第 14 章

光的衍射

光的衍射现象

单缝夫朗和费衍射

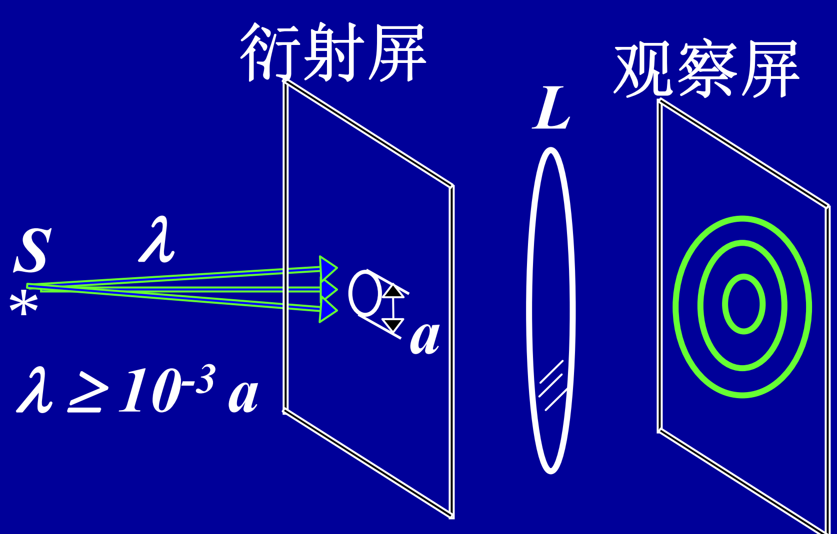
光栅衍射

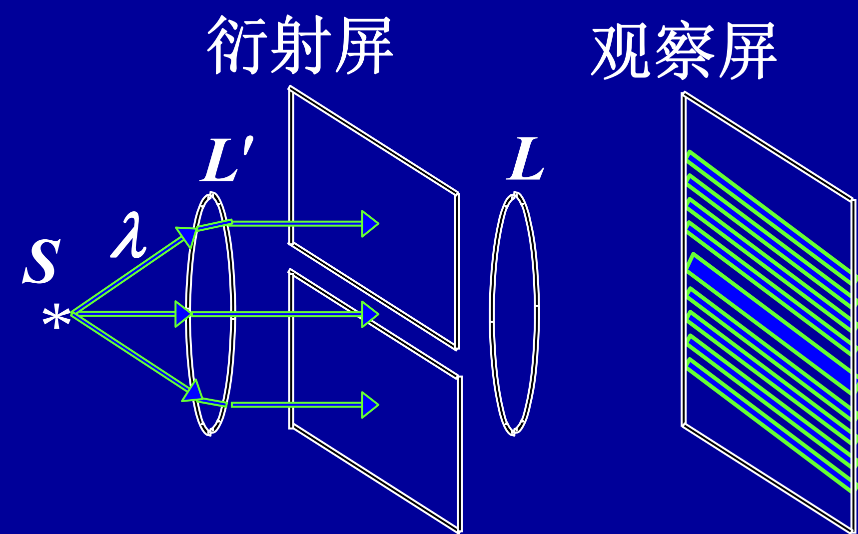
X 射线的衍射

§14.1 光的衍射现象

一. 光的衍射现象

光在传播路径中遇到障碍物时，能绕过障碍物边缘而进入几何阴影传播，并且产生强弱不均的光强分布，这种现象称为光的衍射。

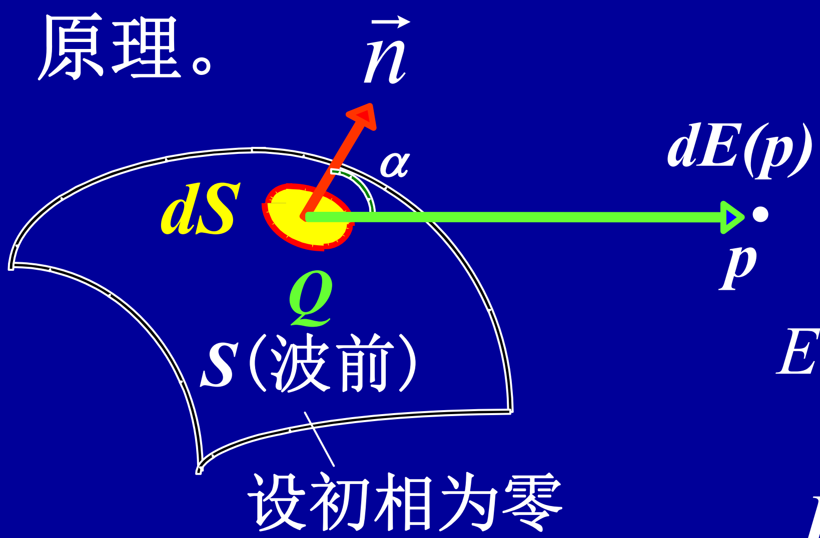




二. 惠更斯-菲涅耳原理

惠更斯原理：媒质中波所传到的各点都可看作是发射子波的波源，其后任一时刻，这些子波的包迹就决定新的波阵面。

菲涅耳指出：波阵面上各点发出的子波在空间相遇时会产生干涉。“子波相干叠加”——惠更斯-菲涅耳原理。



$$dE = C\frac{K(\alpha)}{r}\cos\left(\omega t - \frac{2\pi r}{\lambda}\right)dS$$

