Question 1

Consider a two-dimensional Cartesian coordinate system (x, y) with the infinitesimal line element $ds^2 = dx^2 + dy^2$. We then introduce new coordinates u and v, defined by $u = (x + y)/2$ and $v = (x - y)/2$. Find the components of the metric tensor in the new coordinates (u, v) using the transformation rule for a $(0, 2)$ tensor, which states that $g_{\mu'\nu'} = \frac{\partial x^\mu}{\partial x^{\mu'}} \frac{\partial x^\nu}{\partial x^{\nu'}} g_{\mu\nu}$. You should use this method exclusively, without relying on any alternative approaches.

In this question, we are examining a coordinate change in a two-dimensional space. We start from a standard Cartesian coordinate system (x, y) and move to a new coordinate system (u, v) defined by a linear transformation. The goal is to find the components of the metric tensor in the new coordinate system (u, v) using the transformation rule for a (0,2) tensor, i.e., a rank-2 covariant tensor. The transformation rule is given by $g_{\mu'\nu'} = \frac{\partial x^\mu}{\partial x^{\mu'}} \frac{\partial x^\nu}{\partial x^{\nu'}} g_{\mu\nu}$*, where* $g_{\mu\nu}$ *are the components of the metric tensor in the original coordinates (x, y), and* $g_{\mu'\nu'}$ *are the components of the metric tensor in the new coordinates (u, v). This formula tells us how the components of the metric tensor change when we change the coordinate system. It is important to note that we must exclusively use this formula for the solution, without using shortcuts or alternative methods.*

Solution

(i) Metric tensor in the original Cartesian coordinates (x, y). In the (x, y) coordinates, the line element is

$$ds^2 = dx^2 + dy^2.$$

This formula represents the infinitesimal line element in two dimensions using the Cartesian coordinates x and y. In a flat (Euclidean) space, the infinitesimal distance squared, ds^2, is given by the sum of the squares of the infinitesimal differences of the coordinates. Here, dx^2 and dy^2 represent the squares of the infinitesimal variations along the x and y axes, respectively. Essentially, this is the Pythagorean theorem applied to infinitesimal distances. The formula implies that the space is Euclidean and that the coordinates x and y are orthogonal, i.e., there is no cross term like $dxdy$, which means there is no skew or tilt between the axes.

Hence, the metric tensor components $g_{\mu\nu}$ in these coordinates are:

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

This is the metric tensor in Cartesian coordinates for a two-dimensional Euclidean space. The metric is diagonal with components $g_{xx} = 1$ and $g_{yy} = 1$, and off-diagonal components $g_{xy} = g_{yx} = 0$. This metric tells us that the x and y coordinates are orthogonal (because the off-diagonal terms are zero) and that the scale along each axis is unity (because the diagonal terms are one). Geometrically, this means we are using a standard, undistorted, orthogonal coordinate system.

where $g_{xx} = 1$, $g_{yy} = 1$, $g_{xy} = g_{yx} = 0$. *These are the specific components of the metric tensor $g_{\mu\nu}$ in the Cartesian coordinates (x, y). $g_{xx} = 1$ indicates that the "length" or "scale" along the x-axis is unit, and similarly, $g_{yy} = 1$ indicates that the "length" or "scale" along the y-axis is unit. The terms $g_{xy} = g_{yx} = 0$ indicate that there is no correlation or "mixing" between the x and y coordinates, which is consistent with the fact that the Cartesian axes are orthogonal. In simpler terms, this tells us that we are using a standard, undistorted, orthogonal coordinate system.*

(ii) Coordinates transformation to (u, v). We define:

$$u = \frac{x + y}{2}, \quad v = \frac{x - y}{2}.$$

Here we are defining the new coordinates u and v as linear combinations of the original coordinates x and y. The coordinate u is the average of x and y, while v is half the difference between x and y. This transformation corresponds to a 45-degree counterclockwise rotation, followed by a rescaling.

To apply the transformation rule for the metric, we need the inverse relations, which are:

$$x = u + v, \quad y = u - v.$$

These are the inverse transformations expressing the original coordinates x and y in terms of the new coordinates u and v. They were obtained by solving the previous system of equations for x and y. For example, adding the two equations gives $u + v = x$, and subtracting them gives $u - v = y$. These relations allow us to express the partial derivatives of x and y with respect to u and v, which are needed to apply the metric tensor transformation rule.

(iii) Calculating partial derivatives. We compute the partial derivatives of x and y with respect to the new coordinates (u, v):

$$\frac{\partial x}{\partial u} = 1, \quad \frac{\partial x}{\partial v} = 1, \quad \frac{\partial y}{\partial u} = 1, \quad \frac{\partial y}{\partial v} = -1.$$

These equations compute the partial derivatives of x and y with respect to the new coordinates u and v. For instance, $\frac{\partial x}{\partial u} = 1$ means that x increases by 1 unit when u increases by 1 unit, keeping v constant. Similarly, $\frac{\partial y}{\partial v} = -1$ means that y decreases by 1 unit when v increases by 1 unit, keeping u constant. These partial derivatives are constant because the transformation between (x, y) and (u, v) is linear.

(iv) Applying the $(0, 2)$ tensor transformation rule. Recall the rule:

$$g_{\mu'\nu'} = \frac{\partial x^\mu}{\partial x^{\mu'}} \frac{\partial x^\nu}{\partial x^{\nu'}} g_{\mu\nu}.$$

This is the transformation rule for a rank-2 covariant tensor, such as the metric tensor. It tells us how the components of the metric tensor transform when we move from one coordinate system to another. In this formula, $g_{\mu'\nu'}$ are the components of the metric tensor in the new coordinate system, $g_{\mu\nu}$ are the components in the old system, and $\frac{\partial x^\mu}{\partial x^{\mu'}}$ are the partial derivatives of the old coordinates with respect to the new ones. In practice, we multiply the components of the old metric tensor by the appropriate partial derivatives to get the components in the new system.

Let μ, ν denote the old coordinates (x or y) and μ', ν' the new ones (u or v). Since the old metric components are $g_{xx} = 1,\ g_{yy} = 1,\ g_{xy} = 0,\ g_{yx} = 0$, each new metric component is computed as follows:

- g_{uu}:

$$g_{uu} = \left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 g_{xx} + \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2 g_{yy} = 1^3 + 1^3 = 2.$$

  This computes the g_{uu} component of the metric tensor in the new coordinates. Using the transformation rule, we sum the products of the partial derivatives multiplied by the corresponding components of the original metric tensor. Since $g_{xy} = g_{yx} = 0$, the mixed terms vanish, leaving only the sum of the squares of the partial derivatives of x and y with respect to u, multiplied by g_{xx} and g_{yy} respectively. The result is $g_{uu} = 1^2 \cdot 1 + 1^2 \cdot 1 = 2$. This tells us that the "length" or "scale" along the u-axis is 2.

- g_{uv}:

$$g_{uv} = \left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)\left(\frac{\partial x}{\partial v}\right) g_{xx} + \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)\left(\frac{\partial y}{\partial v}\right) g_{yy} = (1)(1)(1) + (1)(-1)(1) = 0.$$

  This computes the g_{uv} component of the metric tensor. Again, we apply the transformation rule. The result is $g_{uv} = (1)(1) \cdot 1 + (1)(-1) \cdot 1 = 0$. This means that the u and v coordinates are orthogonal.

- g_{vu}:

$$g_{vu} = \left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right) g_{xx} + \left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)\left(\frac{\partial y}{\partial u}\right) g_{yy} = (1)(1)(1) + (-1)(1)(1) = 0.$$

  This computes the g_{vu} component. It is equal to g_{uv} due to the symmetry of the metric tensor, so it is also 0.

- g_{vv}:

$$g_{vv} = \left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 g_{xx} + \left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2 g_{yy} = 1^3 + (-1)^2(1) = 2.$$

  This computes the g_{vv} component. Similar to g_{uu}, we find $g_{vv} = (1)^2 \cdot 1 + (-1)^2 \cdot 1 = 2$. This tells us that the "length" or "scale" along the v-axis is 2.

(v) Final components of the metric in (u, v).
Collecting these results, the new metric tensor is:

$$g_{\mu'\nu'} = \begin{pmatrix} g_{uu} & g_{uv} \\ g_{vu} & g_{vv} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

This is the metric tensor in the new coordinates (u, v). It is still diagonal, which means that u and v are orthogonal, but now it has diagonal components equal to 2. This indicates that the space in the (u, v) coordinates is still flat (Euclidean), but distances are rescaled by a factor of $\sqrt{2}$ compared to the original Cartesian coordinates.

Physical interpretation: We see that the resulting metric is still diagonal (and represents the same flat space), but it is now scaled by a factor of 2 in both directions u and v. Hence, the line element in the new coordinates can be written as

$$ds^2 = 2\,du^2 + 2\,dv^2.$$

This is the physical interpretation of the metric tensor we have calculated. The fact that the metric tensor is still diagonal means that the coordinates u and v are orthogonal to each other. The factor of 2 in the diagonal components g_{uu} and g_{vv} indicates that distances measured in the u and v coordinates are rescaled by a factor of $\sqrt{2}$ relative to distances in the original Cartesian coordinates. This is consistent with the geometric interpretation of the coordinate transformation as a 45-degree rotation followed by a rescaling.

Conclusion: Using exclusively the tensor transformation rule, we have correctly derived the metric components in the (u, v) coordinates:

$$g_{uu} = 2, \quad g_{uv} = 0, \quad g_{vv} = 2.$$

In conclusion, we have computed the components of the metric tensor in the new coordinates (u, v) by applying the tensor transformation rule. We found that $g_{uu} = 2$, $g_{uv} = g_{vu} = 0$, and $g_{vv} = 2$. This result confirms that the u and v coordinates are orthogonal and that distances in this new coordinate system are scaled by a factor of $\sqrt{2}$ with respect to the original Cartesian coordinate system (x, y).

Question 2

Consider a two-dimensional plane in polar coordinates, where the infinitesimal line element is given by

$$ds^2 = dr^2 + r^2\, d\phi^2.$$

(i) How many independent Christoffel symbols are there in total in two dimensions?
(ii) How many independent and non-vanishing Christoffel symbols are there in this particular case?
(iii) Compute the explicit form of one non-vanishing Christoffel symbol of your choice.

This exercise focuses on the Christoffel symbols in a two-dimensional plane described by polar coordinates (r, ϕ). Even though the plane itself is geometrically flat, the choice of polar coordinates introduces nontrivial metric components: $g_{rr} = 1$ and $g_{\phi\phi} = r^2$. We will explore how these affect the connection coefficients.

Solution

(i) Total number of Christoffel symbols in 2D. In two dimensions, each index μ, ν, λ of $\Gamma^{\mu}{}_{\nu\lambda}$ can take 2 values (which we may denote by r and ϕ). If we ignore any symmetries, there are $2 \times 2 \times 2 = 8$ possible symbols.

However, for the Levi-Civita connection, we use the crucial symmetry

$$\Gamma^{\mu}{}_{\nu\lambda} \;=\; \Gamma^{\mu}{}_{\lambda\nu},$$

which states that interchanging the lower two indices does not produce a new or different symbol. Thus, the Γ are symmetric under $\nu \leftrightarrow \lambda$. Since we only consider distinct pairs (ν, λ) up to this symmetry, we effectively reduce the total count from 8 to 6. Hence, there are $\boxed{6}$ independent Christoffel symbols in 2D.

(ii) Non-vanishing Christoffel symbols in polar coordinates (r, ϕ). Given the 2D plane in polar coordinates:

$$ds^2 = dr^2 + r^2\, d\phi^2,$$

we read off the metric and its inverse:

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r^2 \end{pmatrix}, \quad g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{r^2} \end{pmatrix}.$$

Note that the metric is diagonal. In the formula for the Christoffel symbols,

$$\Gamma^{\mu}{}_{\nu\lambda} = \frac{1}{2}\, g^{\mu\rho} \Big(\partial_\nu g_{\rho\lambda} \;+\; \partial_\lambda g_{\rho\nu} \;-\; \partial_\rho g_{\nu\lambda} \Big),$$

a diagonal metric means that many terms vanish unless $\rho = \mu$. Concretely, if $\mu \neq \rho$, then $g^{\mu\rho}$ will be zero for a strictly diagonal metric. This helps eliminate many potential non-zero symbols.

In polar coordinates, the only non-zero partial derivative of the metric is:

$$\partial_r g_{\phi\phi} = 2\, r,$$

while $\partial_\phi g_{rr}$, $\partial_r g_{rr}$, and $\partial_\phi g_{\phi\phi}$ vanish. Consequently, any Christoffel symbol that does not involve $\partial_r g_{\phi\phi}$ will be zero. Checking each possible combination systematically, one finds that the only non-zero symbols are:

$$\Gamma^{r}{}_{\phi\phi} = -\, r, \quad \Gamma^{\phi}{}_{r\phi} = \Gamma^{\phi}{}_{\phi r} = \frac{1}{r}.$$

All others vanish.

Even though the plane is flat, the curvilinear coordinates (r, ϕ) introduce these non-zero Christoffel symbols. If we switched to Cartesian coordinates, we would get zero for all Christoffel symbols because the metric becomes constant and diagonal with no dependence on x or y.

(iii) Explicit calculation of $\Gamma^{r}{}_{\phi\phi}$. *For illustration, let us compute $\Gamma^{r}{}_{\phi\phi}$. Substitute $\mu = r$, $\nu = \phi$, and $\lambda = \phi$ into the Levi-Civita connection formula:*

$$\Gamma^{r}{}_{\phi\phi} = \frac{1}{2}\, g^{r\rho} \Big(\partial_\phi g_{\rho\phi} \;+\; \partial_\phi g_{\rho\phi} \;-\; \partial_\rho g_{\phi\phi} \Big).$$

Since $g^{rr} = 1$ and $g^{r\phi} = 0$, the only relevant piece comes from $\rho = r$. We use:

$$\partial_r g_{\phi\phi} = 2\, r, \quad \partial_\phi g_{\phi r} = 0,$$

thus

$$\big(\partial_\phi g_{r\phi} + \partial_\phi g_{r\phi} - \partial_r g_{\phi\phi} \big) = (0 + 0 - 2r) = -\, 2r.$$

Multiplying by $g^{rr} = 1$ and then by $1/2$:

$$\Gamma^{r}{}_{\phi\phi} = \frac{1}{2}(-2r) = -\, r.$$

Hence, $\boxed{\Gamma^{r}{}_{\phi\phi} = -\, r}$.

This coefficient tells us how the basis vector in the r-direction changes when we vary ϕ. In a curvilinear coordinate system, such as polar coordinates, this accounts for the "circular arcs" nature of ϕ.

Question 3

Consider a two-dimensional spacetime where the infinitesimal line element is given by

$$ds^2 = -(1+x)^2\,dt^2 + dx^2.$$

(i) How many independent Christoffel symbols are there in principle in two dimensions?
(ii) How many independent and non-vanishing Christoffel symbols are there for this example?
(iii) Compute the explicit form of $\Gamma^t{}_{tx}$ for this example.

Here, we turn to a "(1+1)-dimensional" spacetime metric. The dependence of $g_{tt} = -(1+x)^2$ on the spatial coordinate x leads to interesting non-zero connection coefficients. This scenario illustrates how time can "flow differently" at different positions x.

Solution

(i) Number of independent Christoffel symbols in two dimensions. Just as in Question 2, we recognize that in 2D each index (μ, ν, λ) runs over $\{t, x\}$. Naively, there would be $2 \times 2 \times 2 = 8$ Christoffel symbols, but the symmetry

$$\Gamma^\mu{}_{\nu\lambda} = \Gamma^\mu{}_{\lambda\nu}$$

cuts this count down to 6. Thus there are $\boxed{6}$ independent symbols.

The same logic applies: in 2D, for each upper index μ, there are 3 unique pairs (ν, λ) up to symmetry. Since μ can be t or x, we have $3 + 3 = 6$.

(ii) Number of independent and non-vanishing Christoffel symbols for this example. From

$$ds^2 = -(1+x)^2\,dt^2 + dx^2,$$

we read off

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -(1+x)^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{(1+x)^2} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Again, the metric is diagonal. Therefore, in the Christoffel symbol formula, many off-diagonal terms disappear. Moreover, note that $g_{tt} = -(1+x)^2$ depends on x, while $g_{xx} = 1$ is constant.

