1,2\}$ として，

規則に従って塗ると下のマスに塗る色は演算 $*$ で与えられる.

$$x * y \coloneqq -(x+y)\ (mod\ 3)\ \ (x, y \in Color)$$

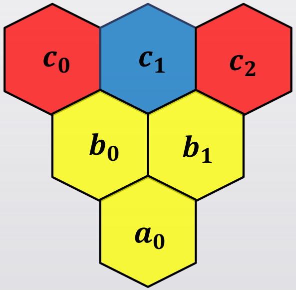
$*$	**0**	**1**	**2**
0	0	2	1
1	2	1	0
2	1	0	2

演算 $*$ 計算結果

0段目

1段目

2段目



$b_0 = c_0 * c_1 = -(c_0 + c_1),\ b_1 = c_1 * c_2 = -(c_1 + c_2)$ と表せる.

$a_0 = b_0 * b_1 = -(b_0 + b_1) = c_0 + 2c_1 + c_2 = c_0 - c_1 + c_2\ \ (mod 3)$

a_0 は 3色 c_0, c_1, c_2 を用いることで推測できる

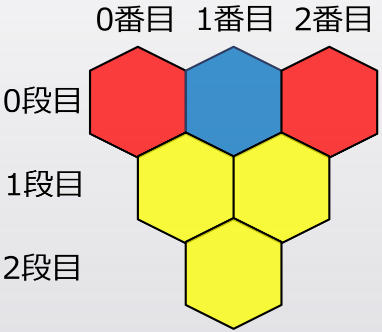
三角形三色問題は代数的な演算子 $*$ を用いることで
数学の証明を与えることができる.

“Coqに実装できること”を意味する

Coqにおける三角形三色問題の証明

Coqに実装する際には問題文や証明を<u>**すべて論理式に書き換える必要がある**</u>.

Cpos(x, y, c) ⇔ 左から x 番目, 上から y 段目の色が c である.



赤をred, 黄をyel, 青をblu として，左の図の逆三角形(2段)を論理式で表せる.

$$\mathrm{Cpos}(0,0,red), \mathrm{Cpos}(1,0,blu), \mathrm{Cpos}(2,0,red)$$

$$\mathrm{Cpos}(0,1,yel), \mathrm{Cpos}(1,1,yel)$$

$$\mathrm{Cpos}(0,2,yel)$$

色の塗られた逆三角形は Cpos を用いることで<u>**論理式で表せる**</u>

Coqにおける三角形三色問題の証明

Coq 上におけるマスに塗る色の集合を Color ≔ $\{red, yel, blu\}$ とし，

演算 $*$ に相当

規則1，2に従って塗ると下のマスに塗る色は次の演算 mix で与えられる．

$$\mathrm{mix}(c_0, c_1) \coloneqq \begin{cases} red & [(red, red), (yel, blu), (blu, yel)\text{のとき}] \\ yel & [(red, blu), (yel, yel), (blu, red)\text{のとき}] \\ blu & [(red, yel), (yel, red), (blu, blu)\text{のとき}] \end{cases} \quad (c_0, c_1 \in \mathrm{Color})$$

演算 mix の性質(補題)

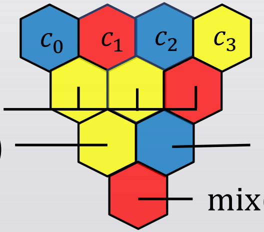
$$\forall \boldsymbol{c_0}, \boldsymbol{c_1}, \boldsymbol{c_2}, \boldsymbol{c_3} \in \mathbf{Color},$$
$$\mathbf{mix}(\mathbf{c_0}, \mathbf{c_3}) = \mathbf{mix}\Big(\mathbf{mix}\big(\mathbf{mix}(\boldsymbol{c_0}, \boldsymbol{c_1}), \mathbf{mix}(\boldsymbol{c_1}, \boldsymbol{c_2})\big), \mathbf{mix}\big(\mathbf{mix}(\boldsymbol{c_1}, \boldsymbol{c_2}), \mathbf{mix}(\boldsymbol{c_2}, \boldsymbol{c_3})\big)\Big)$$

4色で表した色を2色で表せる

左から

$\mathrm{mix}(c_0, c_1), \mathrm{mix}(c_1, c_2), \mathrm{mix}(c_2, c_3)$

$\mathrm{mix}\big(\mathrm{mix}(c_0, c_1), \mathrm{mix}(c_1, c_2)\big)$



$\mathrm{mix}\big(\mathrm{mix}(c_1, c_2), \mathrm{mix}(c_2, c_3)\big)$

$\mathrm{mix}(c_0, c_3)$

Coqにおける三角形三色問題の証明

三角形三色問題を再現するための**3つの公理**を論理式で用意する.

$$\forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{N}\,, \exists \boldsymbol{c_0} \in \mathbf{Color}\,, \mathbf{Cpos}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{c_0})$$

