日本ソフトウェア科学会第 38 回大会 (2021 年度) 講演論文集

Coq による三角形三色問題の証明

橋本 翔太　木村 大輔

Coq とは数学の証明作成を支援する定理証明支援系である．人間は Coq と対話的に証明作成を行うことで誤りを排除した信頼できる証明を得ることができる．三角形三色問題とは，n 段の逆三角形に配置された六角形のマスに対して，互いに隣接する任意の 3 マスの色が全て同じかどれも異なるように逆三角形を 3 色で塗り分けたとき，逆三角形の 3 頂点のマスの色が必ず全て同じ，もしくはどれも異なるような段数の一般項を求める問題である．この問題は雑誌「数学セミナー」の「エレガントな解答もとむ」欄に出題されており，一般項は 3^k 段の形で表せることが示されている．本研究では，数学セミナーでの証明を Coq で形式化して証明を完成させた． これにより，幾何的な直観に頼った側面のあった元の議論を論理に基づいた形式的な証明に直すことができた．

1　はじめに

Coq [1] とは数学の定理や補題，主張の正しさを保証するためのソフトウェアの 1 つである．証明の作成中の各場面で示すべき主張（サブゴール）に対して人間がサブゴールを示すための次の一手を指示すると Coq は次のサブゴールを提示し，人間の次の一手を待つ．このような対話的なやりとりにより Coq は証明の完成の手助けをする．こういったソフトウェアを定理証明支援系と呼ぶ．証明の規模が大きくなると，複雑な場合分けの漏れがあったり計算ミスなど機械的操作のミスにより人間は誤った証明をしてしまうことがある．Coq の支援を受けることで，このような誤りが排除された信頼できる証明を得ることができる．また，Coq で書かれた証明はプログラミング言語的な側面をもっているため，作成した証明の複製が容易である．Coq を用いて作成した証明ファイルを公開することで，多くの人がこれらを保証済みの証明として各々の目的達成のために利用することができる．

A formal proof for the three-colored triangle problem on Coq

Shota Hashimoto, 東邦大学大学院理学研究科, Toho University.

Daisuke Kimura, 東邦大学大学院理学研究科, Toho University.

本研究では，Coq とその拡張である SSReflect を用いて三角形三色問題の証明の形式化を完成させた．†1 SSReflect [2] [3] は「証明と計算は区別でき，計算は証明を要求しない」(ポワンカレ原理) のポリシーに基づいて設計された Coq の拡張ライブラリである．つまり，証明によるリーズニングよりも計算 (等式変形) を積極的に用いた方が証明を簡略化できる．簡単な同値変形で示すことができる命題論理や等式・不等式に関する主張の証明などは論理式として推論で示すよりも bool 型の項と見なして変形した方が効率がよく，SSReflect はその機能を提供する．

三角形三色問題 [4] [5] [6] とは，次のような問題である：n 段の逆三角形に配置された正六角形のすべてのマスを異なる 3 色を用いて色分けをする．ただし，隣り合う 2 マスとそれらに接する下の段のマスの色は，どれも同じかどれも異なるように塗り分ける．このとき，逆三角形の段数が 3, 9, 27 段の場合 †2 は，規則に従ったどのような色の塗り方をしても逆三角形の端点の 3 マスの色はどれも同じかどれも異なる

†1 `https://github.com/SyotaHashimoto/ThreeColor` から完成させた Coq のコード (“Coq による三角形三色問題の証明.v”) をダウンロードすることができる．

†2 本稿では 0 段目, 1 段目, 2 段目,. . . と数える．「n 段の逆三角形」と書いた場合，一辺のマスの個数は $n + 1$ 個である．

が，一般にはこのような性質は成り立たない．このような性質を満たす段数の一般項は何か？という問題である．この問題の解決方法は大きく分けて 3 つの方法が知られている．[4]

1. パスカルの三角形の値を mod 3 としたものをマスの色と対応させて使い，代数学での *Lucas* の定理と関係のある命題を示すことで解決する方法.
2. 逆三角形のマスの塗り方が n 個の独立パターンに分解できること利用して，重ね合わせの原理を用いることで解決する方法.
3. 比較的少ない段数で成立する段数を調べて段数の規則性 (数列) を見つけ出し，この数列から予測できる段数の一般項を推測する方法.

3 の方法において一般項が 3^k 段であると推測されており，推測された一般項の段数でないならば逆三角形の塗り方の規則に従わない反例が存在することも知られている．

本研究では 3. の方法で推測して得られた一般項が必要十分条件になっていることを SSReflect を用いて証明した．Coq に実装するにあたって，三角形三色問題は幾何的な側面を多くもつ問題であるためこのままでは Coq にコードとして実装することができない．そこで，三角形のマスの状況を表現する論理式を用意し，色塗り規則を関数化することで三角形三色問題の状況を形式化した．また，十分条件の証明の方法としては一般項に現れる自然数 k に関する数学的帰納法を用いて証明した．一方で，必要条件は対偶法と n について場合分けをすることで証明した．

本論文の第 2 章では三角形三色問題の証明の概要について述べる．第 3 章では三角形三色問題の証明を Coq に実装するために必要な準備について述べる．第 4 章では実際に Coq に実装した三角形三色問題の証明について述べる．第 5 章では三角形三色問題を形式化することで得られた知見について述べる．第 6 章ではまとめを述べる．

2 三角形三色問題の概要

三角形三色問題について述べる前に調和性と調和彩色三角形の定義について先に述べる．以下，3 色のどれかの色が塗られた同じ大きさの正六角形のマスが平面上に逆三角形の形に敷き詰められている状況を考える (図 3 参照) †3.

定義 2.1 (調和性)．(隣接しているとは限らない) 3 つのマスに塗られている色がすべて同じか相異なるとき，この 3 マスは**調和性**を満たすという.

例 2.2. 図 1 のような 3 マスの組は調和性を満たしているが，図 2 のような 3 マスの組は調和性を満たしていない.

図 1　調和性を満たす 3 色の組

図 2　調和性を満たさない 3 色の組

定義 2.3 (彩色三角形)．隣接した全ての 3 マスが調和性を満たすように色が塗られた逆三角形を**彩色三角形**という.

定義 2.4 (調和彩色三角形)．3 つの端点のマスに塗られている色が調和性を満たしている彩色三角形を**調和彩色三角形** (well-colored triangle) という.

次に三角形三色問題について述べる．$n(>0)$ 段の彩色三角形がある．図 3 は $n=9$ のときの彩色三角形である．このとき，最下段のマスの色は赤であり，最上段の両端のマスは黄，青であるから最上段の両端のマスの色と最下段のマスの色について調和性を満たしている (つまり，調和彩色三角形である) ことが分かる.

$n=9$ の場合は最上段の塗り方が図 3 の塗り方でなくとも逆三角形の 3 つの頂点のマスは調和性を満たすことが観察できる．このことから次のような仮説

†3　塗られる色は青，赤，黄を想定しているが，図の中では紙面の都合を考慮してそれぞれ黒，灰色，白に変換している.