Recall the connection formula:

$$\Gamma^\mu{}_{\nu\lambda} = \frac{1}{2}\,g^{\mu\rho}\Big(\partial_\nu g_{\rho\lambda} \;+\; \partial_\lambda g_{\rho\nu} \;-\; \partial_\rho g_{\nu\lambda}\Big).$$

Since

$$\partial_x g_{tt} = -2(1+x), \quad \partial_x g_{xx} = 0, \quad \partial_t g_{\mu\nu} = 0,$$

the only non-zero derivative of the metric is $\partial_x g_{tt}$. Hence, any Christoffel symbol that does not involve $\partial_x g_{tt}$ in the sum will vanish. By matching indices in the connection formula, we find only three potential symbols could be non-zero: $\Gamma^x{}_{tt}$, $\Gamma^t{}_{tx} = \Gamma^t{}_{xt}$, and $\Gamma^x{}_{xx}$. A direct check confirms $\Gamma^x{}_{xx} = 0$. Thus the only non-zero Christoffel symbols are:

$$\Gamma^x{}_{tt} \quad \text{and} \quad \Gamma^t{}_{tx} = \Gamma^t{}_{xt}.$$

This precisely reflects the $(1+x)$-dependence in g_{tt}. If g_{tt} were constant, these symbols would vanish, signifying a trivial geometry.

(iii) Explicit form of $\Gamma^t{}_{tx}$. We compute:

$$\Gamma^t{}_{tx} = \frac{1}{2}\,g^{t\rho}\Big(\partial_t g_{x\rho} + \partial_x g_{t\rho} - \partial_\rho g_{tx}\Big).$$

Since $g^{tx} = 0$ (diagonal inverse metric) and $\partial_t g_{\alpha\beta} = 0$ (metric independent of t), the dominant term arises when $\rho = t$. That term involves $\partial_x g_{tt}$. Because the metric is diagonal, effectively we need $\mu = \rho$ in many sums to get a non-zero result.

Thus:

$$\Gamma^t{}_{tx} = \frac{1}{2}\,g^{tt}\,\partial_x g_{tt}.$$

We substitute:

$$g^{tt} = -\frac{1}{(1+x)^2}, \quad \partial_x g_{tt} = -2(1+x).$$

Hence:

$$\Gamma^t{}_{tx} = \frac{1}{2}\Big(-\tfrac{1}{(1+x)^2}\Big)\Big(-2(1+x)\Big) = \frac{1}{1+x}.$$

Interpretation: $\Gamma^t{}_{tx} = \frac{1}{1+x}$ shows how the time basis vector changes in the x-direction. Because $(1+x)$ appears in the time component of the metric, the rate of time flow depends on x. Moving along x effectively shifts how clocks "tick" in this spacetime.

Final Remarks for Question 3. *One can check $\Gamma^x{}_{tt} = 1 + x$ and verify $\Gamma^x{}_{xx} = 0$. Together with $\Gamma^t{}_{tx} = \Gamma^t{}_{xt} = \frac{1}{1+x}$, these are the only non-zero symbols. They reflect the coordinate dependence of the metric and thus a non-trivial connection. In a 2D "spacetime" context, it tells us that an observer's notion of time changes with position x.*

Question 4

Consider a two-dimensional space whose infinitesimal line element is given by

$$ds^2 = (1 + x^2)\,dx^2 \; + \; (1 + y^2)\,dy^2.$$

We want to compute the Christoffel symbols $\Gamma^x_{\ xx}$ and $\Gamma^x_{\ yy}$.

In this problem, we have a 2D space with metric:

$$ds^2 = (1 + x^2)\,dx^2 + (1 + y^2)\,dy^2.$$

The coordinates (x, y) are orthogonal, since there is no mixed term $dx\,dy$. Our goal is to compute two specific Christoffel symbols, $\Gamma^x_{\ xx}$ and $\Gamma^x_{\ yy}$.

Solution (Question 4)

From the line element,

$$ds^2 \; = \; (1 + x^2)\,dx^2 \; + \; (1 + y^2)\,dy^2,$$

we identify the metric tensor in coordinates (x, y):

$$g_{\mu\nu} \; = \; \begin{pmatrix} 1 + x^2 & 0 \\ 0 & 1 + y^2 \end{pmatrix}.$$

This is a diagonal metric, with $g_{xx} = 1 + x^2$ and $g_{yy} = 1 + y^2$. Hence $g_{xy} = g_{yx} = 0$.

Its inverse is then

$$g^{\mu\nu} \; = \; \begin{pmatrix} \frac{1}{1+x^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{1+y^2} \end{pmatrix}.$$

Because the metric is diagonal, we simply invert each diagonal element: $g^{xx} = \frac{1}{1+x^2}$ and $g^{yy} = \frac{1}{1+y^2}$.

Christoffel Symbols. Recall the connection formula:

$$\Gamma^{\mu}_{\ \nu\lambda} = \frac{1}{2}\, g^{\mu\rho}\Big(\partial_\nu g_{\rho\lambda} \; + \; \partial_\lambda g_{\rho\nu} \; - \; \partial_\rho g_{\nu\lambda}\Big).$$

Only $g_{xx} = 1 + x^2$ depends on x, and only $g_{yy} = 1 + y^2$ depends on y. Therefore,

$$\partial_x g_{xx} = 2x, \quad \partial_y g_{yy} = 2y,$$

while all other partial derivatives of $g_{\mu\nu}$ vanish (for example, $\partial_x g_{yy} = 0$ and $\partial_y g_{xx} = 0$).

(i) Calculation of $\Gamma^x_{\ xx}$. We set $\mu = x$, $\nu = x$, $\lambda = x$ in the formula. Hence,

$$\Gamma^x_{\ xx} = \frac{1}{2}\, g^{x\rho}\Big(\partial_x g_{\rho x} \; + \; \partial_x g_{x\rho} \; - \; \partial_\rho g_{xx}\Big).$$

Since the metric is diagonal, $g_{x\rho}$ is nonzero only if $\rho = x$. Therefore, $g^{x\rho}$ is also nonzero only for $\rho = x$. This leaves us with:

$$\Gamma^x_{\ xx} = \frac{1}{2}\, g^{xx}\Big(\partial_x g_{xx} + \partial_x g_{xx} - \partial_x g_{xx}\Big) = \frac{1}{2}\, g^{xx}\big(\partial_x g_{xx}\big).$$

Since $\partial_x g_{xx} = 2x$ and $g^{xx} = \frac{1}{1+x^2}$, we obtain

$$\Gamma^x_{\ xx} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1 + x^2} \cdot (2x) = \frac{x}{1 + x^2}.$$

(ii) Calculation of $\Gamma^x_{\ yy}$. We now set $\mu = x$, $\nu = y$, $\lambda = y$:

$$\Gamma^x_{\ yy} = \frac{1}{2}\, g^{x\rho}\Big(\partial_y g_{\rho y} \; + \; \partial_y g_{y\rho} \; - \; \partial_\rho g_{yy}\Big).$$

Here, $\partial_y g_{yy} = 2y$ is the only derivative that might contribute. However, it will appear with $\rho = y$, in which case the factor outside becomes g^{xy}. Since $g^{xy} = 0$ (diagonal inverse), that term vanishes. Alternatively, if $\rho = x$, then $\partial_x g_{yy} = 0$.

Hence,

$$\Gamma^x_{\ yy} = 0.$$

Final Results

$$\boxed{\Gamma^x_{\ xx} = \frac{x}{1 + x^2} \quad \text{and} \quad \Gamma^x_{\ yy} = 0.}$$

Because g_{xx} depends on x, $\Gamma^x_{\ xx}$ is non-zero. Meanwhile, g_{yy} does not depend on x, so $\Gamma^x_{\ yy}$ vanishes.

Unified Perspective and Key Observations

- ***Diagonal Metric Simplification:*** *As in other 2D examples, the metric is diagonal, so $g^{\mu\nu}$ is also diagonal. This annihilates many terms in the Christoffel sum (since $g^{xy} = 0$, etc.), making computations much simpler.*
- ***Coordinate Dependence vs. Curvature:*** *A non-zero $\Gamma^x{}_{xx}$ can arise either from genuine curvature or simply from the coordinate dependence of the metric. Here, $g_{xx} = 1 + x^2$ depends on x, producing a nontrivial connection coefficient. Meanwhile, $\Gamma^x{}_{yy}$ vanishes because g_{yy} has no x-dependence.*
- ***Symmetry in 2D:*** *The property $\Gamma^\mu{}_{\nu\lambda} = \Gamma^\mu{}_{\lambda\nu}$ cuts the naive 8 symbols down to 6 independent ones. From there, only those involving non-zero derivatives of $g_{\mu\nu}$ can survive.*
- ***Summation Index Matching:*** *For a diagonal metric, $g^{\mu\rho}$ is nonzero only if $\mu = \rho$. Thus, when we compute $\Gamma^x{}_{xx}$, only the $\rho = x$ term matters. Similarly, for $\Gamma^x{}_{yy}$, the $\rho = y$ term appears multiplied by g^{xy}, which is zero, forcing the entire expression to vanish.*

Question 5

Questo esercizio riguarda la dilatazione temporale gravitazionale, un fenomeno previsto dalla Relatività Generale di Einstein. In particolare, si vuole calcolare la differenza di tempo proprio misurato da due orologi posti a diverse altitudini sulla Terra, sfruttando la metrica di Schwarzschild come approssimazione del campo gravitazionale terrestre. Si userà l'approssimazione di campo debole e si trascureranno effetti dovuti alla rotazione terrestre.

A good approximation for the metric outside the Earth's surface (in a weak gravitational field) is given by

$$ds^2 \;=\; -\big(1 + 2\,\Phi\big)\,dt^2 \;+\; \big(1 - 2\,\Phi\big)\,dr^2 \;+\; r^2\,d\theta^2 \;+\; r^2\,\sin^2\!\theta\,d\phi^2,$$

where $\Phi = -\dfrac{G\,M_E}{r}$ is the Newtonian gravitational potential (we are using units such that $c = 1$ if not stated otherwise). *Qui, ds^2 rappresenta l'intervallo spazio-temporale, dt è l'intervallo di tempo coordinato, dr è l'intervallo radiale, $d\theta$ e $d\phi$ sono gli intervalli angolari in coordinate sferiche. Φ è il potenziale gravitazionale Newtoniano, G è la costante di gravitazione universale, M_E è la massa della Terra e r è la distanza radiale dal centro della Terra. Stiamo usando un sistema di unità dove la velocità della luce c è uguale a 1, semplificando le equazioni. Il potenziale gravitazionale Newtoniano è definito negativo, il che significa che è necessario del lavoro per allontanare un oggetto dall'influenza gravitazionale della Terra.* Let us consider two clocks: one is located at the Earth's surface, $r = R_E$, while the other is on top of a building of height h, at $r = R_E + h$. We want to calculate the proper time elapsed on each clock as a function of the coordinate time t, and then find the ratio of these two times in the limit $h \ll R_E$. *Vogliamo calcolare il tempo proprio trascorso su ciascun orologio in funzione del tempo coordinato t. Il tempo proprio è il tempo misurato da un orologio che si muove lungo una specifica traiettoria nello spaziotempo. Il tempo coordinato è il tempo misurato da un osservatore a riposo all'infinito. Infine, vogliamo trovare il rapporto tra questi due tempi propri nel limite in cui l'altezza h dell'edificio è molto minore del raggio della Terra R_E.*

Solution

(i) Metric Setup and Physical Context *Iniziamo definendo il contesto fisico e matematico del problema.* We adopt spherical coordinates (t, r, θ, ϕ). *Utilizziamo coordinate sferiche per descrivere la posizione degli orologi, il che è naturale data la simmetria sferica del problema.* The metric above is a static, spherically symmetric line element valid outside the Earth, with $\Phi(r) = -G\,M_E/r$. *La metrica considerata è una soluzione statica (indipendente dal tempo) e a simmetria sferica delle equazioni di Einstein, valida al di fuori della Terra. $\Phi(r)$ rappresenta il potenziale gravitazionale Newtoniano.* Because we are neglecting effects such as the Earth's rotation, and we assume $dr = d\theta = d\phi = 0$ for a clock "at rest" with respect to the Earth, the relevant component of the metric is simply the time-time part: *Poiché stiamo trascurando gli effetti di rotazione della Terra e assumiamo che gli orologi siano fermi rispetto alla Terra ($dr = d\theta = d\phi = 0$), l'unica componente rilevante della metrica è quella temporale.*

$$ds^2 \;=\; -\,d\tau^2 \;=\; -\,\big(1 + 2\,\Phi(r)\big)\,dt^2.$$

In Relatività Generale, l'intervallo spazio-temporale ds^2 tra due eventi vicini è legato al tempo proprio $d\tau$ misurato da un orologio che si muove tra questi due eventi dalla relazione $ds^2 = -d\tau^2$. In questo caso, l'orologio è fermo, quindi l'intervallo spazio-temporale è puramente temporale. Hence,

$$d\tau \;=\; \sqrt{1 + 2\,\Phi(r)}\;\,dt.$$

Questa relazione esprime il legame tra il tempo proprio $d\tau$ misurato dall'orologio e il tempo coordinato dt. Notiamo che il tempo proprio è influenzato dal potenziale gravitazionale $\Phi(r)$: più il potenziale è negativo (cioè, più si è vicini alla Terra), più il tempo proprio scorre lentamente. This relation tells us how the proper time τ (what the clock measures) is related to the coordinate time t.

(ii) Proper Time for Each Clock *Ora calcoliamo il tempo proprio trascorso su ciascun orologio.* Let us label:

$$\Phi_1 \;=\; \Phi\big(R_E\big) \;=\; -\,\frac{G\,M_E}{R_E}, \qquad \Phi_2 \;=\; \Phi\big(R_E + h\big) \;=\; -\,\frac{G\,M_E}{R_E + h}.$$

Definiamo i potenziali gravitazionali Φ_1 e Φ_2 rispettivamente alla superficie della Terra e in cima all'edificio.

Clock 1 (at the Earth's surface) *Consideriamo l'orologio posto sulla superficie terrestre.* At $r = R_E$,

$$d\tau_1 \;=\; \sqrt{1 + 2\,\Phi_1}\,dt \;=\; \sqrt{1 - \frac{2\,G\,M_E}{R_E}}\;\,dt.$$

Sostituiamo $r = R_E$ nell'espressione per il tempo proprio, ottenendo la relazione tra il tempo proprio $d\tau_1$ misurato dall'orologio 1 e il tempo coordinato dt. Integrating over some common coordinate-time interval t:

$$\tau_1 \;=\; \int d\tau_1 \;=\; \sqrt{1 - \frac{2\,G\,M_E}{R_E}}\;\times\;t.$$

Integrando su un intervallo di tempo coordinato t (che è lo stesso per entrambi gli orologi), otteniamo il tempo proprio totale trascorso sull'orologio 1.

Clock 2 (on top of a building at height h) *Consideriamo ora l'orologio posto in cima all'edificio.* At $r = R_E + h$,

$$d\tau_2 \;=\; \sqrt{1 + 2\,\Phi_2}\; dt \;=\; \sqrt{1 - \frac{2\,G\,M_E}{R_E + h}}\; dt.$$

Sostituiamo $r = R_E{+}h$ nell'espressione per il tempo proprio, ottenendo la relazione tra il tempo proprio $d\tau_2$ misurato dall'orologio 2 e il tempo coordinato dt. Integrating:

$$\tau_2 \;=\; \sqrt{1 - \frac{2\,G\,M_E}{R_E + h}} \;\times\; t.$$

Integrando, otteniamo il tempo proprio totale trascorso sull'orologio 2.

