〈色の塗り方〉

$$\mathrm{colorYB}(x, n, z) \overset{\text{def}}{=} \begin{cases} Y & (x \leq z \leq x+n \ \&\& \ \mathrm{eqn}(z \bmod 2, 0) == \mathrm{true}) \\ B & (x \leq z \leq x+n \ \&\& \ \mathrm{eqn}(z \bmod 2, 1) == \mathrm{true}) \\ Y & (\text{otherwises}) \end{cases}$$

Lem
$(\mathrm{eqn}(z \bmod 2, 0) == \mathrm{true}) \Leftrightarrow \mathrm{even}(z)$
evenb(z) と略記 (定義?)

Lem YB1

$\forall x, n, \mathrm{even}(x) \rightarrow$
$\forall i \ (0 \leq i \leq n \land \mathrm{even}(i) \rightarrow \mathrm{colorYB}(x, n, x+i) = Y)$

prf. even(x)となる x をとる.

$0 \leq i \leq n$ かつ even(i) となる n, i をとる.

$0 \leq i \leq n$ より $x \leq x+i \leq x+n$.

even(x), even(i) より even($x+i$).

よって, colorYB($x, n, x+i$) = Y. //

Lem YB2 不要?

$\forall x, n, \mathrm{even}(x) \rightarrow$
$\forall i \ (0 \leq i \leq n \land \mathrm{odd}(i) \rightarrow \mathrm{colorYB}(x, n, x+i) = B)$

prf. even(x)となる x をとる.

$0 \leq i \leq n$ かつ odd(i) となる n, i をとる.

$0 \leq i \leq n$ より $x \leq x+i \leq x+n$.

even(x), odd(i) より odd($x+i$).

よって, colorYB($x, n, x+i$) = B. //

Lem YB3

$\forall x, n, \mathrm{odd}(x) \to$
$\forall i\ (0 \leq i \leq n \land \mathrm{even}(i) \to \mathrm{colorYB}(x, n, x+i) = B)$

prf. $\mathrm{odd}(x)$となるxをとる.
$0 \leq i \leq n$かつ$\mathrm{even}(i)$となるn, iをとる.
$0 \leq i \leq n$より$x \leq x+i \leq x+n$.
$\mathrm{odd}(x), \mathrm{even}(i)$より$\mathrm{odd}(x+i)$.
よって, $\mathrm{colorYB}(x,n,x+i) = B$. //

不要?

Lem YB4

$\forall x, n, \mathrm{odd}(x) \to$
$\forall i\ (0 \leq i \leq n \land \mathrm{odd}(i) \to \mathrm{colorYB}(x, n, x+i) = Y)$

prf. $\mathrm{odd}(x)$となるxをとる.
$0 \leq i \leq n$かつ$\mathrm{odd}(i)$となるn, iをとる.
$0 \leq i \leq n$より$x \leq x+i \leq x+n$.
$\mathrm{odd}(x), \mathrm{odd}(i)$より$\mathrm{even}(x+i)$.
よって, $\mathrm{colorYB}(x,n,x+i) = Y$. //

LemYB5

$\forall x, n,$ even$(n) \rightarrow$
$(\mathrm{colorYB}(x,n,x) = \mathrm{colorYB}(x,n,x+n))$.

prf. x をとる.

even(n) となる n をとる.

$0 \leq 0,\ 0 \leq n$ より $0 \leq 0 \leq n$.

$0 \leq n,\ n \leq n$ より $0 \leq n \leq n$.

- even(x) のとき

  LemYB1 より $\mathrm{colorYB}(x,n,x+0) = Y$

  LemYB1 より $\mathrm{colorYB}(x,n,x+n) = Y$

  よって, $\mathrm{colorYB}(x,n,x) = \mathrm{colorYB}(x,n,x+n)$.

- odd(x) のとき

  LemYB3 より $\mathrm{colorYB}(x,n,x+0) = B$.

  LemYB3 より $\mathrm{colorYB}(x,n,x+n) = B$.

