Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Калужский филиал
федерального государственного бюджетного
образовательного учреждения высшего образования
***«Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана
(национальный исследовательский университет)»
(КФ МГТУ им. Н.Э. Баумана)***

ФАКУЛЬТЕТ ***МК «Машиностроительный»***
КАФЕДРА ***МК10 «Высшая математика и физика»***

ДОМАШНЯЯ РАБОТА №1
Вариант № 21

ДИСЦИПЛИНА: **«Аналитическая геометрия»**
ТЕМА: **«Матричное исчисление и системы линейных уравнений»**

Выполнил: студент гр. ИУК4-11Б ________________ (Суриков Н.С.)
(подпись) (Ф.И.О.)

Проверил: ________________ (Серёгина Е.В.)
(подпись) (Ф.И.О.)

Дата сдачи (защиты): ____________________

Результаты сдачи (защиты):

Балльная оценка: ____________________

Оценка: ____________________

Калуга, 2023

№1

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 3 \\ 3 & 4 & 2 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 17 & 21 & 4 \\ 27 & 33 & 18 \\ 20 & 34 & 19 \end{pmatrix}$$

Решение:

Уравнение вида $A \cdot X = B$

$\Rightarrow X = A^{-1} \cdot B$

Найдём A^{-1}

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 3 \\ 3 & 4 & 2 \end{vmatrix} = \overset{30}{(3 \cdot 5 \cdot 2)} + \overset{8}{(1 \cdot 2 \cdot 4)} + \overset{18}{(3 \cdot 2 \cdot 3)} - \overset{15}{(1 \cdot 5 \cdot 3)} -$$
$$- \overset{8}{(2 \cdot 2 \cdot 2)} - \overset{36}{(4 \cdot 3 \cdot 3)} = -3$$

$-3 \neq 0 \Rightarrow A^{-1}$ существует.

$$A^{T} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 4 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A^{*} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 5 & 3 & -7 \\ -7 & -6 & 11 \end{pmatrix}$$

$A'_{11} = \begin{vmatrix} 5 & 4 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -2$; $A'_{12} = -\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 0$; $A'_{13} = \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 1$

$A'_{21} = -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 5$; $A_{22} = \begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 3$; $A_{23} = -\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -7$;

$A'_{31} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} = -7$; $A_{32} = -\begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = -6$; $A_{33} = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 11$

$$A^{-1} = -\frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 5 & 3 & -7 \\ -7 & -6 & 11 \end{pmatrix}$$

Ищем решение исходного уравнения

$$X = A^{-1} \cdot B = \left(-\frac{1}{3}\right) \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 5 & 3 & -7 \\ -7 & -6 & 11 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 17 & 21 & 4 \\ 27 & 33 & 18 \\ 20 & 34 & 19 \end{pmatrix} = \left(-\frac{1}{3}\right) \begin{pmatrix} -34+0+20 & -42+0+34 & -8+0+19 \\ 85+81-140 & 105+99-238 & 20+54-133 \\ -119-162+220 & -147-198+374 & -28-108+209 \end{pmatrix}$$

$$= \left(-\frac{1}{3}\right) \begin{pmatrix} -14 & -8 & 11 \\ 26 & -34 & -59 \\ -61 & 29 & 73 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14/3 & 8/3 & -4/3 \\ -26/3 & 34/3 & 59/3 \\ 61/3 & -29/3 & -73/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{14}{3} & \frac{8}{3} & \frac{-11}{3} \\ \frac{-26}{3} & \frac{34}{3} & \frac{59}{3} \\ \frac{61}{3} & \frac{-29}{3} & \frac{-73}{3} \end{pmatrix}$$