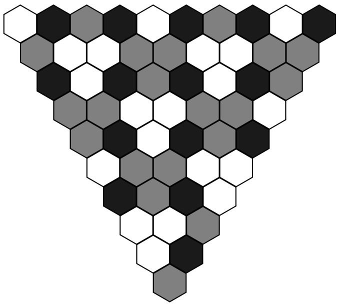

図 3　彩色三角形（$n = 9$ のとき）

が考えられる．

(仮説)　最上段をどのように塗っても最上段の両端のマスの色と最下段のマスの色は調和性を満たす．

数学セミナー誌で出題された三角形三色問題は次の 2 つの問題のことである [5]．

1. $n = 9$ のとき仮説が成立することを証明せよ．
2. $n = 9$ 以外に仮説が成立する段数が存在するか調べ，存在するならば n の一般式を求めよ．

この問題については既に解答が得られており，一般に $n = 3^k$ 段の逆三角形において仮説が成立することを示す次の定理 2.5 が示されている．

定理 2.5. $n(>0)$ 段の逆三角形に配置されたマス対して，最上段のマスを 3 色で任意に塗ったとき
$(\exists k \in \mathbb{N}.n = 3^k) \Leftrightarrow n$ 段の逆三角形は常に調和彩色三角形．

本節ではこの定理の証明を Coq で実装するにあたり，証明の概要について述べる．

2.1　十分条件

定理 2.5 を証明するにあたって，十分条件と必要条件に分けて話を進める．ここでは定理 2.5 の十分条件である補題 2.6 の証明の概要について述べる．

補題 2.6 (十分条件)**.** n 段の逆三角形に配置されたマス対して，
$(\exists k \in \mathbb{N}.n = 3^k) \Rightarrow n$ 段の逆三角形は常に調和彩色三角形．

補題 2.6 を証明するためには論理同値である次の命題を証明すればよい．
$\forall k \in \mathbb{N}.(n = 3^k \Rightarrow n$ 段の逆三角形は常に調和彩色三角形$)$．
これは k に関する数学的帰納法を用いて証明する．

- $k = 0$ のときは $n = 1$ となり明らかに成立する．
- k のとき成立すると仮定する．すなわち，3^k 段の逆三角形ならば常に調和彩色三角形であると仮定する．

ここからは図 4 を用いて証明を進める．図 4 では各マスに塗られている色を表している．ただし，図中の c_y^x は左から x 番目，上から y 段目のマスに塗られている色を表している．ここで，図 4

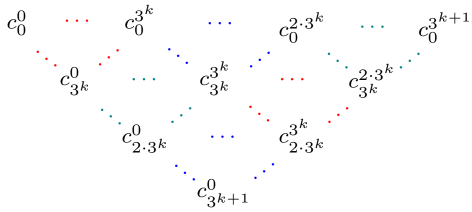

図 4　彩色三角形（$n = 3^{k+1}$ のとき）

の中にあるいくつかの 3^k 段の彩色三角形に注目する．注目する彩色三角形のそれぞれを，その 3 つの頂点のマスの色を組にして表すことにする．上から 0 段目から 3^k 段目の間では次の 3 つの組で表現される逆三角形に注目する．

$$\left(c_0^0, c_0^{3^k}, c_{3^k}^0\right), \quad \left(c_0^{3^k}, c_0^{2\cdot 3^k}, c_{3^k}^{3^k}\right), \\ \left(c_0^{2\cdot 3^k}, c_0^{3^{k+1}}, c_{3^k}^{2\cdot 3^k}\right).$$

また，上から 3^k 段目から $2 \cdot 3^k$ 段目の間にある彩色三角形は次の 2 個に注目する．

$$\left(c_{3^k}^0, c_{3^k}^{3^k}, c_{2\cdot 3^k}^0\right), \quad \left(c_{3^k}^{3^k}, c_{3^k}^{2\cdot 3^k}, c_{2\cdot 3^k}^{3^k}\right).$$

さらに，上から $2 \cdot 3^k$ 段目から 3^{k+1} 段目の間にある彩色三角形は次の 1 個に注目する．

$$\left(c_{2\cdot 3^k}^0, c_{2\cdot 3^k}^{3^k}, c_{3^{k+1}}^0\right).$$

これらの 6 個の 3^k 段の彩色三角形はすべて帰納法の仮定より常に調和彩色三角形である．よって，調和彩色三角形の定義より最上段のマスの 4 色 c_0^0，$c_0^{3^k}$，$c_0^{2\cdot 3^k}$，$c_0^{3^{k+1}}$ から最下段のマスの $c_{3^{k+1}}^0$ の色が得られる．最後に，4 色 c_0^0，$c_0^{3^k}$，$c_0^{2\cdot 3^k}$，$c_0^{3^{k+1}}$ に対して，から得られた色は $c_0^0, c_0^{3^{k+1}}$ が規則に従った色と等しくなることを利用すると，最上段の両端のマスに塗られている 2 色 c_0^0，$c_0^{3^{k+1}}$ と最下段の色 $c_{3^{k+1}}^0$ は調和性を満たす．すなわち，3^{k+1} 段の逆三角形は常に調和彩色三角形である．

2.2　必要条件

次は定理 2.5 の必要条件である補題 2.7 の証明の概要について述べる．

補題 2.7 (必要条件)．$n(>0)$ 段の逆三角形に配置されたマス対して，
n 段の逆三角形は常に調和彩色三角形 $\Rightarrow (\exists k.n = 3^k)$.

補題 2.7 の証明では対偶法を用いた後に，n に関する場合分けをして証明する．補題 2.7 の対偶は以下の通り．

$\neg\ (\exists\ k \in \mathbb{N}.n = 3^k) \Rightarrow \neg($ n 段の逆三角形は常に調和彩色三角形).

