ALGORITHMIQUE DE GRAPHES & OPTIMISATION

Chapitre 4

Flots et Applications dans les réseaux de transport

ENSI-II1 2020-2021

Plan du chapitre

Flots et applications :

- Flots dans les réseaux de transport. Définitions et propriétés.
- Problème du flot maximal : Algorithme de Ford - Fulkerson.
- Application : Problèmes de couplage dans un graphe biparti
- Flot à coût minimal : Algorithme de Busacker-Gowen.

INTRODUCTION

Le problème des flots dans les **réseaux** concerne la circulation de matière sur les arcs d ’un graphe.

Un arc représente:

- un tronçon de route,
- une liaison entre deux entrepôts, deux ports, deux aéroports ,
- une connexion entre deux ordinateurs,
- une connexion électrique entre deux villes …

INTRODUCTION

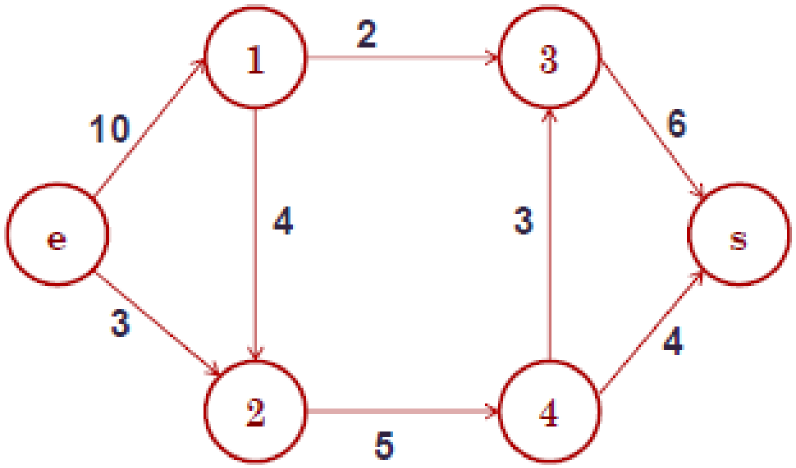
Parmi les nombreuses applications qui relèvent de ce problème, on trouve :

- Trafic dans un réseau routier, aérien, maritime
- Les réseaux de transport de marchandises de différents points distributeurs à différents points consommateurs
- L'écoulement de liquides à l'intérieur de tuyaux
- Le courant dans les réseaux électriques
- Transport d'informations et des données à travers les réseaux de communication
- Le coût de réalisation d 'un projet en ordonnancement, etc.…

DÉFINITION 1:

On appelle **réseau de transport** ou **réseau** un graphe G=(S,A,c) orienté, valué positivement, sans boucle ayant une **entrée (ou racine)** e (le nœud de G n'ayant pas de précédent) et une **sortie (ou puits)** s (le nœud de G n'ayant pas de suivant)

c(u) est la **capacité** de l'arc u



Un réseau valué par ses capacités

DÉFINITION 2 :

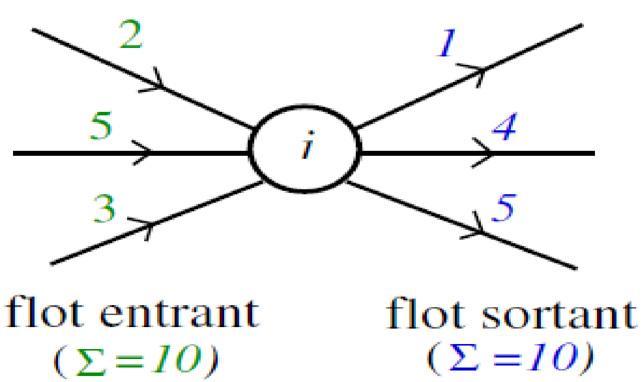
Un **flot compatible** (ou **réalisable**) f sur un réseau de transport G=(S, A, c) est une application $f : A \to IR$ vérifiant:

1- Les contraintes de capacité:

$$\mathbf{0 \le f_{ij} \le c_{ij} \ \forall \ (i,j) \in A} \quad (f_{ij} \overset{def}{=} f(i,j) \quad \text{le } \textbf{flux} \text{ sur l'arc (i,j))}$$

2- Les contraintes de conservations (Loi de Kirchoff):

$$\forall i \in S \setminus \{e, s\}, \quad \sum_{j \in \Gamma^+(i)} f_{ij} = \sum_{k \in \Gamma^-(i)} f_{ki}$$



3- La valeur totale du flot v

$$v = v(f_{e,s}) = \sum_{j \in \Gamma^+(e)} f_{ej} = \sum_{i \in \Gamma^-(s)} f_{is}$$

la propriété de conservation du flot se généralise à un sous-ensemble de sommets.

LEMME 1 :

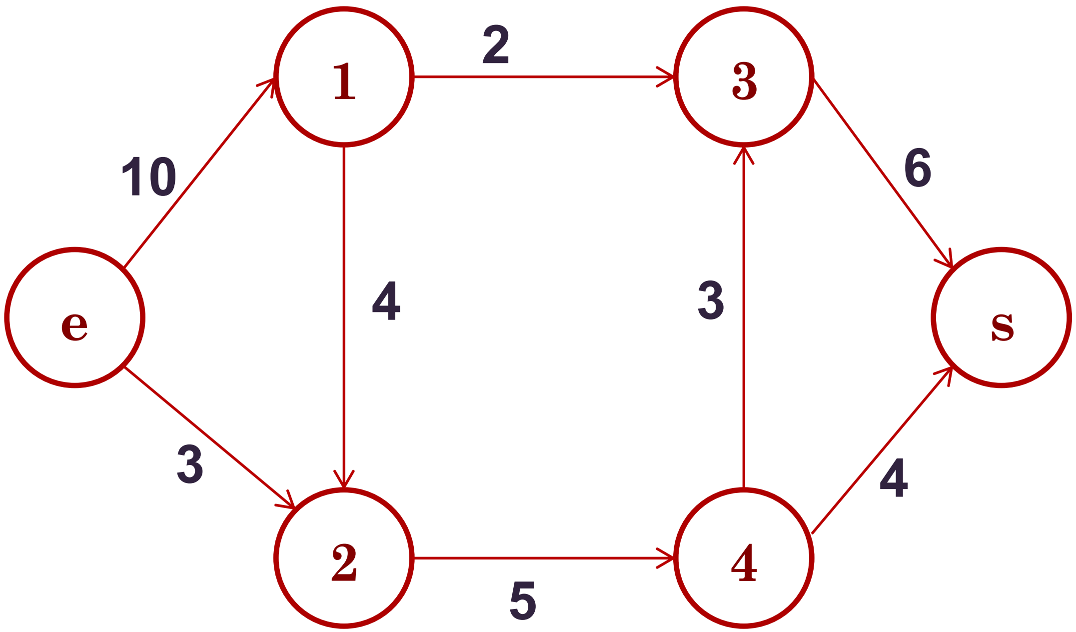
Si f est un flot dans G(S,A), alors:
pour tout sous-ensemble de sommets X $\subset$ S, la somme des flux sortant de X est égale à la somme des flux entrant dans X.

$$\sum_{u \in \omega^+(\mathrm{X})} f_u = \sum_{u \in \omega^-(\mathrm{X})} f_u$$

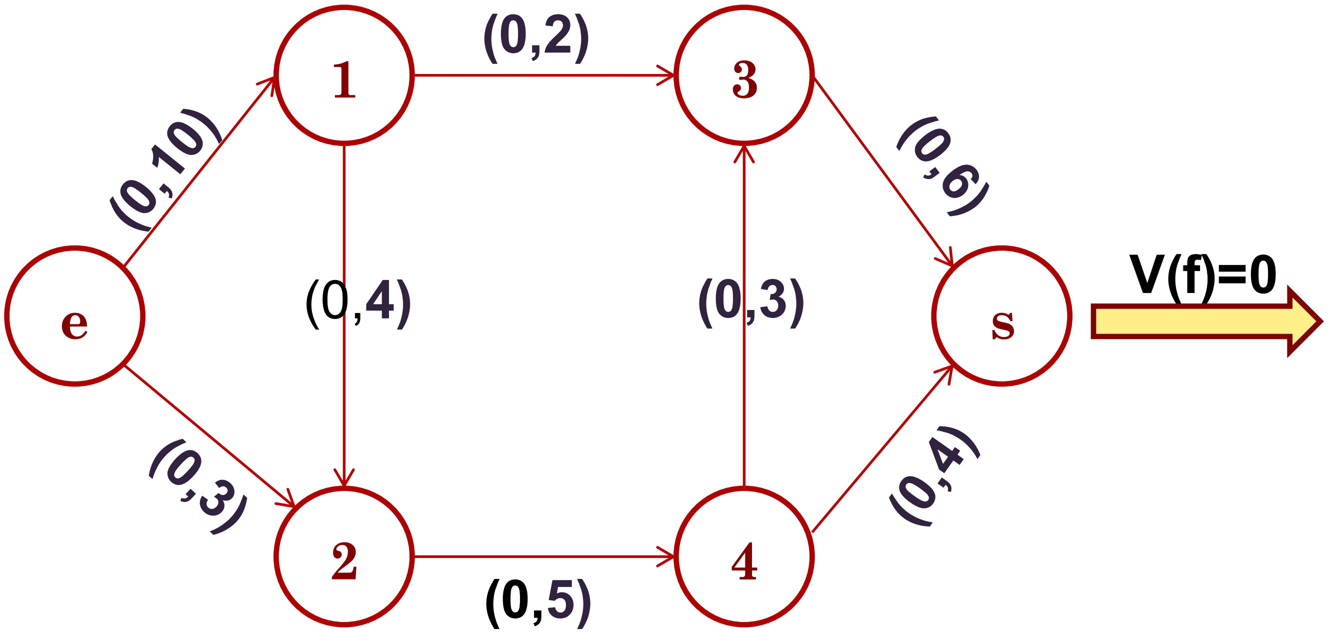
Où: $\omega^+(\mathrm{X}) = \{(i,j) \in A \,/\, i \in \mathrm{X} \text{ et } j \in S \setminus \mathrm{X}\},$

$\omega^-(\mathrm{X}) = \{(j,i) \in A \,/\, j \in S \setminus \mathrm{X} \text{ et } i \in \mathrm{X}\}.$

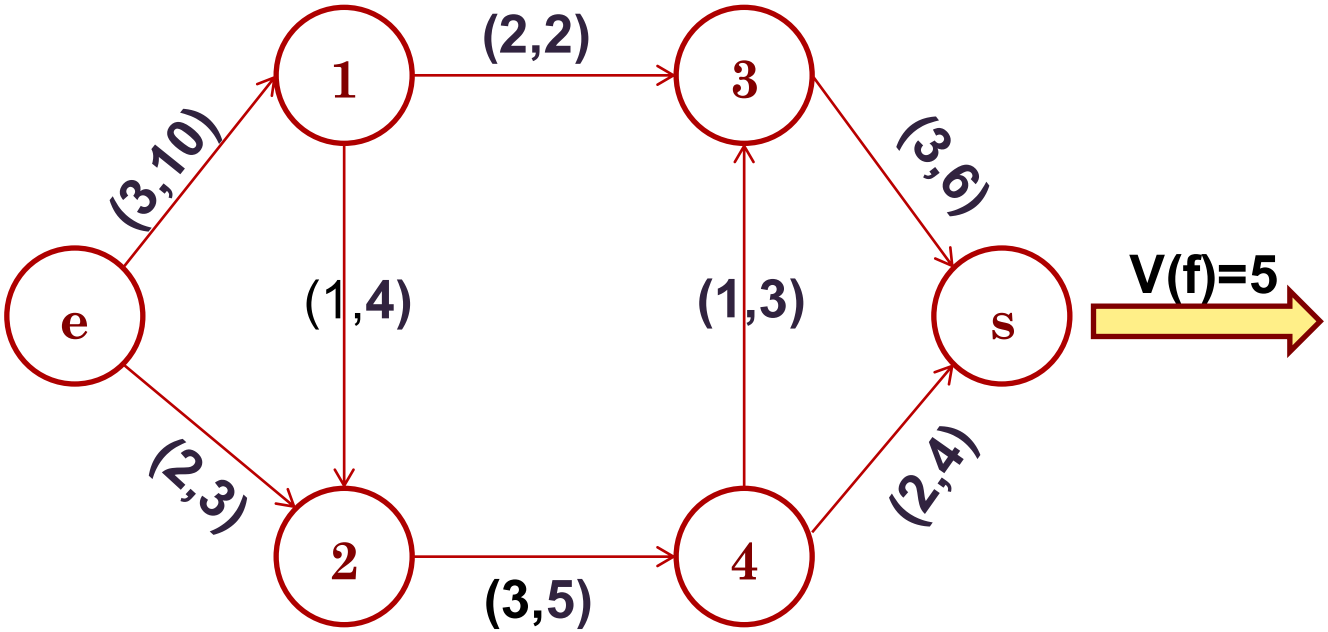
Considérons le réseau routier entre deux villes **e** et **s** dont on connait la capacité (nbr de véhicule / heure) sur chaque tronçon,



Un **premier** exemple de flot (compatible) est le **flot nul**.

