Домашняя работа по дискретной математике "Плоские графы"

Цель: приобретение практических навыков в определение планарности графов на основе критериев Понтрягина-Куратовского и Вагнера.
Задачи: построение плоской укладки и определение числовых характеристик непланарных графов.

Алгоритм плоской укладки графа

Для плоской укладки графа и проверки является ли он планарным, используется алгоритм γ.

Для правильной работы алгоритма (без ограничения области применения) определим свойства графов, которые подаются на вход алгоритма:

- граф должен быть связным;

- граф должен иметь хотя бы один цикл;

- граф не должен содержать мостов, т.е. ребер после удаления которых граф распадается на несколько компонент связности.

Алгоритм γ плоской укладки графа $\boldsymbol{G}$ представляет собой процесс последовательного присоединения к некоторому уже уложенному на плоскости графу $\widetilde{\boldsymbol{G}}$ (подграф графа $\boldsymbol{G}$) некоторой новой цепи также принадлежащей $\boldsymbol{G}$, оба конца которой принадлежат $\widetilde{\boldsymbol{G}}$. Эта цепь разбивает одну из граней графа $\widetilde{\boldsymbol{G}}$ на две.

При этом в качестве начального плоского графа выбирается любой простой цикл исходного графа. Процесс продолжается до тех пор, пока не будет получена плоская укладка графа **G** или присоединение некоторой цепи оказывается невозможным, в том случае граф является не планарным.

Пусть есть граф $\boldsymbol{G}$ и построена некоторая плоская укладка $\widetilde{\boldsymbol{G}}$ подграфа графа $\boldsymbol{G}$. Сегментом S относительно текущей плоской укладки $\widetilde{\boldsymbol{G}}$ или просто сегментом будем называть подграф исходного графа $\boldsymbol{G}$ одного из следующих двух видов:

1) ребро $e = \{u, v\}$ исходного графа $\boldsymbol{G}$ такое, что не принадлежит текущей плоской укладке графа, $e \overline{\in} \widetilde{\boldsymbol{G}}$, но концевые вершины этого ребра $u,\ v$ принадлежат этой плоской укладке;
2) связная компонента графа $\boldsymbol{G} \backslash \widetilde{\boldsymbol{G}}$, дополненная всеми ребрами графа $\boldsymbol{G}$, инцидентными вершинам взятой компоненты и концевыми вершинами этих ребер.

Граф $-\ \boldsymbol{G} \backslash \widetilde{\boldsymbol{G}}$ получается вычитанием графа $\widetilde{\boldsymbol{G}}$ из исходного графа $\boldsymbol{G}$.

Контактная вершина − это вершина v сегмента $\boldsymbol{S}$ относительно $\widetilde{\boldsymbol{G}}$, которая принадлежит множеству вершин текущей плоской укладки.

Допустимой гранью для сегмента $\boldsymbol{S}$ называется такая грань f графа $\widetilde{\boldsymbol{G}}$, которая содержит все контактные вершины сегмента $\boldsymbol{S}$.

Обозначим *f(Si)* − множество всех допустимых граней для сегмента ***Si***.

Простая цепь α сегмента $\boldsymbol{S}$, содержащая две различные контактные вершины и не содержащая других контактных вершин, называется α-цепью.

Простая α-цепь проходит из контактной вершины через неконтактные и возвращается в контактную вершину.

Алгоритм γ.

Инициализация. Выберем некоторый простой цикл $\boldsymbol{C}$ графа $\boldsymbol{G}$ и уложим его на плоскости (лучше выбирать простой цикл графа $\boldsymbol{G}$, доставляющий окружение графа): $\widetilde{\boldsymbol{G}} \leftarrow \boldsymbol{C}$.

1. Найдем грани графа и множество сегментов $\boldsymbol{S}$ относительно текущей укладки $\widetilde{\boldsymbol{G}}$. Если множество сегментов пусто перейти к **п.** 7.

2. Для каждого сегмента $\boldsymbol{S}$ найдем множество допустимых граней $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{S})$.