したがって，$\neg(\exists k \in \mathbb{N}.n = 3^k)$ を仮定したとき，次の各場合について調和彩色三角形にならない最上段のマスの塗り方を挙げればよい．場合分けの仕方は次の 3 つである．

1. n が偶数
2. n が奇数 かつ $3^k < n \leq 2 \cdot 3^k$
3. n が奇数 かつ $2 \cdot 3^k + 1 \leq n < 3^{k+1}$

各場合について調和彩色三角形にならないような最上段のマスの塗り方は次の通り．

- 1. のときは最上段のマスを黄，青の順で交互に塗る（図 5 参照）．すると，n が偶数であるため最上段のマス数は奇数個となるから，最上段の両端のマスは黄色になり，第 1 段目のマスは規則よりすべて赤色で塗られる．さらに，もう一方の規則より最下段のマスまですべて赤で塗られている．したがって，n が偶数であるから最上段の両端のマスは黄であり，最下段のマスの色が赤であるから調和性を満たさないので調和彩色三角形でない．

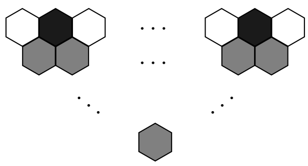

図 5　n **が偶数**

- 2. のときは最上段のマスを外側の両端のマスから内側の方に向かって黄，青の順で 2 色を用いて対称的に交互に塗る（図 6 参照）．すると，補題 2.6 より 3^k 段の逆三角形は調和彩色三角形なので，最上段から 3^k 段下のマスは黄，青の順で交互に塗られている．これは 1. の場合に帰着できるので最下段のマスの色は赤である．したがって，最上段の両端のマスの色は黄であり，最下段のマスの色が赤であるから調和性を満たさないので調和彩色三角形でない．

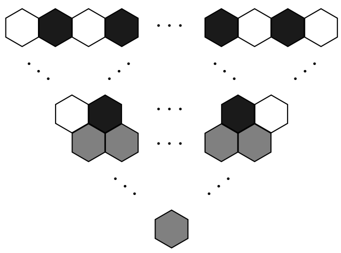

図 6　n **が奇数 かつ** $3^k < n \leq 2 \cdot 3^k$

- 3. のときは最上段のマスを両端のマスからそれぞれ 3^k マス内側の方に向かって黄，その他の内側のマスを青を用いて対称的に塗る（図 7 参照）．このとき，黄で塗られている内側のマスは $n - 2 \cdot 3^k + 1$ マスである．すると，補題 2.6 より 3^k 段の逆三角形は調和彩色三角形なので，最上段から 3^k 段において外側から $n - 2 \cdot 3^k + 1$ マスはすべて赤で塗られている．同様にして，$2 \cdot 3^k$ 段下のマスの色はすべて赤で塗られている．したがって，最上段の両端のマスの色は黄であり，最下段のマスの色が赤であるから調和性を満たさないので調和彩色三角形でない．

3　Coq に実装するための準備

3.1　調和彩色三角形の定義

三角形三色問題のような幾何的な直観に基づく問題や前節で述べたような証明を Coq で形式化するには，問題の暗黙の前提や色塗り規則などを観察して適切な形式化の方法を選ぶ必要がある．この問題では各マスにはただ一色だけ塗られることが暗黙の前提としてあるため，マスの場所からそのマスの色を返す関数を用いることにする．また，この問題では最上段の色を

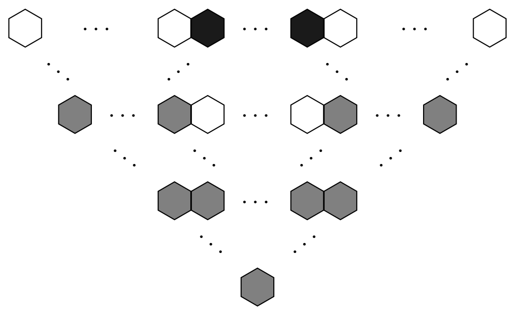

図 7　n が奇数 かつ $2 \cdot 3^k + 1 \leq n < 3^{k+1}$

指定すれば色塗り規則に従えばその下の色も帰納的に求められるので，最上段の色塗りを与える関数から全体の色塗りを与える関数へ拡張できる．これらの観察結果が今回の Coq 上での形式化のアイデアである．

まず，実装する際に用いた定義や関数，論理式について述べる．以下，$f : A \to B \to C$ のような型をもつ項と $a : A$ と $b : B$ について説明のために $f(a, b)$ と記述することがあるが，これは fab と同義である．

定義 3.1 ($Color$)**.** マスに塗る色の集合を次のように定義する．

$$Color \stackrel{def}{=} \{red, yel, blu\}.$$

このとき，red は red，yel は yellow，blu は blue を表している．

定義 3.2 (mix)**.** $mix : Color \to Color \to Color$ を以下で定義する．

$$\begin{aligned} (red, red) &\mapsto red, & (red, yel) &\mapsto blu, \\ (red, blu) &\mapsto yel, & (yel, red) &\mapsto blu, \\ (yel, yel) &\mapsto yel, & (yel, blu) &\mapsto red, \\ (blu, red) &\mapsto yel, & (blu, yel) &\mapsto red, \\ (blu, blu) &\mapsto blu. \end{aligned}$$

演算 mix は塗り方の規則を再現するための関数の 1 つである．引数となる 2 色が同じ場合は同じ色を返し，異なる場合は 2 色とも異なる第三の色を返す関数である．

定義 3.3 (彩色関数)**.** マスの場所からそのマスの色を返す型 $\mathbb{N} \to \mathbb{N} \to Color$ の関数を**彩色関数**と呼ぶ．本稿では $cpos$ を彩色関数を意味する変数として用いることにし，$cpos$ の型を明記せずに省略することもある．$cpos(x, y)$ は左から x 番目，上から y 段目のマスの色を意味する．

例 3.4. 図 3 を与える色関数 $cpos$ は，逆三角形の 3 つの端点のマスに関して次を満たす：

- $cpos(0, 0) = yel$,
- $cpos(9, 0) = blu$,
- $cpos(0, 9) = red$.

定義 3.5 ($next$)**.** $cpos : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \to Color$ に対して，$next(cpos)$ を次のように定義する．

$next(cpos) \stackrel{def}{\iff} \forall\, x, y \in \mathbb{N}, (cpos(x, y+1) = mix(cpos(x, y),\ cpos(x+1, y))$.

$next$ は互いに隣接する任意の 3 つのマスは調和性を満たしていることを論理式に書き直したものである．すなわち，逆三角形に塗られている色はランダムに塗られているわけではなく，x, y を任意にすることで規則に従ってマスの色が塗られた彩色三角形であることを表している．

定義 3.6 ($WellColoredTriangle$)**.** $x, n \in \mathbb{N}$ に対して，$WellColoredTriangle(x, n)$ を次のように定義する：

$WellColoredTriangle(x, n) \stackrel{def}{\iff} (\forall cpos : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \to Color, (next(cpos) \to Triangle(cpos, x, 0, n))$.

ただし，$Triangle(cpos, x, y, n)$ は以下で定義されている．

$Triangle(cpos, x, y, n) \stackrel{def}{\iff} cpos(x, y+n) = mix(cpos(x, y), cpos(x+n, y))$.