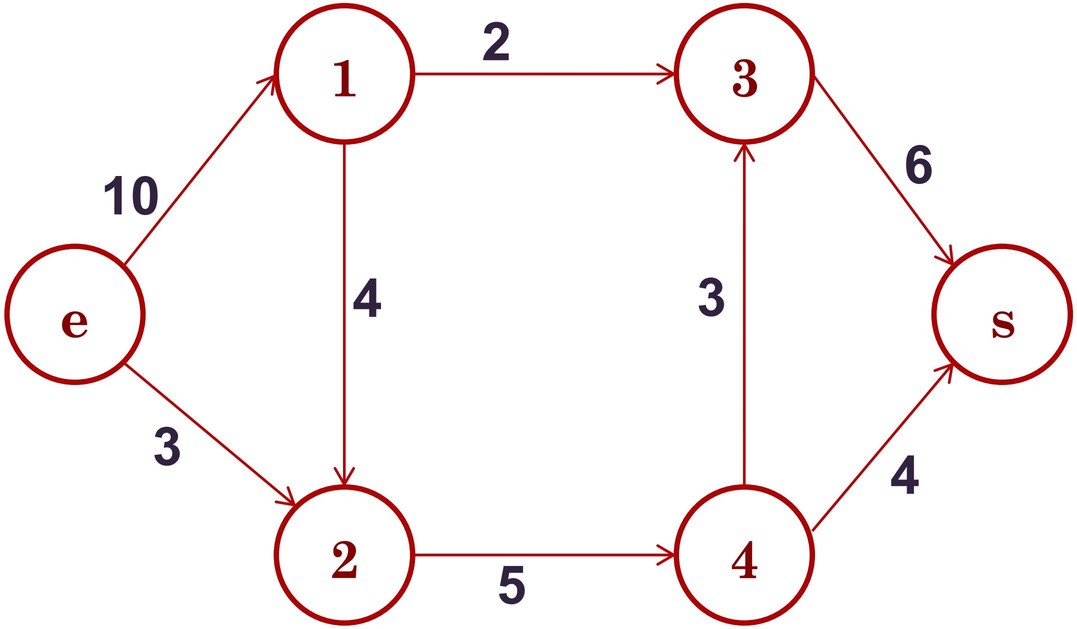


Un **deuxième** exemple de flot est :



2-LE PROBLÈME DU FLOT MAX

Intro : On cherche à trouver **le trafic maximal** entre deux villes **e** et **s** d'un réseau routier dont on connait la capacité (nombre de véhicules / heure) sur chaque tronçon



LE PROBLÈME DU FLOT MAX : Le problème du flot max dans un réseau de transport consiste à trouver un flot f vérifiant les propriétés 1 et 2 (de la définition 2) pour lequel $v(f_{e,s})$ soit maximale.

$$\begin{cases} \boldsymbol{max\,(\,v =} \sum_{i\in\Gamma^{-}(s)} f_{is} = \sum_{i\in\Gamma^{+}(e)} f_{ei}\,) \\ s/c \\ \sum_{i\in\Gamma^{-}(j)} f_{ij} - \sum_{i\in\Gamma^{+}(k)} f_{ki} = 0 \quad \forall i \neq e, s \\ 0 \leq f_{ij} \leq c_{ij} \end{cases}$$

Remarque : Les inconnues sont les f_{ij} (flux sur l'arc (i,j)) et la valeur *v du flot*

Soit f un flot défini sur un graphe G(S,A).

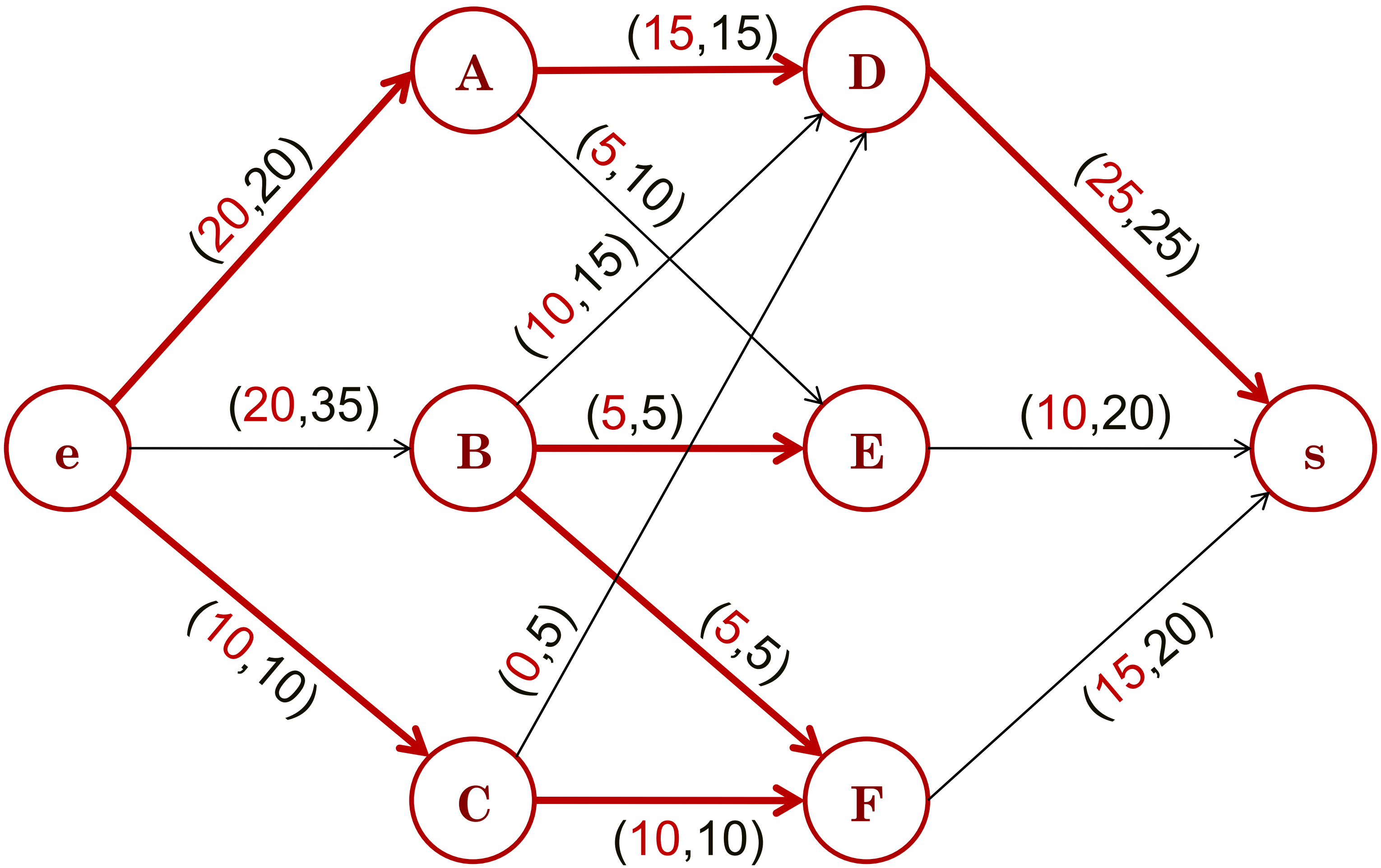
<u>DÉFINITION 3</u>:

Un arc $u=(i,j)\in A$ est dit **saturé** si $f_{ij}=c_{ij}$

<u>DÉFINITION 4</u> : Flot complet

Un **flot complet** est un flot compatible pour lequel tout chemin allant de ***e*** à ***s*** contient <u>au moins un</u> arc saturé.

Exemple: Flot complet



flots complet de valeur 50.

Une première idée pour optimiser (maximiser) le flot est de **saturer** successivement les chemins de ***e*** à ***s***. On obtiendra alors un flot dit **complet** qui, n'est pas (en général) maximal, mais fournit une solution de départ pour appliquer l'algorithme de Ford-Fulkerson (F-F).

Etape N°1: Rendre le flot complet (recherche des chemins améliorants)

A partir d'un flot f donné sur les arcs, existe-t-il un chemin μ

de ***e*** à ***s*** le long duquel aucun arc n'est saturé.

Si un tel chemin est trouvé, on augmentera le flot d'une valeur δ :

$$\delta = \min_{u \in \mu}(c(u) - f(u))$$

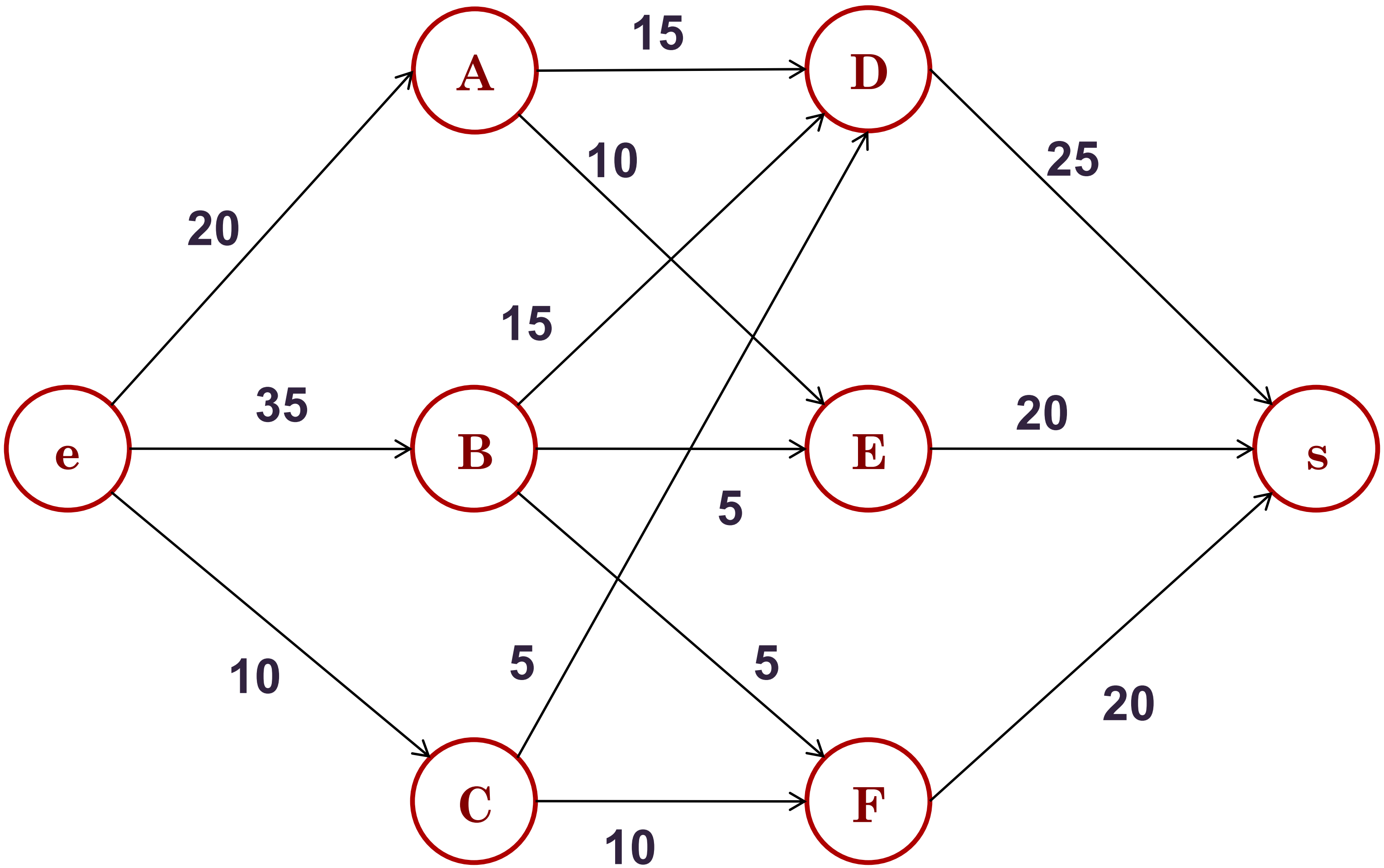
Algorithme de recherche d'un flot complet :