3. Если существует сегмент $\boldsymbol{S}$, для которого $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{S}) = \emptyset$ (множество граней пусто), то граф $\boldsymbol{G}$ не планарен. Выход из алгоритма, иначе переход к **п.** 4.

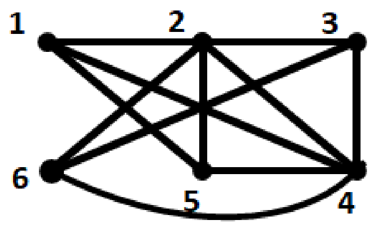
4. Если существует сегмент $\boldsymbol{S}$ для которого ровно одна допустимая грань ($\boldsymbol{f}(\boldsymbol{S}) = 1$), то перейдем к **п. 6**, иначе **п. 5**.

5. Для некоторого сегмента $\boldsymbol{S}$ выбираем произвольную допустимую грань f.

6. Поместим произвольную α-цепь $\boldsymbol{L}$, принадлежащую $\boldsymbol{S}$, в грань f, заменим $\widetilde{\boldsymbol{G}}$ на $\widetilde{\boldsymbol{G}} \cup \boldsymbol{L}$ и перейдем к **п. 1**. Построена $\widetilde{\boldsymbol{G}}$ − частичная, текущая плоская укладка графа $\boldsymbol{G}$.

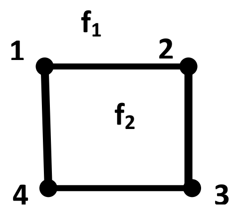
7. Построена $\widetilde{\boldsymbol{G}}$ плоская укладка графа $\boldsymbol{G}$.

Пример. Определить планарность и построить плоскую укладку графа $\boldsymbol{G}$.



Инициализация алгоритма:
– выберем в графе произвольный простой цикл и уложим его на плоскости $\widetilde{\boldsymbol{G}} \leftarrow \boldsymbol{C}$;

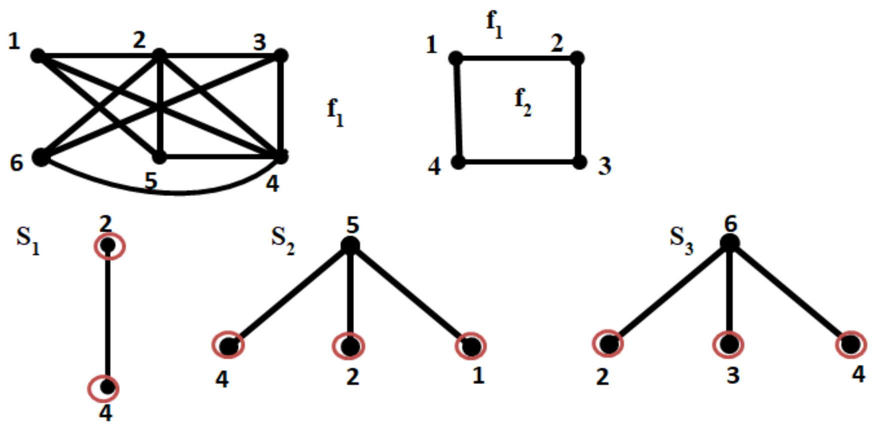
– определим для него множество граней.



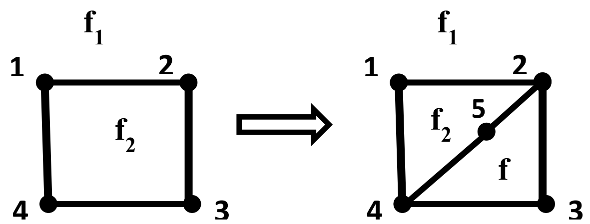
1) Определим множество сегментов относительно текущей плоской укладки. Множество сегментов не пусто.