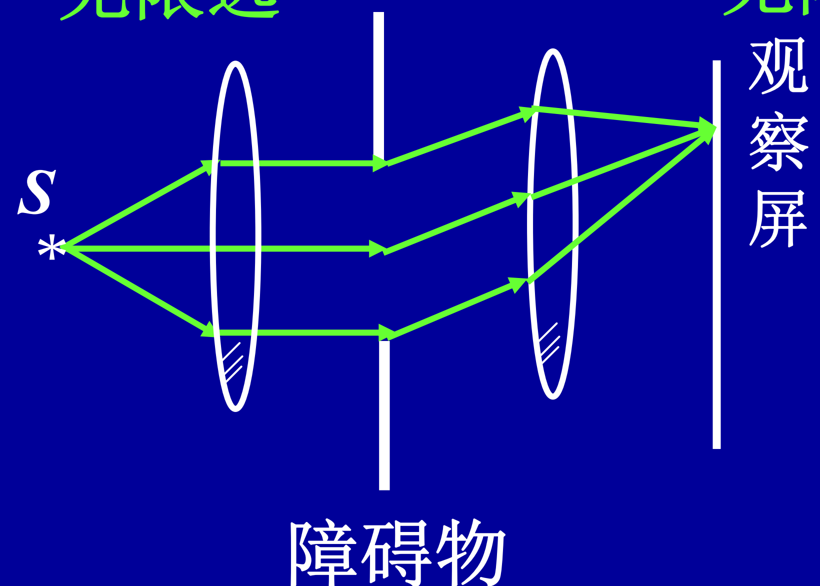
P点的合振动：

$$E = \int_S dE = \int_S C\frac{K(\alpha)}{r}\cos\left(\omega t - \frac{2\pi r}{\lambda}\right)dS$$

P点的合成光强：$I = \overline{E^2}$

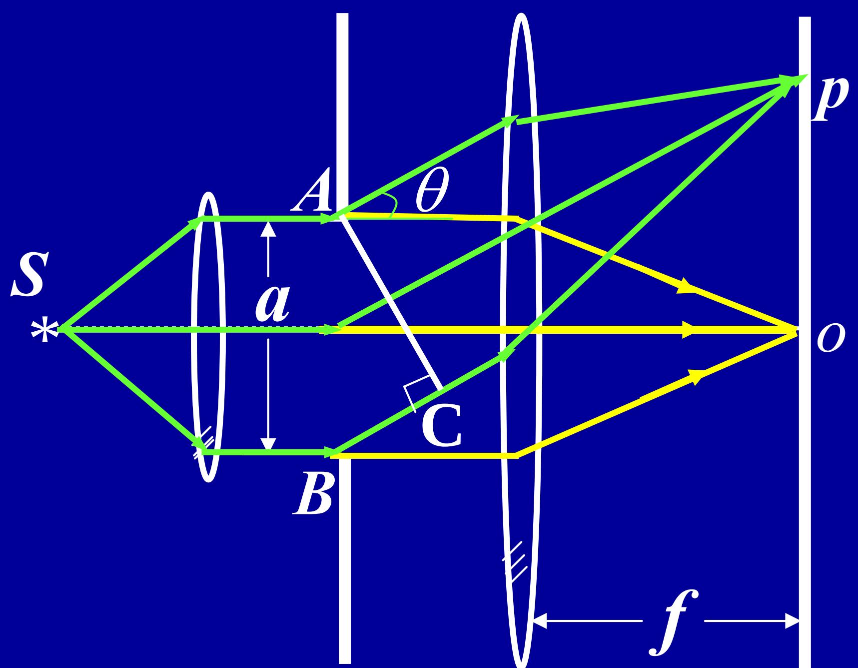
衍射的分类

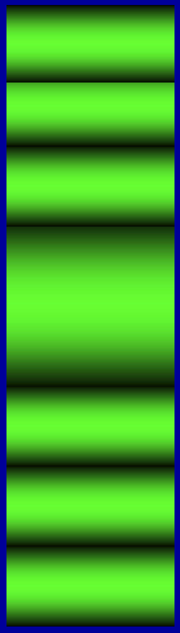
	光源	障碍物	观察屏
菲涅耳衍射：	有限远		有限远
	有限远		无限远
	无限远		有限远
夫琅和费衍射：	无限远		无限远