On part d'un flot initial f (par exemple, $f = \mathbf{0}$) et on l'améliore pas à pas par une procédure de marquage :

1. Marquer **e** par (+).
2. à partir d'un sommet **i** marqué, marquer par (+) tout successeur **j** de **i** tel que: $f_{ij} < c_{ij}$.
3. ***Si*** **s** est marqué, alors

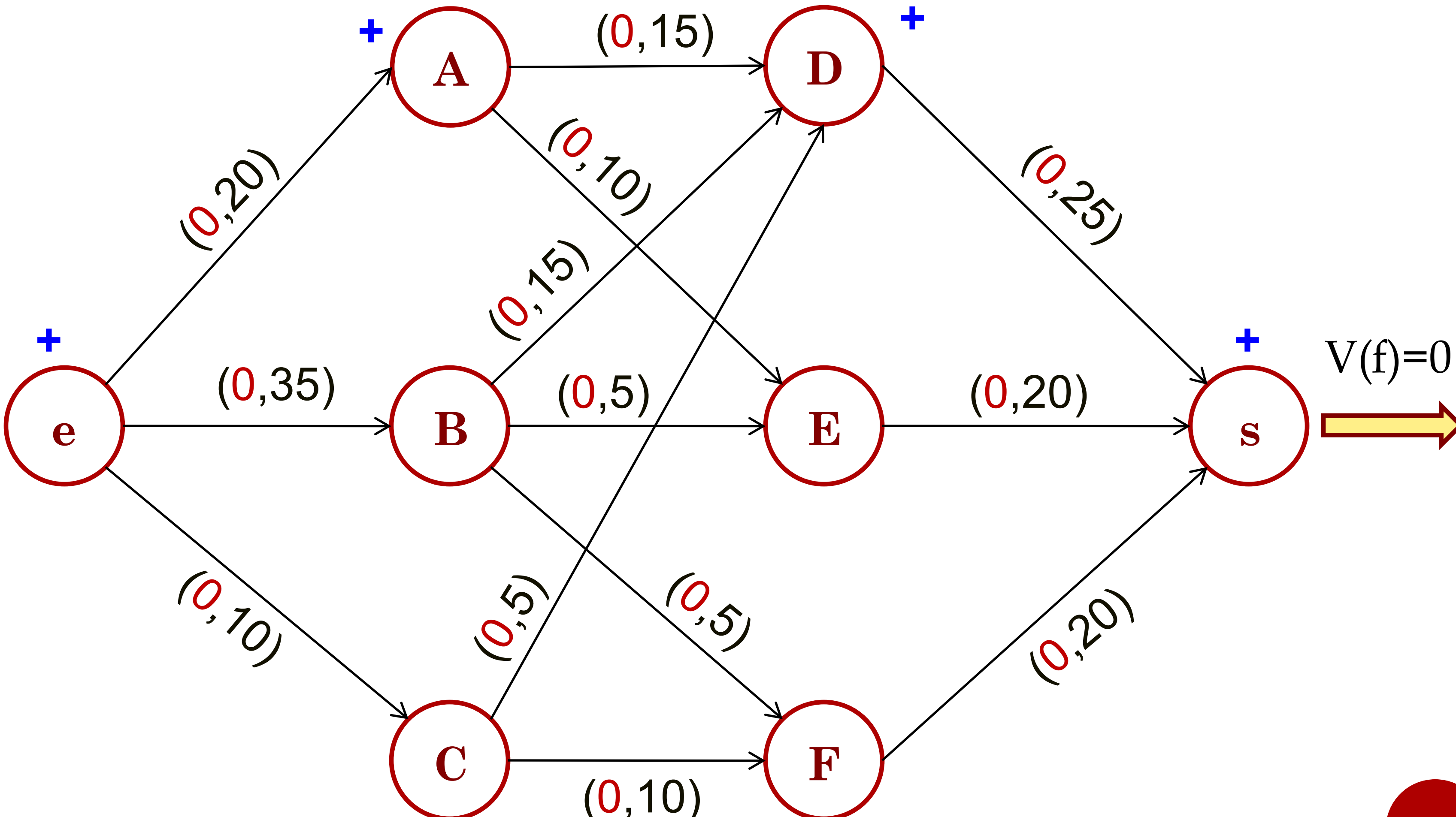
   Augmenter la valeur du flot et aller à (2) jusqu'à ce qu'on ne puisse plus atteindre **s** à partir de **e**.

Déterminons un flot complet sur ce réseau:

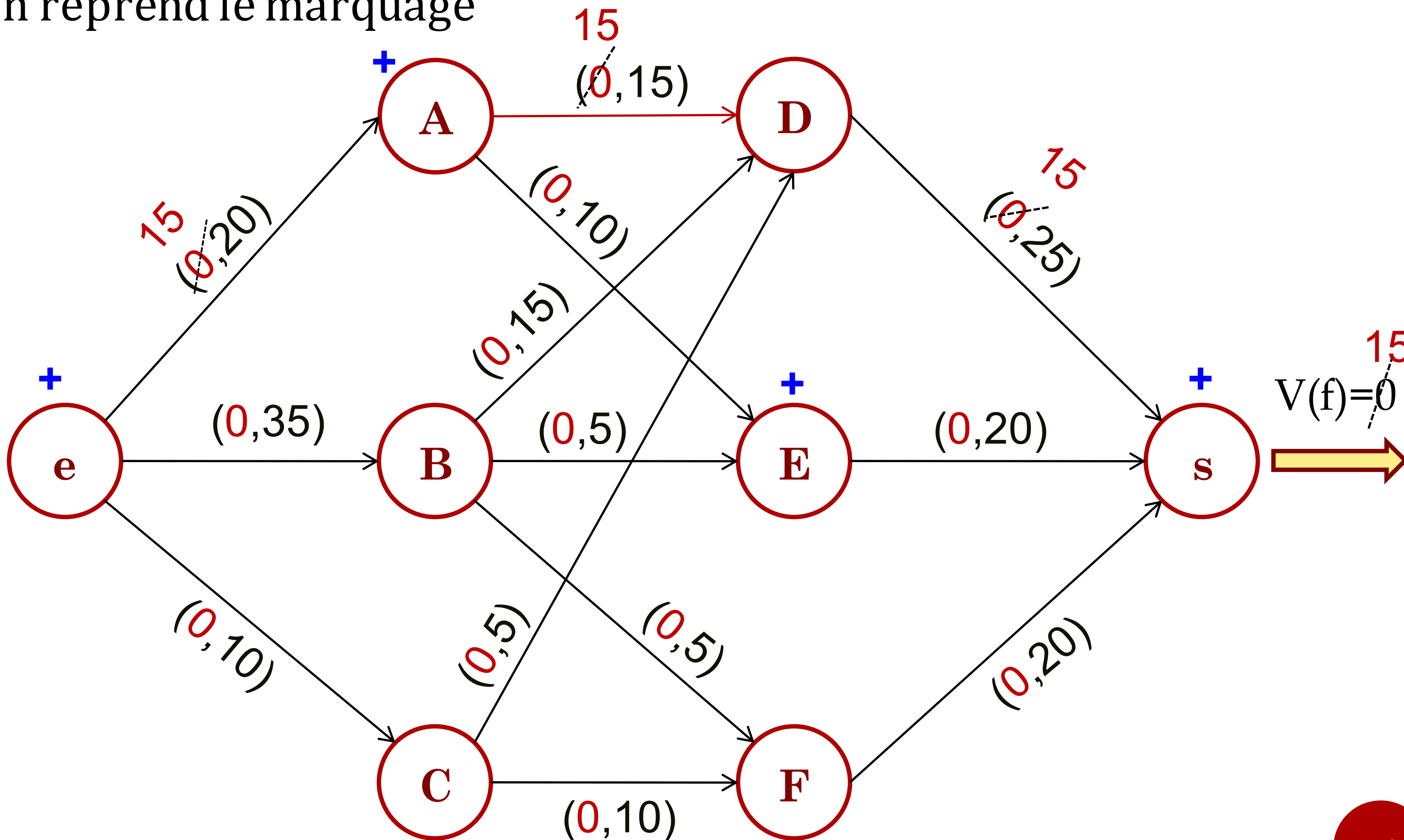


On peut démarrer avec un **flot initial nul.**

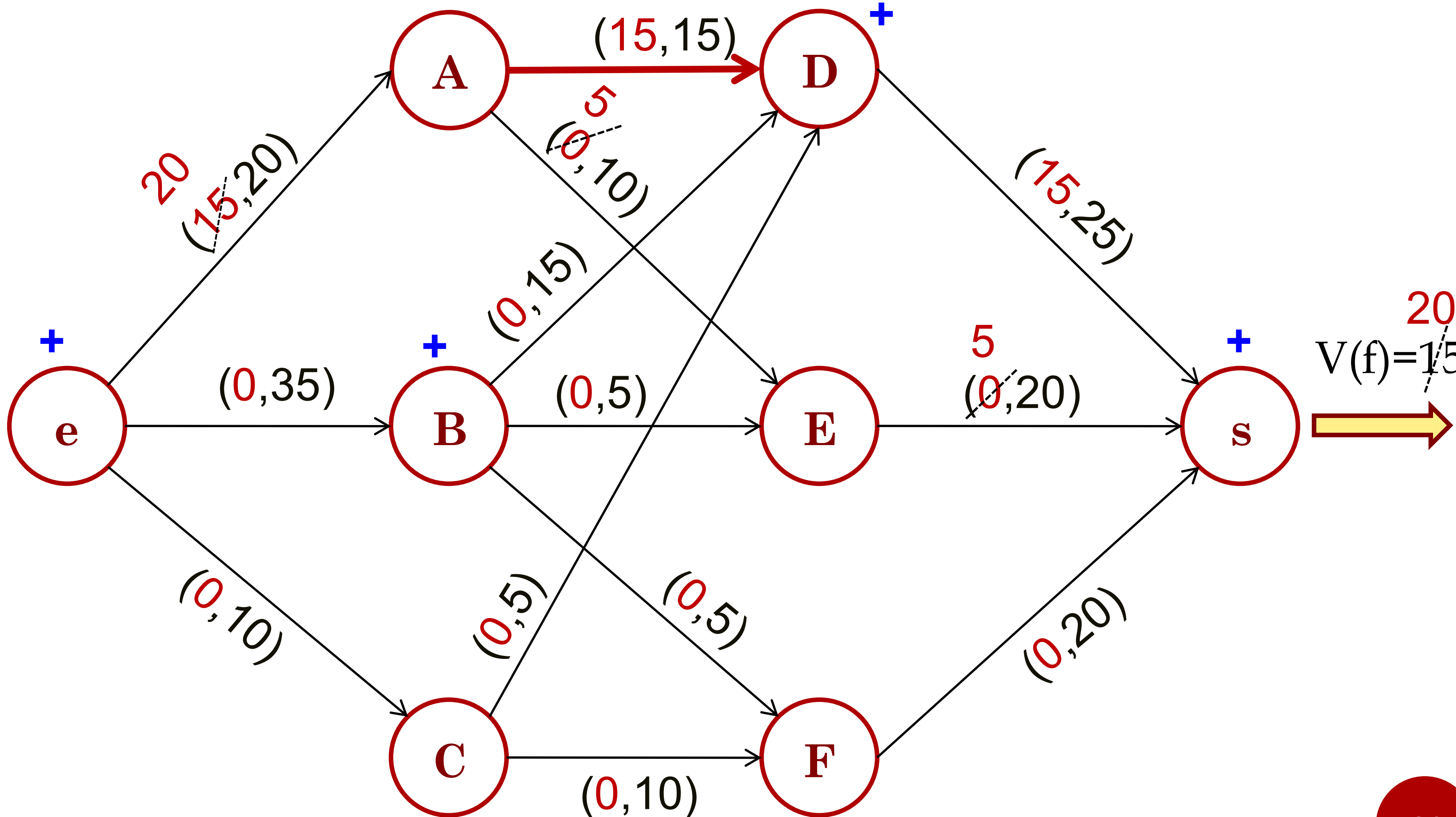
Avec la procédure de marquage on a (par exemple)