2) Определим для каждого сегмента множество допустимых граней:

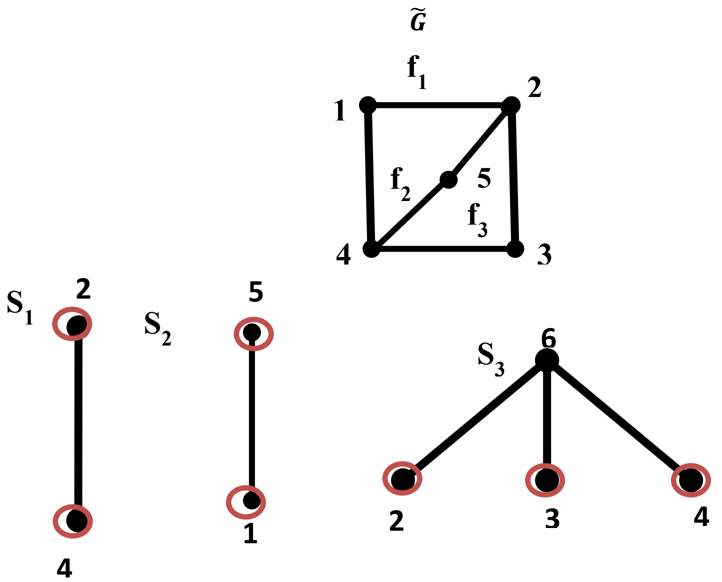
$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{S_1}) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{S_3}) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{S_3}) \ = \ \{f_1, f_2\}.$$



3) Выберем сегмент **S₂** и α-цепь = {4, 5, 2}, уложим её в одной из допустимых граней, пусть это будет f_2.

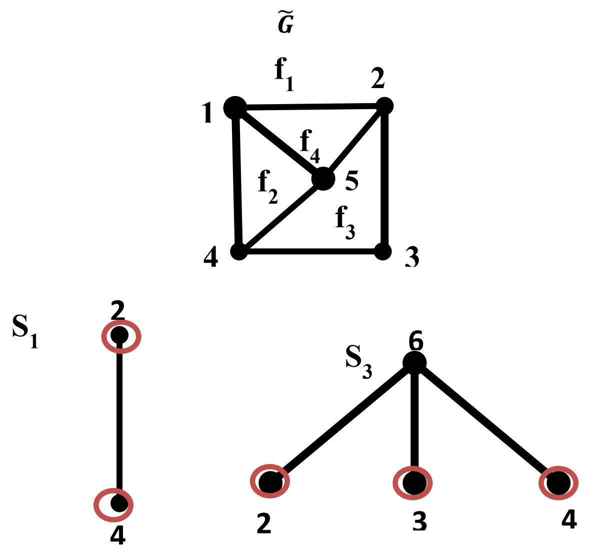


4) Для новой текущей плоской укладки определяем новые множества граней и сегментов.



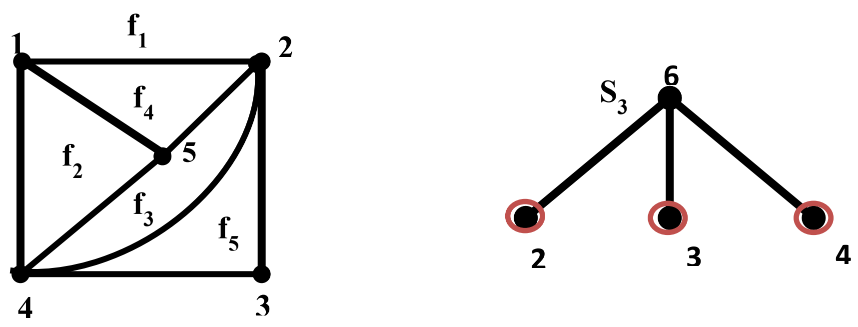
5) Для каждого сегмента определим множества допустимых граней: $\boldsymbol{f(S_1)} = \{f_1, f_2, f_3\}$, $\boldsymbol{f(S_2)} = \{f_2\}$, $\boldsymbol{f(S_3)} = \{f_1, f_3\}$. Выбираем сегмент $\boldsymbol{S_2}$ и укладываем его в единственную для него допустимую грань f_2. Получаем текущую частичную плоскую укладку графа $\boldsymbol{G}$.

6) Для новой текущей частичной укладки $\widetilde{\boldsymbol{G}}$ определим множество граней и сегментов.



