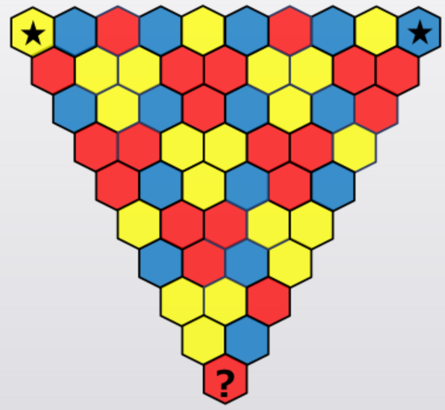
研究の背景

三角形三色問題

[仮説]　n 段の逆三角形に配置されたマスを上から下へ規則Aに従い3色で塗っていく．
このとき，最下行の色は最上行の両端の色を隣に並べて規則Aに従った色になる．

1. n =10のときに仮説が成り立つことを証明せよ．
2. 10段以外でも仮説が成立する段数が存在するかを調べ，存在するのならば n の一般式を求めなさい．



<規則A>

i. 隣り合う2つのマスの色が同じとき，同じ色を間にある下のマスに塗る

ii. 隣り合う2つのマスの色が異なるとき，どちらとも違う第三の色を間にある下のマスに塗る

<色の表し方と塗り方について>

セルを塗る色の集合をcolor_Setとし，以下のようにする．

$$\text{color\_Set} := \{0, 1, 2\}$$

このとき 0は赤，1は黄，2は青のつもりである．
さらに，上から x 行目，左から y 列目の色が c であることを $CT(x, y, c)$ と表すことにする．

さらに，色 c_1, c_2 から規則Aに従って塗る色を決める演算を $*$ とすると，

$$c_1 * c_2 = -(c_1 + c_2) \pmod 3$$

と定義できる．

prf. 任意の $n \in \mathbb{N}$ について,

$\exists k \in \mathbb{N}\ (n = 3^k + 1) \Rightarrow$ n段で仮説成立 …(※)

を示す.

P(n)と表す.

任意にnを1つとる.

今回は $\forall k\ (n = 3^k + 1 \Rightarrow P(n))$ を示すことで,

(※)が成立することを示す.

kに関する数学的帰納法で示す.

(a) $k=0$ のとき

$n = 3^0 + 1 = 2$ となり, 明らかに成立する.

(b) $k = l$ のとき成立すると仮定して,

$k = l+1$ のとき P(n) であることを示す.

以降,

上から 1 段目, 左から x 番目の色を d_x,

〃 $3^l + 1$ 〃 c_x

〃 $2 \cdot 3^l + 1$ 〃 b_x

〃 $3^{l+1} + 1$ 〃 a_x

(ただし, x は1以上の自然数)

とかくことにする.