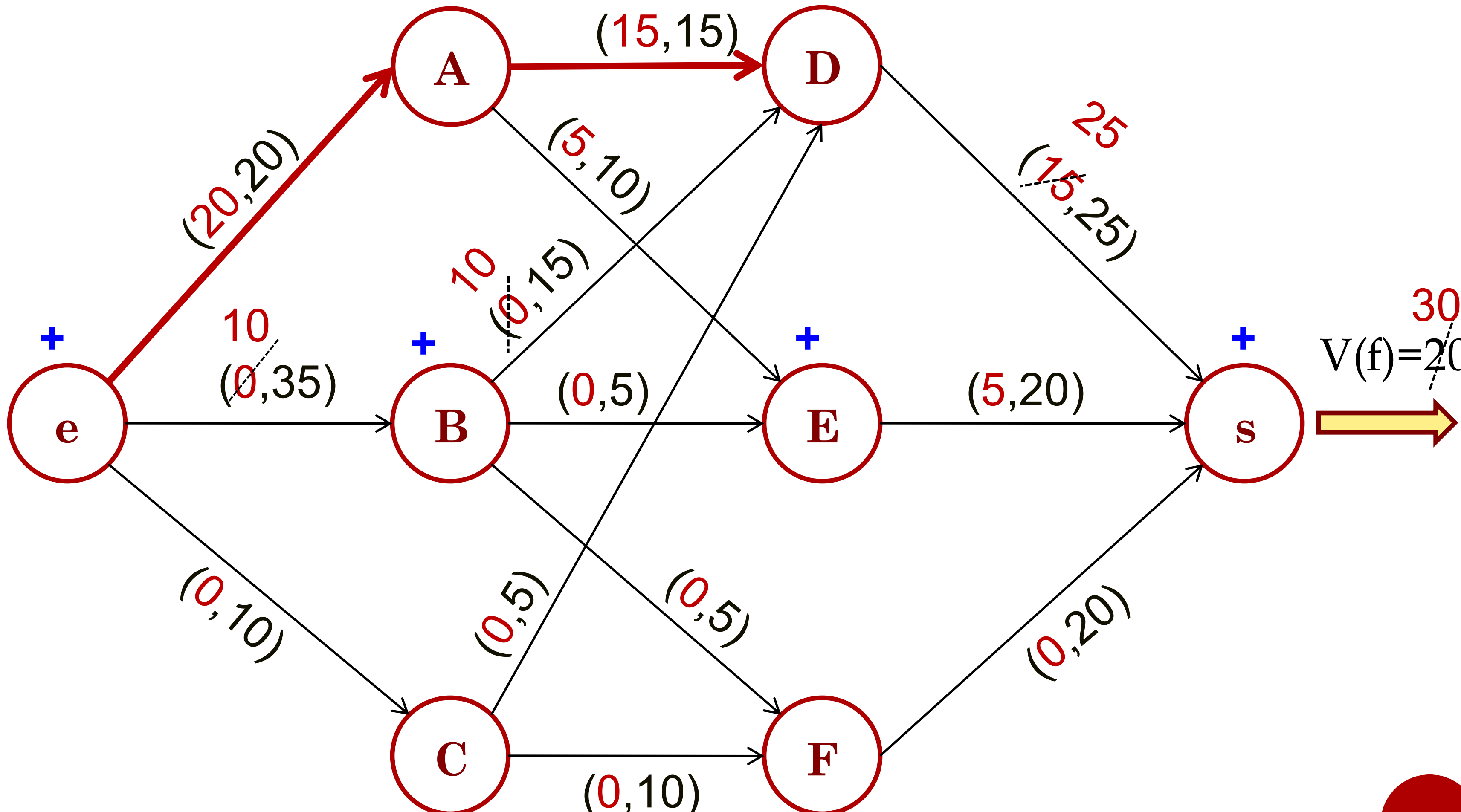
D'où un chemin améliorant $\mu_1 : e \rightarrow A \rightarrow D \rightarrow s$, le long duquel on peut augmenter la valeur du flot de $\delta_1 = \min\{20,15,25\} = 15$. Puis on reprend le marquage



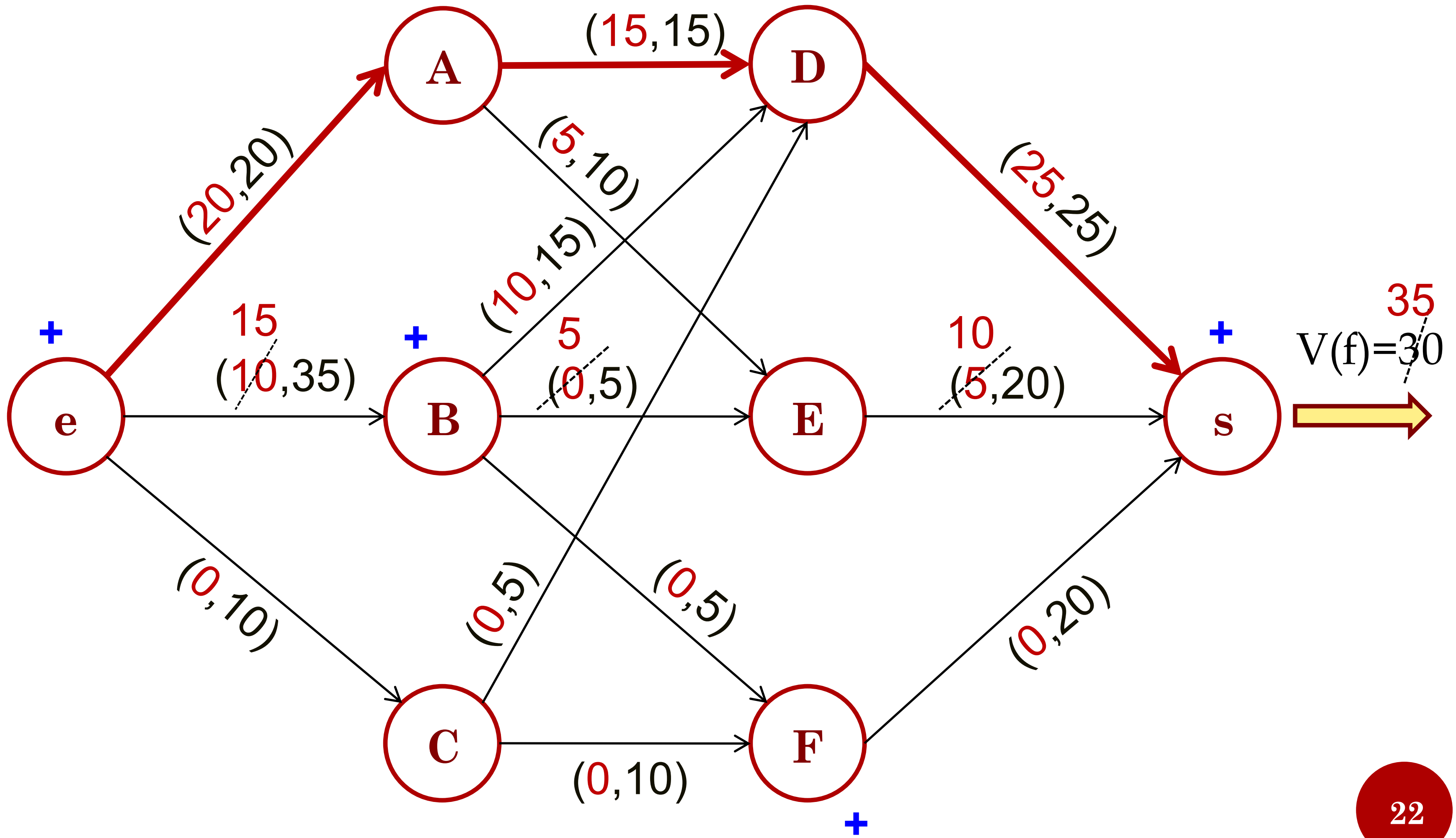
D'où un autre chemin améliorant $\mu_2 : e \rightarrow A \rightarrow E \rightarrow s$, le long duquel on peut augmenter la valeur du flot de $\delta_2=\min\{5,10,20\}=5$. Puis on reprend le marquage



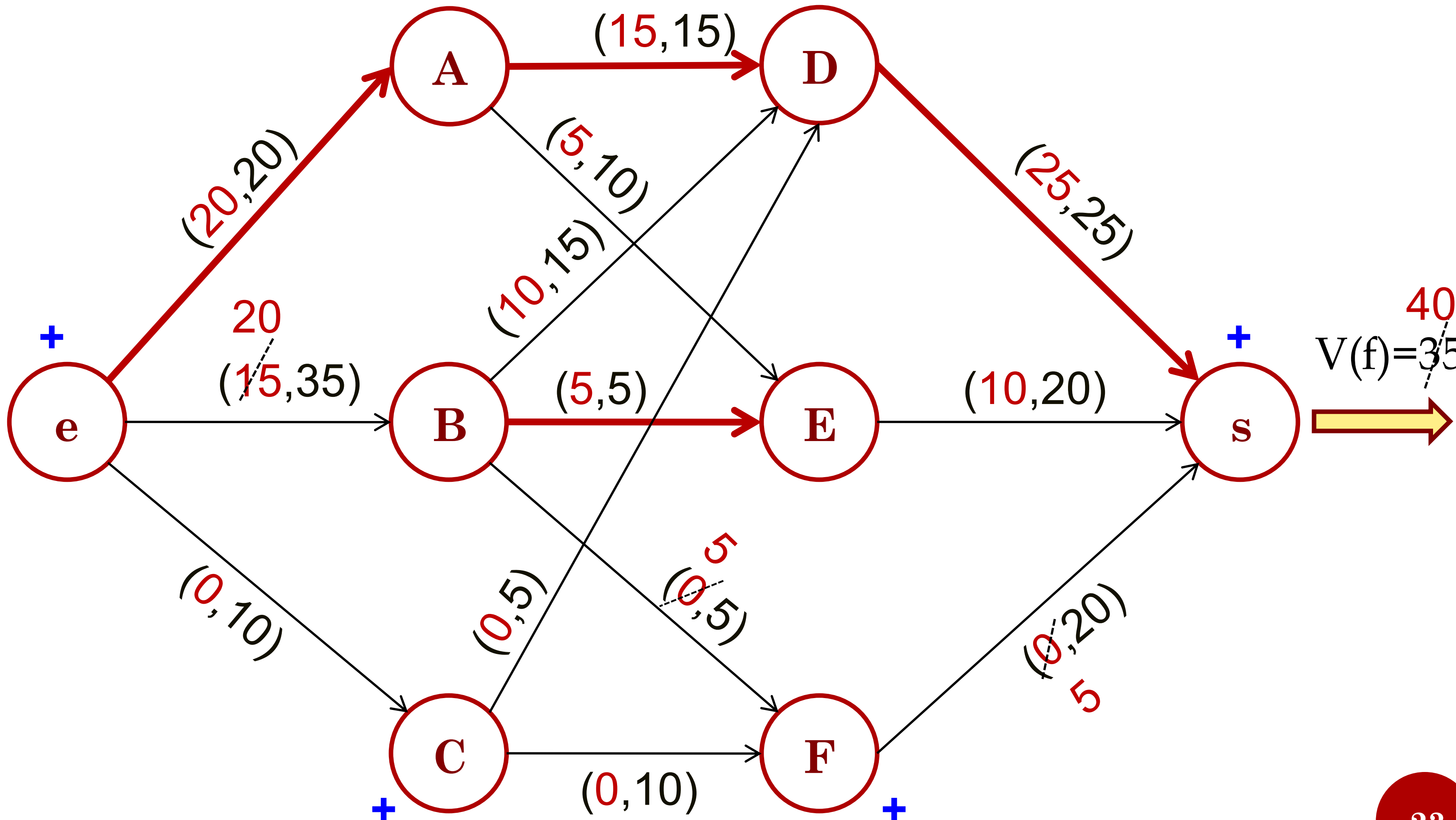
D'où un autre chemin améliorant $\mu_3 : e \rightarrow B \rightarrow D \rightarrow s$, le long duquel on peut augmenter la valeur du flot de $\delta_3 = \min\{35,15,10\} = 10$. Puis on reprend le marquage