すべてのマスに色が塗られている

1つのマスに塗れる色は1色である

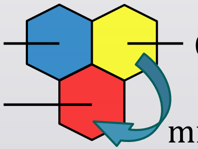
$$\forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{N}\,, \forall \boldsymbol{c_0}\,, \boldsymbol{c_1} \in \mathbf{Color}\,, \Big(\big(\mathbf{Cpos}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{c_0}) \land \mathbf{Cpos}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{c_1})\big) \Rightarrow \boldsymbol{c_0} = \boldsymbol{c_1}\Big)$$

$$\forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{N}\,, \forall \boldsymbol{c_0}, \boldsymbol{c_1}, \boldsymbol{c_2} \in \mathbf{Color},$$
$$\Big(\big(\mathbf{Cpos}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{c_0}) \land \mathbf{Cpos}(\boldsymbol{x}+\mathbf{1}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{c_1}) \land \mathbf{Cpos}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}+\mathbf{1}, \boldsymbol{c_2})\big) \Rightarrow \boldsymbol{c_2} = \mathbf{mix}(\boldsymbol{c_0}, \boldsymbol{c_1})\Big)$$

マスの色は規則1，２に従っている

$\mathrm{Cpos}(x, y, c_0)$

$\mathrm{Cpos}(x, y+1, c_2)$



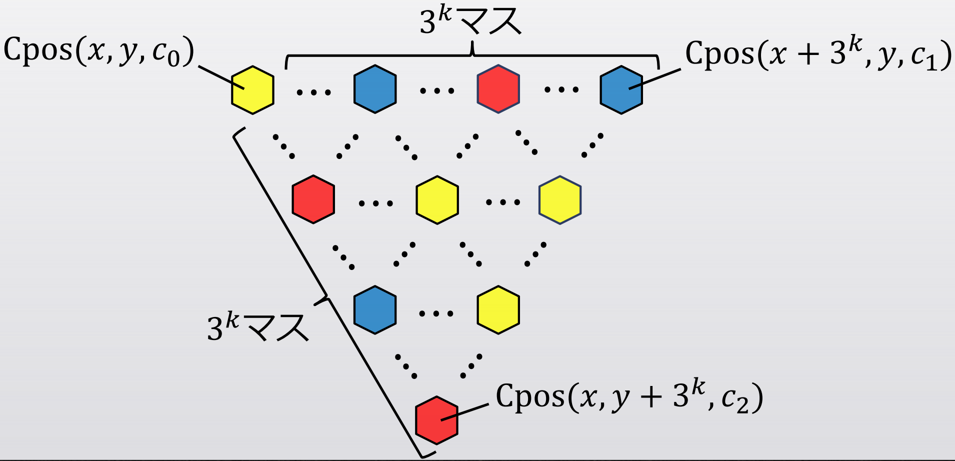
$\mathrm{Cpos}(x+1, y, c_1)$

$\mathrm{mix}(c_0, c_1)$

Coqにおける三角形三色問題の証明

三角形三色問題の解決につながる定理 (十分性のみ) は次のように論理式で表せる.

$$\forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{N}, \forall \boldsymbol{c_0}, \boldsymbol{c_1}, \boldsymbol{c_2} \in \mathbf{Color},$$
$$\left(\left(\exists \boldsymbol{k} \in \mathbb{N}, \mathbf{Cpos}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{c_0}) \wedge \mathbf{Cpos}\left(\boldsymbol{x} + \mathbf{3}^{\boldsymbol{k}}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{c_1}\right) \wedge \mathbf{Cpos}\left(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} + \mathbf{3}^{\boldsymbol{k}}, \boldsymbol{c_2}\right)\right) \Rightarrow \boldsymbol{c_2} = \mathbf{mix}(\boldsymbol{c_0}, \boldsymbol{c_1})\right)$$



まとめと今後の課題

まとめ

本研究では，論理式や公理等を適切に準備し Coq を用いて証明することができた．

$$\forall x, y \in \mathbb{N}, \forall c_1, c_2, c_3 \in \mathbf{Color},$$
$$\left(\left(\exists k \in \mathbb{N}, \left(\mathbf{Cpos}(x, y, c_0) \wedge \mathbf{Cpos}\left(x + 3^k, y, c_1\right) \wedge \mathbf{Cpos}\left(x, y + 3^k, c_2\right)\right)\right) \Rightarrow c_2 = \mathbf{mix}(c_0, c_1)\right)$$

今後の課題

本研究では十分性のみを証明したので完璧に三角形三色問題を解決した訳ではない．
三角形三色問題を完璧に解決するためには**完全性の証明も行う必要**がある．

$$\forall x, y \in \mathbb{N}, \forall c_1, c_2, c_3 \in \mathbf{Color},$$
$$\left(c_2 = \mathbf{mix}(c_0, c_1) \Rightarrow \left(\exists k \in \mathbb{N}, \mathbf{Cpos}(x, y, c_0) \wedge \mathbf{Cpos}\left(x + 3^k, y, c_1\right) \wedge \mathbf{Cpos}\left(x, y + 3^k, c_2\right)\right)\right)$$

通常

マスに塗る色の集合 $\text{Color} \overset{\text{def}}{=} \{0, 1, 2\}$

Coq

マスに塗る色の集合 $\overline{\text{Color}} \overset{\text{def}}{=} \{r, y, b\}$

通常

演算 $*$ $\forall c_0, c_1 \in \text{Color}$ に対し, $c_0 * c_1 \overset{\text{def}}{=} -(c_0 + c_1) \pmod 3$.