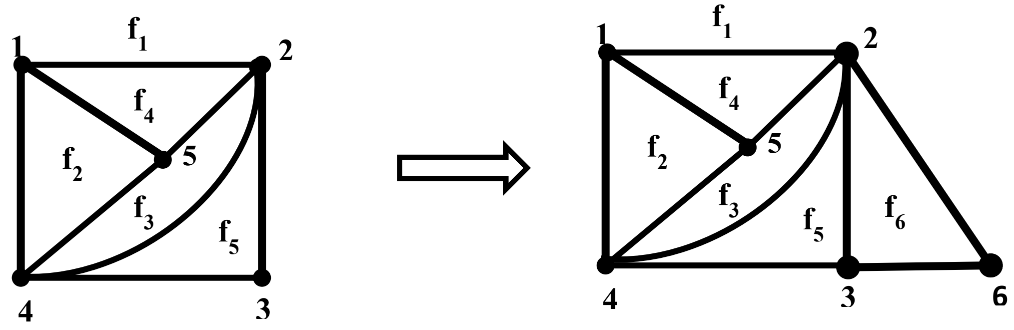
Множества допустимых граней для сегментов: $\boldsymbol{f(S_1)} = \boldsymbol{f(S_3)} = \{f_1, f_3\}$. Выбираем сегмент $\boldsymbol{S_1}$ и укладываем в допустимой для него грани f_3.

7) Получаем новую частичную укладку. Определяем для нее множество граней и сегментов.

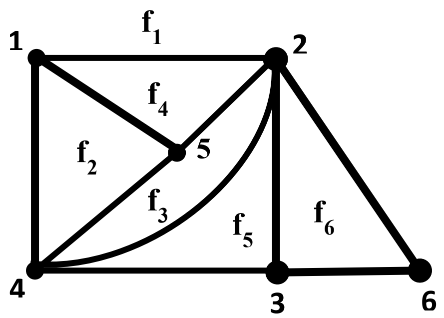


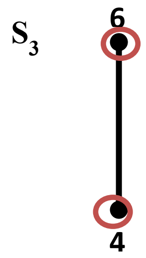
Множество допустимых граней для сегмента $\boldsymbol{f(S_3)} = \{f_1, f_5\}$.

8) Выбираем грань f_1 и α -цепь = $\{3, 6, 2\}$, укладываем его в допустимой грани и получаем новую текущую частичную укладку.

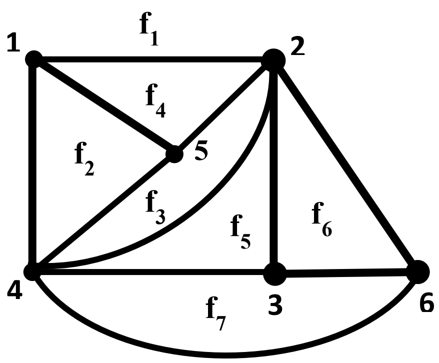


9) Для новой текущей частичной укладки находим множество граней и сегментов. Для сегмента ***S₃*** множество допустимых граней составляет: $\boldsymbol{f(S_3)} = \{f_1\}$. Заключаем сегмент ***S₃*** до допустимой грани f_1.





10) Получаем новую текущую плоскую укладку. Множество сегментов пусто, следовательно, алгоритм закончил работу. Входной граф - планарный и построена его плоская укладка.



Характеристики не планарных графов

Число пересечений графа G − это наименьшее число пересечений двух ребер при изображении графа $\boldsymbol{G}$ на плоскости (обозначают $cr(G)$).

Искаженность $\boldsymbol{G}$ − это минимальное число ребер, удаление которых приводит к планарному графу (обозначают $Sk(G)$).

