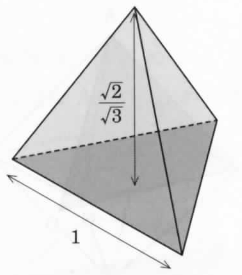


図 10

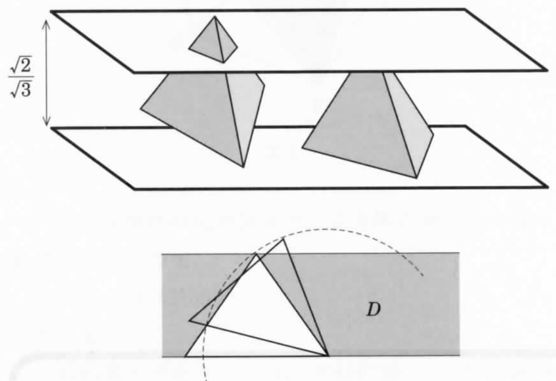


図 11

いとすると，少し拡大して，もう少し大きい正4面体がDに含まれるようにできるからです．このとき，その頂点を含む1つの面が平行な平面上にないと，領域Dの外にある頂点が存在することが確かめられ，矛盾となります．このとき，図10を考慮すると，最大の正4面体は高さが$\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$ですから，一辺の長さは1となります(図11)．

過去の「エレガントな解答をもとむ」に似た問題が出題されていましたが，

(♯) 「正多面体に含まれる最大の正多面体を求めよ」

という問題は，古くから知られていた問題のようです．正多面体は5種類あるので，この問題は，正多面体の組合せにより，全部で5×4＝20種類の問題になります．アメリカ数学会の雑誌 *Monthly* の第79巻(1972年)に「正4面体に含まれる最大の立方体を求めよ」という問題が出題され，第83巻(1976年)に解答が与えられました．それを受けて，H. T. Croft が Proc. London Math. Soc. の第41巻(1980年)に論文を書き，上記の20種類の問題のうち，14種類の場合を解決しています．Croft の論文の主な道具は，「正多面体の中の最大の正多面体は，例外的な場合を除けば，含まれている正多面体の中では“動かせない”(immobile)状態になっている」という定理です．

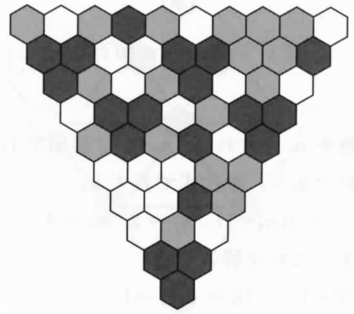
「理由をつけて答えよ」と書かなかったのですが，答えだけを書いたものや理由が不十分な解答は，少し厳しいようですが，正解にはしませんでした．上級問題の正解者である朝倉崇之さんは，Croft の論文にもとづく解答を与えていました．また，奈良岡悟さんは，答えだけだったので正解にしませんでしたが，一般の問題(♯)について多くの場合の解答を得ていました．

今回，理由が不十分で正解とされなかった皆さんも，一般的問題(♯)に挑戦してみてください．

［なかうち のぶみつ／山口大学大学院理工学研究科］

出題 2 ◉出題者 西山 豊

図のような逆三角形があります．最上行の10個は3つの色(図では白，黒，灰)でランダムに塗られています．2行目からは，上の行の隣り合せる2つの色が同じであるなら，それと同じ色に，2つの色が異なるなら，どちらとも違う第3の色にする，という規則で色を塗っていきます．



(1) このようにして色を下へ下へと塗っていったとき，最下行(三角形の頂点)の色が何色になるかは，最上行の左右両端の色で予測できるというのです．図では最上行の左端は灰色で右端は白色ですから規則を適用すると黒色と予測され，実際に最下行は黒色になっています．最上行の塗り方は全部で$3^{10}=59049$通りありますが，途中の色の生成パターンと関係なく，このような予測方法が成り立つことを証明してください．

(2) このような予測が可能なのは最上行の個数が$n=10$以外にもあるのか調べ，あるならnの一般式を求めてください．

解答 2

応募者は10代3名，20代7名，30代9名，40代12名，50代35名，60代17名，70代2名，80代2名，その他1名の計88名でした．エレガントな解答として69名を正解としました．

◉── 合同式による証明

白，灰，黒の色を0,1,2で表すと，色の塗り方の規則は，表1のような交換可能な二項演算となります．aとbから新しい色cが決まるとすると，$c=f(a,b)$であり，この表から演算式を見つけることがひとつのキーポイントでした．