Coq

演算 mix $\forall c_0, c_1 \in \overline{\text{Color}}$ に対し,

$$\mathrm{mix}(c_0, c_1) \overset{\text{def}}{=} \begin{cases} r & [(c_0, c_1) = (r, r), (y, b), (b, y) \text{ のとき}] \\ y & [(c_0, c_1) = (r, b), (y, y), (b, r) \text{ のとき}] \\ b & [(c_0, c_1) = (r, y), (y, r), (b, b) \text{ のとき}] \end{cases}$$

通常

述語 $P(n)$ $n \in \mathbb{N}$ に対し,

$P(n)$ は「n 段で仮説が成立」を表す.

Coq

述語 $\mathrm{Cpos}(x, y, c)$ $x, y \in \mathbb{N}$, $c \in \text{Color}$ ($\overline{\text{Color}}$) に対し,

$\mathrm{Cpos}(x, y, c)$ は「左から x 番目, 上から y 番目のマスの色は c である.」を表す.

※ Cpos は Color position のつもり

Thm1 (通常)

任意の n 段の逆三角形について

$n=3^k$ となる $k\in\mathbb{N}$ が存在する $\Longleftrightarrow$ n 段で仮説が成立.

($n=3^k$ 段の逆三角形である)

prf. n を1つとる.

(⇒) Coqで証明済みのため省略

(⇐) n 段で仮説が成立 $\Longrightarrow$ $n=3^k$ となる $k\in\mathbb{N}$ が存在するを示す.

今回は対偶を証明することで示すので,

任意の $k\in\mathbb{N}$ について $n\neq 3^k \Longrightarrow$ n 段で仮説が不成立. を示す.

任意の $k\in\mathbb{N}$ について $n\neq 3^k$ が成立すると仮定する.

次に n は (i) 偶数または (ii) 奇数であるから,

それぞれの場合で仮説が不成立となる

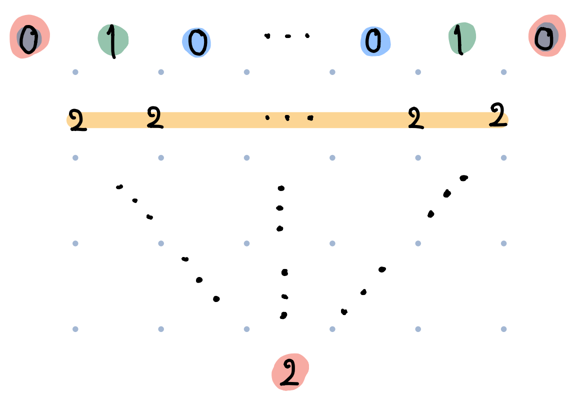
(上から0段目の) 塗り方が存在することを示す.

(i) n が偶数のとき

最上段(上から0段目)を 0, 1, 0, 1, … と順に交互に塗る.

上から1段目はすべて 2 となるため以降最下段まで 2 となる.

このとき, $0*0=0\neq 2$ となり仮説が不成立.



例 $n=4$ のとき

0 1 0 1 0

2 2 2 2

2 2 2

2 2

2

例 $n=6$ のとき

0 1 0 1 0 1 0

2 2 2 2 2 2

⋮

2

(i)のときは予測が成立しない例(塗り方)が存在するので仮説は不成立。

(ii) nが奇数のとき

次が成立することを踏まえて反例をつくる。

- 最上段の両端を0, その内側を1, 0, 1と順に対称的に塗ると対称軸の両隣りの最上段2マスの色は同色(0 or 1)になる。

以降☆と表す。

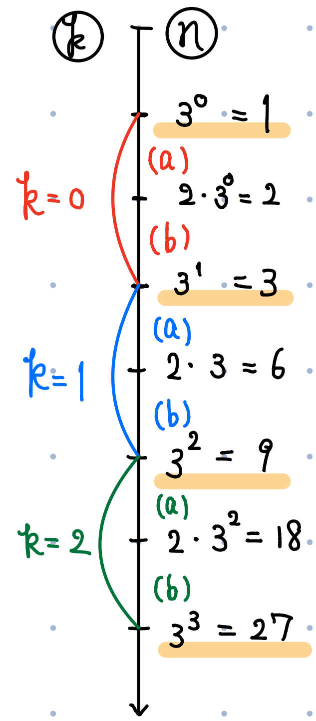
0 1 0 1 … ☆ | ☆ … 1 0 1 0

例 $n=5$　0 1 0 | 0 1 0

例 $n=7$　0 1 0 1 | 1 0 1 0

- 3^k段の逆三角形の最上段のマス数は必ず偶数である。よって、0, 1, 0, 1, … のように交互に塗られたマスが逆三角形の最上段になるとき、最上段の両端のマスの色は必ず異なる。

(a) $3^k+1 \leq n \leq 2\cdot 3^k$ のとき



最上段の両端を0, その内側を1, 0, 1と順に対称的に塗る.