  よって, $\mathrm{colorYB}(x,n,x) = \mathrm{colorYB}(x,n,x+n)$. //

Even A

$\forall x, y, n \in \mathbb{N}$,

$\forall i \,(0 \le i \le n \to Cpos(x+i, y, colorYB(x,n,x+i)) \to \forall i\,(0 \le i \le n-1 \to Cpos(x+i, y+1, R))$

prf. x, yをとる.

even(n) となる nをとる.

$0 \le i \le n-1$ となる i をとる.

$i \le n-1 \le n$ となるので $0 \le i \le n$

よって, $Cpos(x+i, y, colorYB(x,n,x+i))$.

また, $i \le n-1$ より $i+1 \le n$

さらに, $0 \le i$ より $1 \le i+1$ となるので, $0 \le i+1 \le n$

よって, $Cpos(x+i, y, colorYB(x,n,x+i+1))$.

C-exists より $Cpos(x+i, y+1, c)$ となる c が存在.

$c = c'$ とすると $Cpos(x+i, y+1, c')$.

- even(x)のとき
  - even(i)のとき

    even(x), even(i) より even$(x+i)$.

    よって, $colorYB(x,n,x+i) = Y$.

    すなわち, $Cpos(x+i, y, Y)$.

    even$(x+i)$, odd(1) より odd$(x+i+1)$

    よって, $colorYB(x,n,x+i+1) = B$

    C-mix より $c' = mix(Y, B) = R$

    よって, $Cpos(x+i, y+1, R)$

- odd(i)のとき

  even(x), odd(i) より odd$(x+i)$.

  よって, $\mathrm{colorYB}(x,n,x+i) = B$.

  すなわち, $C_{pos}(x+i, y, B)$.

  odd$(x+i)$, odd(1) より even$(x+i+1)$

  よって, $\mathrm{colorYB}(x,n,x+i+1) = Y$

  C-mix より $c' = \mathrm{mix}(B,Y) = R$

  よって, $C_{pos}(x+i, y+1, R)$

◦ odd(x)のとき

- even(i)のとき

  odd(x), even(i) より odd$(x+i)$.

  よって, $\mathrm{colorYB}(x,n,x+i) = B$.

  すなわち, $C_{pos}(x+i, y, Y)$.

  odd$(x+i)$, odd(1) より even$(x+i+1)$

  よって, $\mathrm{colorYB}(x,n,x+i+1) = Y$

  C-mix より $c' = \mathrm{mix}(B,Y) = R$

  よって, $C_{pos}(x+i, y+1, R)$

- odd(i)のとき

  odd(x), odd(i) より even$(x+i)$.

  よって, $\mathrm{colorYB}(x,n,x+i) = Y$.

  すなわち, $C_{pos}(x+i, y, B)$.

  even$(x+i)$, odd(1) より odd$(x+i+1)$

  よって, $\mathrm{colorYB}(x,n,x+i+1) = B$

  C-mix より $c' = \mathrm{mix}(B,Y) = R$

  よって, $C_{pos}(x+i, y+1, R)$ //

All Red（証明済み）

$^\forall x, y, n$

$(^\forall i\ (0 \le i \le n \to Cpos(x+i, y, R)) \to Cpos(x, y+n, R).$

Even B

$^\forall x, y, n \in \mathbb{N}$

$\left(\begin{array}{l} even(n) \\ ^\forall i\ (0 \le i \le n \to Cpos(x+i, y, colorYB(x, n, x+i))) \end{array} \right) \to Cpos(x, (y+n), R).$

prf. x, y をとる.

$even(n)$ となる n をとる.

EvenA より $^\forall i\ (0 \le i \le n-1 \to Cpos(x+i, y+1, R))$

AllRed より $Cpos(x, (y+1)+(n-1), R).$

よって, $Cpos(x, y+n, R).$

false Color（証明済み）

$^\forall x, y, ^\forall C_0, C_1$

$(C_0 \ne C_1 \land Cpos(x, y, C_0) \land Cpos(x, y, C_1)) \to false.$

EvenC

$\forall x, y, n \in \mathbb{N}$

$$even(n) \longrightarrow \neg \left(\begin{array}{l} \forall c : color,\ \forall f : nat \to Color \\ Triangle(x, y, n, f(x), f(x+n), c) \end{array} \right)$$

prf. x, yをとる.