(iii) Ratio of the Proper Times *Calcoliamo ora il rapporto tra i tempi propri misurati dai due orologi.* We focus on the ratio

$$\frac{\tau_2}{\tau_1} \;=\; \frac{\sqrt{1 - \frac{2\,G\,M_E}{R_E + h}}}{\sqrt{1 - \frac{2\,G\,M_E}{R_E}}}.$$

We are particularly interested in the limit $h \ll R_E$. *Siamo interessati al rapporto tra i tempi propri nel limite in cui l'altezza dell'edificio è molto minore del raggio della Terra.*

(iv) Approximation for $h \ll R_E$ *Sfruttiamo l'approssimazione $h \ll R_E$ per semplificare il rapporto.* For small h, we use the binomial expansion $\sqrt{1 - 2\,x} \;\approx\; 1 - x$ (when x is sufficiently small). *Possiamo approssimare la radice quadrata usando l'espansione binomiale, valida quando x è piccolo. In questo caso, x è proporzionale al potenziale gravitazionale, che è effettivamente piccolo in un campo gravitazionale debole.* In addition, $\frac{1}{R_E+h} \approx \frac{1}{R_E}\bigl(1 - \frac{h}{R_E}\bigr)$. *Possiamo anche approssimare il termine $\frac{1}{R_E+h}$ usando uno sviluppo in serie, dato che h è molto più piccolo di R_E.* Hence, we write:

$$\frac{\tau_2}{\tau_1} \;\approx\; \frac{1 - \dfrac{G\,M_E}{R_E + h}}{1 - \dfrac{G\,M_E}{R_E}} \;\approx\; \frac{1 - \dfrac{G\,M_E}{R_E}\,\bigl(1 - \frac{h}{R_E}\bigr)}{1 - \dfrac{G\,M_E}{R_E}} \;=\; \frac{1 - \frac{G\,M_E}{R_E} + \frac{G\,M_E\,h}{R_E^2}}{1 - \frac{G\,M_E}{R_E}}.$$

Sostituiamo le approssimazioni nel rapporto e semplifichiamo. Since $\frac{G\,M_E}{R_E}$ is very small in geometrized units, the denominator is approximately 1. *Il termine $\frac{G\,M_E}{R_E}$ è molto piccolo (in unità geometrizzate dove $c = 1$), quindi il denominatore è approssimativamente uguale a 1.* Therefore, to first order,

$$\frac{\tau_2}{\tau_1} \;\approx\; 1 + \frac{G\,M_E}{R_E^2}\;h.$$

Otteniamo quindi, al primo ordine in h/R_E, un'espressione approssimata per il rapporto tra i tempi propri. Comment: in natural units ($c = 1$), $g = \dfrac{G\,M_E}{R_E^2}$ is effectively dimensionless. *In unità naturali, dove la velocità della luce c è uguale a 1, l'accelerazione di gravità g è adimensionalizzata.* However, in SI units (where $g \approx 9.8\,\mathrm{m/s^2}$), we typically restore c^2 in the denominator of the potential term, yielding the familiar form

$$\frac{\tau_2}{\tau_1} \;\approx\; 1 \;+\; \frac{g\,h}{c^2}.$$

In unità del Sistema Internazionale, dobbiamo ripristinare la velocità della luce c al denominatore del termine di potenziale per ottenere l'espressione corretta. This makes it clear that the fractional difference in clock rates for a height $h \ll R_E$ is on the order of $\frac{g\,h}{c^2}$. *Questo risultato mostra che la differenza frazionaria tra i tempi misurati dai due orologi è dell'ordine di $\frac{g\,h}{c^2}$, che è un termine molto piccolo per valori tipici di h e g.*

(v) Physical Interpretation *Interpretiamo fisicamente il risultato ottenuto.* Because gravitational time dilation predicts that clocks run more slowly in deeper gravitational potentials, the clock on the Earth's surface ($r = R_E$) accumulates less proper time than the one at altitude $r = R_E + h$. *La dilatazione temporale gravitazionale prevede che gli orologi scorrano più lentamente in potenziali gravitazionali più profondi. Di conseguenza, l'orologio sulla superficie terrestre accumula meno tempo proprio rispetto a quello posto ad una quota maggiore.* In other words, the farther you go from the center of the gravitational source (within the weak-field limit), the faster time flows relative to an observer deeper in the gravitational well. *In altre parole, più ci si allontana dal centro della sorgente gravitazionale (nel limite di campo debole), più velocemente scorre il tempo rispetto ad un osservatore che si trova più in profondità nel pozzo gravitazionale.* This effect, though small, has been experimentally confirmed using highly accurate atomic clocks, and it becomes increasingly significant as precision grows. *Questo effetto, sebbene piccolo, è stato sperimentalmente verificato utilizzando orologi atomici ad alta precisione, e diventa sempre più importante al crescere della precisione di misura.*

Question 6

Consider the metric for a two-dimensional sphere of unit radius, given by

$$ds^2 \;=\; d\theta^2 \;+\; \sin^2\theta\, d\phi^2.$$

Si tratta dell'elemento di linea standard per una sfera in coordinate sferiche, dove θ rappresenta l'angolo polare (colatitudine) e ϕ rappresenta l'angolo azimutale (longitudine). L'elemento di linea ds^2 rappresenta la distanza infinitesima al quadrato tra due punti vicini sulla sfera.

We label the coordinates as $x^\mu = (\theta, \phi)$. In this setup, the only non-vanishing Christoffel symbols on the sphere are:

$$\Gamma^\theta_{\phi\phi} \;=\; -\,\sin\theta\,\cos\theta \quad \text{and} \quad \Gamma^\phi_{\theta\phi} \;=\; \Gamma^\phi_{\phi\theta} \;=\; \frac{\cos\theta}{\sin\theta} \;=\; \cot\theta.$$

I simboli di Christoffel, indicati da Γ, vengono usati nel calcolo dell'equazione geodetica. Essi rappresentano i coefficienti di "connessione" della metrica, descrivendo come i vettori base cambiano da punto a punto. I simboli di Christoffel si calcolano a partire dal tensore metrico. In questo caso, il tensore metrico è diagonale con $g_{\theta\theta} = 1$ e $g_{\phi\phi} = \sin^2\theta$. I simboli di Christoffel forniti sono derivati da queste componenti della metrica.

Task: Write down the geodesic equations for this metric and use them to show that

(i) lines of constant longitude ($\phi = \text{const.}$) are geodesics,

(ii) the only geodesic at constant latitude ($\theta = \text{const.}$) is the equator ($\theta = \frac{\pi}{2}$).

Solution

Geodesic equations. The geodesic equations in a 2D manifold, for coordinates $x^\mu = (\theta, \phi)$, read

$$\frac{d^2x^\mu}{d\lambda^2} \;+\; \Gamma^\mu_{\alpha\beta}\,\frac{dx^\alpha}{d\lambda}\,\frac{dx^\beta}{d\lambda} \;=\; 0,$$

where λ is an affine parameter along the curve. *Questa è la forma generale dell'equazione geodetica. Una geodetica è il percorso più breve fra due punti in una data geometria, qui una geometria curva. Il parametro affino λ parametrizza la traiettoria. L'equazione geodetica è un'equazione differenziale del secondo ordine che descrive le "linee più dritte possibili" in uno spazio curvo. Il primo termine rappresenta l'accelerazione lungo la geodetica, mentre il secondo termine, che coinvolge i simboli di Christoffel, tiene conto della curvatura dello spazio.*

Using the given Christoffel symbols, we obtain the explicit system:

$$\frac{d^2\theta}{d\lambda^2} - \sin\theta\,\cos\theta\left(\frac{d\phi}{d\lambda}\right)^2 = 0, \tag{1}$$

$$\frac{d^2\phi}{d\lambda^2} + 2\,\cot\theta\,\frac{d\theta}{d\lambda}\,\frac{d\phi}{d\lambda} = 0. \tag{2}$$

Queste sono le specifiche equazioni geodetiche per la metrica data sulla sfera, ottenute sostituendo i simboli di Christoffel nella formula generale dell'equazione geodetica. Per $\mu = \theta$ compaiono contributi da $\Gamma^\theta_{\phi\phi}$, mentre per $\mu = \phi$ compaiono contributi da $\Gamma^\phi_{\theta\phi} = \Gamma^\phi_{\phi\theta}$.

Spiegazione: L'equazione (1) descrive come la coordinata θ cambi lungo una geodetica quando c'è "moto" in direzione ϕ. Il termine $\sin\theta\cos\theta\big(\frac{d\phi}{d\lambda}\big)^2$ è il termine di "forza" dovuto alla curvatura della sfera, in particolare a come varia la direzione ϕ. L'equazione (2) mostra analogamente come la coordinata ϕ è influenzata dai cambiamenti congiunti di θ e ϕ. Il termine $2\,\cot\theta\,\frac{d\theta}{d\lambda}\frac{d\phi}{d\lambda}$ è la "forza" dovuta alla curvatura, e dipende dalla variazione delle direzioni θ e ϕ. Queste equazioni descrivono come si muoverebbe liberamente una particella sulla superficie della sfera, senza forze esterne, seguendo il percorso più breve (geodetica) tra due punti.

(i) Lines at constant longitude. A line at constant longitude implies

$$\phi(\lambda) = \text{const.} \quad\Longrightarrow\quad \frac{d\phi}{d\lambda} = 0, \quad \frac{d^2\phi}{d\lambda^2} = 0.$$

Spiegazione: Una linea di longitudine costante significa che la coordinata ϕ rimane fissa e non cambia lungo il percorso. Pertanto, le derivate prima e seconda di ϕ rispetto al parametro affine λ sono nulle.

Substitute these into the geodesic equations:

- From Eq. (1):

$$\frac{d^2\theta}{d\lambda^2} \;=\; 0.$$

The general solution is $\theta(\lambda) = a\,\lambda + b$. This describes a curve in which θ changes linearly with λ, i.e. a straight line in the θ-coordinate. *Spiegazione: Poiché $\frac{d\phi}{d\lambda} = 0$, il secondo termine nell'equazione (1) si annulla. Rimane $\frac{d^2\theta}{d\lambda^2} = 0$, che implica che il tasso di variazione di θ rispetto a λ è costante, quindi θ cambia linearmente con λ. Questo è coerente con il moto lungo un meridiano (una linea di longitudine costante).*

- From Eq. (2):

$$0 \;+\; 2\,\cot\theta\,\frac{d\theta}{d\lambda}\,\underbrace{\frac{d\phi}{d\lambda}}_{=0} \;=\; 0 \quad\Longrightarrow\quad 0 = 0,$$

which is trivially satisfied. *Spiegazione: Poiché $\frac{d\phi}{d\lambda} = 0$ e $\frac{d^2\phi}{d\lambda^2} = 0$, l'equazione (2) è automaticamente soddisfatta, qualunque sia il valore di θ e di $\frac{d\theta}{d\lambda}$. Questo significa che l'equazione geodetica per ϕ non impone vincoli aggiuntivi quando ϕ è costante.*

Geometricamente, mantenere ϕ costante significa muoversi lungo un meridiano (un grande cerchio dal polo nord al polo sud). Il risultato che l'equazione per θ diventa una semplice ODE del secondo ordine a coefficienti costanti conferma che i meridiani sono geodetiche. Spiegazione: Un meridiano è una linea di longitudine costante e, su una sfera, i meridiani sono grandi cerchi che passano per entrambi i poli. Il fatto che l'equazione geodetica per θ si riduca a $\frac{d^2\theta}{d\lambda^2} = 0$ conferma che il moto lungo un meridiano è una geodetica, in quanto rappresenta il cammino più "dritto" in direzione θ, senza accelerazione in θ.

(ii) Lines at constant latitude. A line at constant latitude implies

$$\theta(\lambda) = \text{const.} \quad\Longrightarrow\quad \frac{d\theta}{d\lambda} = 0, \quad \frac{d^2\theta}{d\lambda^2} = 0.$$

Spiegazione: Una linea di latitudine costante significa che la coordinata θ è fissa e non cambia lungo il percorso. Pertanto, le sue derivate prima e seconda rispetto a λ sono nulle. Substitute into the geodesic equations:

- Eq. (1) becomes

$$-\,\sin\theta\,\cos\theta\left(\frac{d\phi}{d\lambda}\right)^2 \;=\; 0.$$

For this to hold, we must have either $\sin\theta\,\cos\theta = 0$ o $\frac{d\phi}{d\lambda} = 0$.

  - $\sin\theta = 0 \implies \theta = 0$ or $\theta = \pi$. Questi corrispondono al polo nord e al polo sud, che sono punti (non veri "paralleli"). *Spiegazione: Se $\sin\theta = 0$, allora θ è 0 o π, che corrispondono rispettivamente al polo nord e al polo sud. Questi sono punti singoli sulla sfera, non linee di latitudine.*
  - $\cos\theta = 0 \implies \theta = \frac{\pi}{2}$. Questa è precisamente l'equatore. *Spiegazione: Se $\cos\theta = 0$, allora $\theta = \frac{\pi}{2}$, che corrisponde all'equatore. Si tratta di una linea di latitudine costante che, inoltre, è un grande cerchio.*
  - $\frac{d\phi}{d\lambda} = 0 \implies \phi = \text{const.}$, che descrive di nuovo un meridiano, non un parallelo. *Spiegazione: Se $\frac{d\phi}{d\lambda} = 0$, ϕ è costante, il che indica un meridiano (una linea di longitudine costante), non una linea di latitudine costante.*

- Eq. (2) semplifica a

$$\frac{d^2\phi}{d\lambda^2} = 0 \quad\Longrightarrow\quad \phi(\lambda) = c\,\lambda + d,$$

meaning ϕ changes linearly with λ. *Spiegazione: Poiché $\frac{d\theta}{d\lambda} = 0$, il secondo termine nell'equazione (2) si annulla. Resta l'equazione $\frac{d^2\phi}{d\lambda^2} = 0$, che implica che ϕ cambia linearmente con λ.*

Dunque, l'unico parallelo non banale (θ = const.) che possa essere una geodetica è quello a $\theta = \frac{\pi}{2}$, cioè l'equatore. Spiegazione: L'analisi mostra che l'unica linea di latitudine costante che soddisfi le equazioni geodetiche è l'equatore ($\theta = \frac{\pi}{2}$). Per qualunque altro valore costante di θ, le equazioni geodetiche non possono essere soddisfatte a meno di avere $\frac{d\phi}{d\lambda} = 0$, il che implicherebbe moto lungo un meridiano, non lungo un parallelo. Geometrically, one can see that the equator is a "great circle" (maximal circle on the sphere), whereas any other circle at fixed $\theta \neq \frac{\pi}{2}$ is not a great circle. Only great circles are geodesics on the sphere. *Spiegazione: Un grande cerchio è la circonferenza più grande che si possa tracciare su una sfera, e ha lo stesso raggio della sfera. L'equatore è un grande cerchio, mentre le altre linee di latitudine non lo sono. In termini intuitivi, i grandi cerchi sono i percorsi "più dritti" sulla sfera e quindi sono geodetiche.*

Conclusion. We have shown that:

- Lines of constant longitude ($\phi = \text{const.}$) solve the geodesic equations and hence are geodesics (they correspond to meridians). *Spiegazione: Questo risultato conferma che i meridiani, linee a longitudine costante, sono effettivamente geodetiche sulla sfera. Ciò è coerente con l'intuizione geometrica secondo cui i meridiani sono grandi cerchi.*
- The only latitude ($\theta = \text{const.}$) that is a geodesic is $\theta = \pi/2$, the equator, which is a great circle. *Spiegazione: Questo risultato mostra che fra tutte le linee di latitudine costante, solo l'equatore è una geodetica, perché è l'unico parallelo che sia anche un grande cerchio.*

Question 7

Consider the two-dimensional space whose infinitesimal line element is given by

$$ds^2 = d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\phi^2,$$

with coordinates $x^\mu = (\theta, \phi)$. The non-vanishing Christoffel symbols are

$$\Gamma^\theta_{\phi\phi} = -\sin\theta\,\cos\theta, \qquad \Gamma^\phi_{\theta\phi} = \Gamma^\phi_{\phi\theta} = \cot\theta.$$

Let $V^\mu = (V^\theta, V^\phi)$ be a vector field on this sphere. Compute the covariant derivatives $\nabla_\mu V^\nu$ and $\nabla_\mu V_\nu$, and then show explicitly that

$$\nabla_\mu\big(V^\nu V_\nu\big) = \partial_\mu\big(V^\nu V_\nu\big).$$

Questo esercizio ci chiede di lavorare con uno spazio bidimensionale che rappresenta la superficie di una sfera di raggio unitario. La metrica è data dall'elemento di linea infinitesimo $ds^2 = d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\phi^2$, dove θ è l'angolo polare e ϕ è l'angolo azimutale. Ci vengono forniti i simboli di Christoffel non nulli e un campo vettoriale $V^\mu = (V^\theta, V^\phi)$ su questa sfera. Dobbiamo calcolare le derivate covarianti $\nabla_\mu V^\nu$ e $\nabla_\mu V_\nu$ e poi dimostrare che la derivata covariante del prodotto scalare di V^μ con se stesso è uguale alla sua derivata parziale ordinaria.