$WellColoredTriangle$ は定義 2.4 で述べた n 段の調和彩色三角形の定義を最上段の色の塗り方の関数 $cpos$ を用いて論理式に書き直したものである．x は逆三角形の左端のマス $(x, 0)$ [†4] を基準として定めるために用いており，n は逆三角形の一辺の長さを表している．よって，三角形三色問題におけるマスの塗り方に従っていれば，彩色三角形の端点の 3 つのマス $(x, 0), (x+n, 0), (x, n)$ に塗られている色は調和性を満たしていることを表している．

3.2　彩色条件

ここからはマスに塗る色の塗り方を表す関数について述べていく．まず，最初に必要条件で用いる最上段のマスの塗り方を 3 つ紹介する．

†4　左から x 番目，上から y 段目のマスを座標のように (x, y) と表している．すなわち，$(x, 0)$ は左から x 番目，上から 0 段目 (最上段) のマスを表している．

定義 3.7 ($coloringYB$)**.** $coloringYB : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \to Color$ を以下で定義する．

$$coloringYB(n,x) \stackrel{def}{=} \begin{cases} yel & (x \le n \land x \text{ が奇数}) \\ blu & (\text{otherwise}) \end{cases}$$

$coloringYB$ は補題 2.7 の証明において n が偶数のときの最上段のマスの塗り方を表した関数である．左端のマスから偶数番目のときは yel, 奇数番目のときは blu を塗る．すなわち，$coloringYB$ は最上段のマスを黄色と青で交互に塗る塗り方である．

定義 3.8 ($coloringYBBY$)**.** $coloringYBBY : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \to Color$ を以下で定義する．

$$coloringYBBY(n,x) \stackrel{def}{=} \begin{cases} yel & (0 \le x \le n/2 \land x \text{ が偶数}) \\ yel & (n/2+1 \le x \le n \land x \text{ が奇数}) \\ blu & (\text{otherwise}) \end{cases}$$

ただし，$n/2$ は分数ではなく商を表している．

$coloringYBBY$ は補題 2.7 の証明において n が奇数 かつ $3^k < n \le 2 \cdot 3^k$ のときの最上段のマスの塗り方を表した関数である．$x \le n/2$ の範囲では左端のマスから偶数番目のときは yel, 奇数番目のときは blu を塗り，$n/2+1 \le x \le n$ の範囲では偶奇によって塗る色が入れ替わる．すなわち，$coloringYBBY$ は外側から内側に向かって対称的に最上段のマスを黄色と青で交互に塗る塗り方である．

定義 3.9 ($coloringBYB$)**.** $coloringBYB : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \to \mathbb{N} \to Color$ を以下で定義する．

$$coloringBYB(n,k,x) \stackrel{def}{=} \begin{cases} yel & (3^k \le x \le n - 3^k) \\ blu & (\text{otherwise}) \end{cases}$$

$coloringBYB$ は補題 2.7 の証明において n が奇数かつ $2 \cdot 3^{k'} + 1 \le n < 3^{k'+1}$ のときの最上段のマスの塗り方を表した関数である．$coloringBYB$ は左端のマスから右の 3^k 番目のマスから $n - 3^k$ 番目のマスまでの色を黄色で塗り，その他を青で塗っている．すなわち，両端から 3^k マスを青で塗り，その間を黄色で塗る塗り方である．

ここまで，最上段の色の塗り方を関数で表すことができた．次は最上段のマスの塗り方 (関数) を全体の色を決める彩色関数に拡張する関数を定義する．

定義 3.10 ($liftcoloring$)**.** $liftcoloring : (\mathbb{N} \to Color) \to \mathbb{N} \to \mathbb{N} \to Color$ を以下で再帰的関数として定義する．

$$liftcoloring(topcol,x,y) \stackrel{def}{=} \begin{cases} topcol(x) & (y = 0 \text{ のとき}) \\ mix(liftcoloring(topcol,x,y'), liftcoloring(topcol,x+1,y')) & \\ & (y = y'+1 \text{ のとき}) \end{cases}$$

演算 $liftcoloring$ は最上段の色塗りを与える関数 $topcol$ から全体の色塗りを与える彩色関数へ拡張する．$y = 0$ のときは最上段のマスは最上段の色塗り関数 $topcol$ に従って塗っていることを表している．また，$y = y'+1$ の形をしているときは，最上段から y' 段目にある隣り合う 2 マスの色に対して，mix を適用することでその間にある y 段目のマスの色が得られることを表している．

3.3 関数の性質

次に証明を円滑に進めていくために用いた関数の性質に関する補題について述べる．

補題 3.11 ($mixcut$)**.** $\forall c_0, c_1, c_2, c_3 \in Color$ に対して，$mix(mix(mix(c_0,c_1), mix(c_1,c_2)), mix(mix(c_1,c_2), mix(c_2,c_3))) = mix(c_0,c_3)$.

$mixcut$ は演算 mix のもつ性質を論理式にしたものであり，mix と 4 色を用いて表された色は 2 色のみを用いて書き換えることができることを表している．証明する際には各色が 3 通りずつ取り得るので合計 $3^4 = 81$ 通りの場合分けをおこなって mix の計算をすれば証明することができる．三角形三色問題の十分条件 (補題 2.6) を証明する際に用いる補題である．

補題 3.12 ($AllRed$)**.** $\forall cpos : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \to Color$, $x, y, n \in \mathbb{N}$ に対して，$next(cpos) \Rightarrow (\forall i. \in \mathbb{N}, (0 \le i \le n \Rightarrow cpos(x+i,y) = red)) \Rightarrow cpos(x, y+n) = red.$

三角形三色問題の必要条件 (補題 2.7) の証明において，n がどの場合でもすべてのマスが赤に塗られている段があることに帰着させて矛盾を導いている．AllRed により，すべてのマスが赤で塗られている段があるときは最下段のマスは赤であることがいえる．

補題 3.13 ($cposF$)**.** $\forall topcol : \mathbb{N} \to Color$ に対して，$next(liftcoloring(topcol))$.

$cposF$ は $liftcoloring(topcol)$ に従ってマスの色を塗ると，常に $next$ を満たすことを表している．すなわち，最上段のマスの塗り方を表す関数 $topcol$ が何であってもこれを拡張した彩色関数 $liftcoloring(topcol)$ は互いに隣接する任意の 3 マスは調和性を満たすこと表している．

4 Coq における三角形三色問題

4.1 十分条件

補題 2.6 を Coq に実装するために論理式の形にしたものが次の定理 4.1 である．

定理 4.1 (十分条件)**.** $\forall x, n \in \mathbb{N}, (\exists k \in \mathbb{N}, n = 3^k \Rightarrow WellColoredTriangle(x, n))$.

証明．補題 2.6 (pp.3) でも述べたように次を証明することで，定理 4.1 を示す．

$\forall cpos, \forall k, n, x, y \in \mathbb{N},\ n = 3^k \Rightarrow (next(cpos) \Rightarrow Triangle(cpos, x, y))$.