$even(n)$となるnをとる.

$\left(\begin{array}{l} \forall c : color,\ \forall f : nat \to Color \\ Triangle(x, y, n, f(x), f(x+n), c) \end{array} \right)$を仮定して矛盾を示す.

> $\forall i\ (0 \leq i \leq n \to Cpos(x+i, y, colorYB(x+i)))$を示す.
> $0 \leq i \leq n$となるiをとり, C-paintより成立する.

- EvenBより$Cpos(x, y+n, R)$.
- $0 \leq 0 \leq n$より$Cpos(x+0, y, colorYB(x, n, x))$.
  $0 \leq n \leq n$より$Cpos(x+n, y, colorYB(x, n, x+n))$.

  C-existsより$Cpos(x, y+n, c)$となる$c \in Color$が存在する.

  $c = c'$とすると$Cpos(x, y+n, c')$.

  仮定より$Triangle(x, y, n, colorYB(x,n,x), colorYB(x, n, x+n), c')$

  よって, $c' = mix(colorYB(x,n,x), colorYB(x, n, x+n))$

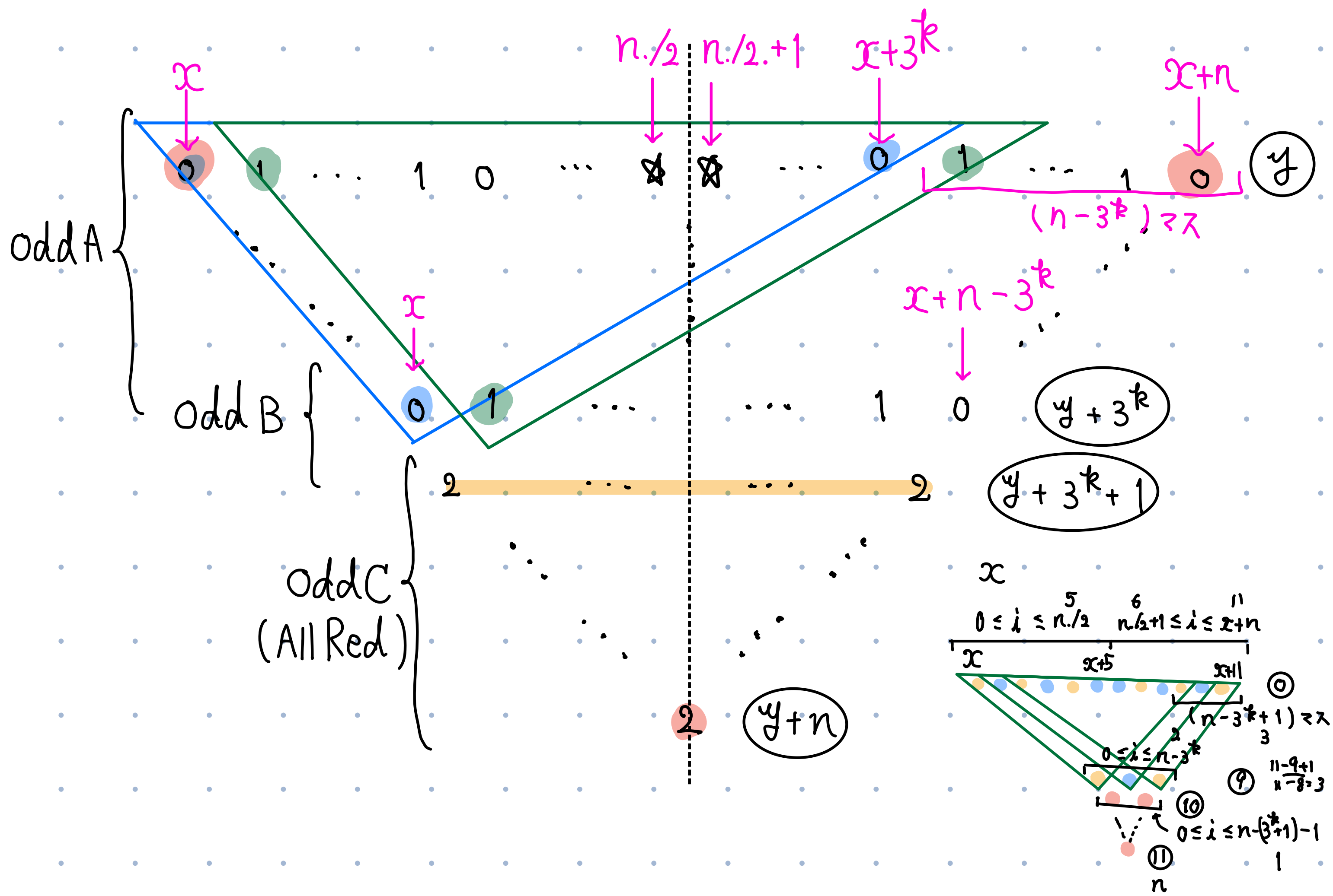
  さらに, LemYB5より$colorYB(x, n, x) = colorYB(x, n, x+n)$より