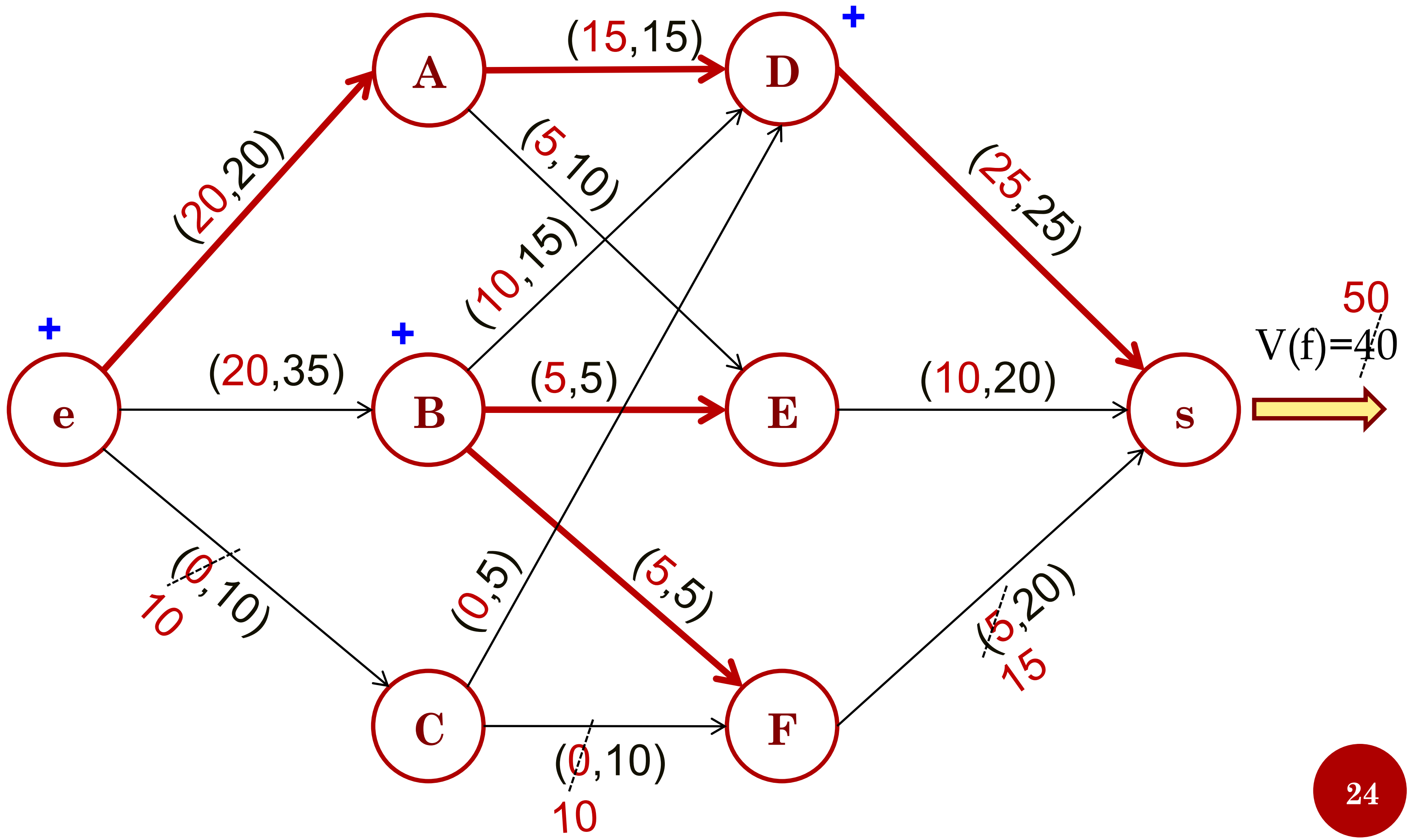
D'où un autre chemin améliorant $\mu_4 : e \rightarrow B \rightarrow E \rightarrow s$, le long duquel on peut augmenter la valeur du flot de $\delta_4=\min\{25,5,15\}=5$. Puis on reprend le marquage



D'où un autre chemin améliorant μ_5: e → B → F → s, le long duquel on peut augmenter la valeur du flot de $\delta_5=\min\{20,5,20\}=5$. Puis on reprend le marquage

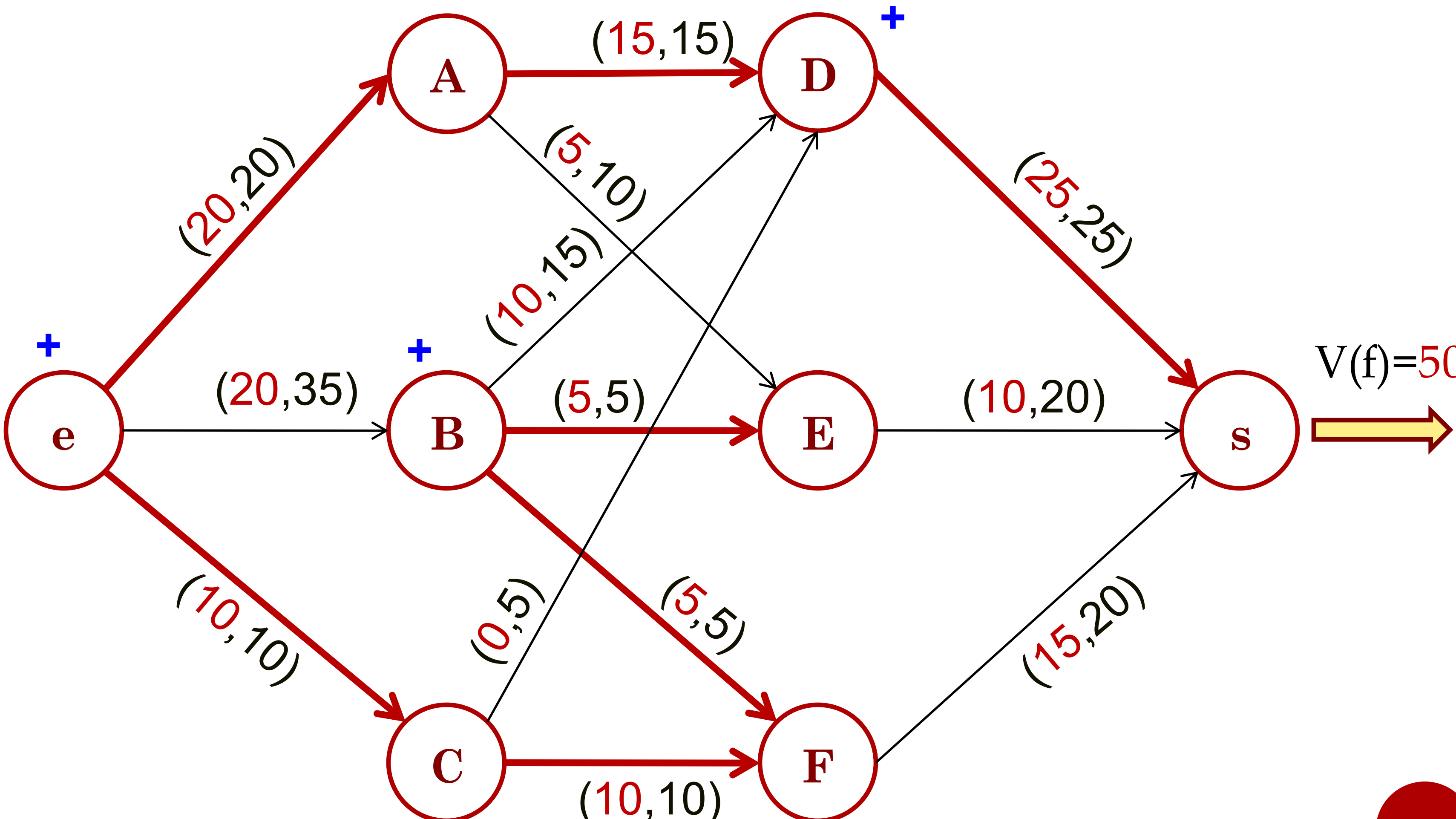


D'où un autre chemin améliorant μ_6: e $\rightarrow$ C $\rightarrow$ F $\rightarrow$ s, le long duquel on peut augmenter la valeur du flot de δ_6=min{10,10,15}=10. Puis on reprend le marquage



D'où on n'arrive plus à marquer s à partir de e

Il n'y a plus de chemin améliorants



flots complet de valeur 50.

EXEMPLE 3:

On veut acheminer un produit à partir de 3 entrepôts (1,2,3) vers 4 clients (a,b,c,d)

- Quantités en stock : 45, 25, 25
- Demande des clients : 30,10, 20, 30
- Limitations en matière de transport d'un entrepôt à un client:

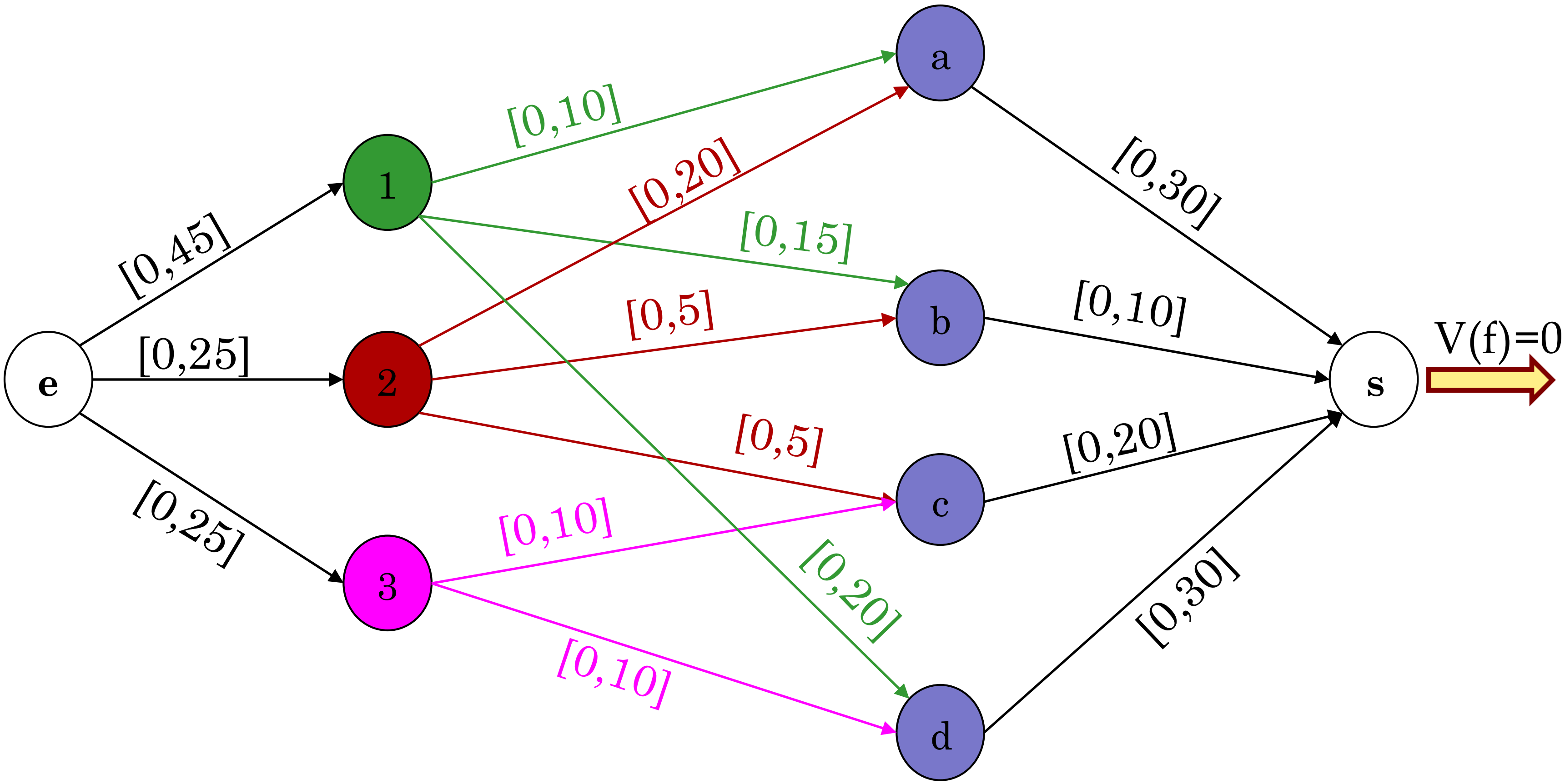
	a	b	c	d
1	10	15	-	20
2	20	5	5	-
3	-	-	10	10