表1 色と数字の対応

	白	灰	黒
白	白	黒	灰
灰	黒	灰	白
黒	灰	白	黒

		b		
		0	1	2
	0	0	2	1
a	1	2	1	0
	2	1	0	2

応募者88名のうち，演算式が求められたのは約半数の43名でした．演算式の導入は4通りあり，上から順に28名，12名，2名，1名でした．

$$c=-(a+b)\pmod 3$$
$$c=2(a+b)\pmod 3$$
$$c=6-(a+b)\pmod 3$$
$$c=\frac{a+b}{2}\pmod 3$$

正解者(69名)

● 10代
横浜市・佐藤謙
東京都・三浦航一

● 20代
東京都・野崎雄太
東京都・黒川瞬
三重県・人見賢悟
東京都・井手上敏也
大津市・栗原悠太郎
松戸市・広瀬航

● 30代
東京都・武井亜起夫
東広島市・松原和樹
さいたま市・井上昌一
奄美市・飯森洋一
所沢市・朝倉崇之
小金井市・田中昌樹
東京都・将衛門
松山市・冨永昌以
福井県・小松邦嘉

● 40代
新潟市・武田道弘
鯖江市・山本ジョージ
秋田市・千葉隆
豊前市・林道宏
伊勢崎市・鈴木元男
市川市・三寺芳樹
東京都・久保田啓介
川口市・トホホナ
戸田市・森忠彦
東京都・波田野茂男
つくば市・河野智一

● 50代
東京都・吉田敏治
さいたま市・河村直彦
静岡市・鈴木丈喜
たつの市・松下賢二
西宮市・ぬるぽ
箕面市・斎藤博
観音寺市・香川小三元
川崎市・河原崎純一
徳島県・新矢隆
京都市・清洲早紀
福井市・森茂
岡崎市・塚田康一
福山市・山本哲也
東京都・升田春夫
横浜市・山田正昭
豊田市・白山義和
横浜市・髙橋利之
加須市・小林国雄
京都市・知魚楽
長崎市・城﨑尚人
三鷹市・石川和弘
亀岡市・森修啓
埼玉県・斎藤比呂志
松戸市・広川久晴
さいたま市・荻原紹夫
三重県・奥田真吾

● 60代
志木市・細野源蔵
富山県・無明子
東京都・川崎市雄
埼玉県・湊孝夫
奈良県・野崎伸治
日立市・高橋健吾
横浜市・水谷一
東京都・ξ
つくば市・yaz
松江市・下房俊一

● 70代
川崎市・遊数戯図呆人
飯田市・小林博省

● 80代
長岡京市・クスコ
甲府市・庚午

●年令不詳
弘前市・澤田潤

最後の演算式は横浜市・山田正昭さんが導入したもので，mod 3 の除算は次のようになります．

$$\frac{0}{2}=0,\ \frac{1}{2}=2,\ \frac{2}{2}=1 \pmod 3$$

$$\frac{0+0}{2}=0,\ \frac{1+1}{2}=1,\ \frac{2+2}{2}=2 \pmod 3$$

$$\frac{0+1}{2}=2,\ \frac{1+2}{2}=0,\ \frac{0+2}{2}=1 \pmod 3$$

この演算式は“平均”の意味を持たせたもので，5 色問題の演算式を考える場合に有効です．また，数字ではなく複素数 $1, \omega, \omega^2$ を対応させた解答が 4 名ありましたが，数字の対応とほぼ同じです．

先頭行の色を $x_1, x_2, \cdots, x_n$ とします．予測が成り立つのは先頭行が 10 個だけでなく 4 個でも成り立つので，まず $n=4$ について証明します．演算式は

$$c=-(a+b) \pmod 3$$

を用いることにします．

先頭行の色を x_1, x_2, x_3, x_4 とすると，2 行目は

$$-(x_1+x_2),\ -(x_2+x_3),\ -(x_3+x_4) \pmod 3$$

となり，3 行目は

$$\begin{aligned}&(-(x_1+x_2))-(-(x_2+x_3))\\&=x_1+2x_2+x_3=x_1-x_2+x_3 \pmod 3\end{aligned}$$

ですので，

$$x_1-x_2+x_3,\ x_2-x_3+x_4 \pmod 3$$

となり，4 行目は

$$\begin{aligned}&-(x_1-x_2+x_3+x_2-x_3+x_4)\\&=-(x_1+x_4) \pmod 3\end{aligned}$$