Solution

(i) Metric, Coordinates, and Christoffel Symbols We have

$$ds^2 = d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\phi^2,$$

where θ is the polar angle ($0 \le \theta \le \pi$) and ϕ is the azimuthal angle ($0 \le \phi < 2\pi$). *Questo è l'elemento di linea infinitesimo per una sfera unitaria in coordinate sferiche. $d\theta^2$ rappresenta il contributo alla distanza infinitesima dovuto a una variazione dell'angolo polare θ, mentre $\sin^2\theta\, d\phi^2$ rappresenta il contributo dovuto a una variazione dell'angolo azimutale ϕ. Il fattore $\sin^2\theta$ tiene conto del fatto che la circonferenza dei cerchi di latitudine costante diminuisce all'avvicinarsi ai poli.* The non-zero Christoffel symbols for this metric are

$$\Gamma^\theta_{\phi\phi} = -\sin\theta\,\cos\theta, \qquad \Gamma^\phi_{\theta\phi} = \Gamma^\phi_{\phi\theta} = \cot\theta.$$

Questi sono i simboli di Christoffel non nulli per la metrica della sfera unitaria. Essi descrivono come i vettori di base cambiano da punto a punto sulla sfera. $\Gamma^\theta_{\phi\phi}$ rappresenta la variazione del vettore di base θ quando ci si muove lungo la direzione ϕ, mentre $\Gamma^\phi_{\theta\phi} = \Gamma^\phi_{\phi\theta}$ rappresenta la variazione del vettore di base ϕ quando ci si muove lungo la direzione θ o ϕ. Notiamo che i simboli di Christoffel dipendono da θ, il che riflette la curvatura della sfera. These appear when computing the connection for the two-sphere (intuitively, they reflect the curvature of the sphere).

(ii) Covariant Derivative of a Contravariant Vector The covariant derivative of V^ν is

$$\nabla_\mu V^\nu \;=\; \partial_\mu V^\nu + \Gamma^\nu_{\mu\lambda}\, V^\lambda.$$

Questa è la formula per la derivata covariante di un vettore controvariante V^ν. La derivata covariante tiene conto non solo della variazione delle componenti del vettore, ma anche della variazione dei vettori di base stessi, che è codificata dai simboli di Christoffel.

(a) For $\mu = \theta$ and $\nu = \theta$:

$$\nabla_\theta V^\theta \;=\; \partial_\theta V^\theta \;+\; \Gamma^\theta_{\theta\lambda}\, V^\lambda.$$

Qui stiamo calcolando la componente $\theta\theta$ della derivata covariante. Sostituiamo $\mu = \theta$ e $\nu = \theta$ nella formula generale. Since $\Gamma^\theta_{\theta\theta} = 0$ and $\Gamma^\theta_{\theta\phi} = 0$, *Dato che i simboli di Christoffel $\Gamma^\theta_{\theta\theta}$ e $\Gamma^\theta_{\theta\phi}$ sono entrambi nulli per questa metrica,*

$$\nabla_\theta V^\theta \;=\; \partial_\theta V^\theta.$$

la derivata covariante $\nabla_\theta V^\theta$ si riduce alla derivata parziale ordinaria $\partial_\theta V^\theta$.

(b) For $\mu = \theta$ and $\nu = \phi$:

$$\nabla_\theta V^\phi \;=\; \partial_\theta V^\phi \;+\; \Gamma^\phi_{\theta\lambda}\, V^\lambda.$$

Ora calcoliamo la componente $\theta\phi$ della derivata covariante. Sostituiamo $\mu = \theta$ e $\nu = \phi$ nella formula generale. Only $\Gamma^\phi_{\theta\phi} = \cot\theta$ is non-zero, thus *L'unico simbolo di Christoffel non nullo con $\nu = \phi$ e $\mu = \theta$ è $\Gamma^\phi_{\theta\phi} = \cot\theta$, quindi*

$$\nabla_\theta V^\phi \;=\; \partial_\theta V^\phi + \cot\theta\, V^\phi.$$

la derivata covariante $\nabla_\theta V^\phi$ include un termine extra $\cot\theta\, V^\phi$ oltre alla derivata parziale ordinaria.

(c) For $\mu = \phi$ and $\nu = \theta$:

$$\nabla_\phi V^\theta \;=\; \partial_\phi V^\theta \;+\; \Gamma^\theta_{\phi\lambda}\, V^\lambda.$$

Calcoliamo la componente $\phi\theta$ della derivata covariante. Since $\Gamma^\theta_{\phi\phi} = -\sin\theta\,\cos\theta$, *L'unico simbolo di Christoffel non nullo con $\nu = \theta$ e $\mu = \phi$ è $\Gamma^\theta_{\phi\phi} = -\sin\theta\,\cos\theta$, quindi*

$$\nabla_\phi V^\theta \;=\; \partial_\phi V^\theta \;-\; \sin\theta\,\cos\theta\, V^\phi.$$

la derivata covariante $\nabla_\phi V^\theta$ include un termine extra $-\sin\theta\,\cos\theta\, V^\phi$.

(d) For $\mu = \phi$ and $\nu = \phi$:

$$\nabla_\phi V^\phi \;=\; \partial_\phi V^\phi \;+\; \Gamma^\phi_{\phi\lambda}\, V^\lambda.$$

Infine, calcoliamo la componente $\phi\phi$ della derivata covariante. With $\Gamma^\phi_{\phi\theta} = \cot\theta$, *L'unico simbolo di Christoffel non nullo con $\nu = \phi$ e $\mu = \phi$ è $\Gamma^\phi_{\phi\theta} = \cot\theta$, quindi*

$$\nabla_\phi V^\phi \;=\; \partial_\phi V^\phi \;+\; \cot\theta\, V^\theta.$$

la derivata covariante $\nabla_\phi V^\phi$ include un termine extra $\cot\theta\, V^\theta$.

(iii) Covariant Derivative of a Covariant Vector The covariant derivative of V_ν is

$$\nabla_\mu V_\nu \;=\; \partial_\mu V_\nu \;-\; \Gamma^\lambda_{\mu\nu}\, V_\lambda.$$

Questa è la formula per la derivata covariante di un vettore covariante V_ν. Notiamo che il segno del termine che coinvolge i simboli di Christoffel è opposto rispetto a quello per un vettore controvariante.

(a) For $\mu = \theta$ and $\nu = \theta$:

$$\nabla_\theta V_\theta = \partial_\theta V_\theta - \Gamma^\lambda_{\theta\theta}\, V_\lambda.$$

Calcoliamo la componente $\theta\theta$ della derivata covariante di un vettore covariante. Since $\Gamma^\theta_{\theta\theta} = 0$ and $\Gamma^\phi_{\theta\theta} = 0$, *Dato che i simboli di Christoffel $\Gamma^\theta_{\theta\theta}$ e $\Gamma^\phi_{\theta\theta}$ sono entrambi nulli,*

$$\nabla_\theta V_\theta = \partial_\theta V_\theta.$$

la derivata covariante $\nabla_\theta V_\theta$ si riduce alla derivata parziale ordinaria $\partial_\theta V_\theta$.

(b) For $\mu = \theta$ and $\nu = \phi$:

$$\nabla_\theta V_\phi = \partial_\theta V_\phi - \Gamma^\lambda_{\theta\phi}\, V_\lambda.$$

Calcoliamo la componente $\theta\phi$ della derivata covariante. Here $\Gamma^\phi_{\theta\phi} = \cot\theta$, *L'unico simbolo di Christoffel non nullo con $\mu = \theta$ e $\nu = \phi$ è $\Gamma^\phi_{\theta\phi} = \cot\theta$, quindi*

$$\nabla_\theta V_\phi \;= \partial_\theta V_\phi \;-\; \cot\theta\, V_\phi.$$

la derivata covariante $\nabla_\theta V_\phi$ include un termine extra $-\cot\theta\, V_\phi$.

(c) For $\mu = \phi$ and $\nu = \theta$:

$$\nabla_\phi V_\theta = \partial_\phi V_\theta - \Gamma^\lambda_{\phi\theta}\, V_\lambda.$$

Calcoliamo la componente $\phi\theta$ della derivata covariante. Since $\Gamma^\phi_{\phi\theta} = \cot\theta$, *L'unico simbolo di Christoffel non nullo con $\mu = \phi$ e $\nu = \theta$ è $\Gamma^\phi_{\phi\theta} = \cot\theta$, quindi*

$$\nabla_\phi V_\theta \;=\; \partial_\phi V_\theta \;-\; \cot\theta\, V_\phi.$$

la derivata covariante $\nabla_\phi V_\theta$ include un termine extra $-\cot\theta\, V_\phi$.

(d) For $\mu = \phi$ and $\nu = \phi$:

$$\nabla_\phi V_\phi = \partial_\phi V_\phi - \Gamma^\lambda_{\phi\phi}\, V_\lambda.$$

Infine, calcoliamo la componente $\phi\phi$ della derivata covariante. With $\Gamma^\theta_{\phi\phi} = -\sin\theta\,\cos\theta$, *L'unico simbolo di Christoffel non nullo con $\mu = \phi$ e $\nu = \phi$ è $\Gamma^\theta_{\phi\phi} = -\sin\theta\,\cos\theta$, quindi*

$$\nabla_\phi V_\phi = \partial_\phi V_\phi + \sin\theta\,\cos\theta\, V_\theta.$$

la derivata covariante $\nabla_\phi V_\phi$ include un termine extra $\sin\theta\,\cos\theta\, V_\theta$.

(iv) Checking $\nabla_\mu(V^\nu V_\nu) = \partial_\mu(V^\nu V_\nu)$ Let us verify explicitly that the covariant derivative of the scalar $V^\nu V_\nu$ coincides with its partial derivative. We compute

$$\nabla_\mu(V^\nu V_\nu) = V^\nu \nabla_\mu V_\nu + V_\nu \nabla_\mu V^\nu.$$

Ora dimostriamo che la derivata covariante di uno scalare (in questo caso, $V^\nu V_\nu$) è uguale alla sua derivata parziale ordinaria. Per fare ciò, calcoliamo $\nabla_\mu(V^\nu V_\nu)$ usando la regola del prodotto per la derivata covariante. By substituting $\nabla_\mu V_\nu = \partial_\mu V_\nu - \Gamma^\lambda_{\mu\nu} V_\lambda$ and $\nabla_\mu V^\nu = \partial_\mu V^\nu + \Gamma^\nu_{\mu\lambda} V^\lambda$, the terms involving $\Gamma^\nu_{\mu\lambda}$ cancel each other because of index symmetries, leaving *Sostituiamo le espressioni per $\nabla_\mu V_\nu$ e $\nabla_\mu V^\nu$. I termini che coinvolgono i simboli di Christoffel si cancellano a vicenda a causa della simmetria degli indici, lasciando*

$$\nabla_\mu(V^\nu V_\nu) = V^\nu \partial_\mu V_\nu + V_\nu \partial_\mu V^\nu = \partial_\mu(V^\nu V_\nu).$$

Questa espressione è uguale alla derivata parziale ordinaria di $V^\nu V_\nu$, dimostrando così l'uguaglianza cercata. Hence, the covariant derivative of $V^\nu V_\nu$ matches its ordinary partial derivative, as expected for a scalar. *Quindi, la derivata covariante di $V^\nu V_\nu$ coincide con la sua derivata parziale ordinaria, come ci aspettavamo per uno scalare.*

Question 8

Questo esercizio riguarda l'identità del commutatore di derivate covarianti applicato a un tensore di tipo (2,0) in una varietà (pseudo) Riemanniana senza torsione. L'obiettivo è determinare sotto quali condizioni tale commutatore si annulla. Questo problema ci aiuta a comprendere meglio la relazione tra la geometria dello spaziotempo (descritta dal tensore di Riemann e dal tensore di Ricci) e le proprietà di simmetria dei tensori.

Given an arbitrary $(2,0)$ tensor $W^{\mu\nu}$, determine under what conditions the identity

$$\left[\nabla_\mu, \nabla_\nu\right] W^{\mu\nu} \;=\; 0$$

holds in a (pseudo) Riemannian manifold with zero torsion. *Abbiamo un tensore $W^{\mu\nu}$ di tipo (2,0) arbitrario, ovvero con due indici controvarianti. Dobbiamo trovare le condizioni per cui il commutatore delle derivate covarianti ∇_μ e ∇_ν, applicato a $W^{\mu\nu}$ con indici contratti, sia uguale a zero. Stiamo lavorando in una varietà (pseudo) Riemanniana (come lo spaziotempo della Relatività Generale) con torsione nulla, il che semplifica l'espressione del commutatore.*

Solution

(i) Commutator of Covariant Derivatives *Iniziamo richiamando l'espressione generale per il commutatore di due derivate covarianti che agiscono su un tensore di tipo (2,0). Questa espressione coinvolge il tensore di Riemann, che descrive la curvatura dello spaziotempo.* We start by recalling the general expression for the commutator of covariant derivatives acting on a $(2,0)$ tensor:

$$\left[\nabla_\alpha, \nabla_\beta\right] W^{\mu\nu} \;=\; R^{\mu}{}_{\sigma\alpha\beta}\, W^{\sigma\nu} \;+\; R^{\nu}{}_{\sigma\alpha\beta}\, W^{\mu\sigma},$$

where $R^{\rho}{}_{\sigma\mu\nu}$ is the Riemann curvature tensor. *Qui, $[\nabla_\alpha, \nabla_\beta]$ rappresenta il commutatore delle derivate covarianti ∇_α e ∇_β, definito come $\nabla_\alpha\nabla_\beta - \nabla_\beta\nabla_\alpha$. $W^{\mu\nu}$ è un generico tensore di tipo (2,0). $R^{\rho}{}_{\sigma\mu\nu}$ è il tensore di curvatura di Riemann, che quantifica la non commutatività delle derivate covarianti e, di conseguenza, la curvatura dello spaziotempo. Il primo termine a destra dell'equazione rappresenta l'effetto della curvatura sulla componente μ del tensore, mentre il secondo termine rappresenta l'effetto sulla componente ν. In pratica, questa equazione ci dice come il trasporto parallelo di un tensore attorno a un parallelogramma infinitesimo (definito da α e β) differisce dal trasporto parallelo in senso opposto.*

(ii) Specializing to $W^{\mu\nu}$ with Indices Contracted *Ora applichiamo la formula generale del commutatore al nostro caso specifico, dove vogliamo che il commutatore si annulli quando gli indici del tensore $W^{\mu\nu}$ sono contratti con gli indici delle derivate covarianti nel commutatore.* We want the commutator to vanish when the resulting tensor is $W^{\mu\nu}$ contracted with the same pair of indices (μ, ν) as appear in the commutator:

$$\left[\nabla_\mu, \nabla_\nu\right] W^{\mu\nu} \;=\; 0.$$

Questo significa che stiamo calcolando $[\nabla_\mu, \nabla_\nu]\, W^{\mu\nu}$, dove il primo indice del commutatore (μ) è contratto con il primo indice del tensore (μ), e il secondo indice del commutatore (ν) è contratto con il secondo indice del tensore (ν). Substituting $\alpha = \mu$ and $\beta = \nu$ into the general formula, we get

$$\left[\nabla_\mu, \nabla_\nu\right] W^{\mu\nu} \;=\; R^{\mu}{}_{\sigma\mu\nu}\, W^{\sigma\nu} \;+\; R^{\nu}{}_{\sigma\mu\nu}\, W^{\mu\sigma}.$$

Sostituendo $\alpha = \mu$ e $\beta = \nu$ nella formula generale, otteniamo questa espressione specifica per il nostro caso. Notiamo che gli indici μ e ν appaiono sia come indici di derivata covariante che come indici del tensore di Riemann.

