ИУК4-21Б.

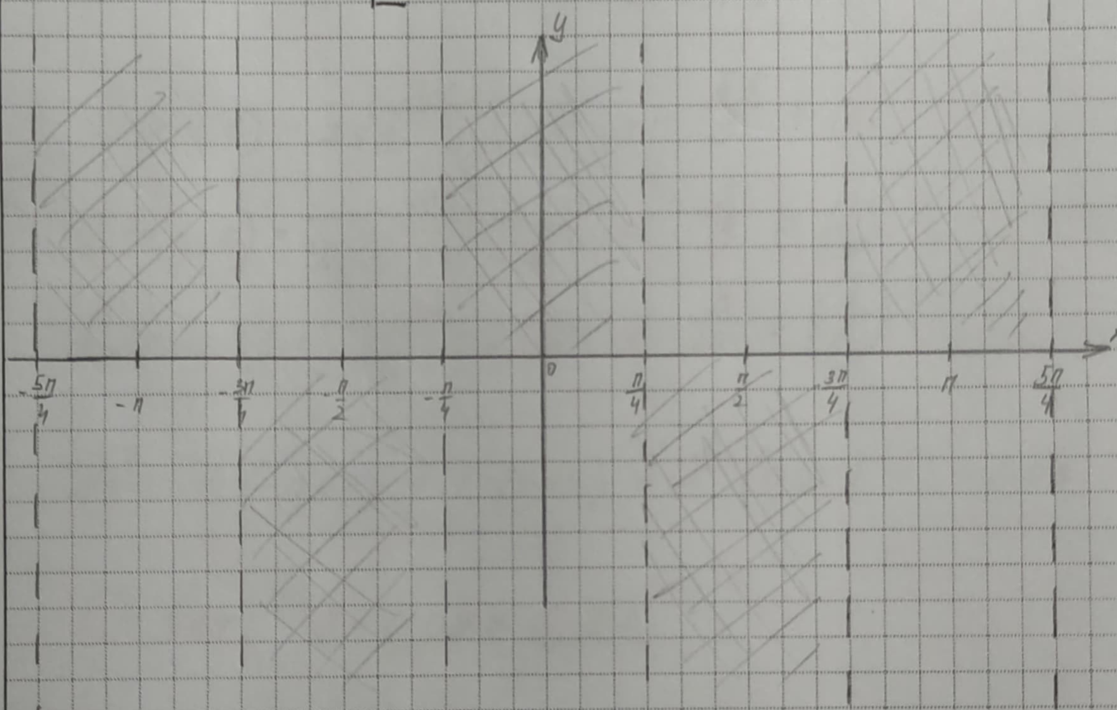
Суриков. Н. С . В - 20

Задание 1. Найти область определения функции и изобразить её на чертеже.

$$z = \frac{1}{\sqrt{y\cos(2x)}}$$

ОГР: $y\cos(2x) > 0 \Rightarrow$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} y > 0 \\ \cos(2x) > 0 \end{cases} \\ \begin{cases} y < 0 \\ \cos(2x) < 0 \end{cases} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} y > 0 \\ \frac{3\pi}{4} + \pi k < x < \frac{5\pi}{4} + \pi k, \ k \in Z \end{cases} \\ \begin{cases} y < 0 \\ \frac{\pi}{4} + \pi k < x < \frac{3\pi}{4} + \pi k, \ k \in Z \end{cases} \end{array}\right.$$



Ответ: $D(z)$ - это объединение бесконечного множества бесконечных вертикальных полос 2х видов:

1. $\frac{3\pi}{4} + \pi k < x < \frac{5\pi}{4} + \pi k$, $(y>0)$, $k \in Z$
2. $\frac{\pi}{4} + \pi k < x < \frac{3\pi}{4} + \pi k$, $(y<0)$, $k \in Z$

Задание 2. Вычислить приближённо.

