〈色の塗り方〉

$$\mathrm{colorYB}(x, n, z) \underset{\mathrm{def}}{=} \begin{cases} Y & (0 \leqq z-x \leqq n \ \&\& \ \mathrm{odd}(z-x) == \mathrm{false}) \\ B & (0 \leqq z-x \leqq n \ \&\& \ \mathrm{odd}(z-x) == \mathrm{true}) \\ Y & (\mathrm{otherwises}) \end{cases}$$

<u>Lem YB1</u>

$\forall x, n,$

$\forall i \ (0 \leq i \leq n \ \&\& \ \mathrm{odd}(i) == \mathrm{false} \to \mathrm{colorYB}(x, n, x+i) = Y).$

prf. $0 \leq i \leq n \ \&\& \ \mathrm{odd}(i) == \mathrm{false}$ となる x, n, i をとる.

$(x+i) - x = i$ より $\mathrm{colorYB}(x, n, x+i) = Y$. //

<u>Lem YB2</u>

$\forall x, n,$

$\forall i \ (0 \leq i \leq n \ \&\& \ \mathrm{odd}(i) == \mathrm{true} \to \mathrm{colorYB}(x, n, x+i))$.

prf. $0 \leq i \leq n \ \&\& \ \mathrm{odd}(i) == \mathrm{true}$ となる x, n, i をとる.

$(x+i) - x = i$ より $\mathrm{colorYB}(x, n, x+i) = B$. //

LemYB3

$\forall x, n,$ odd(n) == false $\to$
(colorYB(x,n,x) = colorYB$(x,n,x+n)$).

prf. odd(n) == false となる x, n をとる.

$0 \leq 0$, $0 \leq n$ より $0 \leq 0 \leq n$ であり odd(0) == false.

LemYB1 より colorYB(x,n,x) = colorYB$(x,n,x+0)$ = Y.

$0 \leq n$, $n \leq n$ より $0 \leq n \leqq n$ であり odd(n) == false.

LemYB1 より colorYB$(x,n,x+n)$ = Y.

よって, colorYB(x,n,x) = colorYB$(x,n,x+n)$. //

Even A

$\forall x, y, n,$

$\forall i\,(0 \le i \le n \to Cpos(x+i, y, colorYB(x,n,x+i))) \to \forall i\,(0 \le i \le n-1 \to Cpos(x+i, y+1, R))$

prf. x, y, nをとる.

$\forall i\,(0 \le i \le n \to Cpos(x+i, y, colorYB(x,n,x+i)))$ を仮定する.

$0 \le i \le n-1$ となる i をとる.

$i \le n-1$, $n-1 \le n$ より $i \le n$ となるので $0 \le i \le n$.

よって, $Cpos(x+i, y, colorYB(x,n,x+i))$.

また, $i \le n-1$ より $i+1 \le n$ となるので, $0 \le i+1 \le n$

よって, $Cpos(x+i+1, y, colorYB(x,n,x+i+1))$.

C-exists より $Cpos(x+i, y+1, c)$ となる c が存在し,

$c = c'$ とすると $Cpos(x+i, y+1, c')$.

C-mix より $c' = mix(colorYB(x,n,x+i), colorYB(x,n,x+i+1))$.

- $odd(i) == false$ のとき

  $odd((x+i)-x) == odd(i) == false$ より $colorYB(x,n,x+i) = Y$

  $odd((x+i+1)-x) == odd(i+1) == true$ より $colorYB(x,n,x+i+1) = B$

  よって, $c' = mix(Y, B) = R$ となり $Cpos(x+i, y+1, R)$.

- $odd(i) == true$ のとき

  $odd((x+i)-x) == odd(i) == true$ より $colorYB(x,n,x+i) = B$.

  $odd((x+i+1)-x) == odd(i+1) == false$ より $colorYB(x,n,x+i+1) = Y$.

  よって, $c' = mix(B, Y) = R$ となり $Cpos(x+i, y+1, R)$. //

All Red（証明済み）

$^\forall x, y, n$

$(^\forall i\ (0 \leq i \leq n \rightarrow Cpos(x+i, y, R)) \rightarrow Cpos(x, y+n, R).$

Even B

$^\forall x, y, n \in \mathbb{N}$

$^\forall i\,(0 \leq i \leq n \rightarrow Cpos(x+i, y, colorYB(x, n, x+i)) \rightarrow Cpos(x, (y+n), R).$

prf. x, y, nをとる.