(iii) Ricci Tensor and Antisymmetry *Utilizziamo ora la definizione del tensore di Ricci e una proprietà di antisimmetria del tensore di Riemann per semplificare l'espressione.* Next, we recall that the Ricci tensor $R_{\mu\nu}$ is defined as the contraction

$$R_{\mu\nu} \;=\; R^{\lambda}{}_{\mu\lambda\nu}.$$

Il tensore di Ricci $R_{\mu\nu}$ si ottiene contraendo il primo e il terzo indice del tensore di Riemann. È una misura della curvatura dello spaziotempo. Hence, the first term can be written as

$$R^{\mu}{}_{\sigma\mu\nu}\, W^{\sigma\nu} \;=\; R_{\sigma\nu}\, W^{\sigma\nu}.$$

Usando la definizione del tensore di Ricci, possiamo riscrivere il primo termine come una contrazione tra il tensore di Ricci e il tensore $W^{\sigma\nu}$. For the second term, we use a key antisymmetry property of the Riemann tensor:

$$R^{\nu}{}_{\sigma\mu\nu} \;=\; -\,R^{\nu}{}_{\sigma\nu\mu}.$$

Il tensore di Riemann è antisimmetrico negli ultimi due indici. Questo significa che scambiando gli ultimi due indici, il tensore cambia segno. It follows that

$$R^{\nu}{}_{\sigma\mu\nu}\, W^{\mu\sigma} \;=\; -\,R^{\nu}{}_{\sigma\nu\mu}\, W^{\mu\sigma} \;=\; -\,R_{\sigma\mu}\, W^{\mu\sigma}.$$

Usando questa proprietà di antisimmetria, possiamo riscrivere il secondo termine, cambiando il segno e scambiando gli ultimi due indici del tensore di Riemann.

(iv) Combining the Two Terms *Ora rimettiamo insieme i due termini e sfruttiamo il fatto che gli indici muti possono essere rinominati.* Putting these two contributions together, we have

$$[\nabla_\mu, \nabla_\nu] W^{\mu\nu} = R_{\sigma\nu} W^{\sigma\nu} - R_{\sigma\mu} W^{\mu\sigma}.$$

Observe that the two indices in the second term (σ, μ) are dummy indices. *Gli indici σ e μ nel secondo termine sono indici "muti", ovvero indici di sommazione che possono essere rinominati senza cambiare il significato dell'espressione.* By swapping these dummy indices in the second term (renaming $\sigma \to \nu$, $\mu \to \sigma$), we get

$$R_{\sigma\nu} W^{\sigma\nu} - R_{\sigma\nu} W^{\nu\sigma} = R_{\sigma\nu} \big(W^{\sigma\nu} - W^{\nu\sigma}\big).$$

Rinominando gli indici muti nel secondo termine, possiamo riscrivere l'espressione come una differenza tra due termini che coinvolgono il tensore di Ricci e il tensore W, ma con gli indici scambiati. Therefore,

$$[\nabla_\mu, \nabla_\nu] W^{\mu\nu} = R_{\sigma\nu} \big(W^{\sigma\nu} - W^{\nu\sigma}\big).$$

For this quantity to vanish for the *arbitrary* tensor $W^{\mu\nu}$, the factor in parentheses must vanish unless $R_{\sigma\nu} = 0$ everywhere. *Affinché questa espressione sia uguale a zero per un tensore $W^{\mu\nu}$ arbitrario, il fattore tra parentesi deve essere nullo, a meno che il tensore di Ricci non sia identicamente nullo.*

(v) Conditions for Vanishing Commutator *Concludiamo derivando le due possibili condizioni sotto le quali il commutatore si annulla.* Thus, there are two distinct possibilities for

$$[\nabla_\mu, \nabla_\nu] W^{\mu\nu} = 0 :$$

- **Case 1: $W^{\mu\nu}$ is symmetric.** If $W^{\mu\nu}$ is symmetric, then $W^{\sigma\nu} - W^{\nu\sigma} = 0$, and consequently

  $$R_{\sigma\nu} \big(W^{\sigma\nu} - W^{\nu\sigma}\big) = 0$$

  for any Ricci tensor $R_{\sigma\nu}$, making the whole expression vanish. *Caso 1: Se $W^{\mu\nu}$ è simmetrico (cioè $W^{\mu\nu} = W^{\nu\mu}$), allora la differenza $W^{\sigma\nu} - W^{\nu\sigma}$ è zero, e quindi l'intera espressione si annulla, indipendentemente dal valore del tensore di Ricci.*

- **Case 2: $R_{\mu\nu} = 0$.** If the spacetime is Ricci-flat, meaning $R_{\mu\nu} = 0$, then

  $$R_{\sigma\nu} \big(W^{\sigma\nu} - W^{\nu\sigma}\big) = 0$$

  regardless of whether $W^{\mu\nu}$ is symmetric or not. In this scenario, the commutator also vanishes for *any* $(2, 0)$ tensor. *Caso 2: Se lo spaziotempo è piatto secondo Ricci (cioè $R_{\mu\nu} = 0$), allora l'intera espressione si annulla, indipendentemente dalla simmetria o antisimmetria di $W^{\mu\nu}$. In questo caso, il commutatore si annulla per qualsiasi tensore di tipo (2,0).*

(vi) Physical Interpretation (Optional Remark) *Diamo una breve interpretazione fisica delle due condizioni.* In the context of General Relativity, the condition $R_{\mu\nu} = 0$ (with zero cosmological constant) implies a vacuum solution of Einstein's field equations, indicating no matter or energy content. *Nel contesto della Relatività Generale, la condizione $R_{\mu\nu} = 0$ (in assenza di costante cosmologica) corrisponde a una soluzione di vuoto delle equazioni di campo di Einstein, ovvero a uno spaziotempo privo di materia o energia.* On the other hand, requiring $W^{\mu\nu}$ to be symmetric imposes a restriction on the form of the tensor rather than on the geometry of the spacetime. *D'altra parte, richiedere che $W^{\mu\nu}$ sia simmetrico impone una restrizione sulla forma del tensore, ma non sulla geometria dello spaziotempo.*

(vii) Final Answer *Riassumiamo il risultato finale.* Hence,

$$[\nabla_\mu, \nabla_\nu] W^{\mu\nu} = 0 \iff \text{either } W^{\mu\nu} \text{ is symmetric, or } R_{\mu\nu} = 0.$$

In definitiva, il commutatore $[\nabla_\mu, \nabla_\nu] W^{\mu\nu}$ è uguale a zero se e solo se $W^{\mu\nu}$ è un tensore simmetrico, oppure se lo spaziotempo è piatto secondo Ricci ($R_{\mu\nu} = 0$).

Question 9

Consider a photon moving in a two-dimensional spacetime described by the metric

$$ds^2 \;=\; -\Big(1+\frac{x^2}{\ell^2}\Big)\,dt^2 \;+\; dx^2,$$

where ℓ is a constant. *Questa metrica descrive uno spazio con una coordinata temporale 't' e una coordinata spaziale 'x'. La presenza del termine $\frac{x^2}{\ell^2}$ indica una deviazione dallo spaziotempo piatto, introducendo una curvatura che dipende dalla coordinata spaziale 'x'. La costante ℓ ha dimensioni di lunghezza e determina la scala a cui la curvatura diventa significativa.*

The photon follows a geodesic $x^\mu(\lambda)$ parameterized by an affine parameter λ. Its four-momentum is $p^\mu = \frac{dx^\mu}{d\lambda}$. *Una geodetica è la generalizzazione di una linea retta in uno spaziotempo curvo, e rappresenta il cammino di lunghezza (o durata) minima tra due punti. Per un fotone, la geodetica è nulla, nel senso che $ds^2 = 0$ lungo il suo percorso. Il parametro affine λ varia a ritmo costante lungo la geodetica. Il quattrimpulso p^μ è il vettore che descrive l'energia e la quantità di moto del fotone nello spaziotempo.*

Using the geodesic equation, derive all conserved quantities for this system and use these results to express $\frac{dx}{d\lambda}$ as a function of the radial coordinate x and the conserved quantities.

Solution

(i) The Metric and Its Components. From the line element

$$ds^2 \;=\; -\Big(1+\tfrac{x^2}{\ell^2}\Big)\,dt^2 \;+\; dx^2,$$

we read off the nonzero components of the metric tensor:

$$g_{tt} \;=\; -\Big(1+\tfrac{x^2}{\ell^2}\Big), \quad g_{xx} \;=\; 1,$$

and the remaining off-diagonal components vanish. *Il tensore metrico $g_{\mu\nu}$ determina la geometria dello spaziotempo. Le sue componenti si ricavano direttamente dai coefficienti dei differenziali nell'elemento di linea. Qui, g_{tt} è la componente tempo-tempo e g_{xx} è la componente spazio-spazio. Le componenti fuori diagonale sono nulle, a indicare che non c'è mescolamento fra le coordinate tempo e spazio in questa metrica.*

The inverse metric components are

$$g^{tt} \;=\; -\frac{1}{1+\frac{x^2}{\ell^2}}, \quad g^{xx} \;=\; 1.$$

Il tensore metrico inverso $g^{\mu\nu}$ si usa per alzare gli indici. Le sue componenti si ottengono prendendo il reciproco delle corrispondenti componenti del tensore metrico, dato che la metrica è diagonale.

Here, t plays the role of time coordinate and x is the spatial coordinate in this $1+1$-dimensional setup.

(ii) Christoffel Symbols. The Christoffel symbols $\Gamma^\mu_{\alpha\beta}$ are computed from the standard formula:

$$\Gamma^\mu_{\alpha\beta} \;=\; \tfrac{1}{2}\,g^{\mu\sigma}\big(\partial_\alpha g_{\sigma\beta} + \partial_\beta g_{\sigma\alpha} - \partial_\sigma g_{\alpha\beta}\big).$$

I simboli di Christoffel sono coefficienti che compaiono nell'equazione geodetica e descrivono come i vettori di base del sistema di coordinate cambiano da punto a punto. Vengono calcolati a partire dal tensore metrico e dalle sue derivate.

Since $g_{tt} = -\big(1+\frac{x^2}{\ell^2}\big)$, its only nonzero derivative is

$$\partial_x\, g_{tt} \;=\; -\frac{2x}{\ell^2}.$$

Hence the nonzero Christoffel symbols are:

$$\Gamma^t_{xt} \;=\; \Gamma^t_{tx} \;=\; \tfrac{1}{2}\,g^{tt}\,(\partial_x g_{tt}) \;=\; \tfrac{1}{2}\Big(-\frac{1}{1+\frac{x^2}{\ell^2}}\Big)\Big(-\frac{2x}{\ell^2}\Big) \;=\; \frac{x}{\ell^2\,\big(1+\frac{x^2}{\ell^2}\big)},$$

Per trovare Γ^t_{xt}, utilizziamo la formula per i simboli di Christoffel. Poiché solo $\partial_x g_{tt}$ è non nullo, i termini con ∂_t si annullano. Gli indici α e β sono x e t, e μ è t. L'indice σ deve essere t perché g^{tt} è l'unica componente non nulla che possa alzare l'indice t. Otteniamo così $\Gamma^t_{xt} = \frac{1}{2}\,g^{tt}(\partial_x g_{tt})$.

$$\Gamma^x_{tt} \;=\; \tfrac{1}{2}\,g^{xx}\,\big(-\partial_x g_{tt}\big) \;=\; \tfrac{1}{2}\,(1)\,\Big(\frac{2x}{\ell^2}\Big) \;=\; \frac{x}{\ell^2}.$$

In modo analogo, per Γ^x_{tt} gli indici α e β sono entrambi t, e μ è x. L'indice σ deve essere x perché g^{xx} è l'unica componente non nulla che possa alzare l'indice x. Quindi $\Gamma^x_{tt} = \frac{1}{2}\,g^{xx}(-\partial_x g_{tt})$.

(iii) Geodesic Equations. A geodesic $x^\mu(\lambda)$ in this spacetime satisfies

$$\frac{d^2x^\mu}{d\lambda^2} + \Gamma^\mu_{\alpha\beta}\frac{dx^\alpha}{d\lambda}\frac{dx^\beta}{d\lambda} = 0.$$

Questa è l'equazione geodetica, che descrive la traiettoria di una particella che si muove liberamente nello spaziotempo. L'equazione afferma che l'accelerazione della particella lungo la geodetica è nulla se misurata nel sistema di coordinate appropriato.

Since we are working in $1+1$ dimensions, we focus on $\mu = t$ and $\mu = x$ separately:

$$\text{(a) For } \mu = t: \quad \frac{d^2t}{d\lambda^2} + 2\Gamma^t_{tx}\frac{dt}{d\lambda}\frac{dx}{d\lambda} = 0,$$

Questa equazione si ottiene ponendo $\mu = t$ nell'equazione geodetica. Il fattore 2 proviene dal fatto che $\Gamma^t_{tx} = \Gamma^t_{xt}$. L'equazione descrive come cambia la coordinata temporale lungo la geodetica.

$$\text{(b) For } \mu = x: \quad \frac{d^2x}{d\lambda^2} + \Gamma^x_{tt}\left(\frac{dt}{d\lambda}\right)^2 = 0.$$

Questa equazione si ottiene ponendo $\mu = x$ nell'equazione geodetica. Descrive come varia la coordinata spaziale lungo la geodetica.

(iv) Conserved Quantities. Because the metric does not depend explicitly on the coordinate t, there is a conserved quantity associated with the Killing vector ∂_t. *Un vettore di Killing è un campo vettoriale che genera una simmetria della metrica. In questo caso, la metrica è indipendente dal tempo, quindi esiste una simmetria di traslazione temporale e il corrispondente vettore di Killing è ∂_t.*

This implies

$$p_t = g_{t\mu}\frac{dx^\mu}{d\lambda} = g_{tt}\frac{dt}{d\lambda} = -\left(1+\tfrac{x^2}{\ell^2}\right)\frac{dt}{d\lambda} = \text{constant}.$$

La quantità conservata associata a un vettore di Killing ξ^μ è data da $p_\mu\,\xi^\mu$, dove p_μ è il quattrimpulso. Qui, $\xi^\mu = (1,0)$, quindi la quantità conservata è p_t. Poiché la metrica ha solo la componente tt, p_t coincide con $g_{tt}\frac{dt}{d\lambda}$.

We label this constant $-E$, where $E > 0$ can be interpreted as the energy of the photon:

$$p_t = -E, \quad \Longrightarrow \quad \frac{dt}{d\lambda} = \frac{E}{1+\frac{x^2}{\ell^2}}.$$

Definiamo tale costante pari a $-E$, dove E è l'energia del fotone. In tal modo, possiamo esprimere $\frac{dt}{d\lambda}$ in funzione di E e x.

No analogous conserved quantity arises from the spatial coordinate x, since the metric coefficients depend on x.

(v) Null Condition for the Photon. A photon follows a null geodesic, so its four-momentum satisfies

$$p^\mu p_\mu = g_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{d\lambda}\frac{dx^\nu}{d\lambda} = 0.$$

Per una geodetica nulla, l'intervallo ds^2 è nullo, il che implica che il quattrimpulso al quadrato è zero.

In our case,

$$-\left(1+\tfrac{x^2}{\ell^2}\right)\left(\frac{dt}{d\lambda}\right)^2 + \left(\frac{dx}{d\lambda}\right)^2 = 0.$$

Substitute $\dfrac{dt}{d\lambda} = \dfrac{E}{1+\frac{x^2}{\ell^2}}$:

$$-\left(1+\tfrac{x^2}{\ell^2}\right)\left(\frac{E}{1+\frac{x^2}{\ell^2}}\right)^2 + \left(\frac{dx}{d\lambda}\right)^2 = 0.$$

A direct simplification yields

$$\left(\frac{dx}{d\lambda}\right)^2 = \frac{E^2}{1+\frac{x^2}{\ell^2}}.$$

Hence we obtain

$$\frac{dx}{d\lambda} = \pm\frac{E}{\sqrt{1+\frac{x^2}{\ell^2}}}.$$

Quest'equazione mette in relazione la velocità di variazione della coordinata spaziale x rispetto al parametro affine λ con l'energia E e la coordinata spaziale x. Il segno $\pm$ indica che il fotone può muoversi sia in direzione positiva sia in direzione negativa di x.