《グラフィカルなイメージは下記の図1を参照》

図1

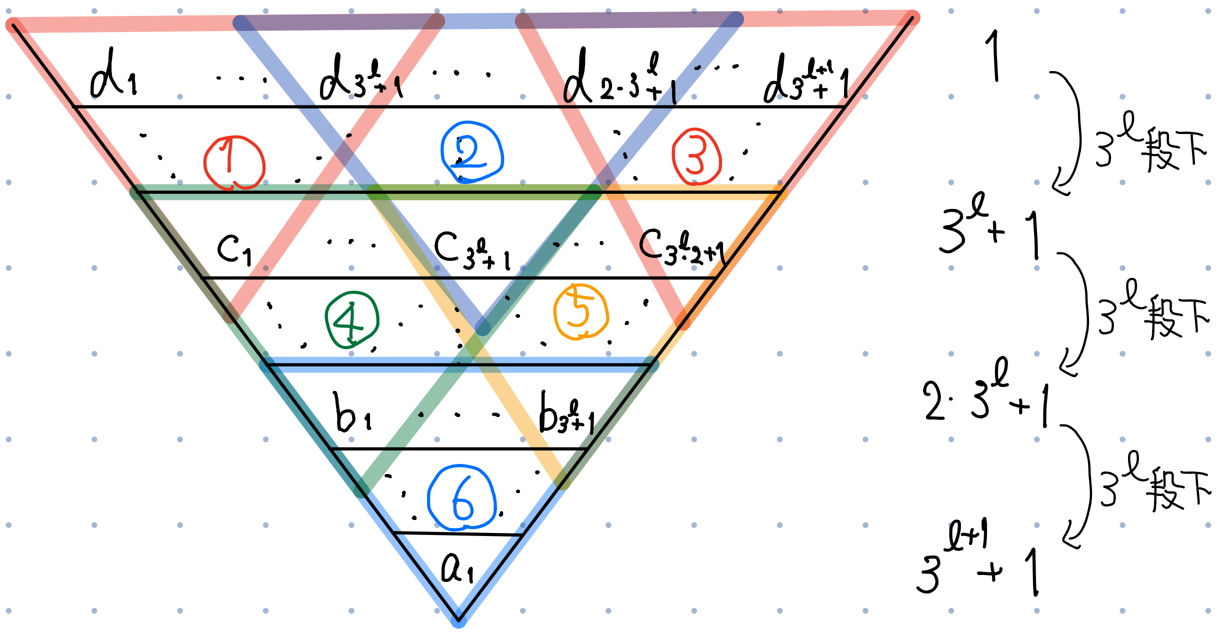


図1の逆三角形において，図1のように

①〜⑥の逆三角形に分ける.

帰納法の仮定よりそれぞれ逆三角形において

$P(3^{\ell+1}+1)$が成立する.

① $c_1 = d_1 * d_{3^\ell+1} = -(d_1 + d_{3^\ell+1})$

② $c_{3^\ell+1} = d_{3^\ell+1} * d_{2\cdot 3^\ell+1} = -(d_{3^\ell+1} + d_{2\cdot 3^\ell+1})$

③ $c_{3^\ell\cdot 2+1} = d_{2\cdot 3^\ell+1} * d_{3^{\ell+1}+1} = -(d_{2\cdot 3^\ell+1} + d_{3^{\ell+1}+1})$

さらに，

④ $b_1 = c_1 * c_{3^\ell\cdot 2+1}$

$= d_1 + 2d_{3^\ell+1} + d_{2\cdot 3^\ell+1}$

$= d_1 - d_{3^\ell+1} + d_{2\cdot 3^\ell+1} \pmod 3$

⑤ $b_{3^\ell+1} = c_{3^\ell\cdot 2+1} * c_{3^{\ell+1}+1}$

$= d_{3^\ell+1} + 2d_{2\cdot 3^\ell+1} + d_{3^{\ell+1}+1}$

$= d_{3^\ell+1} - d_{2\cdot 3^\ell+1} + d_{3^{\ell+1}+1} \pmod 3$

最後に,

⑥ $a_0 = b_1 * b_{3^l+1}$

$= -(d_1 - d_{3^l+1} + d_{2\cdot 3^l+1} + d_{3^l+1} - d_{2\cdot 3^l+1} + d_{3^{l+1}+1})$

$= -(d_1 + d_{3^{l+1}})$

$= d_1 * d_{3^{l+1}}$

(a), (b) より $\forall k\,(n = 3^k+1 \Rightarrow P(n))$ が成立.

したがって, $\exists k\,(n = 3^k+1 \Rightarrow P(n))$ が成立. □

〈2〜10段までの計算〉

- 三角形が2段のときは明らかに成立

- 三角形が3段のとき

2行目の色をそれぞれ c_0, c_1, c_2 とする.

このとき, 1行目の色をそれぞれ b_0, b_1 とすると,

$$b_0 = f(c_0, c_1) = -(c_0 + c_1) \pmod 3$$
$$b_1 = f(c_1, c_2) = -(c_1 + c_2) \pmod 3$$

さらに, 0行目の色を a_0 とすると,

$$\begin{aligned} a_0 &= f(b_0, b_1) \\ &= -(b_0 + b_1) && \pmod 3 \\ &= -(-(c_0 + c_1) - (c_1 + c_2)) && \pmod 3 \\ &= c_0 + 2c_1 + c_2 && \pmod 3 \\ &= c_0 - c_1 + c_2 && \pmod 3 \end{aligned}$$

よって, 3段のときは不成立.