$^\forall i\,(0 \leq i \leq n \rightarrow Cpos(x+i, y, colorYB(x, n, x+i))$を仮定する.

EvenA より $^\forall i\,(0 \leq i \leq n-1 \rightarrow Cpos(x+i, y+1, R))$

AllRed より $Cpos(x, (y+1)+(n-1), R)$.

よって, $Cpos(x, y+n, R)$. //

false Color（証明済み）

$^\forall x, y, {}^\forall c_0, c_1$

$(c_0 \neq c_1 \wedge Cpos(x, y, c_0) \wedge Cpos(x, y, c_1)) \rightarrow false.$

EvenC

$\forall x, y, n$

$$\left(\mathrm{odd}(n) == \mathrm{false}\right) \to \neg\left(\begin{array}{l}\forall c : \mathrm{color},\ \forall f : \mathrm{nat} \to \mathrm{Color} \\ \mathrm{Triangle}(x, y, n, f(x), f(x+n), c)\end{array}\right)$$

prf. x, yをとる.

$\mathrm{odd}(n) == \mathrm{false}$ となる nをとる.

$\left(\begin{array}{l}\forall c : \mathrm{color},\ \forall f : \mathrm{nat} \to \mathrm{Color} \\ \mathrm{Triangle}(x, y, n, f(x), f(x+n), c)\end{array}\right)$ を仮定して矛盾を示す.

C-paint より $\forall i\,(0 \le i \le n \to \mathrm{Cpos}(x+i, y, \mathrm{colorYB}(x+i))$

- EvenB より $\mathrm{Cpos}(x, y+n, R)$.
- $0 \le 0 \le n$, $\mathrm{odd}(0) == \mathrm{false}$ より $\mathrm{Cpos}(x+0, y, \mathrm{colorYB}(x, n, x))$

  $0 \le n \le n$, $\mathrm{odd}(n) == \mathrm{false}$ より $\mathrm{Cpos}(x+n, y, \mathrm{colorYB}(x, n, x+n))$.

  C-exists より $\mathrm{Cpos}(x, y+n, c)$ となる cが存在する.

  $c = c'$ とすると $\mathrm{Cpos}(x, y+n, c')$.

  仮定より $\mathrm{Triangle}(x, y, n, \mathrm{colorYB}(x, n, x), \mathrm{colorYB}(x, n, x+n), c')$

  よって, $c' = \mathrm{mix}(\mathrm{colorYB}(x, n, x), \mathrm{colorYB}(x, n, x+n))$

  さらに, LemYB3 より $\mathrm{colorYB}(x, n, x) = \mathrm{colorYB}(x, n, x+n)$ より

  $c' = \mathrm{mix}(\mathrm{colorYB}(x, n, x), \mathrm{colorYB}(x, n, x))$.

  このとき, $0 \le 0 \le n$, $\mathrm{odd}(x-x) == \mathrm{odd}(0) == \mathrm{false}$ であるから