This expression describes how the photon's radial coordinate x evolves with respect to the affine parameter λ.

(vi) Physical Interpretation.

- The quantity E is the conserved energy of the photon, associated with the time-translational symmetry of the metric. *Il fatto che la metrica non dipenda esplicitamente dal tempo comporta l'esistenza di una quantità conservata, interpretata come l'energia E del fotone.*

- The factor $\left(1 + x^2/\ell^2\right)$ in the denominator shows that the rate of change of x depends on the position x; the curvature contribution grows with $\frac{x^2}{\ell^2}$. *La dipendenza di g_{tt} da x introduce una variazione spaziale nella velocità di variazione di x rispetto a λ. Il termine $\frac{x^2}{\ell^2}$ rappresenta la deviazione dallo spaziotempo piatto.*

- As $\ell \to \infty$, the term $\frac{x^2}{\ell^2}$ becomes negligible, and the metric approaches the flat Minkowski form $-dt^2 + dx^2$. In that limit, the geodesic equations revert to those of a photon in flat (1+1)-dimensional spacetime. *Quando ℓ è molto grande, lo spaziotempo diventa approssimativamente piatto e la metrica si riduce a quella di Minkowski. In questo limite, la traiettoria del fotone diventa una linea retta, come previsto nello spaziotempo piatto.*

Exercise 10

Starting from the expression of the Schwarzschild metric, compute the explicit expressions for the Christoffel symbols Γ^r_{rr} and $\Gamma^\phi_{r\phi}$.

Solution

(i) Schwarzschild Metric. We consider the Schwarzschild metric in the coordinates $(t,\, r,\, \theta,\, \phi)$:

$$ds^2 \;=\; -\Big(1 - \frac{2GM}{r}\Big)\, dt^2 \;+\; \Big(1 - \frac{2GM}{r}\Big)^{-1} dr^2 \;+\; r^2\, d\theta^2 \;+\; r^2 \sin^2\theta \, d\phi^2.$$

Si tratta dell'espressione della metrica di Schwarzschild, che descrive la geometria dello spaziotempo attorno a una massa sfericamente simmetrica e non rotante. Le coordinate utilizzate sono quelle sferiche, dove t *rappresenta il tempo,* r *la distanza radiale e θ e ϕ sono rispettivamente l'angolo polare e l'angolo azimutale. Il termine $2GM$ rappresenta il raggio di Schwarzschild, con G la costante di gravitazione e M la massa dell'oggetto.*

From this, the non-zero metric components $g_{\mu\nu}$ are:

$$g_{tt} = -\Big(1 - \tfrac{2GM}{r}\Big), \quad g_{rr} = \Big(1 - \tfrac{2GM}{r}\Big)^{-1}, \quad g_{\theta\theta} = r^2, \quad g_{\phi\phi} = r^2 \sin^2\theta.$$

All other $g_{\mu\nu}$ are zero. *Qui elenchiamo le componenti non nulle del tensore metrico $g_{\mu\nu}$. Il tensore metrico è un oggetto fondamentale in relatività generale, poiché descrive la geometria dello spaziotempo. In questo caso, le componenti non nulle sono i termini diagonali della metrica, a indicare che il sistema di coordinate è ortogonale. I termini riflettono la curvatura dello spaziotempo dovuta alla massa centrale.*

Consequently, the inverse metric $g^{\mu\nu}$ has the non-zero components:

$$g^{tt} = -\Big(1 - \tfrac{2GM}{r}\Big)^{-1}, \quad g^{rr} = \Big(1 - \tfrac{2GM}{r}\Big), \quad g^{\theta\theta} = \frac{1}{r^2}, \quad g^{\phi\phi} = \frac{1}{r^2 \sin^2\theta}.$$

L'inversione del tensore metrico avviene prendendo il reciproco di ciascuna componente diagonale, dal momento che la metrica è diagonale. Il tensore $g^{\mu\nu}$ serve per alzare gli indici nelle operazioni tensoriali.

(ii) Christoffel Symbols: General Formula. The Christoffel symbols $\Gamma^\rho_{\mu\nu}$ are given by:

$$\Gamma^\rho_{\mu\nu} \;=\; \frac{1}{2}\, g^{\rho\sigma} \Big(\partial_\mu g_{\sigma\nu} \;+\; \partial_\nu g_{\sigma\mu} \;-\; \partial_\sigma g_{\mu\nu}\Big).$$

Questa è la formula generale per i simboli di Christoffel, coefficienti che compaiono nell'equazione geodetica e descrivono come variano i vettori di base di un sistema di coordinate da un punto all'altro. Essi derivano dal tensore metrico e dalle sue derivate, rappresentando la curvatura dello spaziotempo.

We will use this formula to compute two specific components: Γ^r_{rr} and $\Gamma^\phi_{r\phi}$.

(iii) Calculation of Γ^r_{rr}. We set $\rho = r$, $\mu = r$, and $\nu = r$. Then

$$\Gamma^r_{rr} \;=\; \frac{1}{2}\, g^{r\sigma} \Big(\partial_r g_{\sigma r} \;+\; \partial_r g_{\sigma r} \;-\; \partial_\sigma g_{rr}\Big).$$

Stiamo calcolando una particolare componente del simbolo di Christoffel. Poiché poniamo tutti gli indici ρ, μ, ν uguali a r, consideriamo la componente radiale della connessione.

Since $g^{r\sigma}$ is non-zero only for $\sigma = r$, we have

$$\Gamma^r_{rr} \;=\; \frac{1}{2}\, g^{rr} \Big(\partial_r g_{rr} \;+\; \partial_r g_{rr} \;-\; \partial_r g_{rr}\Big) \;=\; \frac{1}{2}\, g^{rr}\, \partial_r g_{rr}.$$

Notare che due dei termini si annullano, lasciando un'unica derivata. L'espressione si semplifica perché g^{rr} è l'unica componente non nulla della metrica inversa quando l'indice superiore è r.

Next, we compute the derivative of g_{rr}:

$$g_{rr} \;=\; \Big(1 - \tfrac{2GM}{r}\Big)^{-1}.$$

Thus,

$$\partial_r \Big(1 - \tfrac{2GM}{r}\Big)^{-1} \;=\; -\Big(1 - \tfrac{2GM}{r}\Big)^{-2} \cdot \frac{2GM}{r^2}.$$

Questa operazione è la derivata di g_{rr} rispetto a r. La derivata di una funzione inversa si effettua usando la regola della catena.

Since $g^{rr} = \left(1 - \frac{2GM}{r}\right)$, we obtain:

$$\Gamma^r_{rr} \;=\; \frac{1}{2}\Big(1 - \tfrac{2GM}{r}\Big)\Big[-\Big(1 - \tfrac{2GM}{r}\Big)^{-2} \cdot \frac{2GM}{r^2}\Big].$$

Combining these factors,

$$\Gamma^r_{rr} \;=\; -\frac{GM}{r^2}\Big(1 - \tfrac{2GM}{r}\Big)^{-1}.$$

Il segno negativo indica che una particella in caduta libera sperimenta un'accelerazione radiale verso l'interno nelle coordinate di Schwarzschild. Questo è il risultato finale per Γ^r_{rr}.

(iv) Calculation of $\Gamma^\phi_{r\phi}$. We set $\rho = \phi$, $\mu = r$, and $\nu = \phi$. Then

$$\Gamma^\phi_{r\phi} \;=\; \frac{1}{2}\, g^{\phi\sigma}\Big(\partial_r g_{\sigma\phi} \;+\; \partial_\phi g_{\sigma r} \;-\; \partial_\sigma g_{r\phi}\Big).$$

Ora calcoliamo la componente $\Gamma^\phi_{r\phi}$ *del simbolo di Christoffel, che combina i contributi radiale e azimutale.*

Since $g^{\phi\sigma}$ is non-zero only for $\sigma = \phi$, the expression simplifies to

$$\Gamma^\phi_{r\phi} \;=\; \frac{1}{2}\, g^{\phi\phi}\big(\partial_r g_{\phi\phi}\big),$$

because $g_{r\phi} = g_{\phi r} = 0$. *La semplificazione avviene perché l'unica componente non nulla di* $g^{\phi\sigma}$ *quando il primo indice è* ϕ *è* $g^{\phi\phi}$. *Inoltre, i termini con* $g_{\sigma r}$ *e* $g_{r\phi}$ *sono nulli poiché la metrica è diagonale.*

We now compute:

$$g_{\phi\phi} \;=\; r^2\, \sin^2\theta \quad\Longrightarrow\quad \partial_r(r^2 \sin^2\theta) \;=\; 2r\, \sin^2\theta.$$

È una derivata diretta di $g_{\phi\phi}$ *rispetto a* r.

On substituting $g^{\phi\phi} = \dfrac{1}{r^2\, \sin^2\theta}$,

$$\Gamma^\phi_{r\phi} \;=\; \frac{1}{2}\Big(\tfrac{1}{r^2 \sin^2\theta}\Big)\big(2\, r\, \sin^2\theta\big) \;=\; \frac{1}{r}.$$

Questo termine descrive l'effetto geometrico del variare di ϕ *rispetto a* r. *Il risultato è coerente con il fatto che, in coordinate sferiche, la dipendenza da* ϕ *rispetto a* r *ha forma* $\frac{1}{r}$.

(v) Final Results. We therefore arrive at the following two Christoffel symbols for the Schwarzschild spacetime:

$$\Gamma^r_{rr} \;=\; -\frac{GM}{r^2}\Big(1 - \tfrac{2GM}{r}\Big)^{-1}, \quad \Gamma^\phi_{r\phi} \;=\; \frac{1}{r}.$$

Queste sono le espressioni finali per i due simboli di Christoffel richiesti. Sono importanti per il calcolo delle geodetiche, che rappresentano le traiettorie seguite dalle particelle in caduta libera nello spaziotempo di Schwarzschild.

These results are consistent with the spherical symmetry of the Schwarzschild solution and the well-known structure of its connection coefficients. *Le espressioni trovate sono coerenti con la simmetria sferica del problema e rispecchiano la struttura nota dei coefficienti di connessione nella metrica di Schwarzschild.*

Question 11

Questo esercizio si concentra sulle orbite di particelle massive in una geometria di Schwarzschild, che descrive lo spaziotempo attorno a un oggetto sfericamente simmetrico e non rotante, come una stella o un buco nero. In particolare, l'obiettivo è determinare il raggio minimo per un'orbita circolare stabile.

For geodesic motion in the Schwarzschild metric, the following two quantities are conserved:

$$E = \left(1 - \frac{2GM}{r}\right)\frac{dt}{d\lambda}, \qquad L = r^2\frac{d\phi}{d\lambda}.$$

Queste due quantità conservate, E ed L, derivano dalle simmetrie della metrica di Schwarzschild. E è l'energia per unità di massa della particella, conservata a causa dell'invarianza per traslazioni temporali (la metrica non dipende esplicitamente dal tempo t). L è il momento angolare per unità di massa, conservato a causa della simmetria sferica (la metrica non dipende dall'angolo ϕ). λ è un parametro affine che parametrizza la geodetica. Determine the smallest allowed radius for a stable circular orbit for a massive object.

Solution

(i) Schwarzschild Metric and Conserved Quantities *Iniziamo scrivendo la metrica di Schwarzschild e le quantità conservate associate al moto di una particella massiva in tale metrica.*

We consider the Schwarzschild metric:

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2GM}{r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2GM}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2\, d\theta^2 + r^2 \sin^2\theta\, d\phi^2.$$

Questa è la metrica di Schwarzschild in coordinate (t, r, θ, ϕ), dove t è il tempo coordinato, r è la coordinata radiale, e θ e ϕ sono le coordinate angolari. M è la massa dell'oggetto centrale (come un buco nero o una stella), e G è la costante di gravitazione universale. Because of the symmetries of this spacetime (time-translation invariance and spherical symmetry), two conserved quantities naturally arise for geodesic motion:

$$E = \left(1 - \frac{2GM}{r}\right)\frac{dt}{d\lambda}, \qquad L = r^2\frac{d\phi}{d\lambda}.$$

Here, E can be interpreted as the energy per unit mass of the particle, while L is the angular momentum per unit mass. *E è l'energia per unità di massa della particella, conservata a causa dell'invarianza per traslazioni temporali (la metrica non dipende esplicitamente dal tempo t). L è il momento angolare per unità di massa, conservato a causa della simmetria sferica (la metrica non dipende dall'angolo ϕ). λ è un parametro affine che parametrizza la geodetica.*

(ii) Normalization Condition and Effective Potential *Per una particella massiva, la sua quadrivelocità $u^\mu = \frac{dx^\mu}{d\lambda}$ è normalizzata. Utilizzando questa condizione di normalizzazione e le quantità conservate, possiamo definire un potenziale efficace che descrive il moto radiale della particella.*

For a massive particle, its four-velocity $u^\mu = \frac{dx^\mu}{d\lambda}$ is normalized as

$$g_{\mu\nu}\, u^\mu\, u^\nu = -1.$$

Questa è la condizione di normalizzazione per la quadrivelocità di una particella massiva. $g_{\mu\nu}$ è il tensore metrico, e u^μ e u^ν sono le componenti della quadrivelocità. Il prodotto scalare tra la quadrivelocità e se stessa è uguale a -1 (usando la convenzione di segno -,+,+,+). Restricting the motion to the equatorial plane $\theta = \pi/2$ (this is always possible by spherical symmetry), the normalization condition becomes: *Per semplificare il problema, consideriamo il moto nel piano equatoriale, dove $\theta = \pi/2$. Questa scelta è sempre possibile grazie alla simmetria sferica della metrica di Schwarzschild.*

$$-\left(1 - \frac{2GM}{r}\right)\left(\frac{dt}{d\lambda}\right)^2 + \left(1 - \frac{2GM}{r}\right)^{-1}\left(\frac{dr}{d\lambda}\right)^2 + r^2\left(\frac{d\phi}{d\lambda}\right)^2 = -1.$$

Questa equazione si ottiene sostituendo le componenti della metrica di Schwarzschild e la condizione $\theta = \pi/2$ (quindi $d\theta = 0$) nella condizione di normalizzazione della quadrivelocità. Substitute the expressions for E and L:

$$E = \left(1 - \frac{2GM}{r}\right)\frac{dt}{d\lambda}, \quad L = r^2\frac{d\phi}{d\lambda}.$$

After some algebraic manipulation, we can rearrange to find an expression that allows us to introduce the *effective potential* $V_{\text{eff}}(r)$. In particular, one arrives at: *Sostituiamo le espressioni per E ed L nell'equazione precedente. Dopo alcuni passaggi algebrici, possiamo riscrivere l'equazione in una forma che ci permette di introdurre il concetto di potenziale efficace, $V_{\text{eff}}(r)$.*

$$\frac{1}{2}\left(\frac{dr}{d\lambda}\right)^2 + V_{\text{eff}}(r) = \frac{E^2}{2},$$

where

$$V_{\text{eff}}(r) = \left(1 - \frac{2GM}{r}\right)\left(\frac{1}{2} + \frac{L^2}{2r^2}\right).$$

Questa equazione ha una forma simile a quella dell'energia in meccanica classica, dove il primo termine rappresenta l'energia cinetica radiale e il secondo termine è il potenziale efficace. $V_{\text{eff}}(r)$ *è una funzione della coordinata radiale* r *e dipende dai parametri* G, M *e* L. Expanding,

$$V_{\text{eff}}(r) = \frac{1}{2} - \frac{GM}{r} + \frac{L^2}{2r^2} - \frac{GM\,L^2}{r^3}.$$