実際, $c_0 = c_2 = 0$, $c_1 = 1$ とすると,

$$a_0 = 0 - 1 + 0 = -1 = 2 \pmod 3$$

となるが,

$$f(c_0, c_2) = -(0+0) = 0 \pmod 3$$

であるから, $a_0 \neq f(c_0, c_2)$ となり不成立.

$$\begin{array}{ccccc} 0 & & 1 & & 0 \\ & 2 & & 2 & \\ & & 2 & & \end{array}$$

○ 三角形が4段のとき

3行目の色をそれぞれ d_0, d_1, d_2, d_3 とする．

このとき2行目の色をそれぞれ c_0, c_1, c_2 とすると

$$c_0 = f(d_0, d_1) = -(d_0+d_1) \pmod 3$$
$$c_1 = f(d_1, d_2) = -(d_1+d_2) \pmod 3$$
$$c_2 = f(d_2, d_3) = -(d_2+d_3) \pmod 3$$

さらに，1行目の色をそれぞれ b_0, b_1 とすると，

$$\begin{aligned} b_0 &= f(c_0, c_1) \\ &= -(c_0+c_1) \pmod 3 \\ &= -(-(d_0+d_1)-(d_1+d_2)) \pmod 3 \\ &= d_0+2d_1+d_2 \pmod 3 \\ &= d_0-d_1+d_2 \pmod 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b_1 &= f(c_1, c_2) \\ &= -(c_1+c_2) \pmod 3 \\ &= -(-(d_1+d_2)-(d_2+d_3)) \pmod 3 \\ &= d_1+2d_2+d_3 \pmod 3 \\ &= d_1-d_2+d_3 \pmod 3 \end{aligned}$$

最後に，0行目の色を a_0 とすると，

$$\begin{aligned} a_0 &= f(b_0, b_1) \\ &= -(b_0+b_1) \pmod 3 \\ &= -((d_0-d_1+d_2)+(d_1-d_2+d_3)) \pmod 3 \\ &= -(d_0+d_3) \pmod 3 \end{aligned}$$

よって，4段のときは成立する．

○ 三角形が5段のとき

4行目の色をそれぞれe_0, e_1, e_2, e_3, e_4とする。

このとき3行目の色をそれぞれd_0, d_1, d_2, d_3とすると、

$$d_0 = f(e_0, e_1) = -(e_0+e_1) \pmod 3$$

$$d_3 = f(e_3, e_4) = -(e_3+e_4) \pmod 3$$

さらに、0行目の色をa_0とすると、

4段のときの計算結果より

$$\begin{aligned} a_0 &= -(d_0+d_3) && \pmod 3 \\ &= -(-(e_0+e_1)-(e_3+e_4)) && \pmod 3 \\ &= e_0+e_1+e_3+e_4 && \pmod 3 \end{aligned}$$

よって、5段のときは不成立。

実際、$e_0=e_2=e_4=0,\ e_1=e_3=1$とすると、

$$a_0 = 0+1+1+0 = 2 \pmod 3$$

となるが、

$$f(e_0, e_4) = -(0+0) = 0 \pmod 3$$

であるから、$a_0 \neq f(e_0, e_4)$となり不成立。

0 1 0 1 0

2 2 2 2

2 2 2

2 2

2

○ 三角形が6段のとき

5行目の色をそれぞれ$g_0, g_1, g_2, g_3, g_4, g_5$とする。

このとき3行目の色をそれぞれd_0, d_1, d_2, d_3とすると、

3段のときの計算結果より

$$d_0 = g_0 - g_1 + g_2 \pmod 3$$
$$d_3 = g_3 - g_4 + g_5 \pmod 3$$

さらに、0行目の色をa_0とすると、

4段のときの計算結果より

$$\begin{aligned} a_0 &= -(d_0 + d_3) \pmod 3 \\ &= -(g_0 - g_1 + g_2 + g_3 - g_4 + g_5) \pmod 3 \\ &= -g_0 + g_1 - g_2 - g_3 + g_4 - g_5 \pmod 3 \end{aligned}$$