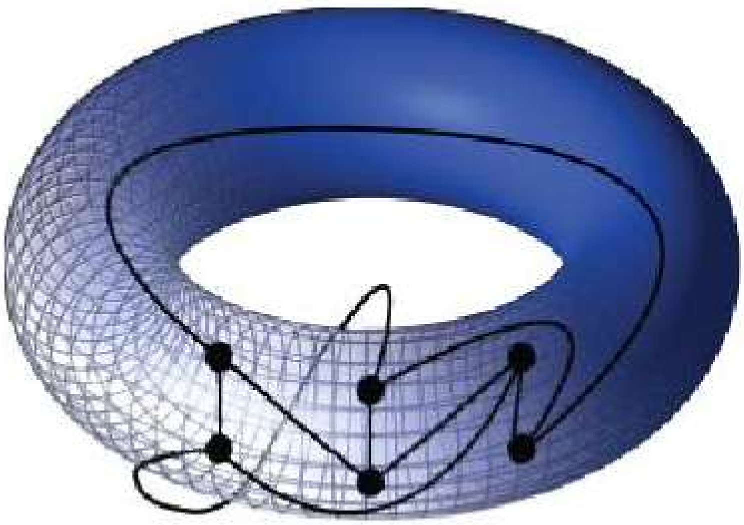
Толщина $\boldsymbol{G}$ − это минимальное число его планарных подграфов, объединение которых дает исходный граф $\boldsymbol{G}$ (обозначают $t(G)$).

Род графа $\boldsymbol{G}$ − это минимальное число ручек, которые необходимо добавить к сфере, чтобы можно было уложить граф G без пересечений, самопересечений ребер.

Непланарный граф, укладывающийся на торе без пересечений и самопересечений ребер называются тороидальными, род такого графа равен 1.

К тороидальным графам относят графы K_5 , K_7 , $K_{3,3}$, $K_{4,\,4}$.

Пример укладывания графа $K_{3,3}$ на торе:



Задание на домашнюю работу

Исходные данные граф G: GV(13, {5, 6})

Алгоритм генерации варианта

GV(p, X) : A[1:p,1:p], где

p - количество вершин в графе;

X - параметр генерации (множество целых чисел);

A - матрица смежности неориентированного графа.

S = <фамилия>< имя>< отчество>// должно полностью совпадать с записью в ЭОС

n(c) - функция - номер буквы в алфавите

А-1	Д-5	З-9	Л-13	П-17	У-21	Ч-25	Ы-29
Б-2	Е-6	И-10	М-14	Р-18	Ф-22	Ш-26	Э-30
В-3	Ё-7	Й-11	Н-15	С-19	Х-23	Щ-27	Ю-31
Г-4	Ж-8	К-12	О-16	Т-20	Ц-24	Ь-28	Я-32

1. Вычеркнуть из S все повторные вхождения букв.

2. Построить Y = || y_{ij} ||, i,j =1..p, yij = | n(Si) - n(Sj) |.

3. Построить A = || a_{ij} ||, i,j =1..p, $\|a_{ij}\| = \begin{cases} 1, \text{если } \exists x \in X: y_{ij} \bmod x = 0 \\ 0, i = j \\ 0, \text{иначе} \end{cases}$

4. Для каждой изолированной вершины добавить (удалить) одно ребро. Добавляемое (удаляемое) ребро связывает текущую вершину со следующей (по номеру). Для последней вершины следующая - первая.

Например, GV(7, X{2,3}).
Строка S = СИДОР~~О~~В~~ИВ~~АНПЕТ~~РОВИ~~Ч.

После вычеркивания повторных вхождений букв S = СИДОРВАНПЕТЧ.