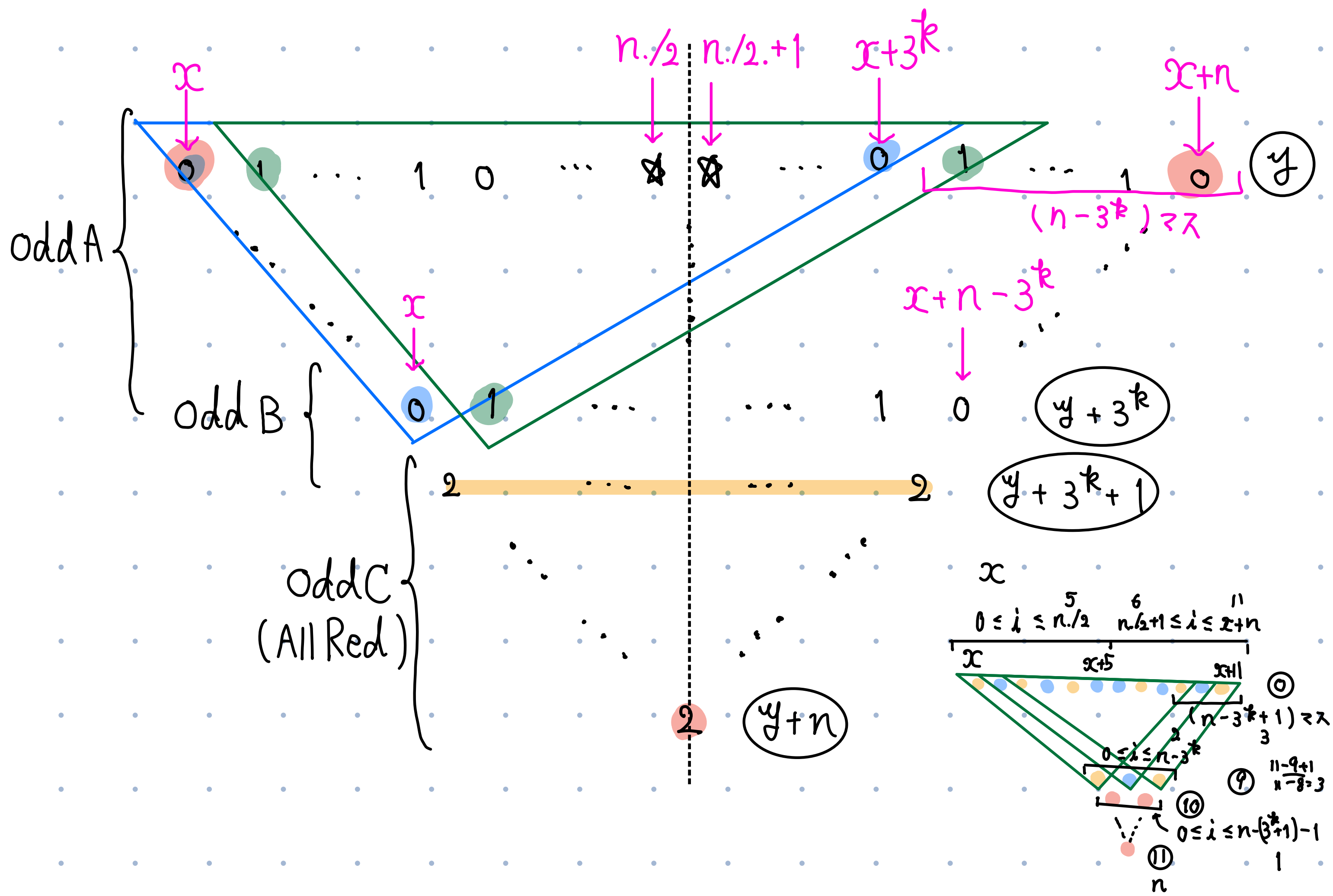
  LemYB1 より $\mathrm{colorYB}(x, n, x) = Y$ となり $c' = \mathrm{mix}(Y, Y) = Y$.

  よって, $\mathrm{Cpos}(x, y+n, Y)$

以上より $R \ne Y$ であるから falsecolor より矛盾 //

〈色の塗り方〉

$$
\mathrm{colorYBBY}(x,n,z) \overset{\mathrm{def}}{=} \begin{cases}
Y \left(\begin{array}{ll} 0 \leq z-x \leq +n/2 \ \&\& & \mathrm{odd}(z-x) == \mathrm{false} \\ n/2+1 \leq z-x \leq n \ \&\& & \mathrm{odd}(z-x) == \mathrm{true} \end{array} \right) \\
B \left(\begin{array}{ll} 0 \leq z-x \leq +n/2 \ \&\& & \mathrm{odd}(z-x) == \mathrm{true} \\ n/2+1 \leq z-x \leq n \ \&\& & \mathrm{odd}(z-x) == \mathrm{false} \end{array} \right) \\
Y \ (\text{otherwises})
\end{cases}
$$



Lem YBBY1

$^\forall x, n,$

$^\forall i\ ((0 \leq i \leq n./2$ && $odd(i) == false) \to colorYBBY(x, n, x+i) = Y).$

prf. $0 \leq i \leq n./2$ && $odd(i) == false$ となる x, n, i をとる.

$(x+i) - x = i$ より $colorYBYB(x, n, x+i) = Y$ //

Lem YBBY2

$^\forall x, n,$

$^\forall i\ ((n./2+1 \leq i \leq n$ && $odd(i) == true) \to colorYBBY(x, n, x+i) = Y).$

prf. $n./2+1 \leq i \leq n$ && $odd(i) == true$ となる x, n, i をとる.

$(x+i) - x = i$ より $colorYBYB(x, n, x+i) = Y$ //

Lem YBBY3

$^\forall x, n,$

$^\forall i\ ((0 \leq i \leq n./2$ && $odd(i) == true) \to colorYBBY(x, n, x+i) = B).$

prf. $0 \leq i \leq n./2$ && $odd(i) == true$ となる x, n, i をとる.