  $c' = mix(colorYB(x,n,x), colorYB(x,n,x))$

  - $even(x)$のとき lemYB1より$colorYB(x,n,x) = Y$.
    よって$c' = Y$となるので, falsecolorより矛盾
  - $odd(x)$のとき lemYB3より$colorYB(x,n,x) = B$.
    よって$c' = B$となるので, falsecolorより矛盾 //

〈色の塗り方〉

$$
\mathrm{colorYBYB}(x,n,z) \overset{\mathrm{def}}{=} \begin{cases}
Y \left(\begin{array}{l} x \le z \le x+n./2 \ \&\& \ \mathrm{eqn}(z \bmod 2, 0) == \mathrm{true} \\ x+n./2+1 \le z \le x+n \ \&\& \ \mathrm{eqn}(z \bmod 2, 1) == \mathrm{true} \end{array} \right) \\
B \left(\begin{array}{l} x \le z \le x+n./2 \ \&\& \ \mathrm{eqn}(z \bmod 2, 1) == \mathrm{true} \\ x+n./2+1 \le z \le x+n \ \&\& \ \mathrm{eqn}(z \bmod 2, 0) == \mathrm{true} \end{array} \right) \\
Y \quad (\text{otherwises})
\end{cases}
$$



Lem YBYB1

$\forall x, n, \mathrm{even}(x) \to$
$\forall i\ ((0 \le i \le n./2 \wedge \mathrm{even}(i)) \to \mathrm{colorYBYB}(x,n,x+i) = Y)$.

prf. $\mathrm{even}(x)$ となる x をとる.
　$0 \le i \le n./2$ かつ $\mathrm{even}(i)$ となる n, i をとる.
　$0 \le i \le n./2$ より $x \le x+i \le x+n./2$.
　$\mathrm{even}(x), \mathrm{even}(i)$ より $\mathrm{even}(x+i)$.
　よって, $\mathrm{colorYBYB}(x,n,x+i) = Y$. //

Lem YBYB2

$\forall x, n, \mathrm{even}(x) \to$
$\forall i\ ((n./2+1 \le i \le n \wedge \mathrm{odd}(i)) \to \mathrm{colorYBYB}(x,n,x+i) = Y)$.

prf. $\mathrm{even}(x)$ となる x をとる.
　$n./2+1 \le i \le n$ かつ $\mathrm{odd}(i)$ となる n, i をとる.
　$n./2+1 \le i \le n$ より $x+n./2+1 \le x+i \le x+n$.
　$\mathrm{even}(x), \mathrm{odd}(i)$ より $\mathrm{odd}(x+i)$.
　よって, $\mathrm{colorYBYB}(x,n,x+i) = Y$. //

Lem YBYB3

$\forall x, n, even(x) \to$
$\forall i\ ((0 \le i \le n./2 \land odd(i)) \to colorYBYB(x,n,x+i) = B)$.

prf. $even(x)$ となる x をとる.

$0 \le i \le n./2$ かつ $odd(i)$ となる n, i をとる.

$0 \le i \le n./2$ より $x \le x+i \le x+n./2$.

$even(x), odd(i)$ より $odd(x+i)$.