§14.2 单缝的夫琅和费衍射

设平行单色光垂直入射，当衍射角θ=0时，平行于主轴的光线都会聚于o点，且没有光程差，故它们相互干涉加强，在o点处形成一平行于缝的明条纹，称为中央明纹。





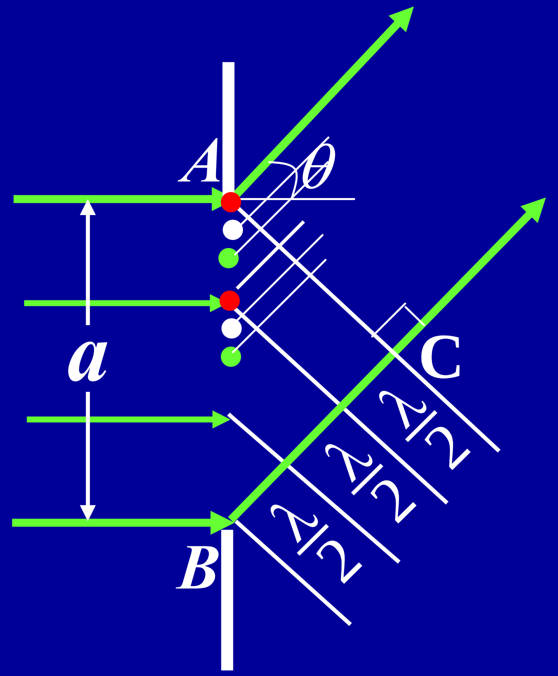
对衍射角θ，两边缘光线*A*、*B*的光程差是：

$$\delta = BC = a\sin\theta$$

*A*点为什么有两条光线？

菲涅耳半波带法

作一系列相距$\lambda/2$且垂直于BC的平面，BC是$\lambda/2$的几倍，单缝相应就被分成等宽的几个窄带，这 个窄带称为菲涅耳半波带。



相邻波带上对应点发出的平行光线会聚时的光程差都是$\lambda/2$，因而总是相干相消。

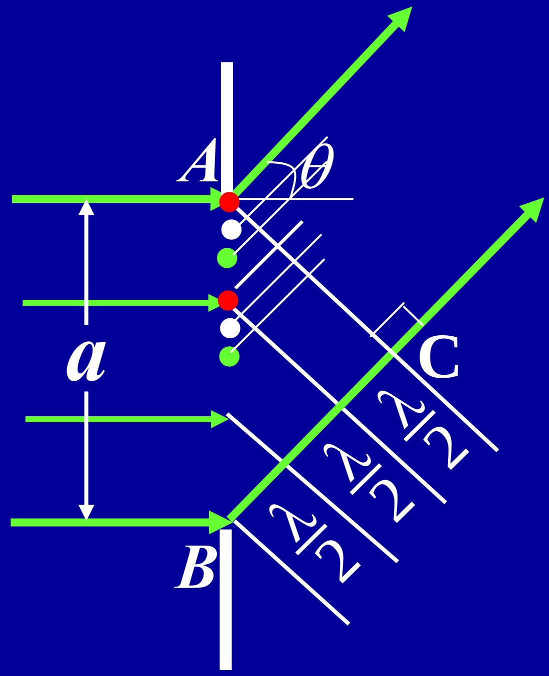
由此得出结论：两个相邻波带所发出的光线会聚于屏幕上时全部相干相消。

如果单缝被分成偶数个波带，相邻波带成对相干相消，结果是单缝上发出的光线全部相干相消，屏幕上对应点出现暗纹。

如果单缝被分成奇数个波带，相邻波带相干相消的结果，还剩下一个波带的作用，于是屏幕上对应点出现亮纹。

θ是变量吗?