$(x+i) - x = i$ より $colorYBYB(x, n, x+i) = B$ //

Lem YBBY4

$\forall x, n,$

$\forall i\ ((n./2+1 \le i \le n\ \&\&\ odd(i) == false) \to colorYBBY(x,n,x+i) = B).$

prf. $n./2+1 \le i \le n\ \&\&\ odd(i) == false$ となる x, n, i をとる.

$(x+i) - x = i$ より $colorYBYB(x,n,x+i) = B$ //

Lem YBBY5

$\forall x, n, odd(n) == true \to$

$(colorYBBY(x,n,x) = colorYBBY(x,n,x+n)).$

prf. $odd(n) == true$ となる x, n をとる.

$0 \le 0,\ 0 \le n$ より $0 \le 0 \le n$ であり $odd(0) == false.$

Lem YBBY1 より $colorYBBY(x,n,x) = colorYBBY(x,n,x+0) = Y.$

$n./2+1 \le n,\ n \le n$ より $n./2+1 \le n \le n$ であり $odd(n) == false.$

Lem YBBY2 より $colorYBBY(x,n,x+n) = Y.$

よって, $colorYBBY(x,n,x) = colorYBBY(x,n,x+n)$ //

OddA

$\forall x, y, n, k,$

$\left(\begin{array}{l} \circ\ 3^k \le n \le 3^k * 2 \ \&\&\ odd(n) == true \to \\ \circ\ \forall x', y', C_0, C_1, C_2.\ Triangle(x', y', 3^k, C_0, C_1, C_2) \to \\ \circ\ \forall i\ (0 \le i \le n \to Cpos(x+i, y, colorYBBY(x, n, x+i))) \end{array}\right. \to$

$\forall i\ (0 \le i \le n - 3^k \to Cpos(x+i, y+3^k, colorYB(x, n-3^k, x+i)))$

prf. x, y をとる.

$3^k \le n \le 3^k * 2 \ \&\&\ odd(n) == true$ となる n, k をとる.

$\left(\begin{array}{l} \forall x', y', C_0, C_1, C_2.\ Triangle(x', y', 3^k, C_0, C_1, C_2) \\ \forall i\ (0 \le i \le n \to Cpos(x+i, y, colorYBBY(x, n, x+i))) \end{array}\right)$ を仮定する.

$0 \le i \le n - 3^k$ となる i をとる.

$i \le n - 3^k$, $n - 3^k \le n$ より $i \le n$ となるから $0 \le i \le n$.

よって, $Cpos(x+i, y, colorYBBY(x, n, x+i)))$.

$i \le n - 3^k$ より $i + 3^k \le n$ となるから $0 \le i + 3^k \le n$.

よって, $Cpos(x+i, y, colorYBBY(x, n, x+i+3^k)))$.

C-exists より $Cpos(x+i, y+3^k, c)$ となる c が存在する. ($c = c'$ とする)

仮定より $Triangle(x, y, n, colorYBBY(x, n, x+i), colorYBBY(x, n, x+i+3^k), c')$

よって, $c' = mix(colorYBBY(x, n, x+i), colorYBBY(x, n, x+i+3^k))$.

- $odd(i) == false$ のとき

  $odd((x+i) - x) == odd(i) == false$ だから LemYBBY1 より $colorYBBY(x, n, x+i) = Y$

  $odd((x+i+3^k) - x) == odd(i+3^k) == true$ だから LemYBBY2 より $colorYBBY(x, n, x+i+3^k) = Y$.

  よって, $c' = mix(Y, Y) = Y = colorYB(x, n-3^k, x+i)$ となり, ($\because$ LemYB1)

  $Cpos(x+i, y, colorYBBY(x, n, x+i))$

- $odd(i) == true$ のとき

$odd((x+i)-x) == odd(i) == true$ だから LemYBBY3 より $colorYBBY(x, n, x+i) = B$

$odd((x+i+3^k)-x) == odd(i+3^k) == false$ だから LemYBBY4 より $colorYBBY(x, n, x+i+3^k) = B$.