よって, $colorYBYB(x,n,x+i) = B$. //

Lem YBYB4

$\forall x, n, even(x) \to$
$\forall i\ ((n./2+1 \le i \le n \land even(i)) \to colorYBYB(x,n,x+i) = B)$.

prf. $even(x)$ となる x をとる.

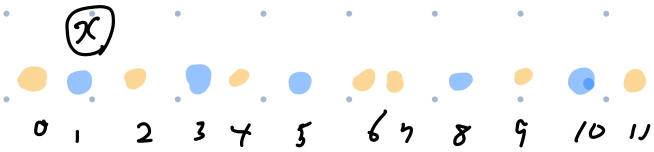
$n./2+1 \le i \le n$ かつ $even(i)$ となる n, i をとる.

$n./2+1 \le i \le n$ より $x+n./2+1 \le x+i \le x+n$.

$even(x), even(i)$ より $even(x+i)$.

よって, $colorYBYB(x,n,x+i) = B$. //

Lem YBYB5



$\forall x, n, \mathrm{odd}(x) \rightarrow$
$\forall i\ ((0 \leq i \leq n./2 \wedge \mathrm{even}(i)) \rightarrow \mathrm{colorYBYB}(x, n, x+i) = B).$

Lem YBYB6

$\forall x, n, \mathrm{odd}(x) \rightarrow$
$\forall i\ ((n./2+1 \leq i \leq n \wedge \mathrm{odd}(i)) \rightarrow \mathrm{colorYBYB}(x, n, x+i) = B).$

Lem YBYB7

$\forall x, n, \mathrm{odd}(x) \rightarrow$
$\forall i\ ((0 \leq i \leq n./2 \wedge \mathrm{odd}(i)) \rightarrow \mathrm{colorYBYB}(x, n, x+i) = Y).$

Lem YBYB8

$\forall x, n, \mathrm{odd}(x) \rightarrow$
$\forall i\ ((n./2+1 \leq i \leq n \wedge \mathrm{even}(i)) \rightarrow \mathrm{colorYBYB}(x, n, x+i) = Y).$

OddA

$\forall x, y, n, k,$

$$\left(\begin{array}{l} \circ\ 3^k \le n \le 3^k * 2 \wedge odd(n) \to \\ \circ\ \forall x', y', C_0, C_1, C_2 .\ Triangle(x', y', C_0, C_1, C_2) \to \\ \circ\ \forall i\ (0 \le i \le n \to Cpos(x+i, y, colorYBYB(x, n, x+i))) \end{array}\right) \to$$

$$\forall i\ (0 \le i \le n - 3^k \to Cpos(x+i, y+3^k, colorYB(x, n-3^k, x+i)))$$

prf.

OddB

$\forall x, y, n, k,$

$$\left(\begin{array}{l} \circ\ 3^k \leq n \leq 3^k * 2 \wedge \mathrm{odd}(n) \rightarrow \\ \circ\ \forall x', y', C_0, C_1, C_2 .\ \mathrm{Triangle}(x', y', C_0, C_1, C_2) \rightarrow \\ \circ\ \forall i\ (0 \leq i \leq n \rightarrow \mathrm{Cpos}(x+i, y, \mathrm{colorYBYB}(x, n, x+i))) \end{array}\right) \rightarrow$$

$\forall i\ (0 \leq i \leq (n - 3^k) - 1 \rightarrow \mathrm{Cpos}(x+i, y+(3^k+1), R))$

prf. x, y, n, k をとる.

OddA より $\forall i\ (0 \leq i \leq n - 3^k \rightarrow \mathrm{Cpos}(x+i, y+3^k, \mathrm{colorYB}(x, n-3^k, x+i)))$

EvenA より $\forall i\ (0 \leq i \leq (n - 3^k) - 1 \rightarrow \mathrm{Cpos}(x+i, (y+3^k)+1, R))$ //

AllRed (証明済み)

$\forall x, y, n$

$(\forall i\ (0 \le i \le n \to Cpos(x+i, y, R))) \to Cpos(x, y+n, R).$

OddC

$\forall x, y, n, k,$

$$\left(\begin{array}{l} \circ\ 3^k \le n \le 3^k * 2 \wedge odd(n) \to \\ \circ\ \forall x', y', C_0, C_1, C_2.\ Triangle(x', y', 3^k, C_0, C_1, C_2) \to \\ \circ\ \forall i\ (0 \le i \le n \to Cpos(x+i, y, colorYBYB(x, n, x+i))) \end{array} \right) \to$$

$Cpos(x, y+n, R)$

prf. x, y, n, kをとる.