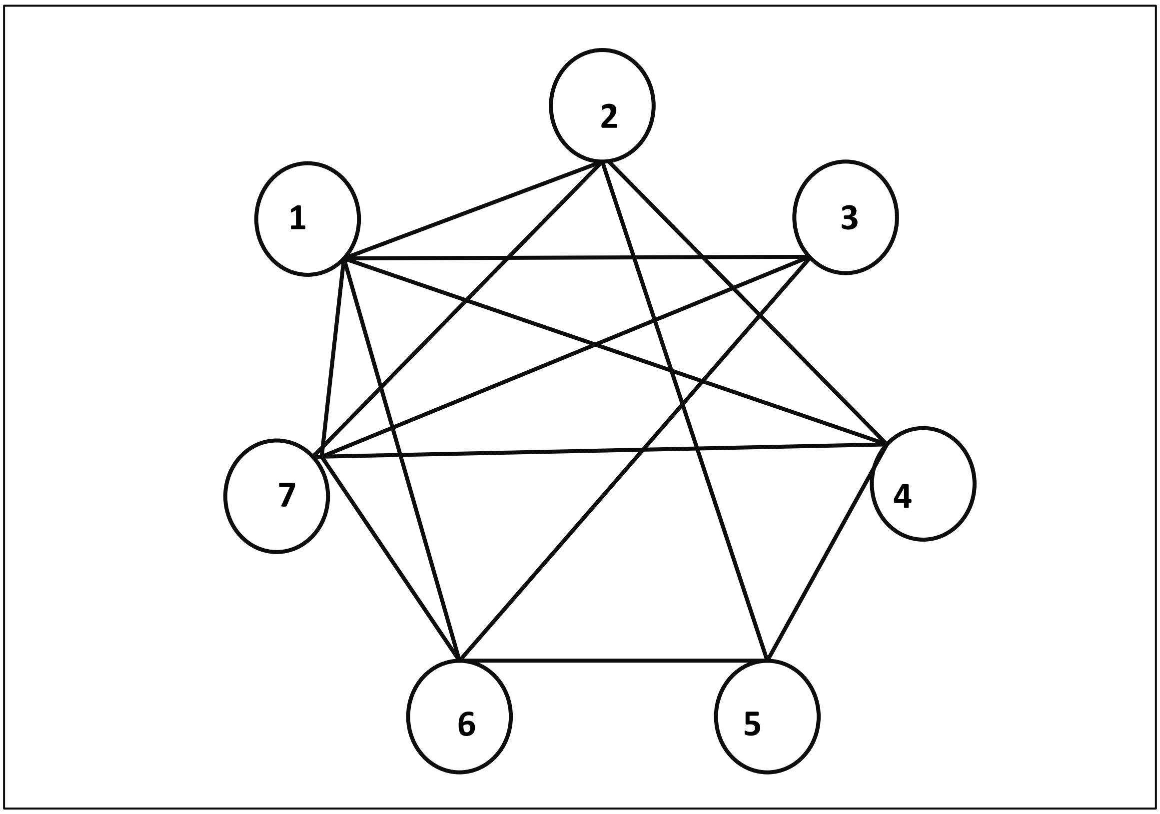
S	С	И	Д	О	Р	В	А	Н	П	Е	Т	Ч
n(si)	19	10	5	16	18	3	1	15	17	6	20	25

Y =

	19	10	5	16	18	3	1
19	0	9	14	3	1	16	18
10	9	0	5	6	8	7	9
5	14	5	0	11	13	2	4
16	3	6	11	0	2	13	15
18	1	8	13	2	0	15	17
3	16	7	2	13	15	0	2
1	18	9	4	15	17	2	0

A =

	1	2	3	4	5	6	7
1	0	1	1	1	0	1	1
2	1	0	0	1	1	0	1
3	1	0	0	0	0	1	1
4	1	1	0	0	1	0	1
5	0	1	0	1	0	1	0
6	1	0	1	0	1	0	1
7	1	1	1	1	0	1	0



1. Определить, является ли исходный граф G планарным или непланарным, используя критерий Понтрягина-Куратовского или Вагнера.

Найти подграф G, гомеоморфный K_5 или $K_{3,3}$ по критерию Понтрягина-Куратовского или подграф, стягиваемый к K_5 или к $K_{3,3}$ по критерию Вагнера.

2. Если исходный граф планарен, обозначить его G_1.

3. Если исходный граф непланарен, обозначить его G_2 .

4. Если исходный граф был планарен, добавить минимальное число ребер до непланарности и обозначить полученный непланарный граф G_2.

5. Если исходный граф был непланарен, удалить минимальное число ребер и обозначить полученный планарный граф G_1.

6. Количество добавляемых (удаляемых) при преобразованиях графа ребер должно быть обосновано.

7. Построить плоскую укладку графа G_1, используя алгоритм γ. Продемонстрировать пошаговое выполнение алгоритма γ .

8. Для непланарного графа G_2 найти род, толщину, искаженность и число пересечений.

Требования к отчёту

Титульный лист
Цели и задачи домашней работы
Этапы выполнения задания с полным объяснением решения.
Выводы