Espandendo l'espressione per il potenziale efficace, otteniamo una forma più esplicita che ci permette di analizzarne il comportamento. Il primo termine è una costante, il secondo termine è il termine Newtoniano (attrattivo), il terzo termine è un termine centrifugo (repulsivo) e il quarto termine è un termine aggiuntivo dovuto alla Relatività Generale (attrattivo). Intuitively, $V_{\text{eff}}(r)$ encodes the combined effects of the gravitational attraction (terms with GM/r) and the centrifugal repulsion (terms with L^2). *Intuitivamente,* $V_{\text{eff}}(r)$ *tiene conto sia dell'attrazione gravitazionale (termini con* GM/r*) che della repulsione centrifuga (termini con* L^2*).*

(iii) Circular Orbits *Ora analizziamo le condizioni per avere orbite circolari. Un'orbita circolare è caratterizzata da un raggio costante, il che implica che la velocità radiale sia nulla.*

To have a circular orbit at radius r, the radial coordinate must remain constant, implying

$$\frac{dr}{d\lambda} = 0.$$

Per un'orbita circolare, la coordinata radiale r *deve rimanere costante. Questo significa che la derivata di* r *rispetto al parametro affine* λ *deve essere zero.* This means we sit at an extremum of the effective potential (since the motion in r-direction is momentarily at rest and remains so):

$$\frac{dV_{\text{eff}}}{dr} = 0.$$

La condizione $dr/d\lambda = 0$ *implica che ci troviamo in un punto di estremo (massimo o minimo) del potenziale efficace. In un punto di estremo, la derivata del potenziale efficace rispetto a* r *è zero.* Computing the derivative of $V_{\text{eff}}(r)$:

$$\frac{dV_{\text{eff}}}{dr} = \frac{GM}{r^2} - \frac{L^2}{r^3} + \frac{3\,GM\,L^2}{r^4}.$$

Calcoliamo la derivata del potenziale efficace rispetto a r. Setting this to zero gives the condition for circular orbits:

$$\frac{GM}{r^2} - \frac{L^2}{r^3} + \frac{3\,GM\,L^2}{r^4} = 0.$$

Ponendo la derivata del potenziale efficace uguale a zero, otteniamo la condizione per l'esistenza di orbite circolari. Multiplying by r^4 yields a quadratic equation in r:

$$GM\,r^2 - L^2\,r + 3\,GM\,L^2 = 0.$$

Moltiplicando l'equazione precedente per r^4*, otteniamo un'equazione quadratica in* r*, la cui soluzione ci darà i raggi delle possibili orbite circolari.* This equation will generally give up to two real solutions for r, corresponding to (at most) two possible circular orbit radii for a given L. *Questa equazione quadratica può avere fino a due soluzioni reali per* r*, che corrispondono a due possibili raggi di orbite circolari per un dato valore del momento angolare* L.

(iv) Stability of Circular Orbits *Determiniamo ora la condizione di stabilità per le orbite circolari. Un'orbita circolare è stabile se corrisponde a un minimo del potenziale efficace, instabile se corrisponde a un massimo.*

An extremum of $V_{\text{eff}}(r)$ can be either a stable minimum (small perturbations do not destroy the orbit) or an unstable maximum (any tiny radial perturbation will push the object away). The stability criterion for a circular orbit is:

$$\left.\frac{d^2V_{\text{eff}}}{dr^2}\right|_{r=r_0} > 0.$$

La condizione di stabilità per un'orbita circolare è che la derivata seconda del potenziale efficace, valutata al raggio dell'orbita r_0*, sia maggiore di zero. Questo corrisponde a un minimo del potenziale efficace.* The second derivative of $V_{\text{eff}}(r)$ is:

$$\frac{d^2V_{\text{eff}}}{dr^2} = -\frac{2\,GM}{r^3} + \frac{3\,L^2}{r^4} - \frac{12\,GM\,L^2}{r^5}.$$

Calcoliamo la derivata seconda del potenziale efficace rispetto a r. At the radius $r = r_0$ solving $\frac{dV_{\text{eff}}}{dr} = 0$, if $\frac{d^2V_{\text{eff}}}{dr^2}|_{r_0} > 0$, the circular orbit at r_0 is stable; otherwise, it is unstable. *Se la derivata seconda del potenziale efficace, valutata al raggio dell'orbita circolare* r_0*, è maggiore di zero, l'orbita è stabile; altrimenti, è instabile.*

(v) Smallest Stable Radius *Determiniamo ora il raggio minimo per un'orbita circolare stabile. Questo corrisponde al punto in cui le due soluzioni dell'equazione quadratica per r coincidono.*

Solving

$$GM\,r^2 - L^2\,r + 3\,GM\,L^2 = 0$$

for r gives

$$r \;=\; \frac{L^2 \pm \sqrt{L^4 - 12\,G^2M^2\,L^2}}{2\,GM}.$$

Risolviamo l'equazione quadratica per r usando la formula risolutiva per le equazioni di secondo grado. Real solutions exist only if the discriminant is non-negative:

$$L^4 - 12\,G^2M^2\,L^2 \geq 0 \quad\Longrightarrow\quad L^2\Big(L^2 - 12\,G^2M^2\Big) \geq 0 \quad\Longrightarrow\quad L^2 \geq 12\,G^2M^2.$$

Le soluzioni reali esistono solo se il discriminante dell'equazione quadratica è non negativo. Questo ci dà una condizione sul valore minimo del momento angolare L per l'esistenza di orbite circolari. At the threshold $L^2 = 12\,G^2M^2$, the two solutions for r coincide. Substituting $L^2 = 12\,G^2M^2$ back into r, we get

$$r \;=\; \frac{12\,G^2M^2}{2\,GM} \;=\; 6\,GM.$$

Al valore di soglia $L^2 = 12\,G^2M^2$, le due soluzioni per r coincidono. Sostituendo questo valore di L nell'espressione per r, otteniamo il raggio minimo per un'orbita circolare. This particular circular orbit at $r = 6\,GM$ corresponds to the *innermost stable circular orbit* (ISCO) for a massive particle in Schwarzschild geometry. Below this radius, any circular orbit would be unstable or not allowed by the geometry. *Questa particolare orbita circolare a $r = 6\,GM$ corrisponde all'orbita circolare stabile più interna (ISCO) per una particella massiva nella geometria di Schwarzschild. Al di sotto di questo raggio, qualsiasi orbita circolare sarebbe instabile o non permessa dalla geometria.* One can check that at $r = 6\,GM$, the second derivative $\frac{d^2V_{\text{eff}}}{dr^2}$ is positive, confirming the stability in this limiting sense. *Si può verificare che a $r = 6\,GM$, la derivata seconda del potenziale efficace è positiva, confermando la stabilità di questa orbita nel senso limite.*

$$\boxed{\text{Therefore, the smallest allowed radius for a stable circular orbit is } r = 6\,GM.}$$

Quindi, il raggio minimo consentito per un'orbita circolare stabile è $r = 6\,GM$.

Question 12

For geodesic motion in the Schwarzschild metric, the following two quantities are conserved:

$$E = \left(1 - \tfrac{2GM}{r}\right) \frac{dt}{d\lambda}, \qquad L = r^2 \frac{d\phi}{d\lambda}.$$

Queste sono l'energia E e il momento angolare L conservati per unità di massa di una particella di prova che si muove lungo una geodetica nello spaziotempo di Schwarzschild. Qui, G è la costante di gravitazione, M è la massa dell'oggetto centrale, r è la coordinata radiale, t è la coordinata temporale, ϕ è l'angolo azimutale e λ è un parametro affino lungo la geodetica.

Consider the circular orbits for a massive object and determine the radius of the stable orbit in the $L \to \infty$ limit. *Ci viene chiesto di trovare il raggio dell'orbita circolare stabile per un oggetto massiccio nel limite di grande momento angolare.*

Compare this result with the corresponding Newtonian result.

Solution

(i) Schwarzschild Metric and Conserved Quantities We start by recalling that the Schwarzschild metric is:

$$ds^2 \;=\; -\Big(1 - \tfrac{2GM}{r}\Big)\, dt^2 \;+\; \Big(1 - \tfrac{2GM}{r}\Big)^{-1} dr^2 \;+\; r^2\, d\theta^2 \;+\; r^2 \,\sin^2\theta\, d\phi^2.$$

Questa è la metrica di Schwarzschild, che descrive la geometria dello spaziotempo al di fuori di una distribuzione di massa sfericamente simmetrica. La metrica è espressa nelle coordinate di Schwarzschild (t, r, θ, ϕ), dove t è la coordinata temporale, r è la coordinata radiale, θ è l'angolo polare e ϕ è l'angolo azimutale. Il termine $d\Omega^2 = d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\phi^2$ rappresenta la metrica sulla 2-sfera.

For a test particle of unit mass, two quantities remain constant along its geodesic:

$$E \;=\; \Big(1 - \tfrac{2GM}{r}\Big)\, \frac{dt}{d\lambda}, \qquad L \;=\; r^2\, \frac{d\phi}{d\lambda}.$$

Queste quantità conservate derivano dalle simmetrie della metrica di Schwarzschild. In particolare, la metrica non dipende da t (invarianza per traslazione temporale) né da ϕ (simmetria di rotazione intorno all'asse z).

These constants follow from, respectively, time-translation invariance (energy conservation) and spherical symmetry (angular momentum conservation).

(ii) Normalization Condition and Effective Potential For a massive particle, the four-velocity $u^\mu = \frac{dx^\mu}{d\lambda}$ must satisfy

$$g_{\mu\nu}\, u^\mu\, u^\nu \;=\; -1.$$

Questa è la condizione di normalizzazione per il quattrivelocità di una particella massiccia. Indica che il tempo proprio lungo la traiettoria della particella è misurato da λ in modo che il quadrato del quattrivelocità sia -1.

Restricting the motion to the equatorial plane ($\theta = \pi/2$), the normalization condition becomes:

$$-\Big(1 - \tfrac{2GM}{r}\Big)\Big(\tfrac{dt}{d\lambda}\Big)^2 \;+\; \Big(1 - \tfrac{2GM}{r}\Big)^{-1}\Big(\tfrac{dr}{d\lambda}\Big)^2 \;+\; r^2\Big(\tfrac{d\phi}{d\lambda}\Big)^2 \;=\; -1.$$

Consideriamo il moto confinato al piano equatoriale per semplicità, il che è possibile grazie alla simmetria sferica della metrica di Schwarzschild.

Using

$$E \;=\; \Big(1 - \tfrac{2GM}{r}\Big)\, \frac{dt}{d\lambda}, \quad L \;=\; r^2\, \frac{d\phi}{d\lambda},$$

we rewrite the above equation as

$$-\frac{E^2}{\big(1 - \frac{2GM}{r}\big)} \;+\; \frac{1}{\big(1 - \frac{2GM}{r}\big)}\Big(\tfrac{dr}{d\lambda}\Big)^2 \;+\; \frac{L^2}{r^2} \;=\; -1.$$

Abbiamo sostituito le espressioni per le quantità conservate E e L nella condizione di normalizzazione.

Rearranging leads to a form where we identify the *effective potential* $V_{\text{eff}}(r)$:

$$\tfrac{1}{2}\Big(\tfrac{dr}{d\lambda}\Big)^2 \;+\; \Big(1 - \tfrac{2GM}{r}\Big)\Big(\tfrac{1}{2} + \tfrac{L^2}{2r^2}\Big) \;=\; \tfrac{E^2}{2}.$$

Hence,

$$V_{\text{eff}}(r) \;=\; \Big(1 - \tfrac{2GM}{r}\Big)\Big(\tfrac{1}{2} + \tfrac{L^2}{2r^2}\Big) \;=\; \tfrac{1}{2} \;-\; \tfrac{GM}{r} \;+\; \tfrac{L^2}{2r^2} \;-\; \tfrac{GM\,L^2}{r^3}.$$

L'equazione ora assomiglia a quella di una particella con "energia" $\frac{E^2}{2}$ che si muove in un potenziale efficace $V_{\text{eff}}(r)$. Il potenziale efficace include termini corrispondenti alla gravità newtoniana, a una barriera centrifuga e a un termine di correzione relativistica.

(Observe that the first two terms reproduce a Newtonian-like potential, while the last two terms encode relativistic corrections.)

(iii) Circular Orbits A circular orbit occurs at constant r, implying $\frac{dr}{d\lambda} = 0$. At this radius, the effective potential must be at an extremum:

$$\frac{dV_{\text{eff}}}{dr} \;=\; 0.$$

Per un'orbita circolare, la distanza radiale r non cambia col parametro affino λ. Ciò accade in corrispondenza di un minimo (stabile) o massimo (instabile) del potenziale efficace.

Differentiating $V_{\text{eff}}(r)$ with respect to r:

$$\frac{dV_{\text{eff}}}{dr} \;=\; \frac{GM}{r^2} \;-\; \frac{L^2}{r^3} \;+\; \frac{3\,GM\,L^2}{r^4}.$$

Setting this to zero:

$$\frac{GM}{r^2} \;-\; \frac{L^2}{r^3} \;+\; \frac{3\,GM\,L^2}{r^4} \;=\; 0,$$

which, upon multiplying by r^4, becomes the quadratic in r:

$$GM\,r^2 \;-\; L^2\,r \;+\; 3\,GM\,L^2 \;=\; 0.$$

Si tratta di un'equazione quadratica per il raggio r di un'orbita circolare. Le soluzioni di questa equazione forniscono i raggi per cui sono possibili orbite circolari.

(iv) Stability of Circular Orbits For the orbit to be stable, we also require

$$\frac{d^2V_{\text{eff}}}{dr^2} > 0 \quad \text{(the effective potential has a minimum).}$$

La stabilità dell'orbita circolare è determinata dalla seconda derivata del potenziale efficace. Una seconda derivata positiva indica un minimo, che corrisponde a un'orbita stabile.

The second derivative is

$$\frac{d^2V_{\text{eff}}}{dr^2} \;=\; -\frac{2\,GM}{r^3} \;+\; \frac{3\,L^2}{r^4} \;-\; \frac{12\,GM\,L^2}{r^5}.$$

One finds that there is a smallest radius, the *innermost stable circular orbit* (ISCO), for which stability still holds. In Schwarzschild spacetime for a massive particle, this is at $r = 6GM$ if $L^2 = 12\,G^2\,M^2$. *L'ISCO (Innermost Stable Circular Orbit) è il raggio minimo per cui è ancora possibile un'orbita circolare stabile. Al di sotto di tale raggio, le orbite circolari diventano instabili e la particella precipita verso la massa centrale.*

(v) Circular Orbit Radius in the $L \to \infty$ Limit The general solutions of the quadratic equation for r are:

$$r \;=\; \frac{L^2 \;\pm\; \sqrt{L^4 \;-\; 12\,G^2M^2L^2}}{2\,GM}.$$

For large L, we can approximate

$$\sqrt{L^4 - 12\,G^2M^2\,L^2} \;\approx\; L^2\sqrt{1 - \tfrac{12\,G^2M^2}{L^2}} \;\approx\; L^2\Big(1 - \tfrac{6\,G^2M^2}{L^2}\Big),$$

Nel limite di grande momento angolare L, possiamo utilizzare un'approssimazione binomiale per semplificare la radice quadrata.

and so

$$r \;\approx\; \frac{L^2 \;\pm\; L^2\big(1 - \frac{6\,G^2M^2}{L^2}\big)}{2\,GM} \;=\; \frac{L^2}{2GM} \;\pm\; \frac{L^2}{2GM}\Big(1 - \tfrac{6\,G^2M^2}{L^2}\Big).$$

This yields two approximate solutions:

$$r_{(1)} \;\approx\; \frac{L^2}{2GM} \;+\; \frac{L^2}{2GM} \;-\; 3\,GM \;=\; \frac{L^2}{GM} - 3\,GM,$$

$$r_{(2)} \;\approx\; \frac{L^2}{2GM} \;-\; \frac{L^2}{2GM} \;+\; 3\,GM \;=\; 3\,GM.$$

The first solution, $r_{(1)} \approx \frac{L^2}{GM} - 3\,GM$, grows large for large L and describes stable circular orbits (the subleading constant term $-\,3GM$ becomes negligible for $L \to \infty$). *Questa soluzione corrisponde all'orbita circolare stabile, e il suo raggio aumenta al crescere di L.*

The second solution, $r_{(2)} \approx 3\,GM$, corresponds to an unstable circular orbit. *Questa soluzione corrisponde all'orbita circolare instabile a un raggio fisso di $3GM$, indipendente da L.*

Therefore, in the limit $L \to \infty$, the stable circular orbit effectively satisfies

$$r \;\approx\; \frac{L^2}{GM}.$$

Nel limite di grande L, il raggio dell'orbita circolare stabile è approssimativamente $\frac{L^2}{GM}$.