上から3^k段の逆三角形については仮説が成立する.

このとき, この逆三角形は対称軸と交じわるので, [1]

最上段の色の並びは 0, 1, 0, 1, … が 1, 0, 1, 0, …

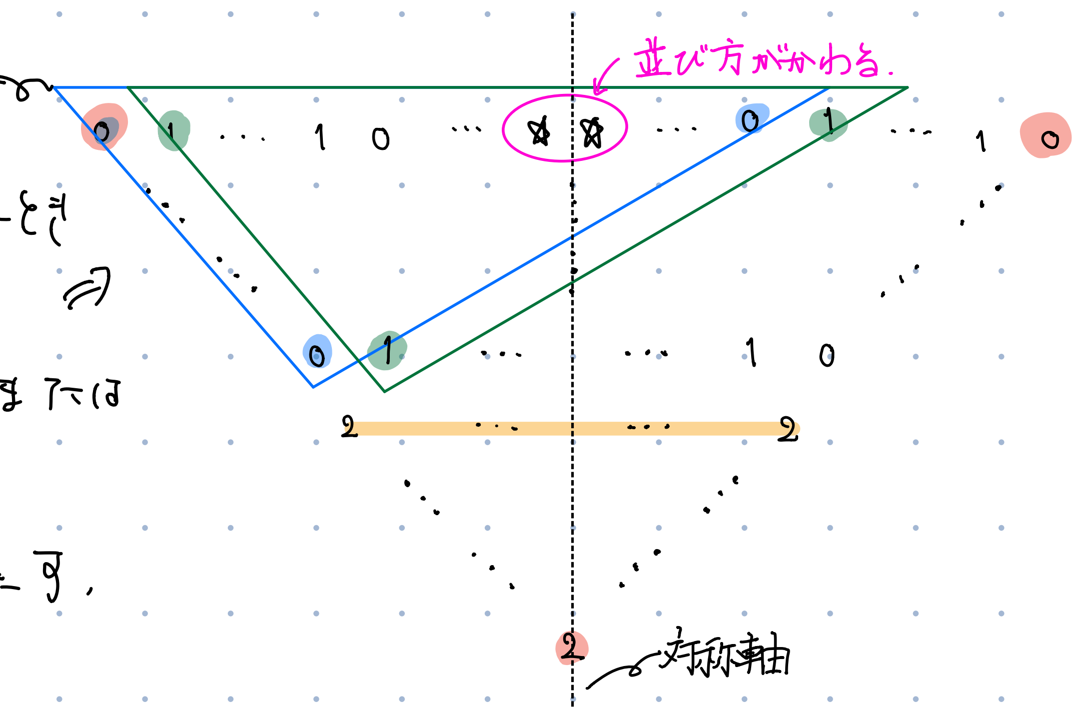
となり, 最上段の両端の2マスの色は同じ.

よって, 常に同色(0 or 1)に $*$ (mix)を適用することになるので上から3^k段は 0, 1, 0, 1, …, 0 となる.

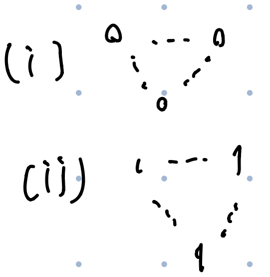
すなわち (i) のときに帰着するので,

最下段の色は 2 になる.

このとき, $0 * 0 = 0 \neq 2$ となり仮説が不成立.



対称的に塗ったとき



または

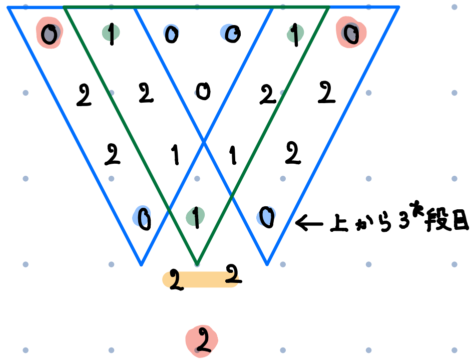
になることを示す.

---

[1] (a) $3^k+1 \leq n \leq 2\cdot 3^k$ のとき 逆三角形の端から対称軸までに $\frac{n}{2}$ マス存在する. このとき $\frac{3^k+1}{2} \leq \frac{n}{2} \leq \frac{2\cdot 3^k}{2} = 3^k$ であるから, 3^k段の逆三角形の辺は必ず対称軸と交じわる.(飛び越す?)