よって、6段のときは不成立。

実際、$g_0 = g_1 = g_4 = g_5 = 0$，$g_2 = g_3 = 1$とすると、

$$a_0 = -0 + 0 - 1 - 1 + 0 - 0 = -2 = 1 \pmod 3$$

となるが、

$$f(g_0, g_5) = -(0+0) = 0 \pmod 3$$

であるから、$a_0 \neq f(g_0, g_5)$となり不成立。

0 0 1 1 0 0
0 2 1 2 0
1 0 0 1
2 0 2
1 1
1

。三角形が7段のとき

6行目の色をそれぞれ $h_0, h_1, h_2, h_3, h_4, h_5, h_6$

このとき3行目の色をそれぞれ d_0, d_1, d_2, d_3 とすると、

4段のときの計算結果より

$$d_0 = -(h_0 + h_3) \pmod 3$$
$$d_3 = -(h_3 + h_6) \pmod 3$$

さらに、0行目の色を a_0 とすると、

4段のときの計算結果より

$$\begin{aligned} a_0 &= -(d_0 + d_3) &\pmod 3 \\ &= -(-(h_0 + h_3) - (h_3 + h_6)) &\pmod 3 \\ &= h_0 + 2h_3 + h_6 &\pmod 3 \\ &= h_0 - h_3 + h_6 &\pmod 3 \end{aligned}$$

よって、7段のときは不成立.

実際、$h_0 = h_2 = h_4 = h_6 = 0$, $h_1 = h_3 = h_5 = 1$ とすると、

$$a_0 = 0 - 1 + 0 = -1 = 2 \pmod 3$$

となるが、

$$f(h_0, h_6) = -(0, 0) = 0 \pmod 3$$

であるから、$a_0 \neq f(h_0, h_6)$ となり不成立.

0 1 0 1 0 1 0
2 2 2 2 2 2
2 2 2 2 2
2 2 2 2
2 2 2
2 2
2

○ 三角形が8段のとき

7行目の色をそれぞれ $i_0, i_1, i_2, i_3, i_4, i_5, i_6, i_7$ とする。
このとき3行目の色をそれぞれ d_0, d_1, d_2, d_3 とすると、
5段のときの計算結果より

$$d_0 = i_0 + i_1 + i_3 + i_4 \pmod 3$$
$$d_3 = i_3 + i_4 + i_6 + i_7 \pmod 3$$

さらに、0行目の色を a_0 とすると、
4段のときの計算結果より

$$\begin{aligned} a_0 &= -(d_0 + d_3) && \pmod 3 \\ &= -((i_0+i_1+i_3+i_4)+(i_3+i_4+i_6+i_7)) && \\ &= -i_0 - i_1 - 2i_3 - 2i_4 - i_6 - i_7 && \pmod 3 \\ &= -i_0 - i_1 + i_3 + i_4 - i_6 - i_7 && \pmod 3 \end{aligned}$$

よって、8段のときは不成立。
実際、$i_0 = i_1 = i_2 = i_5 = i_6 = i_7 = 0$，$i_3 = i_4 = 1$ とすると、

$$a_0 = -0-0+1+1-0-0 = 2 \pmod 3$$

となるが、

$$f(i_0, i_7) = -(0+0) = 0 \pmod 3$$

であるから、$a_0 \neq f(i_0, i_7)$ となり不成立。

0 0 0 1 1 0 0 0
0 0 2 1 2 0 0
0 1 0 0 1 0
2 2 0 2 2
2 1 1 2
0 1 0
2 2
2

○ 三角形が9段のとき

8行目の色をそれぞれ $j_0, j_1, j_2, j_3, j_4, j_5, j_6, j_7, j_8$ とする.