となります．2 行目，3 行目は中間の色が関与しますが，4 行目は両端だけで色が定まります．

つぎに $n=10$ について先頭行の色を $x_1, x_2, \cdots, x_{10}$ とします．中間の色を間引いて x_1, x_4, x_7, x_{10} を初期値として $n=4$ と同様の操作を行えば，10 個の配列の最終結果は，この 4 組から始めた 4 行目と同じであり，最下端は $-(x_1+x_{10})$ となり，両端のみで定まります．$n=4$ と $n=10$ の関係を図 1 に示しておきます．

同様にして初期値を $x_1, x_{10}, x_{19}, x_{28}$ としたとき，最下端は $-(x_1+x_{28})$ になります．定義の $n=2$ を加えると，予測は

$$n=2,\ 4,\ 10,\ 28,\ \cdots$$

で成り立つことが推測できます．両端だけで予測が成り立つ個数を n_k とすれば，n_k-1 は初項が 1，公比が 3 の等比数列であり，漸化式で表すと，

$$n_{k+1}-1=3(n_k-1),\ n_0=2,\ n_1=4$$

となります．これを解いて

$$n_k=3^k+1 \qquad (k=0, 1, \cdots)$$

を得ます．

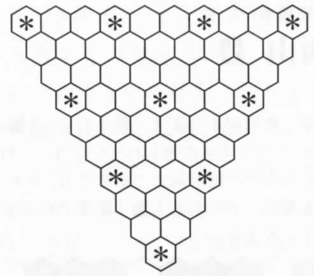


図 1　$n=4$ と $n=10$ の関係

ここまでが解答の標準的なプロセスですが，$n_k=3^k+1$ 以外の場合は予測が成立しないことを証明しておかねばなりません．反例を示すことによって証明したのは 21 名でした．

n が奇数のとき，最上行を白，黒，白，黒，…，黒，白とすると，2 行目からは灰色しか表れず最下行は灰色であり，最上行の両端は白と白なので予測は不可となります．

n が偶数のとき，東京都・三浦航一さんはつぎのような反例を示しています．

$3^k+2 \leqq n \leqq 2\cdot 3^k+1$ のときは，図 2 のように，最上行の両端を白，その内側を黒，白，黒と順に(対称的に)塗っていくことにより，「下から」3^k+1 行目の両端の色を灰色にすることができて，仮定により最下行の色も灰色になります．白，白と灰色で予測不可です．

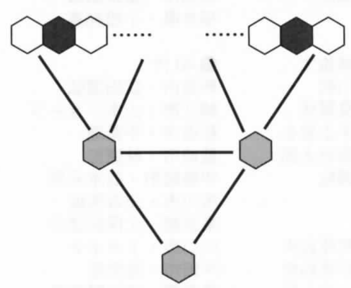


図 2　$3^k+2 \leqq n \leqq 2\cdot 3^k+1$ の反例

$2\cdot 3^k+2 \leqq n \leqq 3^{k+1}$ のときは，図 3 のように，最上行の両端からそれぞれ 3^k 個をすべて白，その内側をすべて黒にすれば，下から $2\cdot 3^k+1$ 行目の両端が白，中央が黒になり，仮定により下から 3^k+1 行目の両端，そして最下行の色は灰色になります．白，白と灰色で予測不可です．