$$\boxed{\delta = a\sin\theta}$$



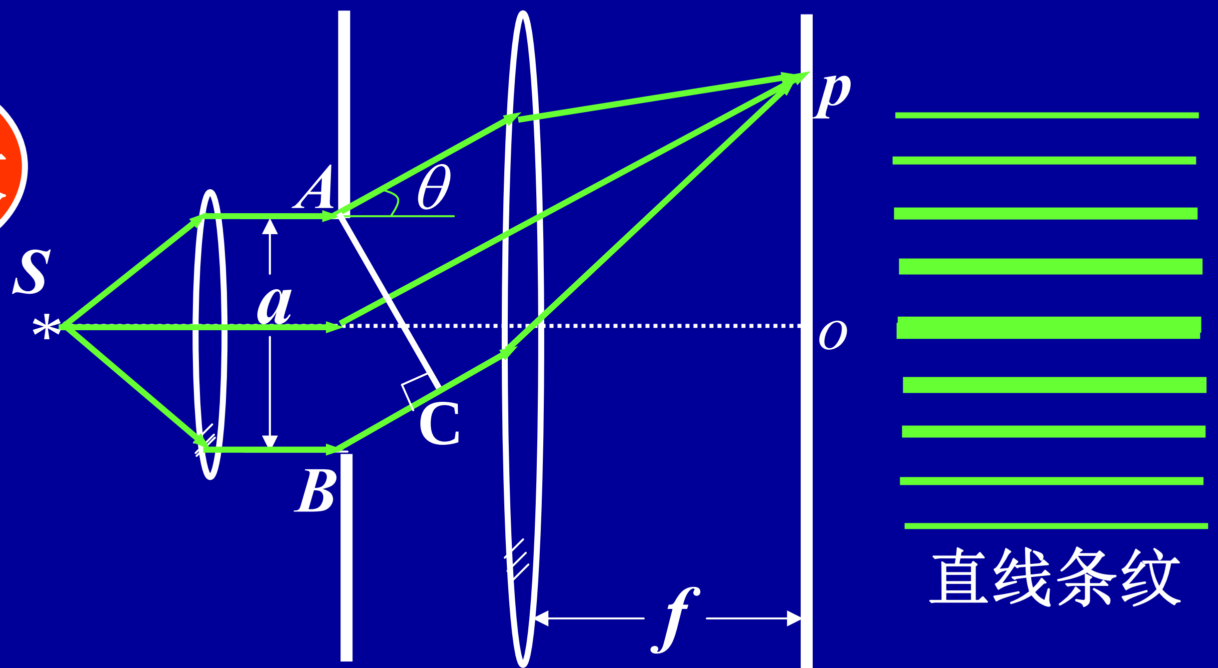
综上所述，单缝衍射明暗纹的中心位置是:

$$a\sin\theta = \pm 2k\frac{\lambda}{2}$$ 暗纹 (k=1,2,3,…)

$$a\sin\theta = \pm(2k+1)\frac{\lambda}{2}$$ 亮纹 (k=1,2,3,…)

$$\theta = 0$$ 零级(中央)亮纹

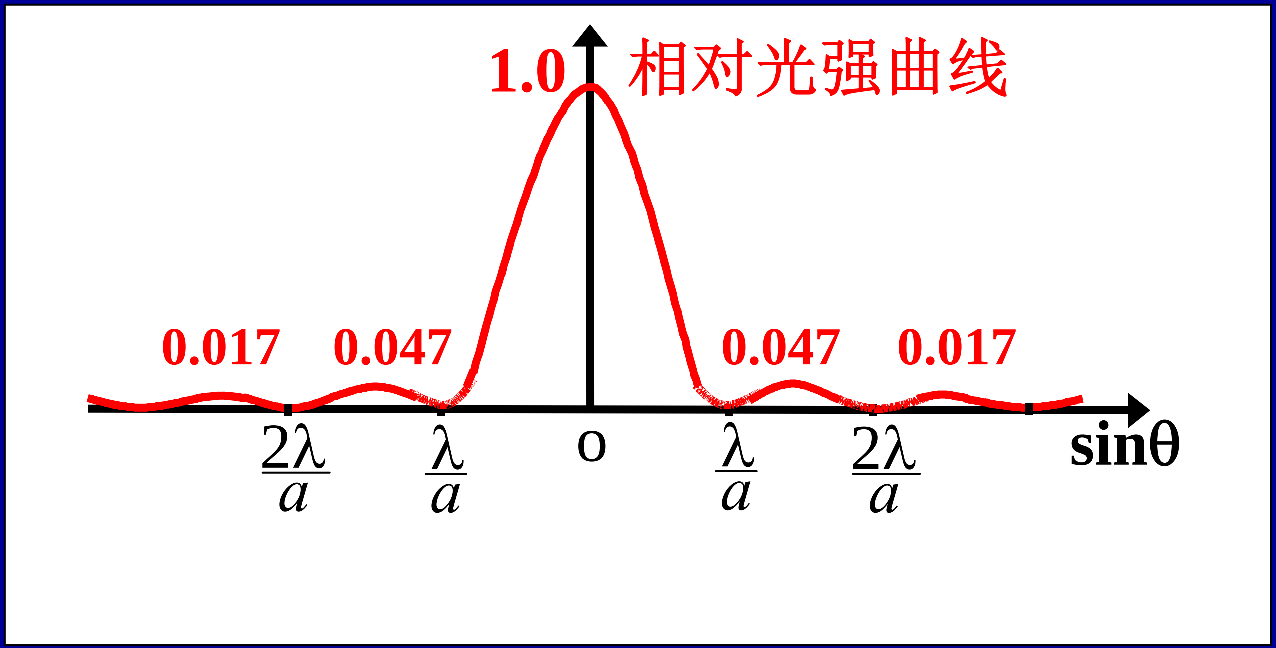
波带数



注意:

1. k=1...
2. 明暗…
3. ± ...
4. 波带数

1. 光强分布



中央明纹又亮又宽(约为其它明纹宽度的2倍);

中央两旁，明纹的亮度随级次的增大迅速减小。

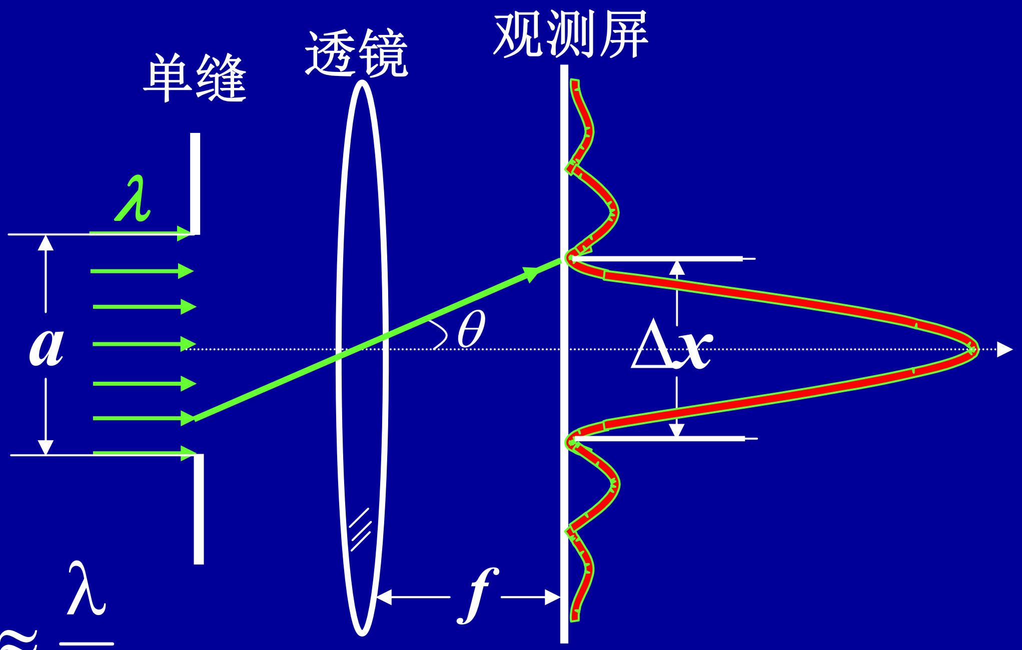
这是由于k越大，分成的波带数越多，而未被抵消的波带面积越小的缘故。 $a\sin\theta = k\lambda$,暗纹

2. 中央亮纹宽度

中央亮纹范围：中央两旁两个第一级暗纹间的区域，即

$$-\lambda < a\sin\theta < \lambda$$

(θ很小，有$\sin\theta \approx \theta$)



中央亮纹半角宽度： $\theta \approx \dfrac{\lambda}{a}$

中央亮纹的线宽度：

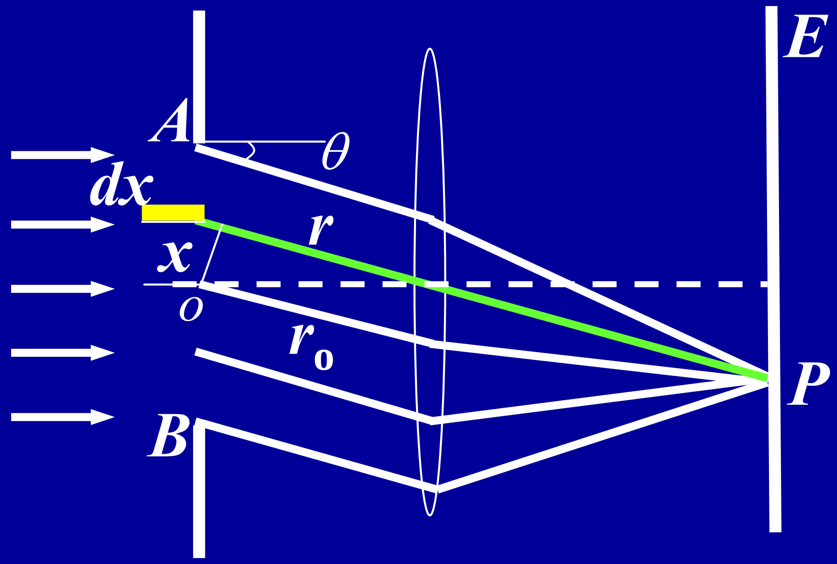
$$\Delta x_{半} = f tg\theta = f\sin\theta = f\frac{\lambda}{a}$$

$$\boxed{\Delta x = \frac{2f\lambda}{a}}$$

3. 用惠更斯-菲涅耳原理求光强分布

设窄带dx的光振动为：

$$\mathrm{d}E = A_o \frac{dx}{a} \cos \omega t$$



坐标为x 处的窄带 (子波源)