Question

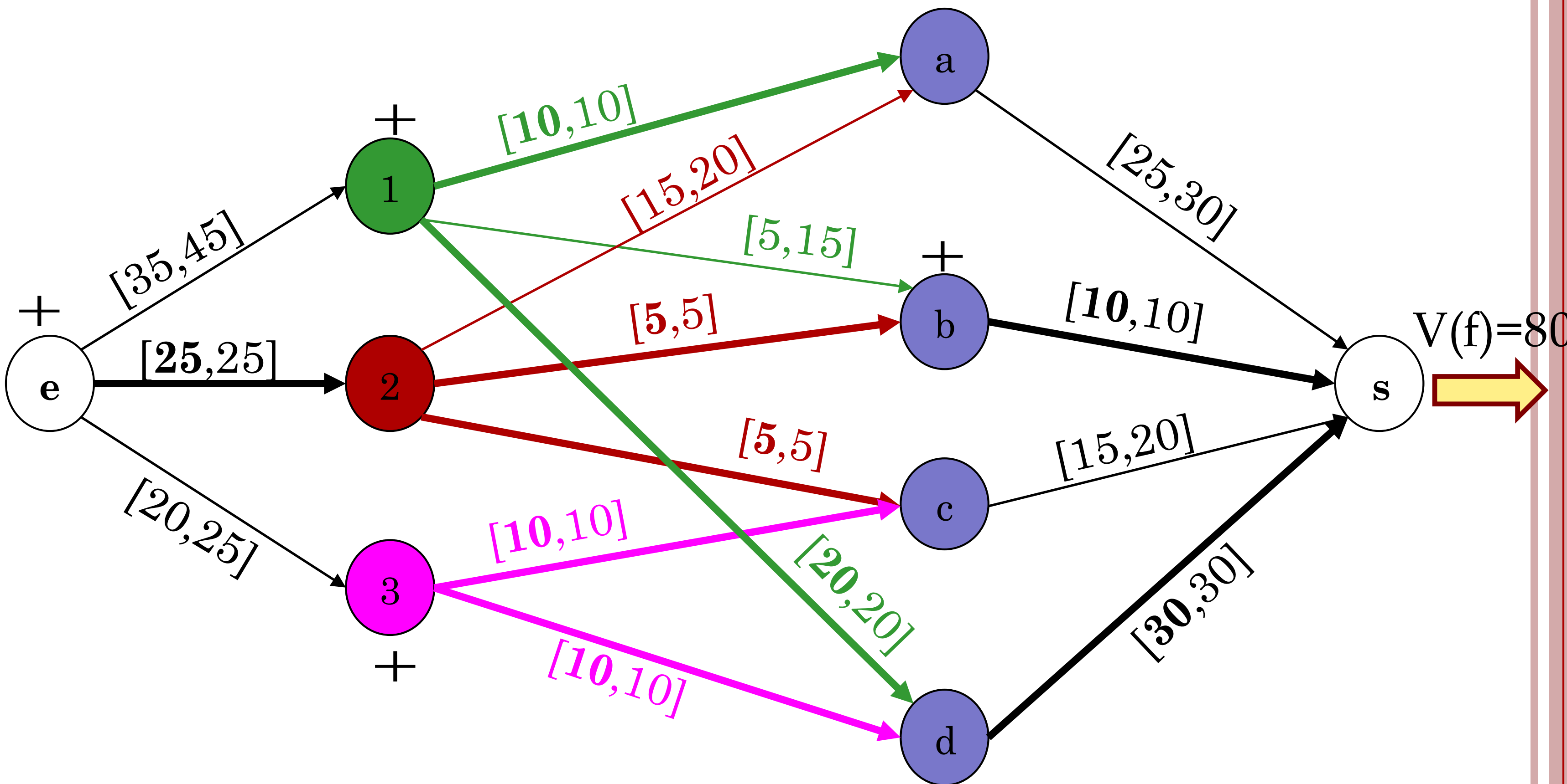
1- Etablir le graphe de ce problème.

2- Donner le meilleur plan de transport.

D'où la modélisation par le réseau ci-dessous, $[f_u, c_u]$, avec un **flot initial nul**



Le flot f ci-dessous est-il complet ?



Sur ce réseau, on ne puisse plus marquer ***s*** à partir de ***e***, donc ce flot est un flot complet, de valeur $V(f) = 80$

Question : Ce flot est-il maximal ?

Le flot complet n'est pas nécessairement optimal.

Il ne prend en compte que les chemins de **e** à **s.**

2.2- ALGORITHME DE FORD & FULKERSON:

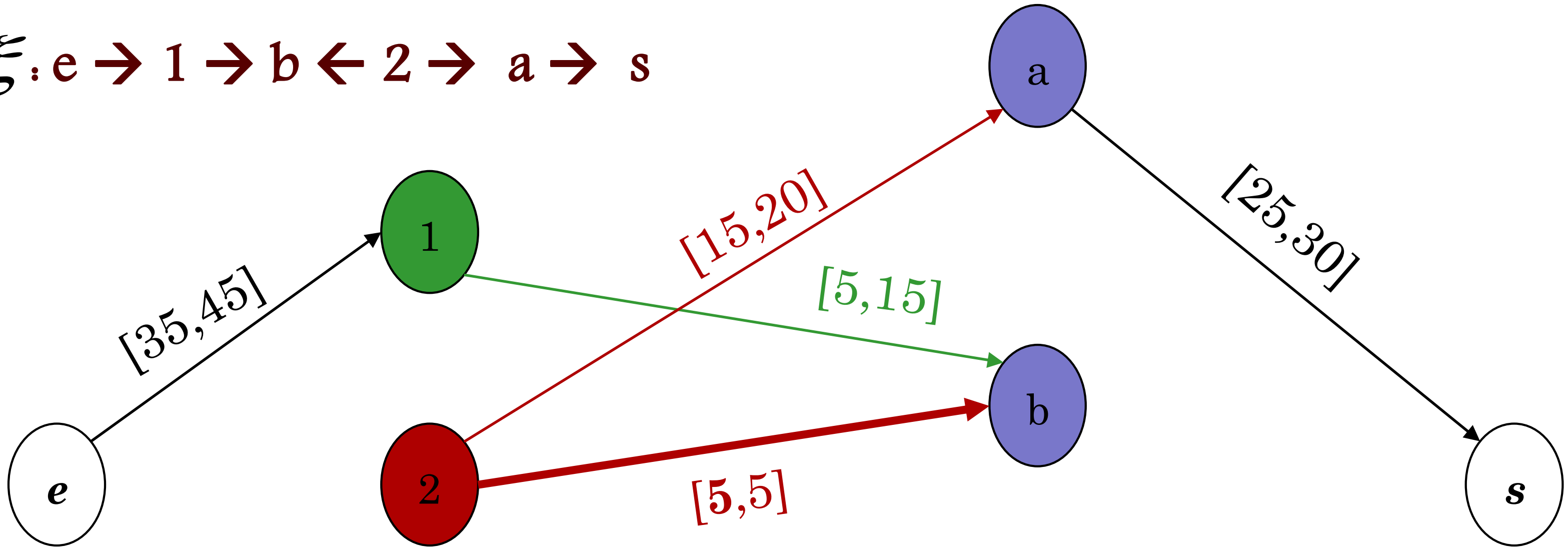
DÉFINITION 5:

Une **chaîne améliorante** ou **augmentant le flot** est une chaîne ξ d'origine ***e*** d'extrémité ***s*** et telles que:

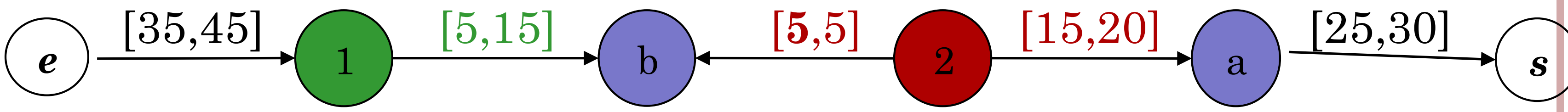
- pour chaque arc avant $u \in \xi^+$ (arc emprunté dans le sens du parcours) on ait : $f(u) < c(u)$,
- et pour chaque arc arrière $u \in \xi^-$ (arc emprunté dans le sens inverse du parcours) on ait : $f(u) > 0$.

Une chaîne améliorante pour l'Exemple **3:**

ξ: e → 1 → b ← 2 → a → s



ξ :



On a:

$$\xi^{+} = \{(e,1),(1,b),(2,a),(a,s)\}$$

et

$$\xi^{-} = \{(2,b)\}$$

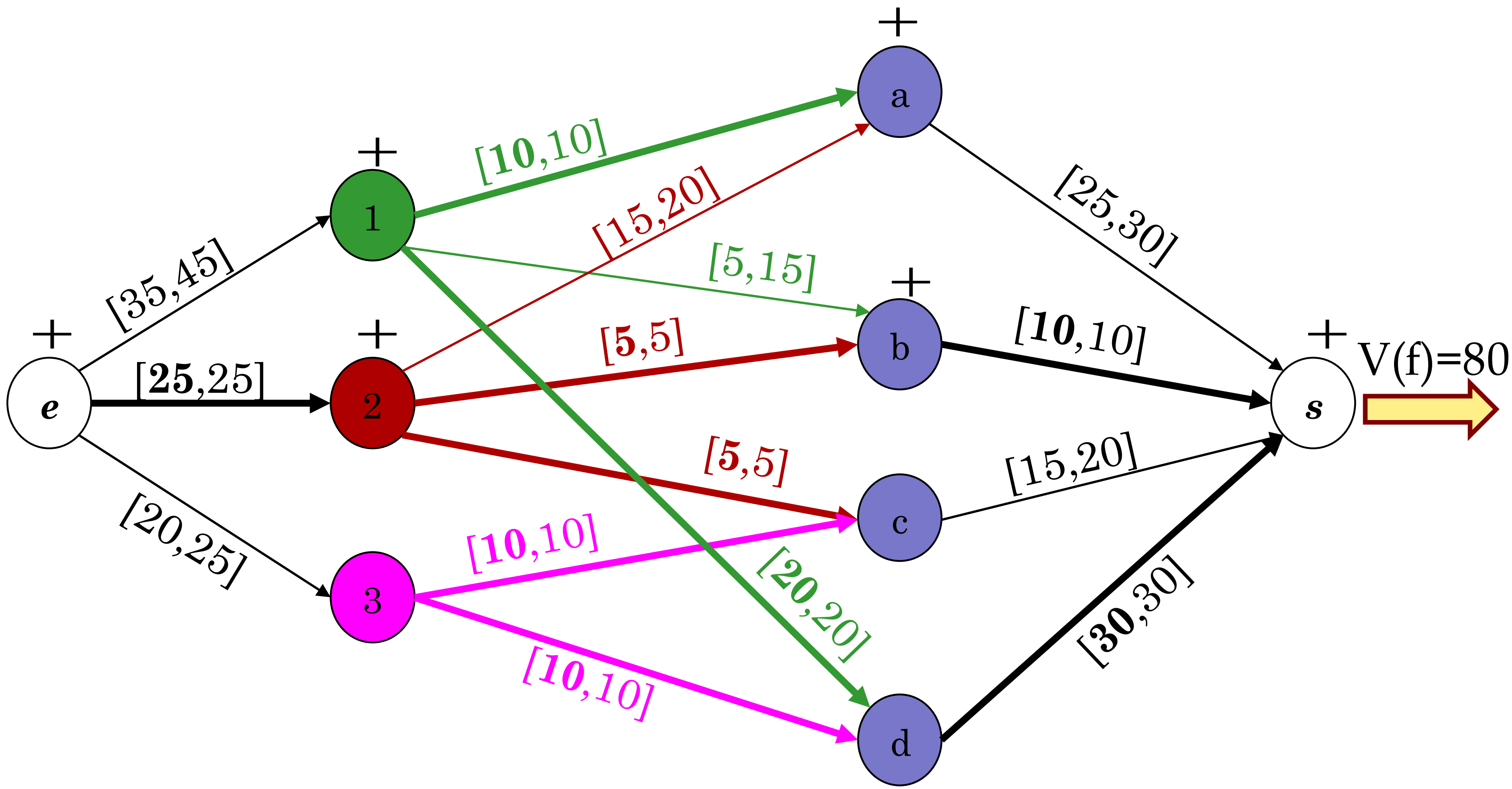
Afin de déterminer les chaînes améliorantes on utilise une exploration en largeur du graphe. On commence par marquer le sommet ***e*** puis on propage les marques de la manière suivante:

- À partir d'un sommet i marqué, on marque les sommets j tels que:
  - l'arc (i; j) est non saturé : **f(i,j) < c(i,j),**
  - ou l'arc (j; i) a un flot non nul : **f(j,i) > 0**.
- Il existe une chaîne améliorante, si on peut marquer le sommet ***s*** (à partir de ***e*** **).**

CNS pour qu'un flot soit maximal :

THÉORÈME (FORD & FULKERSON):

Une CNS pour qu'un flot soit maximal est qu'il n'existe aucune chaîne améliorant le flot entre ***e*** et ***s***.