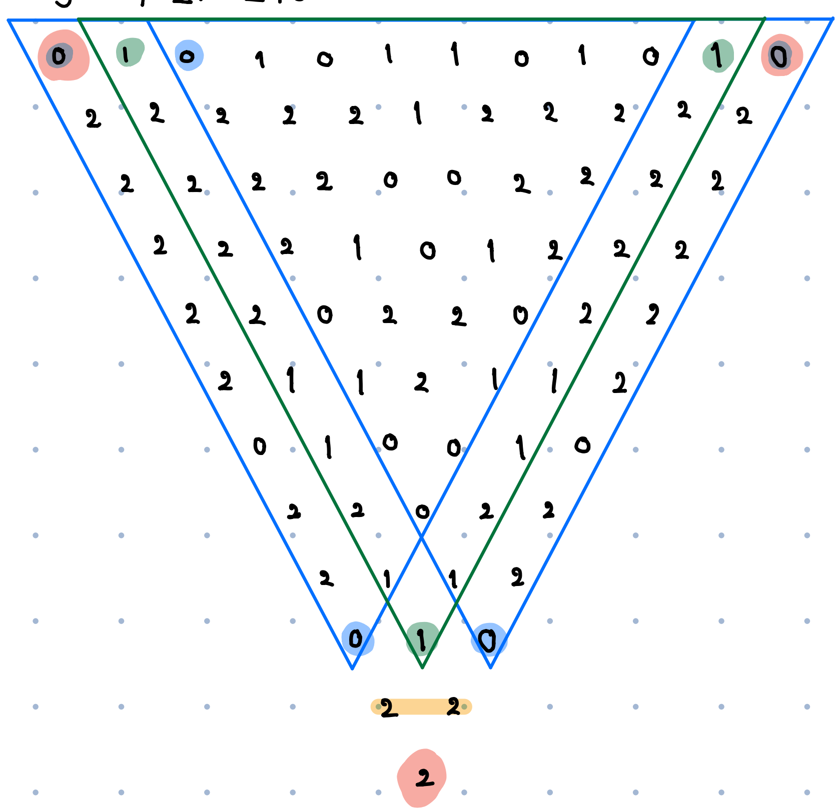
例 $n=5,\ k=1$ のとき

$3^k = 3 < 5 \leq 6 = 2\cdot 3^k$ となる

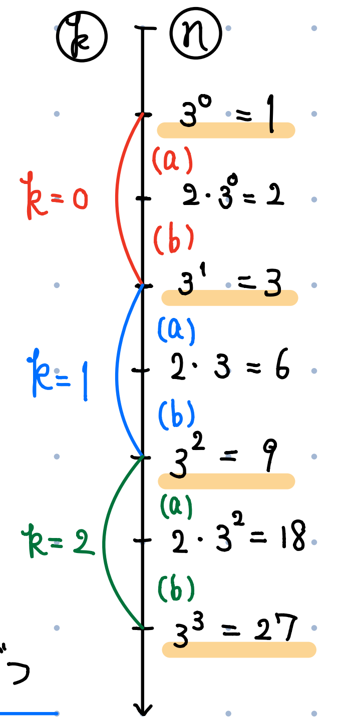


例 $n=11,\ k=2$ のとき

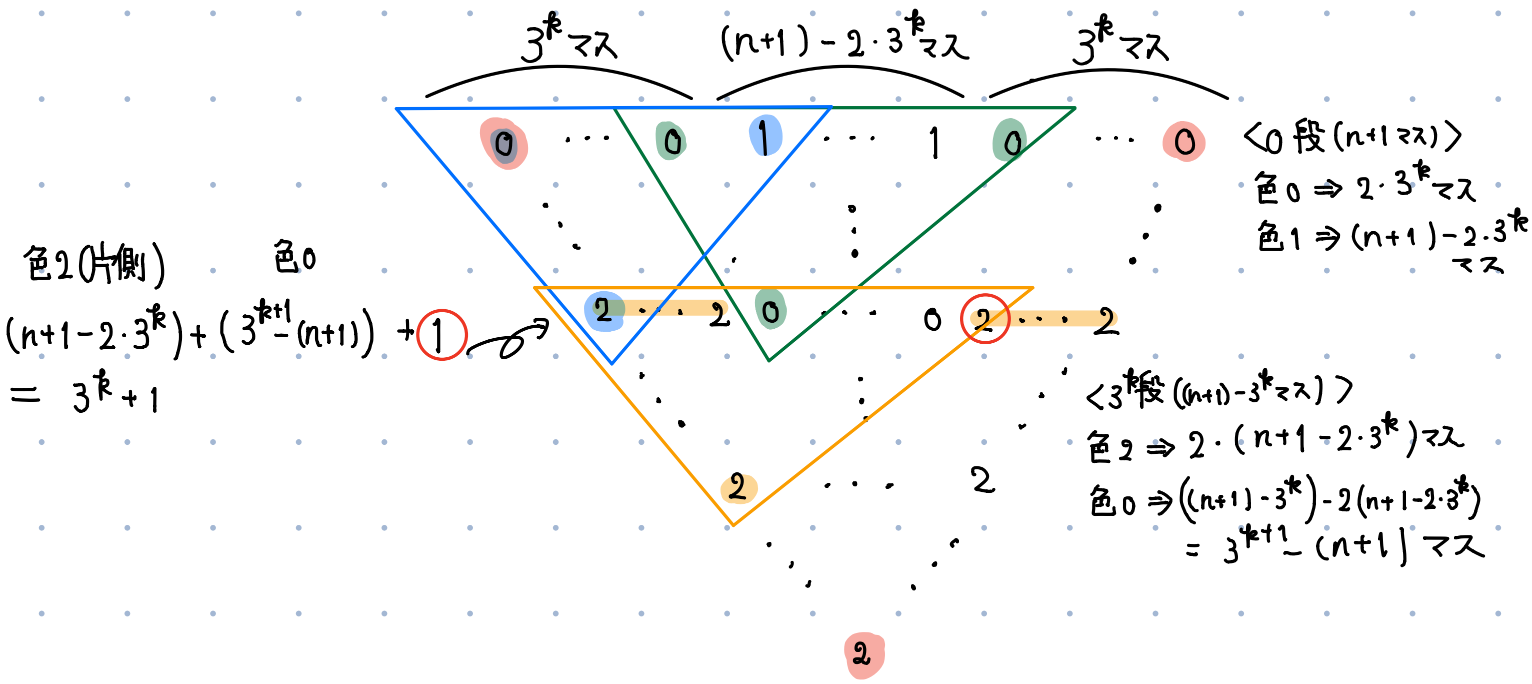
$3^k = 9 \leq 11 \leq 18 = 2\cdot 3^k$ となる



(b) $2\cdot 3^k+1 \le n \le 3^{k+1}-1$ のとき



最上段の両端からそれぞれ3^kマスずつ0で、
その内側を1で塗る。
このとき、0のマスは$2\cdot 3^k$マスであり
1のマスは$(n+1)-2\cdot 3^k$マスである。
よって、bの条件より必ず1のマスの方が
0のマス(片側)よりも少なくなる。[2]