このとき3行目の色をそれぞれ d_0, d_1, d_2, d_3 とすると,

6段のときの計算結果より

$$d_0 = -j_0+j_1-j_2-j_3+j_4-j_5 \pmod 3$$

$$d_3 = -j_3+j_4-j_5-j_6+j_7-j_8 \pmod 3$$

さらに, 0行目の色を a_0 とすると,

4段のときの計算結果より

$$a_0 = -(d_0+d_3) \pmod 3$$

$$= -(-j_0+j_1-j_2-j_3+j_4-j_5-j_3+j_4-j_5+j_6+j_7-j_8) \pmod 3$$

$$= j_0-j_1+j_2+2j_3-2j_4+2j_5-j_6-j_7+j_8 \pmod 3$$

$$= j_0-j_1+j_2-j_3+j_4-j_5-j_6-j_7+j_8$$

よって, 9段のときは不成立.

実際, $j_0=j_2=j_4=j_6=j_8=0,\ j_1=j_3=j_5=j_7=j_9=1$ とすると,

$$a_0 = 0-1+0-1+0-1-0-1+0 = -4 = 2 \pmod 3$$

となるが,

$$f(j_0, j_9) = -(0+0) = 0 \pmod 3$$

であるから, $a_0 \neq f(j_0, j_9)$ となり不成立.

0 1 0 1 0 1 0 1 0 0
2 2 2 2 2 2 2 2
2 2 2 2 2 2 2
2 2 2 2 2 2
2 2 2 2 2
2 2 2 2
2 2 2
2 2
2

・三角形が10段のとき

9行目の色をそれぞれ$k_0, k_1, k_2, k_3, k_4, k_5, k_6, k_7, k_8, k_9$とする。

このとき3行目の色をそれぞれd_0, d_1, d_2, d_3とすると、

7段のときの計算結果より

$$d_0 \equiv k_0 - k_3 + k_6 \pmod 3$$
$$d_3 \equiv k_3 - k_6 + k_9 \pmod 3$$

さらに、0行目の色をa_0とすると、

4段のときの計算結果より

$$\begin{aligned} a_0 &\equiv -(d_0 + d_3) \pmod 3 \\ &\equiv -(k_0 - k_3 + k_6 + k_3 - k_6 + k_9) \pmod 3 \\ &\equiv -(k_0 + k_9) \pmod 3 \end{aligned}$$

よって、10段のときは成立。

ここで、成立する段数は、

$$2,\ 4,\ 10,\ \cdots$$

$$\underbrace{+2}_{=2\cdot 3^0} \quad \underbrace{+6}_{=2\cdot 3^1}$$

であるから、成立すると考えられる段数の数列$\{n_k\}$は、

$$\begin{cases} n_k = 2 + \sum_{l=0}^{k-1} 2 \cdot 3^l & (k \geqq 1) \\ n_0 = 2 & (k = 0) \end{cases}$$

と予測できる。このとき、n_kの一般項を求めると、

以下のようになる。

成立する段数の数列を$\{n_k\}$とすると，

$$n_k = 2 + \sum_{l=0}^{k-1} 2\cdot 3^l$$
$$= 2 + \frac{2(3^k - 1)}{3-1}$$
$$= 2 + (3^k - 1)$$
$$= 3^k + 1$$

($k=0$のとき $n_k = 1+1 = 2 = n_1$ となり成立)

よって，一般項n_kは，

$$n_k = 3^k + 1 \quad (k \in \mathbb{N})$$

となる.