これを k に関する数学的帰納法を用いて証明する．

$k = 0$ のときは $n = 1$ となるので明らかに成立する．

次に k のとき成立すると仮定して $k + 1$ のときも成立することを示す．

3^k マスずつ離れたマスの色を図 8 のように表すことにする． このとき，3 つの端点のマスの色が $c_0 =$

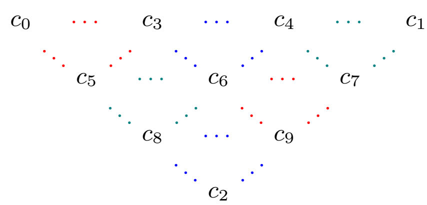

図 8 彩色三角形（$n = 3^{k+1}$ のとき）

$cpos(x, y^k)$，$c_3 = cpos(x, y)$，$c_5 = cpos(x + 3^k, y^k)$ である 3^k 段の彩色三角形が調和彩色三角形であることは，帰納法の仮定からすぐに示せる．同様にして，この彩色三角形以外にも 5 つの彩色三角形は調和彩色三角形である．すなわち，次の 6 つが成立する．

- $Triangle(cpos, x, y, 3^k)$
- $Triangle(cpos, x + 3^k, y, 3^k)$
- $Triangle(cpos, x + 2 \cdot 3^k, y, 3^k)$
- $Triangle(cpos, x, y + 3^k, 3^k)$
- $Triangle(cpos, x + 3^k, y + 3^k, 3^k)$
- $Triangle(cpos, x, y + 2 \cdot 3^k, 3^k)$

これらと補題 3.11 ($mixcut$) を用いて式変形をすると，$cpos(x, y + 3^k) = mix(cpos(x, y), cpos(x + 3^{k+1}, y))$ が得られる．すなわち，$Triangle(cpos, x, y, 3^{k+1})$.

したがって，$Triangle(cpos, x, y, n)$ である． □

4.2 必要条件

補題 2.7 を Coq に実装するために論理式の形にしたものが次の定理 4.2 である．

定理 4.2 (必要条件)**.** $\forall x, n \in \mathbb{N}, n > 0 \Rightarrow (WellColoredTriangle(x, n) \Rightarrow \exists k \in, n = 3^k)$

補題 2.7 (pp.4) でも述べたように次の対偶を証明することで定理 4.2 を示す．

$\forall n, x \in \mathbb{N}, n > 0 \Rightarrow (\neg(\exists k \in \mathbb{N}, n = 3^k) \Rightarrow \neg WellColoredTriangle(x, n))$

この対偶を証明するためには，

- $n > 0$
- $\neg(\exists k \in \mathbb{N}, n = 3^k)$,
- $WellColoredTriangle(x, n)$

を仮定して矛盾を示せばよい．今回は n に関する場合分けをしてから各場合において矛盾を導く．

4.2.1 n が偶数の場合

n が偶数のときは補題 4.3，4.4 を証明してから，補題 4.5 を証明して矛盾を導く．

補題 4.3 ($EvenA$)**.** $\forall cpos, \forall x, n \in \mathbb{N}, n > 0 \Rightarrow next(cpos) \Rightarrow (\forall i \in \mathbb{N}, (0 \le i \le n \Rightarrow cpos(x+i, 0) = coloringYB(x, n, x + i))) \Rightarrow (\forall i \in \mathbb{N}, (0 \le i \le n - 1 \Rightarrow cpos(x + i, 1) = red))$.

補題 4.3 は最上段のマスの色を関数 $coloringYB$ で塗ると，最上段より 1 段下の段のマスの色はすべて赤であることを表している．

証明．$0 \le i \le n - 1$ を満たす i を任意にとると，仮定より $cpos(x + i, 0) = coloringYB(x, n, x + i)$, $cpos(x + i + 1, 0) = coloringYB(x, n, x + i + 1)$．ま

た，$next(cpos)$ より $cpos(x+i,1) = mix(cpos(x+i,0), cpos(x+i+1,0))$ が導ける．

- i が偶数のとき
  $coloringYB$ の定義より，$coloringYB(x,n,x+i) = blu$，$coloringYB(x,n,x+i+1) = yel$ であるから $cpos(x+i,1) = red$.
- i が奇数のとき
  $coloringYB$ の定義より，$coloringYB(x,n,x+i) = yel$，$coloringYB(x,n,x+i+1) = blu$ であるから $cpos(x+i,1) = red$.

よって，i の遇奇にかかわらず $cpos(x+i,1) = red$. □

補題 4.4 ($EvenB$)**.** $\forall cpos, \forall x,n \in \mathbb{N}, n > 0 \Rightarrow next(cpos) \Rightarrow (\forall i \in \mathbb{N}, (0 \le i \le n \Rightarrow cpos(x+i,0) = coloringYB(x,n,x+i))) \Rightarrow (cpos(x,n) = red)$.

補題 4.4 は最上段のマスの色を関数 $coloringYB$ で塗ると，最下段のマスの色は赤になるということを表している．

証明. 補題 4.3 より $\forall i \in \mathbb{N}, (0 \le i \le n-1 \Rightarrow cpos(x+i,1) = red)$. さらに，補題 3.12 より $cpos(x,n) = red$. □

補題 4.5 ($Even$)**.** $\forall x,n \in \mathbb{N}, (n > 0 \land odd(n) = false) \Rightarrow \neg WellColoredTriangle(x,n)$.

ただし，補題 4.5 の中にある $odd(n)$ は次のように $SSReflect$ で定義されている関数である．

自然数 n に対して，

$$odd(n) \overset{def}{=} \begin{cases} true & (n \text{ が奇数}) \\ false & (otherwise) \end{cases}$$

証明. 補題 3.13 より $\exists cposYB, next(cposYB) \land \forall x_1, y_1 \in \mathbb{N}, cposYB(x_1,y_1) = liftcoloring(coloringYB(x,n), x_1, y_1)$. さらに，存在する $cposYB$ をそのまま $cposYB$ として名付けると，$\forall i \in \mathbb{N}, coloringYB(x,n,x+i) = cposYB(x+i,0)$ を満たす．また，$0 \le 0 \le n$，$0 \le n \le n$ を満たすので $coloringYB(x,n,x) = coloringYB(x,n,x+n) = yel$. さらに，仮定より $Triangle(cpos,x,0,n)$ であるから $cposYB(x,n) = yel$ となる．一方で，補題 4.4 より $cpos(x,n) = red$ となるので矛盾する． □

4.2.2 n が奇数 かつ $3^k < n \le 2 \cdot 3^k$ の場合

n が奇数 かつ $3^{k'} < n \le 2 \cdot 3^k$ のときは補題 4.6, 4.7，4.8 を証明してから，補題 4.9 を証明して矛盾を導く．

補題 4.6 ($ShortOddA$)**.** $\forall cpos, \forall x,n,k \in \mathbb{N}, (3^k < n \le (3^k \cdot 2) \land odd(n) = true) \Rightarrow n > 0 \Rightarrow Fmix(cpos) \Rightarrow (\forall x_1, y_1 \in \mathbb{N}, Triangle(cpos, x_1, y_1, 3^k)) \Rightarrow (\forall i \in \mathbb{N}, (0 \le i \le n \Rightarrow cpos(x+i,0) = coloringYBBY(x,n,x+i))) \Rightarrow (\forall i \in \mathbb{N}, (0 \le i \le n-3^k \Rightarrow cpos(x+i,3^k) = coloringYB(x,n-3^k,x+i)))$.