したがって、上から3^k段は$n+1-2\cdot 3^k$マスずつ
2を両端から塗り、その内側に0を$3^{k+1}-(n+1)$個塗る。
さらに3^k段下(上から$2\cdot 3^k$段目)に対しても同様に予測すると
すべて2を塗ることになる。よって、最下段の色は2になる。
このとき、$0*0=0\neq 2$となり仮説が不成立。



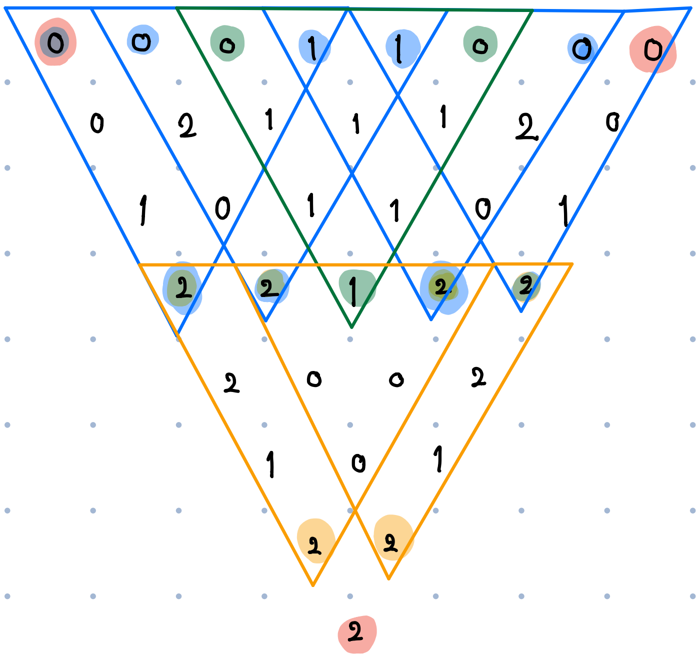
---

[2] bの条件 $2\cdot 3^k+1 \le n \le 3^{k+1}-1$ より

$$2\cdot 3^k+2 \leqq n+1 \leqq 3^{k+1} \iff 2 \leqq \underbrace{n+1-2\cdot 3^k}_{\text{色1のマス数}} \leqq 3^{k+1}-2\cdot 3^k = \underbrace{3^k}_{\text{色0のマス数(片側)}}$$