$P(n)$はn段で予想可能 のつもり

しかし，$P(n_k)$が成立するのは予測にしか過ぎない. よって，次を示す必要がある.

$$\forall n\,(\exists k\,(n = 3^k + 1) \Rightarrow P(n))$$
$$\Leftrightarrow \forall n\,(\neg P(n) \Rightarrow \forall k\,(n \neq 3^k + 1))$$
$$\Leftrightarrow \forall n\,(P(n) \vee \forall k\,(n \neq 3^k + 1))$$

帰納法の仮定より，$3^{l+1}+1$ 段のマスの色を用いて，$2\cdot 3^{l+1}$ 段のマスの色(一部)が予測可能であるから，

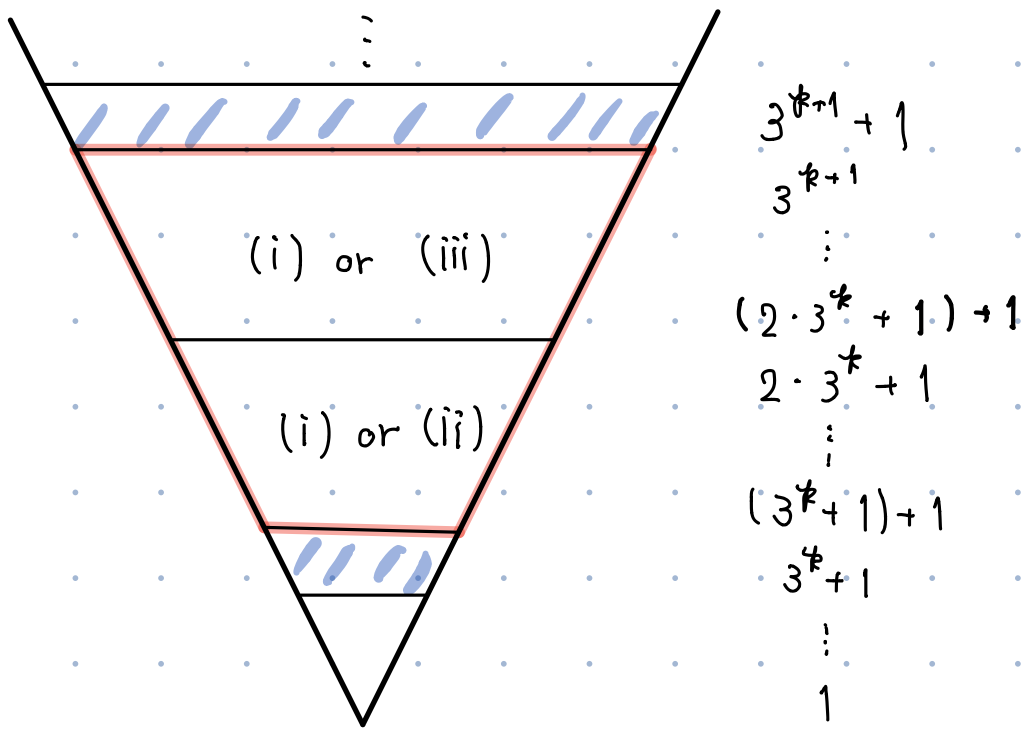
$$b_0 = -(a_0 + a_{3^l})$$
$$b_{3^l} = -(a_{3^l} + a_{3^l\cdot 2})$$
$$b_{3^l\cdot 2} = -(a_{3^l\cdot 2} + a_{3^{l+1}})$$

が成立.

同様にして，$2\cdot 3^{l+1}$ 段のマスの色(一部)から，3^l+1 段のマスの色が予測可能であり，

$$c_0 = -(b_0 +$$

〈反例について（$n \neq 3^k+1$ のとき）〉



(i) n：奇数のとき

最上段を0, 1, 0, 1, …, 1, 0と交互に塗ると、最上段以外が2となるので、仮説不成立.

(ii) n：偶数かつ $(3^k+1)+1 \leqq n \leqq 2\cdot3^k+1$ のとき

最上段の両端を0として、その内側を1, 0, …, 0 1と対称的に塗ると、3^k+1段目より下の段がすべて2となるので、仮説不成立.

(iii) n：偶数かつ $(2\cdot3^k+1)+1 \leqq n \leqq 3^{k+1}$ のとき

最上段の両端から3^kコをすべて0で塗り、その内側をすべて1で塗ると、$2\cdot3^k+1$段目の両端が0となり、その内側がすべて1となる.

以降両端0, 2を交互に繰り返すので、最下段が2となり仮説不成立