在P点产生的光振动为：

$$\mathrm{d}E = A_o \frac{dx}{a} \cos(\omega t - \frac{2\pi r}{\lambda})$$

用r_0表示从单缝中心o点到P点的光程，则$r=r_0+x\sin\theta$，上式变为：

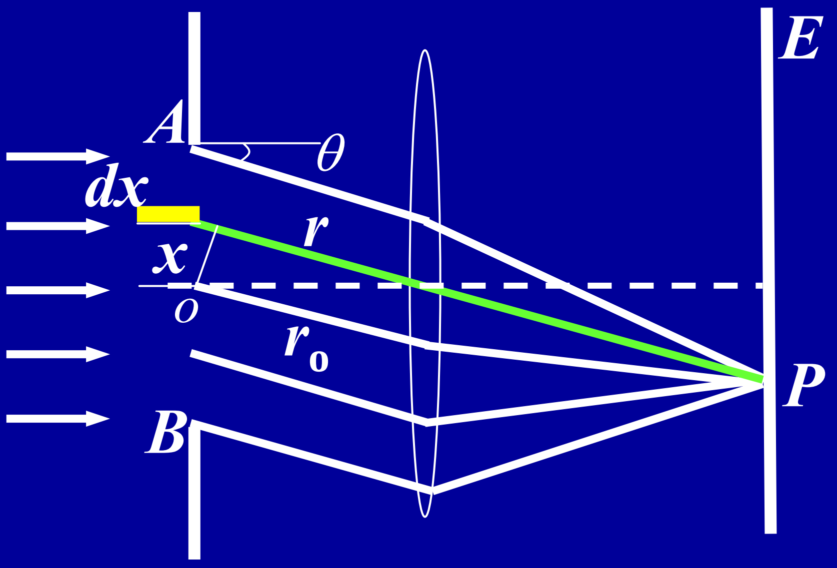
$$\mathrm{d}E = A_o \frac{dx}{a} \cos[2\pi \frac{x\sin\theta}{\lambda} + (2\pi \frac{r_o}{\lambda} - \omega t)]$$

将上式对整个缝宽积分，就得P点的合振动：

$$E=\int_{-\frac{a}{2}}^{+\frac{a}{2}} A_o\frac{dx}{a}\cos[2\pi\frac{x\sin\theta}{\lambda}+(2\pi\frac{r_o}{\lambda}-\omega t)]$$

$$=A_o\frac{\sin(\frac{\pi a}{\lambda}\sin\theta)}{\frac{\pi a}{\lambda}\sin\theta}\cos(2\pi\frac{r_o}{\lambda}-\omega t)$$

令 $u=\frac{\pi a}{\lambda}\sin\theta$



P点合振动的振幅为:

$$A=A_o\frac{\sin u}{u}$$

$$A = A_o \frac{\sin u}{u} \qquad u = \frac{\pi a}{\lambda} \sin\theta$$

则P点的光强可表示为：

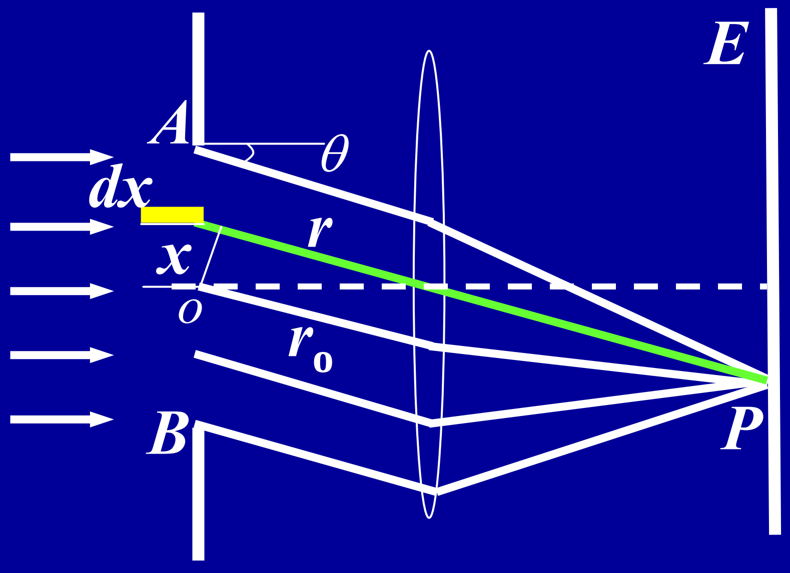
$$I = A^2 = I_o \left(\frac{\sin u}{u} \right)^2$$

(1) 当$\theta=0$时，u=0，$I=I_o$，光强最大，此即中央(零级)明纹中心。

(2) $u = \frac{\pi a}{\lambda}\sin\theta = \pm k\pi$,

时，即$a\sin\theta=\pm k\lambda$ (k=1,2...)，

I=0，此即暗纹中心的条件。



$$I = A^2 = I_o\left(\frac{\sin u}{u}\right)^2 \qquad u = \frac{\pi a}{\lambda}\sin\theta$$