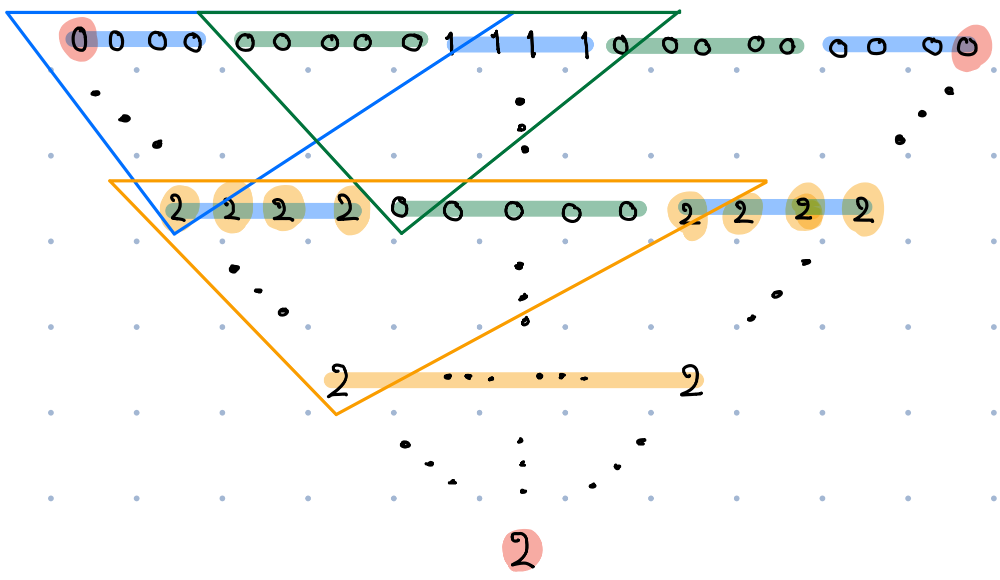
例 $n=7,\ k=1$ のとき

$2\cdot 3^{k}+1=7\leq 7\leq 8=3^{k+1}-1$ となる.



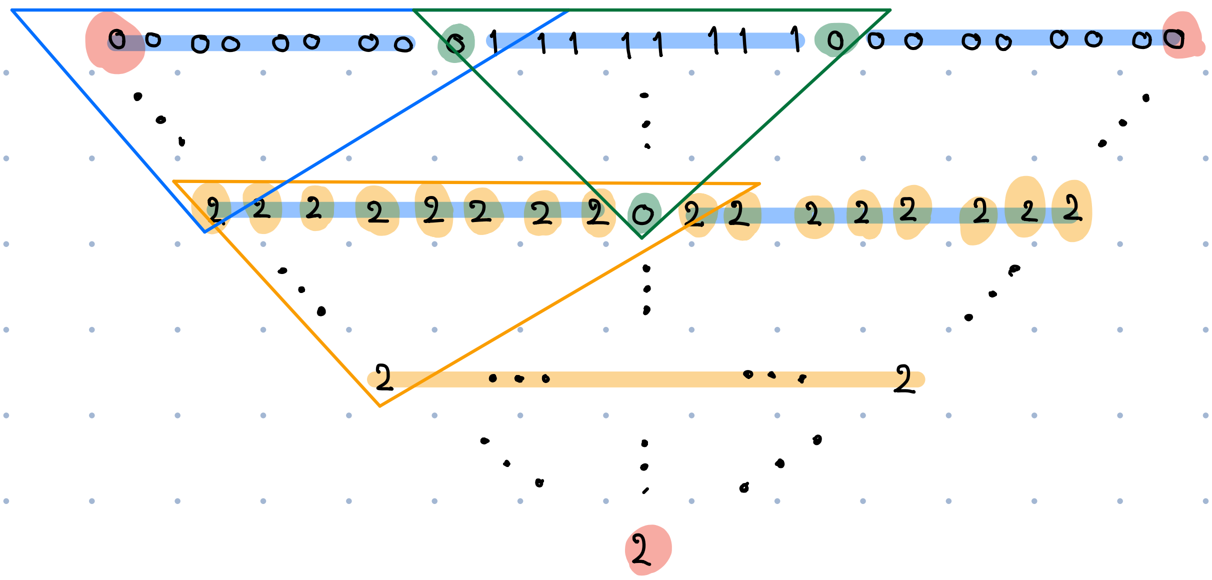
例 $n=21,\ k=2$ のとき

$2\cdot 3^{k}+1=19\leq 21\leq 26=3^{k+1}-1$ となる.



(例) $n=25,\ k=2$ のとき

$2\cdot 3^k+1=19\leq 25\leq 26=3^{k+1}-1$ となる.



(a), (b) より (ii) のときは予測が成立しない例(塗り方)が存在するので仮説は不成立.

(i), (ii) より $n\neq 3^k$ となる任意の n について仮説が不成立.