$$\sqrt{9\cdot(1{,}98)^3+6\cdot(1{,}03)^3+3e^{0{,}06}}$$

$$f(x,y,z)=\sqrt{9x^3+6y^3+3e^z}$$

$$f(x+\Delta x,\ y+\Delta y,\ z+\Delta z)\approx f(x,y,z)+df$$

$x=2,\quad \Delta x=-0{,}02$

$y=1,\quad \Delta y=0{,}03$

$z=0,\quad \Delta z=0{,}06$

$$f(x,y,z)=\sqrt{72+6+3}=\sqrt{81}=9$$

$$df=f'_x(x,y,z)\cdot\Delta x+f'_y(x,y,z)\cdot\Delta y+f'_z(x,y,z)\cdot\Delta z$$

$$f'_x(x,y,z)=\frac{27x^2}{2\sqrt{9x^3+6y^3+3e^z}}=\frac{54}{9}=6$$

$$f'_y(x,y,z)=\frac{18y^2}{2\sqrt{9x^3+6y^3+3e^z}}=\frac{9}{9}=1$$

$$f'_z(x,y,z)=\frac{3e^z}{2\sqrt{9x^3+6y^3+3e^z}}=\frac{3}{18}=\frac{1}{6}$$

$$df=6\cdot(-0{,}02)+1\cdot(0{,}03)+\frac{1}{6}\cdot(0{,}06)=-0{,}08$$

Ответ: $9-0{,}08=\underline{8{,}92}$.

Задание 3. Проверить, удовлетворяет ли указанному уравнению данная функция Z.

$$x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = 0 \qquad Z = \operatorname{arctg} \frac{x}{y}$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{y}{y^2+x^2}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{x}{y^2+x^2}$$

Проверим:

$$x \cdot \frac{y}{y^2+x^2} + y \cdot \frac{-x}{y^2+x^2} = 0$$

$$\frac{xy}{y^2+x^2} - \frac{xy}{y^2+x^2} = 0 \Rightarrow 0 = 0. \text{ Верно.}$$

Ответ: данная функция Z удовлетворяет указанному уравнению.

Задание 4. Найти уравнение касательной плоскости и нормали к заданной поверхности S в точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$

$$F = x^2 - y^2 - z^2 + xz + 4z = -5, \quad M_0(-2, 1, 0)$$

$$F(x,y,z) = x^2 - y^2 - z^2 + xz + 4z + 5 = 0$$

Уравнение касательной плоскости имеет вид:

$$F'_x(M_0) \cdot (x - x_0) + F'_y(M_0) \cdot (y - y_0) + F'_z(M_0)(z - z_0)$$

$F'_x = 2x + z$ | $F'_x(M_0) = -4$

$F'_y = -2y$ | $F'_y(M_0) = -2$

$F'_z = -2z + x + 4$ | $F'_z(M_0) = 2$

$-4(x+2) - 2(y-1) + 2(z-0) = 0.$

$-4x - 8 - 2y + 2 + 2z = 0$

$-4x - 2y + 2z - 6 = 0 \quad | : (-2)$

$2x + y - z + 3 = 0.$ – ур. касательной

Ур. нормали по $M_0(-2, 1, 0)$ и ~~$\vec{N} = \{-4, -2, 2\}$~~

$\vec{N} = \{2, 1, -1\}$

$\frac{x+2}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{(z-0)}{-1}$ – ур. нормали.

Ответ: $\frac{x+2}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z}{-1}$.

Задание 5. Исследовать на экстремум функцию.

$$Z = x^2 - xy + y^2 + 9x - 6y + 20.$$

$$\begin{cases} z'_x = 2x - y + 9 = 0 \\ z'_y = -x + 2y - 6 = 0 \end{cases}$$

$y = 2x + 9 \Rightarrow y = -8 + 9 = 1$

$-x + 4x + 18 - 6 = 0$

$3x = -12$

$x = -4$

$$\boxed{\begin{matrix} x = -4 \\ y = 1 \end{matrix}}$$

$M_0(-4, 1)$ – ед. крит. точка.

$z''_{xx} = 2$

$z''_{yy} = 2$

$z''_{xy} = -1$

$$\mathcal{V}(M_0) = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$\Delta_1 = 2 > 0$

$\Delta_2 = 4 - 1 = 3 > 0$

$\Rightarrow M_0$ – т. мин.

$$Z_{min} = 16 + 4 + 1 - 36 - 6 + 20 = -1$$