Comment peut-on augmenter le flot via cette chaîne améliorante ?

Etape N°2: Chercher une chaîne ζ joignant ***e*** et ***s*** et permettant d' augmenter le flot d'une valeur θ.

Choisir $\theta = \min(\theta_1, \theta_2)$

où $\theta_1 = \min\limits_{u \in \zeta^+}\big(c(u) - f(u)\big)$ et $\theta_2 = \min\limits_{u \in \zeta^-}\big(f(u)\big)$

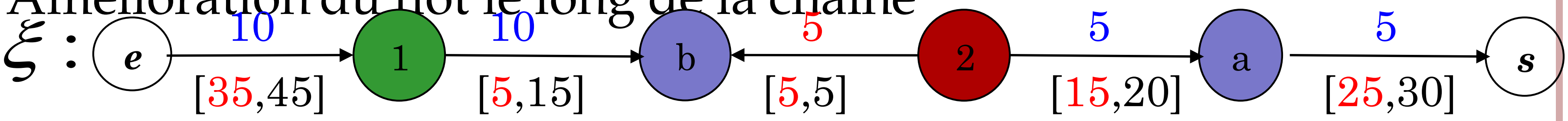
$$\Rightarrow \forall u \in \zeta^+,\ f(u) := f(u) + \theta$$

$$\Rightarrow \forall u \in \zeta^-,\ f(u) := f(u) - \theta$$

et par conséquent la valeur du flot augmente de θ :

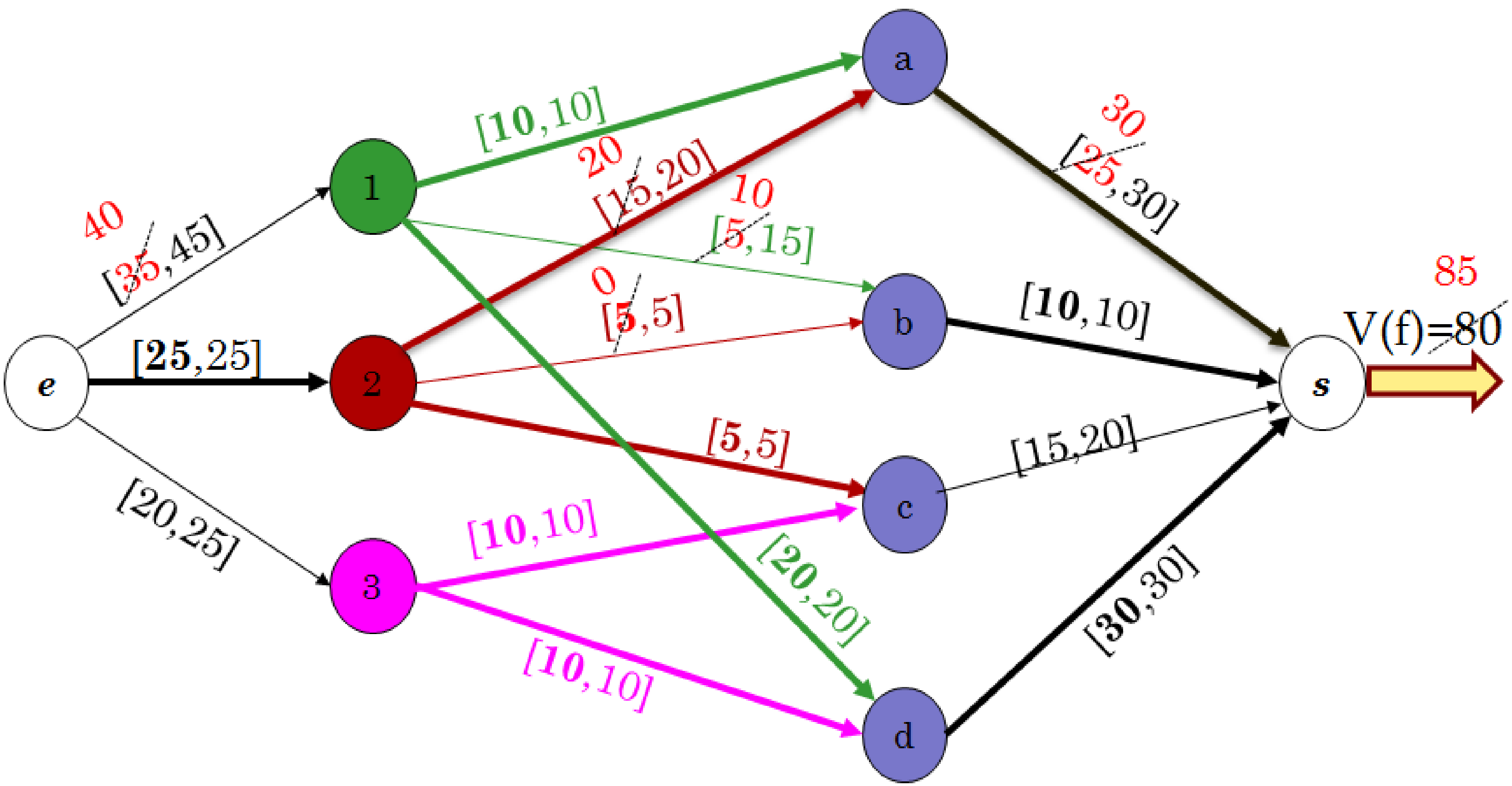
$$V(f) = V(f) + \theta$$

Amélioration du flot le long de la chaîne

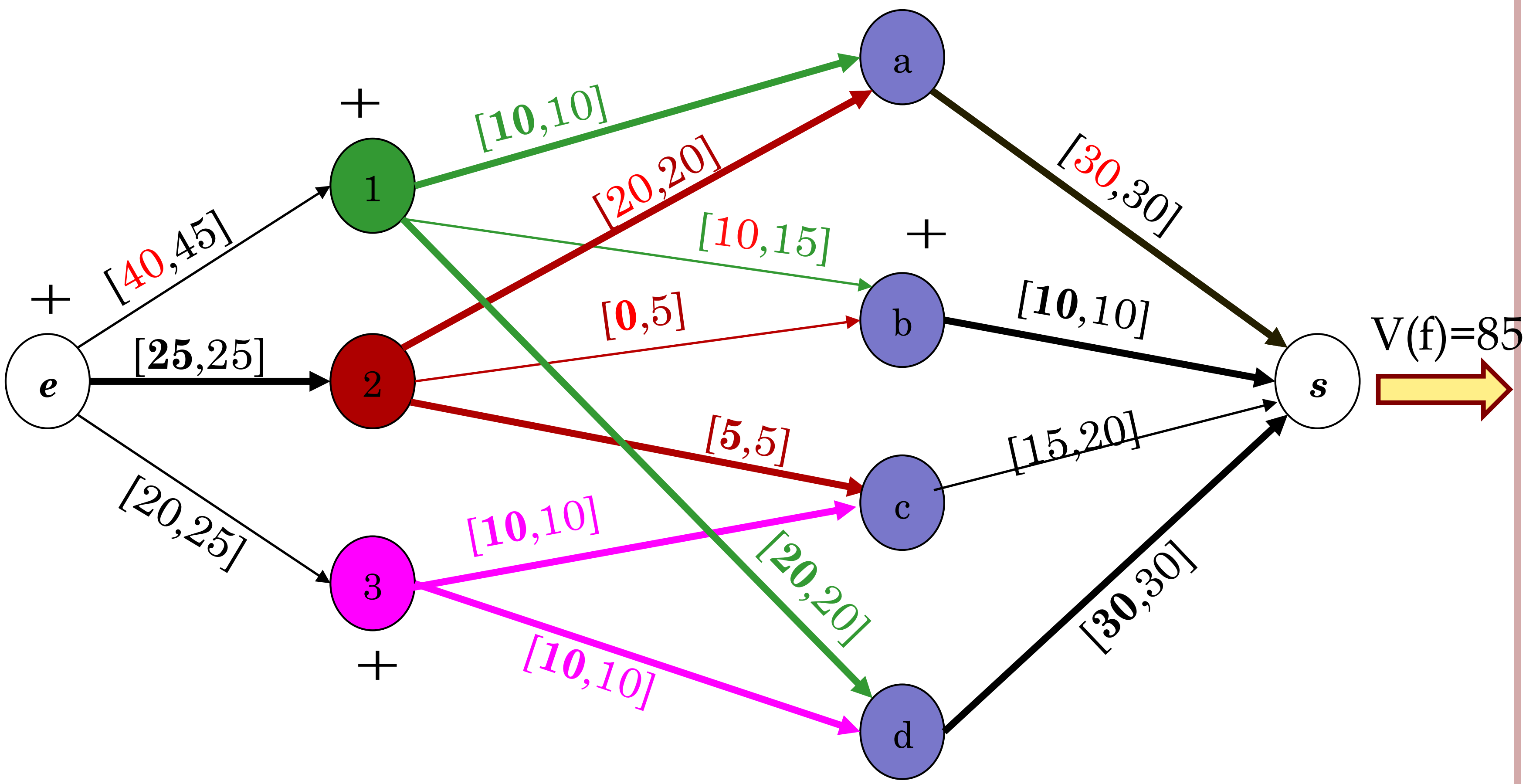


On a : $\theta_1=\min\{10,10,5,5\}=5$ et $\theta_2=\min\{5\}=5$

$\Longrightarrow$ $\theta=\min\{\theta_1 , \theta_2 \}=5$



On reprend le marquage:



On ne puisse plus marquer ***s*** à partir de ***e.***

Donc ce flot est maximal, de valeur $V(f_{\max}) = 85.$

ALGORITHME DE FORD & FULKERSON (1956)

1- Soit *f* un **flot initial réalisable** (en général, on prend le flot nul)

2-Etape 1: Rendre le **flot complet** (saturer tous les chemins possibles)

(i) marquer le sommet ***e*** par (+)

(ii) à partir d'un sommet ***x*** marqué, marquer par (+) tout sommet ***y*** tel que:

$$f(x,y)<c(x,y)$$

Le chemin trouvé augmentera le flot de : $\delta = \min\limits_{(x,y)\in\mu}\left(c(x,y)-f(x,y)\right)$

(iii) recommencer (ii) jusqu'à ce qu'on ne puisse plus marquer ***s*** à partir de ***e***.