Проверка

$$\begin{pmatrix}3&2&1\\2&5&3\\3&4&2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\frac{14}{3}&\frac{8}{3}&\frac{-11}{3}\\ \frac{-26}{3}&\frac{34}{3}&\frac{59}{3}\\ \frac{61}{3}&\frac{-29}{3}&\frac{-73}{3}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{3\cdot14}{3}+\frac{2\cdot(-26)}{3}+\frac{61}{3}, & \frac{3\cdot8}{3}+\frac{2\cdot34}{3}+\frac{-29}{3}, & \frac{3\cdot(-11)}{3}+\frac{2\cdot59}{3}+\frac{-73}{3}\\ \frac{2\cdot14}{3}+\frac{5\cdot(-26)}{3}+\frac{3\cdot61}{3}, & \frac{2\cdot8}{3}+\frac{5\cdot34}{3}+\frac{3\cdot(-29)}{3}, & \frac{2\cdot(-11)}{3}+\frac{5\cdot59}{3}+\frac{3\cdot(-73)}{3}\\ \frac{3\cdot14}{3}+\frac{4\cdot(-26)}{3}+\frac{2\cdot61}{3}, & \frac{3\cdot8}{3}+\frac{4\cdot34}{3}+\frac{2(-29)}{3}, & \frac{3\cdot(-11)}{3}+\frac{4\cdot59}{3}+\frac{2\cdot(-73)}{3}\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}\frac{42-52+61}{3}&\frac{24+68-29}{3}&\frac{-33+118-73}{3}\\ \frac{28-130+183}{3}&\frac{170+16-87}{3}&\frac{-22+295-219}{3}\\ \frac{42-104+122}{3}&\frac{24+136-58}{3}&\frac{-33+236-146}{3}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{51}{3}&\frac{63}{3}&\frac{12}{3}\\ \frac{81}{3}&\frac{99}{3}&\frac{54}{3}\\ \frac{60}{3}&\frac{102}{3}&\frac{57}{3}\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}17&21&4\\27&33&18\\20&34&19\end{pmatrix}=B \quad \checkmark$$

Ответ $X=\begin{pmatrix}\frac{14}{3}&\frac{8}{3}&\frac{-11}{3}\\ \frac{-26}{3}&\frac{34}{3}&\frac{59}{3}\\ \frac{61}{3}&\frac{-29}{3}&\frac{-73}{3}\end{pmatrix}$

№ 2

$$\begin{cases}2x_1+6x_2-3x_3+9x_4=14\\ 5x_1+17x_2-15x_3+8x_4=15\\ 3x_1+8x_2-3x_3+14x_4=22\\ 3x_1+11x_2-12x_3-x_4=1\end{cases}$$

$$(A|B)=\left(\begin{array}{cccc|c}2&6&-3&9&14\\5&17&-15&8&15\\3&8&-3&14&22\\3&11&-12&-1&1\end{array}\right)\begin{array}{l}\times(-5)\ \ \times(-3)\ \ \times(-3)\\ \times 2\\ \times 2\\ \times 2\end{array}\sim$$

$$\sim\begin{pmatrix}2&6&-3&9&14\\0&4&-15&-29&-40\\0&-2&3&1&2\\0&4&-15&-29&-40\end{pmatrix}\begin{array}{l}\\ \times1\ \ \times(-1)\\ \times 2\\ \\ \end{array}\sim\begin{pmatrix}2&6&-3&9&14\\0&4&-15&-29&-40\\0&0&-9&-27&-36\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

$r(A|B)=r(A)=3$, $n=4 \Rightarrow r<n \Rightarrow$ Совместная, неопределённая

$r=3 \Rightarrow$ 3 базисные переменные. x_1, x_2, x_3

$n-r=1 \Rightarrow$ 1 свободная переменная $x_4=c_1$, $c_1\in R$

$$\begin{cases} 2x_1 + 6x_2 - 3x_3 + 9x_4 = 14 \\ 4x_2 - 15x_3 - 29x_4 = -40 \\ -9x_3 - 27x_4 = -36 \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x_1 + 6x_2 - 3x_3 + 9c_1 = 14 \\ 4x_2 - 15x_3 - 29c_1 = -40 \\ -9x_3 - 27c_1 = -36 \end{cases}$$

$$-9x_3 - 27c_1 = -36 \quad |:9$$

$$x_3 + 3c_1 = 4$$

$$x_3 = 4 - 3c_1$$

$$4x_2 - 15(4 - 3c_1) - 29c_1 = -40$$

$$4x_2 - 60 + 45c_1 - 29c_1 = -40$$

$$4x_2 + 16c_1 = 20 \quad |:4$$

$$x_2 = 5 - 4c_1$$

$$2x_1 + 6(5 - 4c_1) - 3(4 - 3c_1) + 9c_1 = 14$$

$$2x_1 + 30 - 24c_1 - 12 + 9c_1 + 9c_1 = 14$$

$$2x_1 - 6c_1 = -4 \quad |:2$$

$$x_1 = 3c_1 - 2$$

$$x_1 = -2 + 3c_1$$

$$x_2 = 5 - 4c_1$$

$$x_3 = 4 - 3c_1$$

$$x_4 = c_1$$

Проверка

$$2(-2 + 3c_1) + 6(5 - 4c_1) - 3(4 - 3c_1) + 9c_1 =$$

$$= -4 + \underline{6c_1} + 30 - \underline{24c_1} - 12 + \underline{9c_1} + \underline{9c_1} = 14 - 0 = \underline{14} = 14 \ ✓$$