補題 4.6 は最上段のマスの色を関数 $coloringYBBY$ で塗ると，最上段より 3^k 下の段のマスは黄，青で交互に塗ってあることを表している．

証明. $0 \le i \le n - 3^k$ を満たす i を任意にとると，$0 \le i \le n$，$0 \le i + 3^k \le n$ であるから仮定より，$cpos(x+i,0) = coloringYBBY(x,n,x+i)$, $cpos(x+i+3^k,0) = coloringYBBY(x,n,x+i+3^k))$. また，仮定の $Triangle(cpos,x+i,0,3^k)$ より $cpos(x+i,3^k) = mix(cpos(x+i,n), cpos(x+i+3^k,0))$ が成立する．さらに，n は奇数であり $0 \le i \le n/2$, $n/2+1 \le i+3^k \le n$ を満たすので $coloringYBBY$, $coloringYB$ の色は i の遇奇によって定まる．

- i が偶数のとき
  $coloringYBBY$ の定義より $coloringYBBY(x,n,x+i) = yel$，$coloringYBBY(x,n,x+i+3^k) = yel$ であり，$coloringYB$ の定義より $coloringYB(x,n-3^k,x+i) = yel$. よって，$cpos(x+i,3^k) = mix(yel,yel) = yel = coloringYB(x,n-3^k,x+i)$.
- i が奇数のとき
  $coloringYBBY$ の定義より $coloringYB(x,n,x+i) = blu$，$coloringYB(x,n,x+i+3^k) = blu$ であり，$coloringYB$ の定義より $coloringYB(x,n-3^k,x+i) = blu$ よって，$cpos(x+i,3^k) = mix(blu,blu) = blu = coloringYB(x,n-3^k,x+i)$.

以上より，i の遇奇にかかわらず $cpos(x+i,3^k) =$

$coloringYB(x, n-3^k, x+i))$. □

補題 4.7 (*ShortOddB*)**.** $\forall cpos, \forall x, n, k \in \mathbb{N}, (3^k < n \leq 3^k \cdot 2 \wedge odd(n) = true) \Rightarrow n > 0 \Rightarrow Fmix(cpos) \Rightarrow (\forall x_1, y_1 \in \mathbb{N}, Triangle(cpos, x_1, y_1, 3^k)) \Rightarrow (\forall i \in \mathbb{N}, (0 \leq i \leq n \Rightarrow cpos(x+i, 0) = coloringYBBY(x, n, x+i))) \Rightarrow (\forall i \in \mathbb{N}, (0 \leq i \leq n-3^k-1 \Rightarrow cpos(x+i, 3^k+1) = red))$.

補題 4.7 は最上段のマスの色を関数 $coloringYBBY$ で塗ると，最上段から 3^k+1 下の段のマスはすべて赤であるということを表している．

証明．補題 4.6 より $\forall i \in \mathbb{N}, (0 \leq i \leq n-3^k \Rightarrow cpos(x+i, 3^k) = coloringYB(x, n-3^k, x+i))$ となるので，$cpos(x+i, 3^k) = coloringYB(x, n-3^k, x+i)$，$cpos(x+i+1, 3^k) = coloringYB(x, n-3^k, x+i+1)$．$next(cpos)$ より $cpos(x+i, 3^k+1) = mix(cpos(x+i, 3^k), cpos(x+i+1, 3^k))$．ここで，補題 4.6 と同様にして i の偶奇で場合分けをする．

- i が偶数のとき
  $coloringYB$ の定義より $coloringYB(x, n-3^k, x+i) = yel$，$coloringYB(x, n-3^k, x+i+1) = blu$．
  よって，$cpos(x+i, 3^k+1) = mix(cpos(x+i, 3^k), cpos(x+i+1, 3^k)) = mix(yel, blu) = red$.
- i が奇数のとき
  $coloringYB$ の定義より $coloringYB(x, n-3^k, x+i) = blu$，$coloringYB(x, n-3^k, x+i+1) = yel$．
  よって，$cpos(x+i, 3^k+1) = mix(cpos(x+i, 3^k), cpos(x+i+1, 3^k)) = mix(blu, yel) = red$.

以上より，i の遇奇にかかわらず $cpos(x+i, 3^k+1) = red$. □

補題 4.8 (*ShortOddC*)**.** $\forall cpos, \forall x, n, k \in \mathbb{N}, (3^k < n \leq 3^k \cdot 2 \wedge odd(n) = true) \Rightarrow n > 0 \Rightarrow Fmix(cpos) \Rightarrow (\forall x_1, y_1 \in \mathbb{N}, Triangle(cpos, x_1, y_1, 3^k)) \Rightarrow (\forall i \in \mathbb{N}, (0 \leq i \leq n \Rightarrow cpos(x+i, 0) = coloringYBBY(x, n, x+i))) \Rightarrow (\forall i \in \mathbb{N}, (0 \leq i \leq n-3^k-1 \Rightarrow cpos(x, n) = red))$.

補題 4.8 は最上段のマスの色を関数 $coloringYBBY$ で塗ると最下段のマスの色は赤になることを表している．

証明．補題 4.7 より $\forall i \in \mathbb{N}, (0 \leq i \leq n-3^k-1 \Rightarrow cpos(x+i, 3^k+1) = red)$．さらに，補題 3.12 より $cpos(x, n) = red$. □

補題 4.9 (*ShortOdd*)**.** $\forall x, n, k \in \mathbb{N}, (3^k < n \leq 3^k \cdot 2 \wedge odd(n) = true) \Rightarrow \neg WellColoredTriangle(x, n)$.

証明．補題 3.13 より $\exists cposYBBY, next(cposYBBY) \wedge \forall x_1, y_1 \in \mathbb{N}, cposYBBY(x_1, y_1) = liftcoloring(coloringYBBY(x, n), x_1, y_1)$．さらに，存在する $cposYBBY$ をそのまま $cposYBBY$ として名付けると，$\forall i \in \mathbb{N}, coloringYBBY(x, n, x+i) = cposYBBY(x+i, 0)$ を満たす．これより $coloringYBBY(x, n, x) = cposYBBY(x, 0)$，$coloringYBBY(x, n, x+n) = cposYBBY(x+n, 0)$．$n$ が奇数であるから $coloringYBBY(x, n, x) = coloringYBBY(x, n, x+n)$ が成立するので，$coloringYBBY(x, n, x) = coloringYBBY(x, n, x+n) = yel$. さらに，仮定より $Triangle(cposYBBY, x, 0, n)$ であるから $cposYBBY(x, n) = yel$ となる．一方で，定理 4.1，補題 4.8 より $cpos(x, n) = red$ となるので矛盾する． □