3-Etape 2: Recherche des **chaînes augmentant** le flot

(i) marquer le sommet ***e*** par (+)

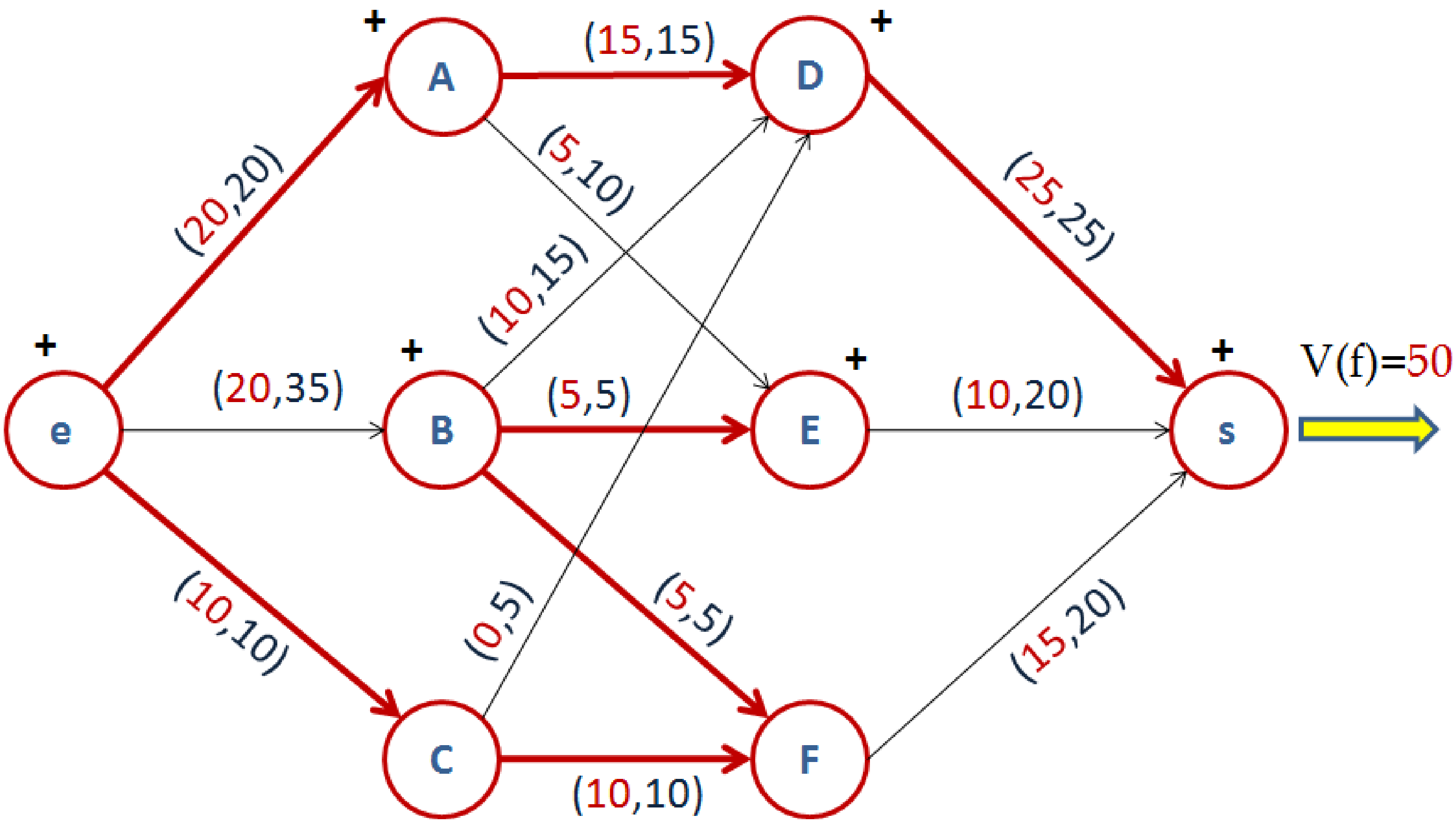
(ii) à partir d'un sommet ***x*** marqué, marquer par (+) tout sommet ***y*** tel que:

$\begin{cases} f(x,y)<c(x,y) \\ \text{ou } f(y,x)>0 \end{cases}$ On pose: $\theta_1 = \min\limits_{y\in S(x)}\left(c(x,y)\text{-}f(x,y)\right)$ et $\theta_2 = \min\limits_{y\in P(x)}\left(f(y,x)\right)$

La chaîne trouvée augmentera le flot de : $\theta=\min(\theta_1,\theta_2)$

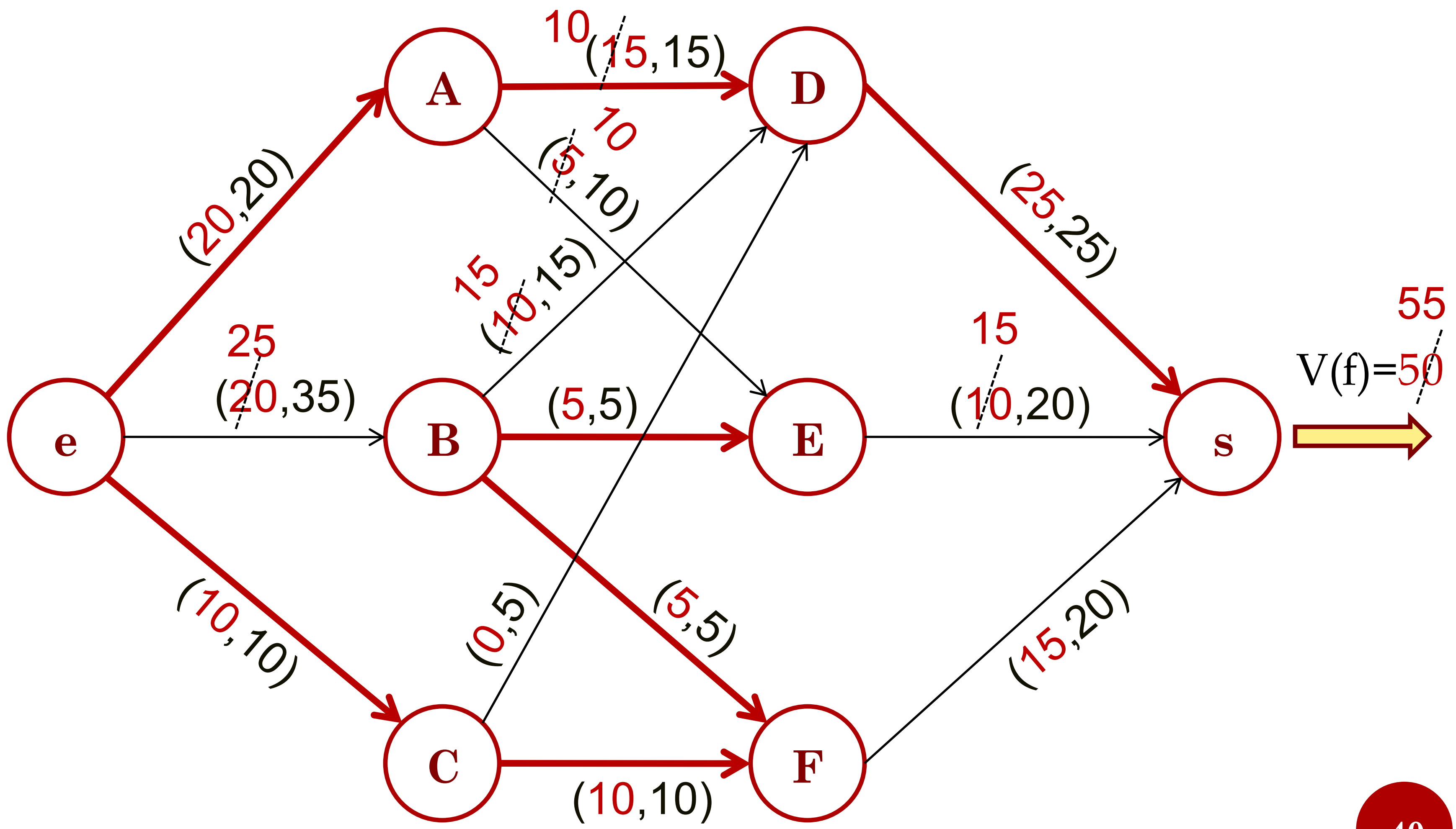
(iii) recommencer (ii) jusqu'à ce qu'on ne puisse plus marquer ***s*** à partir de e.

Une chaîne améliorante pour l'Exemple **2:**

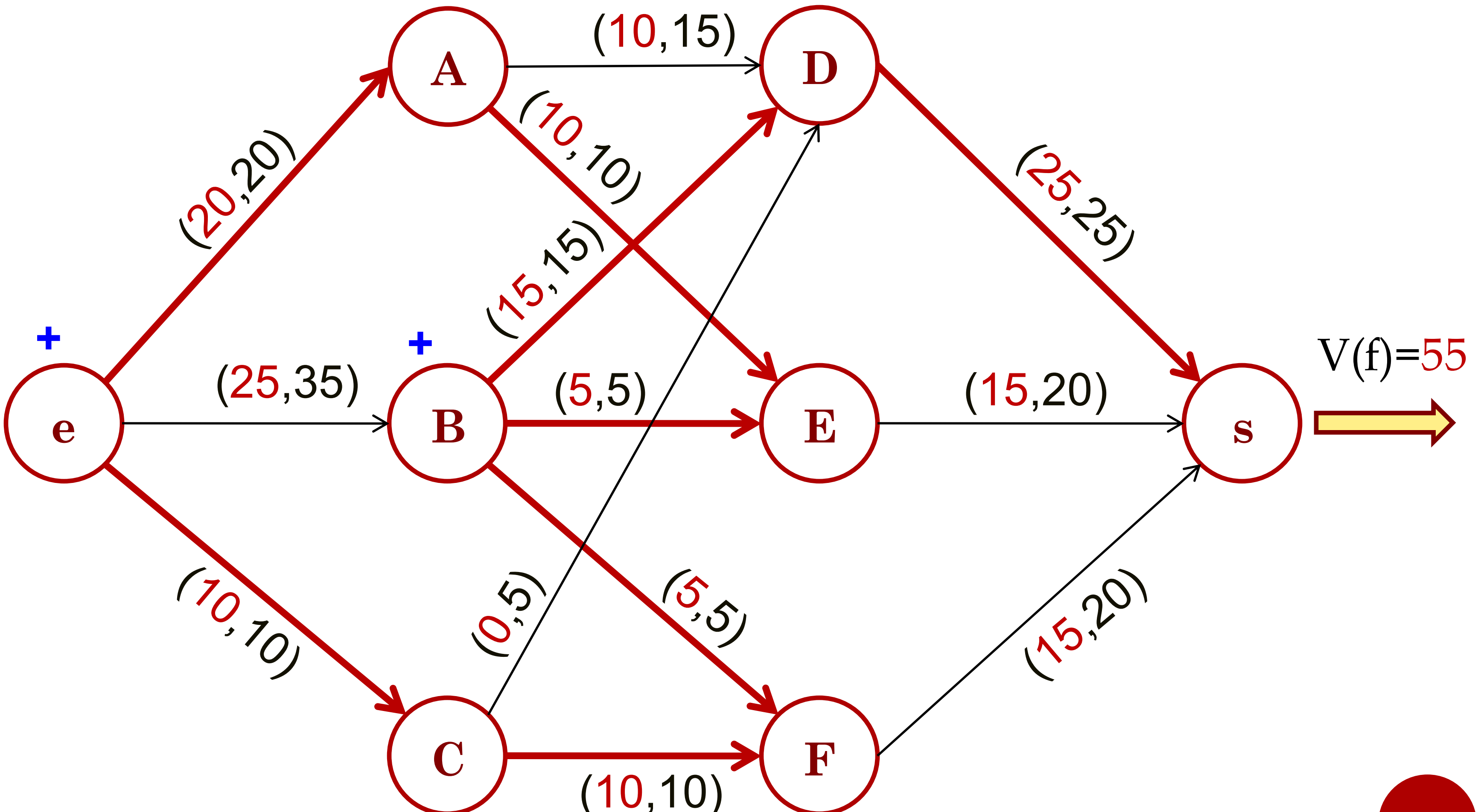


ξ : e $\xrightarrow{(20,35)}$ B $\xrightarrow{(10,15)}$ D $\xleftarrow{(15,15)}$ A $\xrightarrow{(5,10)}$ E $\xrightarrow{(10,20)}$ s le long de laquelle on peut augmenter la valeur du flot de

$\theta=\min\{\theta_1, \theta_2\}$ où : $\theta_1=\min\{15,5,5,10\}=5$ et $\theta_2=\{15\}$ ⟹ $\theta=5$



Puis on reprend le marquage ⇒ pas de chaine améliorante.



donc ce **flot est maximal**, de valeur $\mathbf{V(f_{max}) = 55}$.

Exercice

En trois dépôts A, B, C, on dispose respectivement de 20, 35 et 10 tonnes de marchandises. On a des demandes de 25, 20 et 20 tonnes aux destinations D, E et F. Il existe des possibilités de transport à l'aide de camions. Ces possibilités sont rapportées dans le tableau suivant :

	D	**E**	**F**
A	15	10	0
B	15	5	5
C	5	0	10

Déterminer un plan de transport permettant de transporter des origines aux destinations une quantité maximale.