$$5(-2 + 3c_1) + 17(5 - 4c_1) - 15(4 - 3c_1) + 8c_1 =$$

$$= -10 + \underline{15c_1} + 85 - \underline{68c_1} - 60 + \underline{45c_1} + \underline{8c_1} = 15 - 0 = \underline{15} = 15 \ ✓$$

$$3(-2 + 3c_1) + 8(5 - 4c_1) - 3(4 - 3c_1) + 14c_1 =$$

$$= -6 + \underline{9c_1} + 40 - \underline{32c_1} - 12 + \underline{9c_1} + \underline{14c_1} = 22 - 0 = \underline{22} = 22 \ ✓$$

$$3(-2 + 3c_1) + 11(5 - 4c_1) - 12(4 - 3c_1) - c_1 =$$

$$= -6 + \underline{9c_1} + 55 - \underline{44c_1} - 48 + \underline{36c_1} - \underline{c_1} = 1 - 0 = \underline{1} = 1 \ ✓$$

Ответ: $\begin{pmatrix} -2 + 3c_1 \\ 5 - 4c_1 \\ 4 - 3c_1 \\ c_1 \end{pmatrix}, \ c_1 \in R$

№3

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - 2x_3 - x_4 + 4x_5 = 0 \\ 7x_1 + 5x_2 - 3x_3 - 2x_4 + x_5 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 + 0 - 7x_5 = 0 \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 & -1 & 4 \\ 7 & 5 & -3 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & -7 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & -7 \\ 7 & 5 & -3 & -2 & 1 \\ 3 & 2 & -2 & -1 & 4 \end{pmatrix} \begin{matrix} \times(-7) \quad \times(-3) \\ \\ \\ \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 7 \\ 0 & -2 & -10 & -2 & 50 \\ 0 & -1 & -5 & -1 & 25 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 7 \\ 0 & -1 & -5 & -1 & 25 \\ 0 & -2 & -10 & -2 & 50 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \times(-2) \\ \\ \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 7 \\ 0 & -1 & -5 & -1 & 25 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{matrix} r(A) = 2 \\ n = 5 \end{matrix}\right\} \; r(A) < n$$ => система имеет бесконечно много нетривиальных решений

$r(A) = 2$ => система уравнений имеет 2 базисные переменные, примем за них x_1 и x_2, тогда $5 - 2 = 3$ свободные переменные, за которые мы принимаем $x_3 = c_1$, $x_4 = c_2$, $x_5 = c_3$, где $c_1, c_2, c_3 \in R$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + c_1 - 7c_3 = 0 \\ -x_2 - 5c_1 - c_2 + 25c_3 = 0 \end{cases}$$

$x_2 = -5c_1 - c_2 + 25c_3$

$x_1 = 5c_1 + c_2 - 25c_3 - c_1 + 7c_3 =$

$= 4c_1 + c_2 - 18c_3$

Общее решение:

$$X = \begin{pmatrix} 4c_1 + c_2 - 18c_3 \\ -5c_1 - c_2 + 25c_3 \\ c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$$

Проверка

$$3(4c_1 + c_2 - 18c_3) + 2(-5c_1 - c_2 + 25c_3) - 2c_1 - c_2 + 4c_3 =$$

$$= 12c_1 + 3c_2 - 54c_3 - 10c_1 - 2c_2 + 50c_3 - 2c_1 - c_2 + 4c_3 =$$

$$= 0 \checkmark$$

$$7(4c_1 + c_2 - 18c_3) + 5(-5c_1 - c_2 + 25c_3) - 3c_1 - 2c_2 + c_3 =$$

$$= 28c_1 + 7c_2 - 126c_3 - 25c_1 - 5c_2 + 125c_3 - 3c_1 - 2c_2 + c_3 =$$

$$= 0 \checkmark$$

$$4c_1 + c_2 - 18c_3 - 5c_1 - c_2 + 25c_3 + c_1 - 7c_3 = 0 \checkmark$$

Фундаментальная система будет иметь $n - r(A) = 3$ решения.

$$E_1 = (1, 0, 0) = \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad E_2 = (0, 1, 0) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad E_3 = (0, 0, 1) = \begin{pmatrix} -18 \\ 25 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$X = c_1 E_1 + c_2 E_2 + c_3 E_3 = c_1 \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_3 \begin{pmatrix} -18 \\ 25 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Ответ: $X = c_1 \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_3 \begin{pmatrix} -18 \\ 25 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$