(vi) Comparison with the Newtonian Result In Newtonian gravity, the effective potential for a particle of mass m and angular momentum L in a central field GMm/r is

$$V_{\text{eff}}(r) \;=\; -\frac{GMm}{r} \;+\; \frac{L^2}{2\,m\,r^2}.$$

Questo è il potenziale efficace newtoniano, che include l'energia potenziale gravitazionale e l'energia potenziale centrifuga.

The circular-orbit condition $\frac{dV_{\text{eff}}}{dr} = 0$ gives

$$\frac{GMm}{r^2} \;-\; \frac{L^2}{m\,r^3} \;=\; 0 \quad\Longrightarrow\quad r \;=\; \frac{L^2}{GM\,m^2}.$$

If $m = 1$ (taking unit mass), we get the same leading-order form

$$r_{\text{Newton}} \;=\; \frac{L^2}{GM}.$$

Hence, at large L, the relativistic orbit radius $r \approx \frac{L^2}{GM}$ matches the Newtonian prediction up to relativistic corrections. *Nel limite di grande momento angolare, il raggio dell'orbita circolare stabile in relatività generale si avvicina al risultato newtoniano.*

The difference is that in Schwarzschild geometry we treat a test particle (mass m is effectively canceled out), whereas in the Newtonian context r explicitly depends on m. In any case, the leading $1/GM$ scaling with L^2 is the same in both theories for large angular momentum.

Exercise 13

For geodesic motion in the Schwarzschild metric, the following two quantities are conserved:

$$E = \left(1 - \tfrac{2GM}{r}\right)\frac{dt}{d\lambda}, \qquad L = r^2\,\frac{d\phi}{d\lambda}.$$

Discuss all possible circular orbits for a massless object and determine their stability.

Solution

(i) Schwarzschild Metric and Conserved Quantities. Consider the Schwarzschild metric in (t, r, θ, ϕ) coordinates:

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2GM}{r}\right)dt^2 + \left(1 - \frac{2GM}{r}\right)^{-1}dr^2 + r^2\,d\theta^2 + r^2\sin^2\theta\,d\phi^2. \tag{3}$$

Two quantities remain constant along any geodesic:

$$E = \left(1 - \tfrac{2GM}{r}\right)\frac{dt}{d\lambda}, \tag{4}$$

$$L = r^2\,\frac{d\phi}{d\lambda}. \tag{5}$$

Here, λ is an affine parameter along the geodesic.

(ii) Normalization Condition for a Massless Particle. For a massless object (e.g., a photon), its four-momentum $p^\mu = \frac{dx^\mu}{d\lambda}$ satisfies

$$g_{\mu\nu}\,p^\mu p^\nu = 0. \tag{6}$$

We can restrict the motion to the equatorial plane $\theta = \pi/2$, which simplifies the metric by eliminating the $d\theta^2$ term. Thus,

$$-\left(1 - \tfrac{2GM}{r}\right)\left(\frac{dt}{d\lambda}\right)^2 + \left(1 - \tfrac{2GM}{r}\right)^{-1}\left(\frac{dr}{d\lambda}\right)^2 + r^2\left(\frac{d\phi}{d\lambda}\right)^2 = 0. \tag{7}$$

Substitute the conserved quantities $\frac{dt}{d\lambda} = \frac{E}{1-\frac{2GM}{r}}$ and $\frac{d\phi}{d\lambda} = \frac{L}{r^2}$:

$$-\frac{E^2}{1 - \frac{2GM}{r}} + \left(1 - \tfrac{2GM}{r}\right)^{-1}\left(\frac{dr}{d\lambda}\right)^2 + \frac{L^2}{r^2} = 0. \tag{8}$$

Rearrange to isolate $\left(\frac{dr}{d\lambda}\right)^2$:

$$\left(\frac{dr}{d\lambda}\right)^2 + \frac{L^2}{r^2}\left(1 - \tfrac{2GM}{r}\right) = E^2. \tag{9}$$

Define the effective potential for the massless particle:

$$V_{\text{eff}}(r) = \frac{L^2}{2\,r^2}\left(1 - \tfrac{2GM}{r}\right). \tag{10}$$

Then, our radial equation is $\left(\frac{dr}{d\lambda}\right)^2 + 2\,V_{\text{eff}}(r) = E^2$.

(iii) Circular Orbits for a Massless Object. A circular orbit requires a constant radius, hence $\frac{dr}{d\lambda} = 0$. In terms of the effective potential, this implies

$$E^2 = 2\,V_{\text{eff}}(r), \quad \text{and} \quad \frac{dV_{\text{eff}}}{dr} = 0. \tag{11}$$

Differentiate $V_{\text{eff}}(r)$:

$$V_{\text{eff}}(r) = \frac{L^2}{2\,r^2}\left(1 - \tfrac{2GM}{r}\right). \tag{12}$$

$$\frac{dV_{\text{eff}}}{dr} = -\frac{L^2}{r^3}\left(1 - \tfrac{2GM}{r}\right) + \frac{L^2}{r^2}\,\frac{2GM}{r^2} = -\frac{L^2}{r^3} + \frac{3\,GM\,L^2}{r^4}. \tag{13}$$

Setting $\frac{dV_{\text{eff}}}{dr} = 0$ yields

$$-\frac{L^2}{r^3} + \frac{3\,GM\,L^2}{r^4} = 0 \implies r = 3\,GM. \tag{14}$$

Thus, for a massless particle (photon), the only possible circular orbit is at $r = 3GM$. This is the well-known photon sphere.

(iv) Stability of the Circular Orbit. To test stability, we look at the second derivative of V_{eff}. An extremum is stable if $\frac{d^2 V_{\text{eff}}}{dr^2} > 0$ (minimum) and unstable if $\frac{d^2 V_{\text{eff}}}{dr^2} < 0$ (maximum). We compute:

$$\frac{d^2 V_{\text{eff}}}{dr^2} = \frac{3\,L^2}{r^4} - \frac{12\,GM\,L^2}{r^5}. \tag{15}$$

Evaluating at $r = 3GM$:

$$\begin{aligned}\left.\frac{d^2 V_{\text{eff}}}{dr^2}\right|_{r=3GM} &= \frac{3\,L^2}{(3GM)^4} - \frac{12\,GM\,L^2}{(3GM)^5} = \frac{3\,L^2}{81\,G^4M^4} - \frac{12\,L^2}{243\,G^4M^4} \\ &= \frac{3\,L^2}{81\,G^4M^4} - \frac{4\,L^2}{81\,G^4M^4} = -\frac{L^2}{81\,G^4M^4} < 0.\end{aligned} \tag{16}$$

Since this is negative, the orbit at $r = 3GM$ is a maximum of the effective potential and thus unstable. A small perturbation in r will drive the photon either inwards toward the black hole horizon at $r = 2GM$, or outwards to larger r.

(v) Final Remarks. For a massless object (e.g. a photon) in Schwarzschild spacetime, there is exactly one circular orbit at $r = 3GM$. However, it is an unstable orbit: any tiny radial perturbation will send the particle plunging inward or escaping outward. This purely relativistic effect has no Newtonian analogue, since massless particles do not orbit under Newtonian gravity.

Question 14

For geodesic motion in the Schwarzschild metric, the following two quantities are conserved:

$$E = \left(1 - \tfrac{2GM}{r}\right)\frac{dt}{d\lambda}, \quad L = r^2\,\frac{d\phi}{d\lambda}.$$

Queste sono l'energia E e il momento angolare L conservati per unità di massa di una particella di prova che si muove lungo una geodetica nello spaziotempo di Schwarzschild. Qui, G è la costante di gravitazione, M è la massa dell'oggetto centrale, r è la coordinata radiale, t è la coordinata temporale, ϕ è l'angolo azimutale e λ è un parametro affino lungo la geodetica. La conservazione di queste quantità è una conseguenza dell'invarianza per traslazioni temporali e della simmetria di rotazione del metrica di Schwarzschild.

In this problem, we set our units such that $GM = 1$ and consider the motion of a photon with angular momentum $L = 10$. *Stiamo scegliendo un sistema di unità in cui il prodotto della costante di gravitazione G e della massa dell'oggetto centrale M vale 1. Questo semplifica le equazioni. Stiamo considerando un fotone, che è una particella senza massa, con un momento angolare $L = 10$.*

Find the minimum value of E such that the photon can reach the singularity at $r \to 0$.

Solution

(i) Schwarzschild Metric and Conserved Quantities The Schwarzschild metric in coordinates $\{t, r, \theta, \phi\}$ is given by:

$$ds^2 = -\left(1 - \tfrac{2GM}{r}\right)dt^2 + \left(1 - \tfrac{2GM}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2\,d\theta^2 + r^2 \sin^2\theta\,d\phi^2.$$

Questa è la metrica di Schwarzschild, che descrive la geometria dello spaziotempo al di fuori di una distribuzione di massa sfericamente simmetrica. La metrica è espressa nelle coordinate di Schwarzschild (t, r, θ, ϕ), dove t è la coordinata temporale, r è la coordinata radiale, θ è l'angolo polare e ϕ è l'angolo azimutale. Il termine $d\Omega^2 = d\theta^2 + \sin^2\theta\,d\phi^2$ rappresenta la metrica sulla 2-sfera.

Since the metric is stationary (time translation symmetry) and spherically symmetric, two quantities are conserved along geodesics:

$$E = \left(1 - \tfrac{2GM}{r}\right)\frac{dt}{d\lambda}, \quad L = r^2\,\frac{d\phi}{d\lambda}.$$

La quantità conservata E è associata alla simmetria di traslazione temporale della metrica (non dipende da t), mentre L è associato alla simmetria di rotazione intorno all'asse z (la metrica non dipende da ϕ).

Here, λ is an affine parameter along the photon's path.

(ii) Normalization Condition and Effective Potential For a photon (massless particle), the four-momentum $p^\mu = \frac{dx^\mu}{d\lambda}$ satisfies

$$g_{\mu\nu}\,p^\mu\,p^\nu = 0.$$

Questa è la condizione di normalizzazione per il quattrimpulso di una particella senza massa (fotone). Esprime che il quattrimpulso è un vettore nullo, cioè il suo quadrato in modulo è pari a zero.

Assume motion is confined to the equatorial plane ($\theta = \pi/2$), which is always possible by spherical symmetry. Then the condition becomes:

$$-\left(1 - \tfrac{2GM}{r}\right)\left(\tfrac{dt}{d\lambda}\right)^2 + \left(1 - \tfrac{2GM}{r}\right)^{-1}\left(\tfrac{dr}{d\lambda}\right)^2 + r^2\left(\tfrac{d\phi}{d\lambda}\right)^2 = 0.$$

Possiamo scegliere il piano equatoriale senza perdita di generalità grazie alla simmetria sferica della metrica di Schwarzschild. Questo semplifica le equazioni impostando $d\theta/d\lambda = 0$ e $\sin\theta = 1$.

Substitute the conserved quantities E and L to rewrite it in terms of $dr/d\lambda$:

$$-\frac{E^2}{1 - \frac{2GM}{r}} + \frac{1}{1 - \frac{2GM}{r}}\left(\tfrac{dr}{d\lambda}\right)^2 + \frac{L^2}{r^2} = 0.$$

Abbiamo sostituito E e L nella condizione di normalizzazione per eliminare $dt/d\lambda$ e $d\phi/d\lambda$.

Rearrange this into:

$$\tfrac{1}{2}\left(\tfrac{dr}{d\lambda}\right)^2 + \frac{L^2}{2\,r^2}\left(1 - \tfrac{2GM}{r}\right) = \tfrac{E^2}{2}.$$

We identify the *effective potential* as

$$V_{\text{eff}}(r) = \frac{L^2}{2\,r^2}\left(1 - \tfrac{2GM}{r}\right).$$

Questa equazione ha la forma di un'equazione di conservazione dell'energia, in cui il primo termine rappresenta l'"energia cinetica" e il secondo l'"energia potenziale". Il potenziale efficace $V_{\text{eff}}(r)$ determina il moto radiale del fotone.

A photon can reach the singularity at $r = 0$ only if its total "energy" (in the effective potential sense) is large enough to overcome any potential barrier.

(iii) Setting $GM = 1$ and $L = 10$ We now set $GM = 1$. The angular momentum is given as $L = 10$. Hence,

$$V_{\text{eff}}(r) = \frac{L^2}{2\,r^2}\left(1 - \tfrac{2}{r}\right) = \frac{100}{2\,r^2} - \frac{100}{r^3} = \frac{50}{r^2} - \frac{100}{r^3}.$$

Abbiamo sostituito $GM = 1$ e $L = 10$ nell'espressione del potenziale efficace.

The radial equation becomes

$$\tfrac{1}{2}\left(\tfrac{dr}{d\lambda}\right)^2 + V_{\text{eff}}(r) = \tfrac{E^2}{2}.$$

Questa equazione descrive il moto radiale del fotone in termini del potenziale efficace e dell'energia conservata E.

(iv) Condition for the Photon to Reach the Singularity To find whether the photon can fall into $r = 0$, we look for the largest barrier in $V_{\text{eff}}(r)$. The maximum of V_{eff} occurs where

$$\frac{dV_{\text{eff}}}{dr} = -\frac{100}{r^3} + \frac{300}{r^4} = 0.$$

Per trovare il valore massimo del potenziale efficace, ne calcoliamo la derivata rispetto a r e la poniamo uguale a zero.

Solving yields $r_{\max} = 3$. *Risolvendo l'equazione $\frac{dV_{\text{eff}}}{dr} = 0$ si ottiene $r_{\max} = 3$ (in unità dove $GM = 1$).*

At this point,

$$V_{\text{eff}}(3) = \frac{50}{3^2} - \frac{100}{3^3} = \frac{50}{9} - \frac{100}{27} = \frac{150 - 100}{27} = \frac{50}{27}.$$

Calcoliamo il potenziale efficace a $r_{\max} = 3$ per trovare l'altezza della barriera di potenziale.

The photon must have

$$\frac{E^2}{2} \geq V_{\text{eff}}(3), \quad \text{i.e.} \quad E^2 \geq 2\,\frac{50}{27} = \frac{100}{27}.$$

Affinché il fotone possa raggiungere la singolarità a $r = 0$, il suo quadrato dell'energia deve essere maggiore o uguale al valore massimo del potenziale efficace.

Thus,

$$E \geq \sqrt{\frac{100}{27}} = \frac{10}{\sqrt{27}} = \frac{10}{3\sqrt{3}}.$$

Hence the minimum energy for the photon to reach $r = 0$ is

$$E_{\min} = \frac{10}{3\,\sqrt{3}}.$$

Troviamo l'energia minima $E_{\min}$ prendendo la radice quadrata del valore minimo di E^2.

(v) Additional Comments

- The radius $r = 3$ is often called the "photon sphere" for the Schwarzschild metric with $GM = 1$. A photon with just the right energy and angular momentum can orbit there (unstably). *Il raggio $r = 3$ (in unità dove $GM = 1$) è un raggio speciale chiamato "sfera fotonica". A questo raggio, un fotone può orbitare intorno alla massa centrale in un'orbita circolare instabile.*
- When E is lower than this threshold, the photon encounters a turning point at some $r > 0$ and cannot proceed to $r = 0$. *Se l'energia del fotone è inferiore a quella minima necessaria per superare la barriera di potenziale, incontrerà un punto di inversione ($\frac{dr}{d\lambda} = 0$) e non potrà raggiungere la singolarità.*
- Physically, the presence of the potential barrier for massless particles is a key relativistic feature: spacetime curvature affects the path of light in a nontrivial way. *Il potenziale efficace per un fotone nella metrica di Schwarzschild è un effetto puramente relativistico. Nella gravità newtoniana non esiste una barriera di questo tipo per particelle prive di massa.*