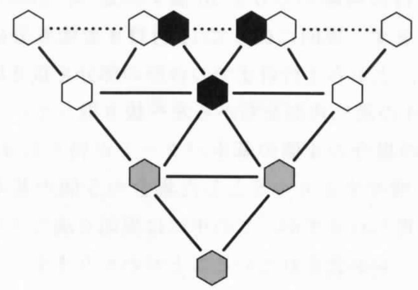


図 3　$2\cdot 3^k+2 \leqq n \leqq 3^{k+1}$ の反例

◉── 二項係数の剰余による証明

二項定理を用いた証明が 33 名ありました．最上行の 10 個の色を $a_0, a_1, a_2, \cdots, a_9$ とし，次行の色 c を

$$c=f(a, b)=-(a+b) \pmod 3$$

とすると，10 行目の色 x は，

$$x=-\sum_{i=0}^{9}\binom{9}{i}a_i$$

となります．ここで，$\binom{9}{0}=\binom{9}{9}=1$ であり，その他の二項係数はすべて 3 の倍数となります．

$$\binom{9}{1}=\binom{9}{2}=\cdots=\binom{9}{8}=0 \pmod 3$$

したがって，

$$x=-\sum_{i=0}^{9}\binom{9}{i}a_i=-(a_0+a_9) \pmod 3$$

となり，最下行の色は最上行の両端の 2 色から定まることになります．

図 4 は二項係数(パスカルの三角形)を 3 で割って余りを示したものです(いわゆる mod 3 の値です)．最上段を除いて上から 3 段目と 9 段目の係数は両端が 1 で真ん中はすべて 0 になっています．このことは次の命題と関係します．33 名中 24 名がこの命題を証明していました．

命題　p を素数，m を 2 以上の整数とします．$m-1$ 個の二項係数 $\binom{m}{r}$ $(1 \leqq r \leqq m-1)$ がすべて p の倍数であるための必要十分条件は，整数 m が適当な自然数 k を用いて $m=p^k$ と表せることである．

この命題は素数 p において成り立つので，色の数が 3 色だけでなく，2 色や 5 色についても同様の問題がつくれることになります．数論では有名な命題であるらしく，その証明は Lucas の定理(Édouard Lucas, 1878)にありますが，詳細は専門書にゆだねます．

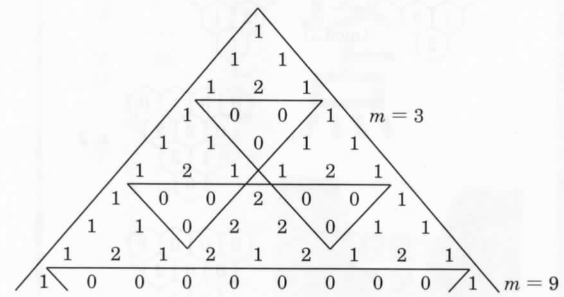


図 4　パスカルの三角形(mod 3)

◉── 重ね合わせの原理による証明

合同式やパスカルの三角形を用いずに直接 $n=10$ の場合を証明する方法はあるのでしょうか．以下は私が考えた証明法です．

色塗りのすべてのパターンは n 個の基本パターンに分解されます．$n=4$ について説明します．最上行のセルを $(1,0,0,0)$, $(0,1,0,0)$, $(0,0,1,0)$, $(0,0,0,1)$ としたものを，それぞれ最下行まで色塗りしたものが 4 つの基本パターンとなります(図 5，次ページ)．

そして，$3^4=81$ 通りのすべてのパターンは，この 4 つの基本パターンの重ね合わせとして表現できます．たとえば，最上行が $(0,1,2,1)$ の生成パターンは，基本パターン(2)と，(3)を 2 倍したものと，(4)を mod 3 で合計したものとなります(図 6)．逆三角形の 10 個のセルに書かれた数は，その位置でそれぞれ対応して

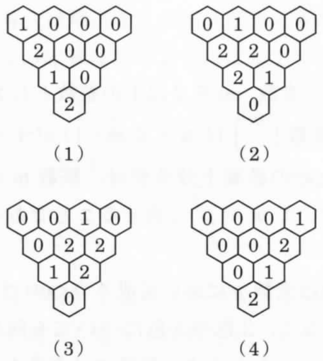


図5　4つの基本パターン

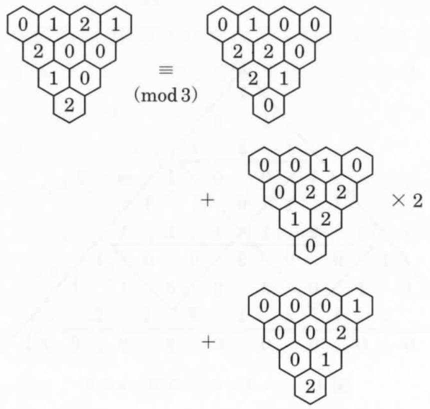


図6　基本パターンの重ね合わせ

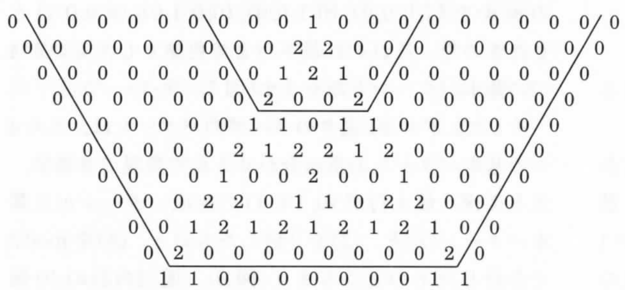


図7　基本パターン作成の万能チャート($n=2$ から $n=11$ まで)