4.2.3 n が奇数 かつ $2 \cdot 3^k + 1 \leq n < 3^{k+1}$ の場合

n が奇数 かつ $2 \cdot 3^k + 1 \leq n < 3^{k+1}$ のときは補題 4.10，4.11，4.12 を証明してから，補題 4.13 を証明して矛盾を導く．

補題 4.10 (*LongOddA*)**.** $\forall cpos, \forall x, n, k \in \mathbb{N}, (3^k \cdot 2 + 1 \leq n < 3^{k+1}) \Rightarrow Fmix(cpos) \Rightarrow (\forall x_1, y_1 \in \mathbb{N}, Triangle(cpos, x_1, y_1, 3^k)) \Rightarrow (\forall i \in \mathbb{N}, (0 \leq i \leq n \Rightarrow cpos(x+i, 0) = coloringBYB(x, n, x+i))) \Rightarrow ((\forall i \in \mathbb{N}, (0 \leq i \leq n-3^k \cdot 2 \Rightarrow cpos(x+i, 3^k) = red)) \wedge (\forall i \in \mathbb{N}, (3^k \leq i \leq n-3^k \Rightarrow cpos(x+i, 3^k) = red)))$.

補題 4.10 は最上段のマスの色を関数 $coloringBYB$ で塗ると，最上段より 3^k 下の段のマスは外側から $n - 2 \cdot 3^k + 1$ マスはすべて赤で塗られていることを

表している．

証明．$3^k \cdot 2 + 1 \leq n < 3^{k+1}$ を満たす n をとる．

- $\forall i \in \mathbb{N}, (0 \leq i \leq n - 3^k \cdot 2 \Rightarrow \mathit{cpos}(x+i, 3^k) = \mathit{red})$ を示す．
  $0 \leq i \leq n - 3^k \cdot 2$ を満たすように任意に i をとると，$0 \leq i \leq n$，$0 \leq i \leq 3^k - 1$ を満たすので，仮定より $\mathit{cpos}(x+i, 0) = \mathit{coloringBYB}(x, n, k, x+i)$ であり，$\mathit{coloringBYB}(x, n, k, x+i) = \mathit{blu}$ が導ける．よって，$\mathit{cpos}(x+i, 0) = \mathit{blu}$．また，$0 \leq i + 3^k \leq n$，$3^k \leq i + 3^k \leq n - 3^k$ を満たすので，$\mathit{cpos}(x+i+3^k, 0) = \mathit{coloringBYB}(x, n, k, x+i+3^k)$ であり，$\mathit{coloringBYB}(x, n, k, x+i+3^k) = \mathit{yel}$ が導ける．よって，$\mathit{cpos}(x+i+3^k, 0) = \mathit{yel}$．さらに，仮定より $\mathit{Triangle}(\mathit{cpos}, x+i, 0, 3^k)$ だから $\mathit{cpos}(x+i, 3^k) = \mathit{mix}(\mathit{cpos}(x+i, 0) = \mathit{coloringBYB}(x, n, k, x+i), \mathit{cpos}(x+i+3^k, 0)) = \mathit{mix}(\mathit{blu}, \mathit{yel}) = \mathit{red}$ が成立する．よって，$\mathit{cpos}(x+i, 3^k) = \mathit{red}$．
- $\forall i \in \mathbb{N}, (3^k \leq i \leq n - 3^k \Rightarrow \mathit{cpos}(x+i, 3^k) = \mathit{red}))$ を示す．
  $3^k \leq i \leq n - 3^k$ を満たすように任意に i をとると，$0 \leq i \leq n$，$3^k \leq i \leq n - 3^k$ を満たすので，仮定より $\mathit{cpos}(x+i, 0) = \mathit{coloringBYB}(x, n, k, x+i)$ であり，$\mathit{coloringBYB}(x, n, k, x+i) = \mathit{yel}$ が導ける．よって，$\mathit{cpos}(x+i, 0) = \mathit{yel}$．また，$0 \leq i + 3^k \leq n$，$3^k \leq i + 3^k \leq n - 3^k$ を満たすので，$\mathit{cpos}(x+i+3^k, 0) = \mathit{coloringBYB}(x, n, k, x+i+3^k)$ であり，$\mathit{coloringBYB}(x, n, k, x+i+3^k) = \mathit{blu}$ が導ける．よって，$\mathit{cpos}(x+i+3^k, 0) = \mathit{blu}$．さらに，仮定より $\mathit{Triangle}(\mathit{cpos}, x+i, 0, 3^k)$ だから $\mathit{cpos}(x+i, 3^k) = \mathit{mix}(\mathit{cpos}(x+i, 0), \mathit{cpos}(x+i+3^k, 0)) = \mathit{mix}(\mathit{yel}, \mathit{blu}) = \mathit{red}$ が成立する．よって，$\mathit{cpos}(x+i, 3^k) = \mathit{red}$．

□

補題 4.11 ($\mathit{LongOddB}$)**.** $\forall \mathit{cpos}, \forall x, n, k \in \mathbb{N}, (3^k \cdot 2 + 1 \leq n < 3^{k+1}) \Rightarrow \mathit{Fmix}(\mathit{cpos}) \Rightarrow (\forall x_1, y_1 \in \mathbb{N}, \mathit{Triangle}(\mathit{cpos}, x_1, y_1, 3^k)) \Rightarrow (\forall i \in \mathbb{N}, (0 \leq i \leq n \Rightarrow \mathit{cpos}(x+i, 0) = \mathit{coloringBYB}(x, n, x+i))) \Rightarrow \forall i \in \mathbb{N}, (0 \leq i \leq n - 3^k \cdot 2 \Rightarrow \mathit{cpos}(x+i, 3^k \cdot 2) = \mathit{red})$.

補題 4.11 は最上段のマスの色を関数 $\mathit{coloringBYB}$ で塗ると，最上段から $3^k \cdot 2$ 下の段のマスはすべて赤で塗られていることを表している．

証明．$0 \leq i \leq n - 3^k \cdot 2$ を満たす i を任意にとると，補題 4.10 より $\mathit{cpos}(x+i, 3^k) = \mathit{red}$．また，$3^k \leq i + 3^k \leq n - 3^k$ でもあるから補題 4.10 より $\mathit{cpos}(x+i+3^k, 3^k) = \mathit{red}$．さらに，仮定より $\mathit{Triangle}(\mathit{cpos}, x+i, 3^k, 3^k)$ だから $\mathit{cpos}(x+i, 3^k \cdot 2) = \mathit{mix}(\mathit{cpos}(x+i, 3^k), \mathit{cpos}(x+i+3^k, 3^k)) = \mathit{mix}(\mathit{red}, \mathit{red}) = \mathit{red}$．よって，$\mathit{cpos}(x+i, 3^k \cdot 2) = \mathit{red}$． □

補題 4.12 ($\mathit{LongOddC}$)**.** $\forall \mathit{cpos}, \forall x, n, k \in \mathbb{N}, (3^k \cdot 2 + 1 \leq n < 3^{k+1}) \Rightarrow \mathit{Fmix}(\mathit{cpos}) \Rightarrow (\forall x_1, y_1 \in \mathbb{N}, \mathit{Triangle}(\mathit{cpos}, x_1, y_1, 3^k)) \Rightarrow (\forall i \in \mathbb{N}, (0 \leq i \leq n \Rightarrow \mathit{cpos}(x+i, 0) = \mathit{coloringBYB}(x, n, x+i))) \Rightarrow (\mathit{cpos}(x, n) = \mathit{red})$.