以上より $n=3^k$ となる $k\in\mathbb{N}$ が存在する $\Longleftrightarrow$ n 段で仮説が成立. ☒

以降，$0, 1, 2 \in \mathrm{Color}$ をそれぞれ red, yel, blu とする.

Thm 1 (Coq)

$\forall c_0, c_1, c_2 \in \mathrm{Color},$

$(\forall x, y \in \mathbb{N}, \exists k \in \mathbb{N}. (\mathrm{Cpos}(x, y, c_0) \land \mathrm{Cpos}(x+3^k, y, c_1) \land \mathrm{Cpos}(x, y+3^k, c_2)) \Leftrightarrow c_2 = \mathrm{mix}(c_0, c_1))$.

～ 以降，必要性（$\Leftarrow$）の証明に用いる記号の定義や補題を示す ～

Def（偶数）

$n \in \mathbb{N}$, $\mathrm{Even}(n) \overset{def}{\Longleftrightarrow} \exists m \in \mathbb{N}. (n = 2m)$.

- $\mathrm{Even}(n)$ は「n は偶数」を表す.

Def（奇数）

$n \in \mathbb{N}$, $\mathrm{Odd}(n) \overset{def}{\Longleftrightarrow} \exists m \in \mathbb{N}. (n = 2m+1)$

- $\mathrm{Odd}(n)$ は「n は奇数」を表す.

Lem（対偶）

$\forall P, Q \in \mathrm{Prop}$ [命題全体]. $((P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow (\neg Q \Rightarrow \neg P))$.

Lem（nの偶奇）

$\forall n \in \mathbb{N}, (\mathrm{Even}(n) \vee \mathrm{Odd}(n))$.

Lem（nが偶数のときの反例）

$$\forall n \in \mathbb{N}. \left(\left(\mathrm{Even}(n) \wedge \begin{array}{l} \forall l \in \mathbb{N}. ((\mathrm{Even}(l) \wedge 0 \leq l \leq n) \Rightarrow \mathrm{Cpos}(l, 0, \mathrm{red})) \\ \wedge\ \forall l' \in \mathbb{N}. ((\mathrm{Odd}(l') \wedge 0 \leq l' \leq n) \Rightarrow \mathrm{Cpos}(l', 0, \mathrm{yel})) \end{array} \right) \Rightarrow \left(\begin{array}{l} \forall x \in \mathbb{N}. \\ (0 \leq x \leq n-1) \wedge \mathrm{Cpos}(x, 1, \mathrm{blu}) \end{array} \right) \right)$$

Lem（すべて青色の段が存在するとき）

$\exists y \in \mathbb{N}. (\forall x \in \mathbb{N}. (\mathrm{Cpos}(x, y, \mathrm{blu})) \Rightarrow \forall y' \in \mathbb{N} (y' \leq y \wedge \forall x' \in \mathbb{N}. \mathrm{Cpos}(x', y', \mathrm{blu})))$.

Lem（n（奇数）の場合分け）

$\forall n \in \mathbb{N}, (\exists k. (n = 3^k \vee (3^k + 1 \leq n \leq 2 \cdot 3^k) \vee (2 \cdot 3^k + 1 \leq n \leq 3^{k+1})))$

Lem ($3^k+1 \le n \le 2\cdot 3^k$ のとき)

$\forall n \in \mathbb{N}.$

$$
\forall n\in\mathbb{N}.\ \exists k\in\mathbb{N}\left(\left(\begin{array}{c}\mathrm{Odd}(n) \ \wedge \ 3^k+1 \le n \le 2\cdot 3^k \\ \wedge \\ \forall \ell \in\mathbb{N}.\left(\left(\mathrm{Even}(\ell) \wedge 0\le \ell < \frac{n+1}{2}\right) \vee \left(\mathrm{Odd}(\ell) \wedge \frac{n+1}{2} \le \ell \le n\right) \Rightarrow \mathrm{Cpos}(\ell, 0, \mathrm{red})\right) \\ \wedge \\ \forall \ell' \in\mathbb{N}.\left(\left(\mathrm{Odd}(\ell') \wedge 0\le \ell' < \frac{n+1}{2}\right) \vee \left(\mathrm{Even}(\ell') \wedge \frac{n+1}{2} \le \ell' < n\right) \Rightarrow \mathrm{Cpos}(\ell', 0, \mathrm{yel})\right)\end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{c}\mathrm{Odd}(3^k) \\ \wedge \\ \forall \ell \in\mathbb{N}.\left(\left(\mathrm{Even}(\ell) \wedge 0\le \ell < 3^k\right) \Rightarrow \mathrm{Cpos}(\ell, 3^k, \mathrm{red})\right) \\ \wedge \\ \forall \ell' \in\mathbb{N}.\left(\left(\mathrm{Odd}(\ell') \wedge 0\le \ell' < 3^k\right) \Rightarrow \mathrm{Cpos}(\ell', 3^k, \mathrm{yel})\right)\end{array}\right)\right)
$$