OddBより $\forall i\ (0 \le i \le (n-3^k)-1 \to Cpos(x+i, y+(3^k+1), R))$

AllRedより $Cpos(x, (y+3^k+1)+((n-3^k)-1), R)$

よって, $Cpos(x, y+n, R)$ //

falseColor (証明済み)

$\forall x, y, \forall C_0, C_1$

$(C_0 \ne C_1 \wedge Cpos(x, y, C_0) \wedge Cpos(x, y, C_1)) \to false.$

Bottom_color_of_triangle（証明済み）

$\forall x, y, n,\ \forall C_0, C_1$

$\forall C_0', C_1', C_2'.\ \mathrm{Triangle}(x, y, n, C_0', C_1', C_2') \to$

$\mathrm{Cpos}(x, y, C_0) \to \mathrm{Cpos}(x+n, y, C_1) \to \mathrm{Cpos}(x, y+n, \mathrm{mix}(C_0, C_1))$.

OddD

$\forall x, y, n, k,$

$$\begin{pmatrix} \mathrm{odd}(n) \\ 3^k \le n \le 3^k * 2 \end{pmatrix} \to \neg \begin{pmatrix} \forall C : \mathrm{color},\ \forall f : \mathrm{nat} \to \mathrm{Color} \\ \mathrm{Triangle}(x, y, n, f(x), f(x+n), C) \end{pmatrix}$$

prf. x, y をとる.

$\mathrm{odd}(n)$, $3^k \le n \le 3^k * 2$ となる n, k をとる.

$\begin{pmatrix} \forall C : \mathrm{color},\ \forall f : \mathrm{nat} \to \mathrm{Color} \\ \mathrm{Triangle}(x, y, n, f(x), f(x+n), C) \end{pmatrix}$ を仮定して矛盾を示す.

十分性は示されているので $\forall x', y', C_0, C_1, C_2.\ \mathrm{Triangle}(x', y', 3^k, C_0, C_1, C_2)$

C-paint より $\forall i\ (0 \le i \le n \to \mathrm{Cpos}(x+i, y, \mathrm{colorYBYB}(x, n, x+i)))$

- OddC より $\mathrm{Cpos}(x, y+n, R)$.
- $0 \le 0 \le n$ より $\mathrm{Cpos}(x+0, y, \mathrm{colorYBYB}(x, n, x+0))$.

  $0 \le n \le n$ より $\mathrm{Cpos}(x+n, y, \mathrm{colorYBYB}(x, n, x+n))$.

  C-exists より $\mathrm{Cpos}(x, y+n, c)$ となる c が存在する. ($c = c'$ とする)

  仮定より $\mathrm{Triangle}(x, y, n, \underline{\mathrm{colorYBYB}(x, n, x+0), \mathrm{colorYBYB}(x, n, x+n), C'})$

  Bottom_color_of_triangle より $\mathrm{Cpos}(x, y+n, \mathrm{mix}(\ \ ))$.

○ even(x)のとき

$0 \le 0 \le n$ と even(0), LemYBYB1 より colorYBYB(x, n, $x+0$) = Y.

$n./2+1 \le n \le n$ と odd(n), LemYBYB2 より colorYBYB(x, n, $x+n$) = Y.

よって, mix(●) = mix(Y, Y) = Y となり falsecolor より矛盾.

○ odd(x)のとき

$0 \le 0 \le n$ と even(0), LemYBYB5 より colorYBYB(x, n, $x+0$) = B.

$n./2+1 \le n \le n$ と odd(n), LemYBYB6 より colorYBYB(x, n, $x+n$) = B.

よって, mix(●) = mix(B, B) = B となり falsecolor より矛盾.

//