補題 4.12 は最上段のマスの色を関数 $\mathit{coloringBYB}$ で塗ると，最下段のマスは赤になることを表している．

証明．補題 4.11 より $\forall i \in \mathbb{N}, (0 \leq i \leq n - 3^k \cdot 2 \Rightarrow \mathit{cpos}(x+i, 3^k \cdot 2) = \mathit{red})$．さらに，補題 3.12 より $\mathit{cpos}(x, n) = \mathit{red}$． □

補題 4.13 ($\mathit{LongOdd}$)**.** $\forall x, n, k \in \mathbb{N}, (3^k \cdot 2 + 1 \leq n < 3^{k+1} \land \mathit{odd}(n) = \mathit{true}) \Rightarrow \neg \mathit{WellColoredTriangle}(x, n)$.

証明．補題 3.13 より $\exists \mathit{cposBYB}, \mathit{next}(\mathit{cposBYB}) \land \forall x_1, y_1 \in \mathbb{N}, \mathit{cposBYB}(x_1, y_1) = \mathit{liftcoloring}(\mathit{coloringBYB}(x, n), x_1, y_1)$．さらに，存在する $\mathit{cposBYB}$ をそのまま $\mathit{cposBYB}$ として名付けると，$\forall i \in \mathbb{N}, \mathit{cposBYB}(x+i, 0) = \mathit{colorBYB}(x, n, k, x+i)$ を満たす．これより $\mathit{cposBYB}(x, 0) = \mathit{coloringBYB}(x, n, k, x)$，$\mathit{cposBYB}(x+n, 0) = \mathit{coloringBYB}(x, n, k, x+n)$．また，$0 \leq 0 \leq 3^k - 1$，$n - 3^k + 1 \leq n \leq n$ より $\mathit{coloringBYB}(x, n, k, x) = \mathit{coloringBYB}(x, n, k, x+n) = \mathit{blu}$．さらに，仮定より $\mathit{Triangle}(\mathit{cposBYB}, x, 0, n)$ であるから $\mathit{cposYBBY}(x, n) = \mathit{mix}(\mathit{cposBYB}(x, 0), \mathit{cposBYB}(x+n, 0)) = \mathit{mix}(\mathit{blu}, \mathit{blu}) = \mathit{blu}$ となる．一方で，定理

4.1，補題 4.12 より $cpos(x,n) = red$ となるので矛盾する． □

以上より補題 4.5，4.9，4.13 から 4.2 節の冒頭で述べた定理 4.2 を証明された．さらに，定理 4.1（十分条件），定理 4.2（必要条件）が成立するので定理 2.5（必要十分条件）も示された．

5 形式化するにあたって

今回の形式化を完成させるにあたって経験したことや得られた知見について述べる．

第一に，形式化をする際には問題の性質を吟味し，問題に合った適切な方法を選択して実装するべきである．これは Coq で実装するコードの行数が形式化の方法によって大きく左右されるからである．実際，「y 行目 x 番目のマスの色は c だ」を意味する彩色述語 $Cpos(x,y,c)$ を用いた初期の実装では約 1200 行のコードであったが，形式化の方針を見直して彩色関数に基づいた現在の実装では約 900 行となり，約 300 行削減に成功した．彩色述語を用いる方針では，「各マスには必ず色が塗られる」や「1 つのマスに 2 色以上は塗られない」などの彩色に関する暗黙の仮定を $Cpos$ が満たすべき性質 (公理) として記述する必要があり，その性質の前提の下で各種の補題を示す必要があったことがコード行数の増加の原因となっていた．さらに，彩色関数を用いた形式化では公理が不要になり，証明の見通しが良くなった利点もあった．これは彩色に関する暗黙の仮定は関数であれば自動的に満たされるからで，不要な議論の減少によりスムーズな証明を得ることができた．

第二に，SSReflect を用いる際にはできる限り Prop 型でなく bool 型で実装し，SSReflect の恩恵を最大限利用するべきである．SSReflect には命題をブール型と見なすことで命題の同値性をブール型の項の等式に置き換える機能を提供する．これにより手間のかかる同値変形を証明する代わりに rewrite タクティックによる等式変形をしながら素早く証明を進めることができる．また，bool 型を積極的に用いる方針は if 文を用いた関数定義とも相性がよい．関数の値を求める際に if 文の条件判定のためにいちいち Prop 型から bool 型の変換するような手間も省くことができる．こういった側面からも Prop 型ではなく bool 型で実装した方が良いと考えられる．一方で，$\forall$，$\exists$ が入った論理式は bool 型になおすことが困難であるため，今回の形式化を完成させる際に用いた $next$ は bool 型になおすことができなかった．したがって，$WellColoredTriangle$ は $next$ を含むので bool 型になおすことができず，形式化するにあたって用いたすべての主張や命題を bool 型を書き直すことができなかった．もし，この問題が解決することができたときには，更に形式化を完成させるためのコードを減らすことができるのではないかと考えられる．

6 まとめ

本研究では $cpos$ や $liftcoloring$ といった関数等を適切に定めることで三角形三色問題の幾何的な状況を再現しつつ，三角形三色問題の証明の形式化を Coq とその拡張である SSReflect を用いて完成させることができた．

謝辞

本論文は日本ソフトウェア科学会第 38 回大会 (JSSST2021) の質疑応答および査読者の方からいただいたコメントを基に大会発表論文から見直しと改訂を行いました．貴重なコメントをいただけたことに感謝いたします．

参 考 文 献

[1] “The Coq Proof Assistant”, https://coq.inria.fr/.

[2] “The SSReflect proof language”, https://coq.inria.fr/refman/proof-engine/ssreflect-proof-language.html.

[3] 萩原学, アフェルド·レナルド, “Coq/SSReflect/MathComp による定理証明”, 森北出版, 2018.

[4] 西山豊, “エレガントな解答をもとむ 出題 2”，数学セミナー, 4 月号, pp.87–91, 2013.

[5] 西山豊, “数学を楽しむ/三角形三色問題”, 現代数学, Vol.47, No.10, pp.36–41, 2014.

[6] Y. Nishiyama, “THE THREE-COLOR TRIANGLE PROBLEM”, International Journal of Pure and Applied Mathematics, Vol.85, No.1, pp.69–81, 2013.