よって, $C' = mix(B, B) = B = colorYB(x, n-3^k, x+i)$ となり, (∵ LemYB2)

$Cpos(x+i, y, colorYBBY(x, n, x+i))$

OddB

$^\forall x, y, n, k,$

$$\left(\begin{array}{l} \circ\ 3^k \leq n \leq 3^k * 2 \ \&\&\ odd(n) == true \rightarrow \\ \circ\ ^\forall x', y', C_0, C_1, C_2.\ Triangle(x', y', 3^k, C_0, C_1, C_2) \rightarrow \\ \circ\ ^\forall i\ (0 \leq i \leq n \rightarrow Cpos(x+i, y, colorYBBY(x, n, x+i))) \end{array}\right) \rightarrow$$

$^\forall i\ (0 \leq i \leq (n-3^k)-1 \rightarrow Cpos(x+i, y+(3^k+1), R))$

prf. x, y, n, k をとる.

OddA より $^\forall i\ (0 \leq i \leq n-3^k \rightarrow Cpos(x+i, y+3^k, colorYB(x, n-3^k, x+i)))$

EvenA より $^\forall i\ (0 \leq i \leq (n-3^k)-1 \rightarrow Cpos(x+i, (y+3^k)+1, R))$ //

AllRed（証明済み）

$^\forall x, y, n$

$(^\forall i\ (0 \le i \le n \to Cpos(x+i, y, R))) \to Cpos(x, y+n, R).$

OddC

$^\forall x, y, n, k,$

- $3^k \le n \le 3^k * 2\ \&\&\ odd(n) == true \to$
- $^\forall x', y', C_0, C_1, C_2.\ Triangle(x', y', 3^k, C_0, C_1, C_2) \to$
- $^\forall i\ (0 \le i \le n \to Cpos(x+i, y, colorYBBY(x, n, x+i))) \to$

$Cpos(x, y+n, R)$

prf. x, y, n, kをとる.

OddBより $^\forall i\ (0 \le i \le (n-3^k)-1 \to Cpos(x+i, y+(3^k+1), R))$

AllRedより $Cpos(x, (y+3^k+1)+((n-3^k)-1), R)$

よって, $Cpos(x, y+n, R)$ //

falseColor（証明済み）

$^\forall x, y, {}^\forall C_0, C_1$

$(C_0 \ne C_1 \wedge Cpos(x, y, C_0) \wedge Cpos(x, y, C_1)) \to false.$

OddD

$\forall x, y, n, k,$

$$\left(\begin{array}{c} 3^k \le n \le 3^k * 2 \\ \&\& \\ odd(n) == true \end{array} \right) \to \neg \left(\begin{array}{l} \forall c : color, \forall f : nat \to Color \\ Triangle(x, y, n, f(x), f(x+n), c) \end{array} \right)$$

prf. x, yをとる.

$odd(n)$, $3^k \le n \le 3^k * 2$ となる n, kをとる.

$\left(\begin{array}{l} \forall c : color, \forall f : nat \to Color \\ Triangle(x, y, n, f(x), f(x+n), c) \end{array} \right)$ を仮定して矛盾を示す.

十分性は示されているので $\forall x', y', C_0, C_1, C_2. Triangle(x', y', 3^k, C_0, C_1, C_2)$

C-paint より $\forall i\ (0 \le i \le n \to Cpos(x+i, y, colorYBBY(x, n, x+i)))$

- OddC より $Cpos(x, y+n, R)$.
- $0 \le 0 \le n$ より $Cpos(x+0, y, colorYBBY(x, n, x+0))$.

  $0 \le n \le n$ より $Cpos(x+n, y, colorYBBY(x, n, x+n))$.

  C-exists より $Cpos(x, y+n, c)$ となる c が存在する. ($c = c'$とする)

  仮定より $Triangle(x, y, n, colorYBYB(x, n, x+0), colorYBYB(x, n, x+n), c')$

  よって, $c' = mix(colorYBBY(x, n, x), colorYBBY(x, n, x+n))$.

  さらに, LemYBBY5より $colorYBBY(x, n, x) = colorYBBY(x, n, x+n)$ だから

  $c' = mix(colorYBBY(x, n, x), colorYBBY(x, n, x))$.

  $Cpos(x, y+n, mix(colorYBBY(x, n, x), colorYBBY(x, n, x+n))$.

  このとき, $0 \le 0 \le n$, $odd(x-x) == odd(0) == false$ であるから

  LemYBBY1 より $colorYB(x, n, x) = Y$ となり $c' = mix(Y, Y) = Y$.

  よって, $Cpos(x, y+n, Y)$

以上より $R \ne Y$ であるから falsecolor より矛盾 //