います．

そこで4つの基本パターンの三隅(最上行の両端と最下行)は，どうなっているかを調べますと，$(1, 0, 2)$，$(0, 0, 0)$，$(0, 0, 0)$，$(0, 1, 2)$ になっていて，予測の規則を満たしています．したがって，基本パターンだけを調べればよいことになります．図7は $n=2$ から $n=11$ までの基本パターンを作成する万能チャートです．

最上行の両端から0を10個ずつ並べ，真ん中に1を置きます．規則に従って11行目まで塗り分けていきます．上から4行目までの台形の部分を抜き取り，1辺が4の逆三角形を右から左へ抜き取っていくと，$n=4$ の場合の4個の基本パターンが得られます．1行下に増やすと $n=5$ とした場合の5個の基本パターンが得られますが，この中には規則を満たさない基本パターンが含まれていることがわかります．

図7の行数をさらに増やして色で表現すると図8となります．この図から解がフラクタル構造(自己相似形)になっていることが読みとれます．

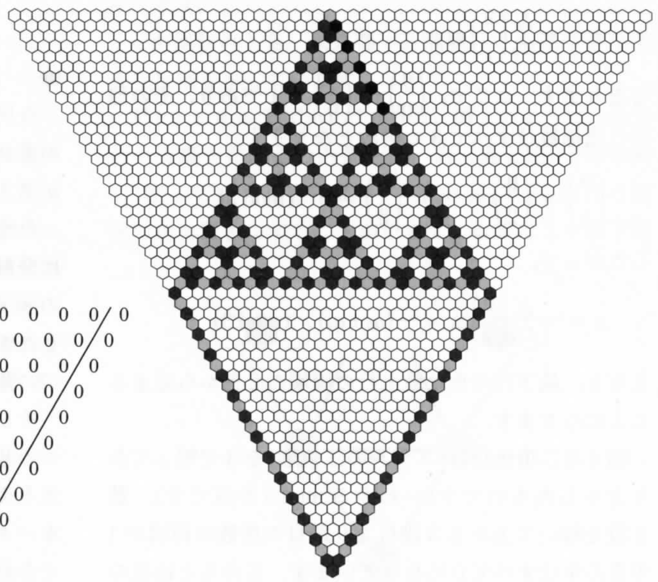


図8　解のフラクタル構造

◉──付記

応募者ではありませんが，東京都・西山輝夫さんから *Journal of Recreational Mathematics* (2011年刊行)の Problems and Conjectures (269-270ページ)に2色の問題が出題されている，と教えていただきました．白(W)と黒(B)による塗り分けで，同じ色のときは白，違う色のときは黒という規則で，5行目を予測するというものです(表2)．この場合の演算式は

$$c = a+b \pmod 2$$

で，先頭行の個数が $n = 2^s+1$ $(s = 0, 1, \cdots)$ つまり

$$n = 2,\ 3,\ 5,\ 9,\ \cdots$$

のとき予測が成り立ちます．

表2　2色の規則

	W	B
W	W	B
B	B	W

		b: 0	b: 1
a	0	0	1
	1	1	0

$a+b \pmod 2$

p を素数とすると，p 色に拡張できると説明しましたが，たとえば5色の場合の規則はどうなるのでしょうか．前述の“平均”の意味をヒントにすると演算式は

$$c = \frac{a+b}{2} \pmod 5$$

でうまく塗り方の規則ができます．興味がある方は確かめてください．

［にしやま ゆたか／大阪経済大学情報社会学部］

高校数学と大学数学の接点
これから身につけたい数学のたしなみ
佐久間一浩［著］
高校数学で特にきちんと理解しておくべき三角関数、無理数、ベクトル・行列に焦点を当て、大学数学へ繋がるより深い理解へと導く。

■目次……　準 備
第1章　三角関数のたしなみ
第2章　無理数のたしなみ
第3章　ベクトルと行列のたしなみ
第4章　大学数学の心得とたしなみ
第5章　たしなみを超えた嗜み
第6章　たしなみの極み
付録A　三角関数について
付録B　微分と積分について
付録C　ベクトルと行列について

■定価2625円(税込)■A5判■ ISBN978-4-535-78705-6

日本評論社
http://www.nippyo.co.jp/