(3) 令 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}\left(\frac{\sin u}{u}\right)^2 = 0$，可求得各级亮纹的条件为：

$$\mathrm{tg}u = u$$

$$a\sin\theta_1 = \pm 1.43\lambda \approx \pm\frac{3}{2}\lambda, \quad I_1 = 0.0472 I_o$$

$$a\sin\theta_2 = \pm 2.46\lambda \approx \pm\frac{5}{2}\lambda, \quad I_2 = 0.0165 I_o$$

……

即 $a\sin\theta \approx \pm(2k+1)\frac{\lambda}{2}$

例2-1 波长为λ的单色光垂直入射到一狭缝上，若第一级暗纹对应的衍射角为30°，求狭缝的缝宽及对应此衍射角狭缝的波阵面可分为几个半波带。

解： 由单缝的暗纹条件：

$$a\sin\theta = 2k\frac{\lambda}{2} = k\lambda$$

k=1，θ=30°，算得：a=2λ；(半)波带数=2k=2

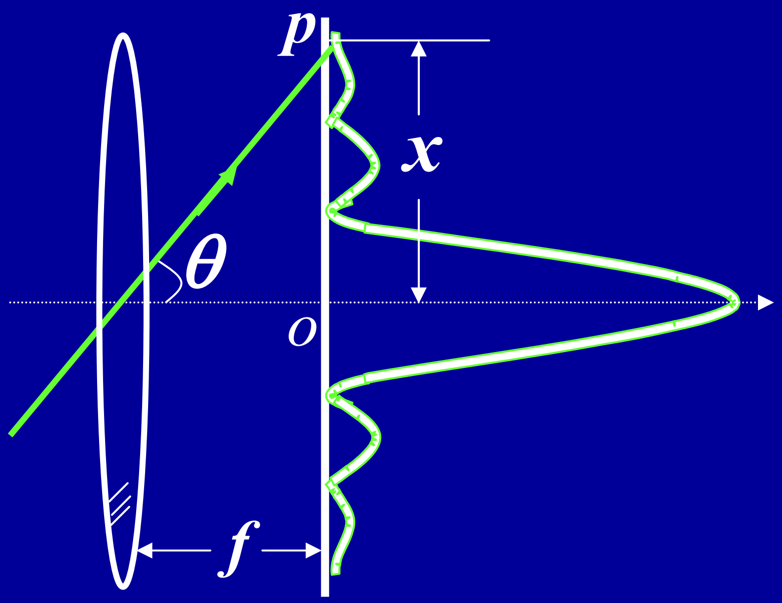
若不知某处是明纹还是暗纹，则计算波带数的方法是：

$$(\text{半})\text{波带数} = \frac{a\sin\theta}{\lambda/2} = 2$$

例 2-2 平行单色光垂直入射在缝宽a=0.15mm的单缝上，缝后透镜距f =400mm。在焦平面上的屏幕上测得中央明纹两侧的两条第三级暗纹间的距离d=8mm。求：(1) 入射光的波长；(2) 中央明纹的线宽度；(3) 第二级暗纹到透镜焦点的距离。

解：(1) 第三级暗纹位置： $a\sin\theta=3\lambda$

$$\frac{x}{f}=tg\theta \xlongequal{\theta\text{很小}} \sin\theta$$



$$x_3=\frac{3f\lambda}{a},\ d=2x_3=\frac{6f\lambda}{a}$$

$$\therefore \lambda=\frac{da}{6f}$$ =5000Å

a=0.15mm， f=400mm，λ=5000Å

(2) 中央明纹的线宽度:

$$\Delta x=\frac{2f\lambda}{a}=2.67mm$$

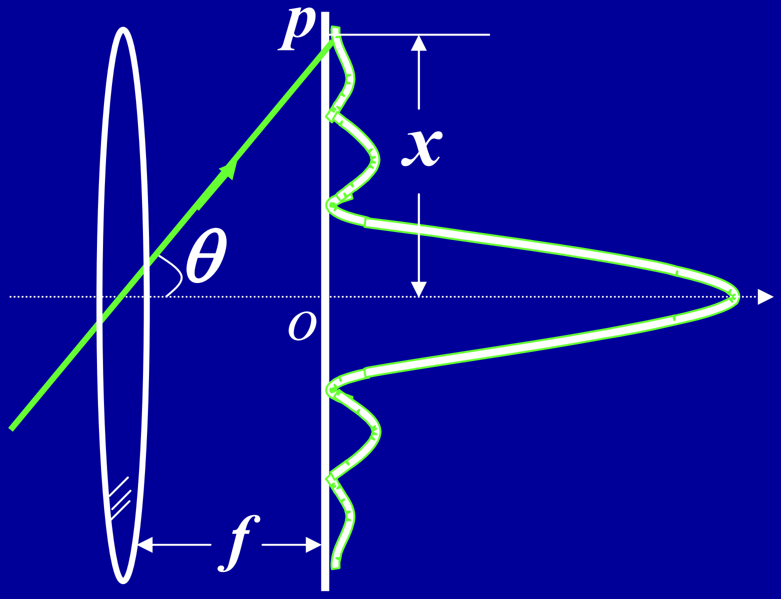
(3) 第二级暗纹到透镜焦点的距离

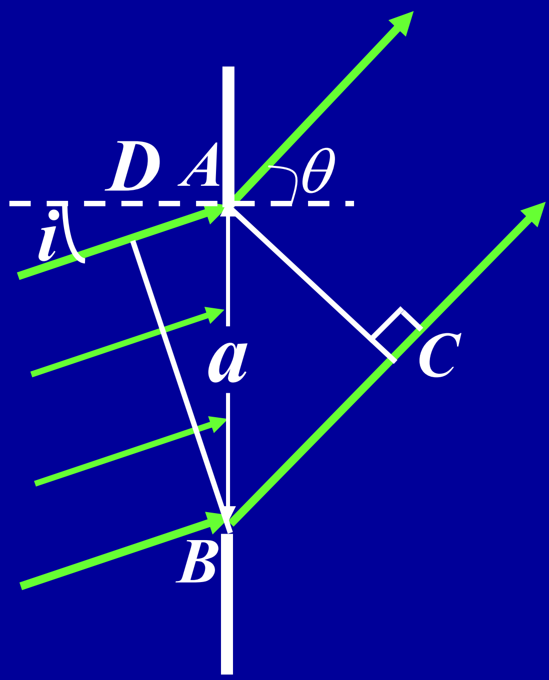
第二级暗纹位置： $a\sin\theta=2\lambda$

$$\frac{x}{f}=tg\theta \overset{\theta很小}{=\!=} \sin\theta$$

第二级暗纹到焦点的距离:

$$x=\frac{2f\lambda}{a}=2.67mm$$





当光线斜入射时，

两边缘光线*A*、*B*的光程差是：

$\delta = BC - DA = a\sin\theta - a\sin i$

$$\delta = a(\sin\theta - \sin i)$$

$$= \pm 2k\frac{\lambda}{2}$$ 暗纹，*k*=1,2,3

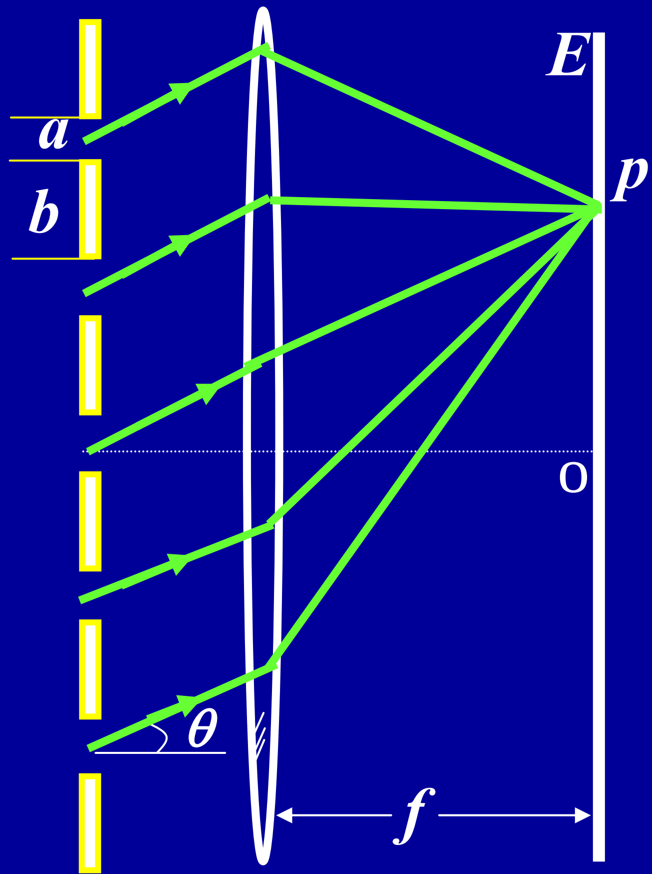
$$\delta = a(\sin\theta - \sin i) \quad = \pm(2k+1)\frac{\lambda}{2}$$ 明纹，*k*=1,2,3

§14.3 光栅衍射

一. 光栅

大量等宽、等间距的平行狭缝的集合—光栅。

实用的光栅每厘米有成千上万条狭缝。



a —透光缝宽度；

b —不透光部分宽度；

$d=(a+b)$ —光栅常数。

光栅分为：

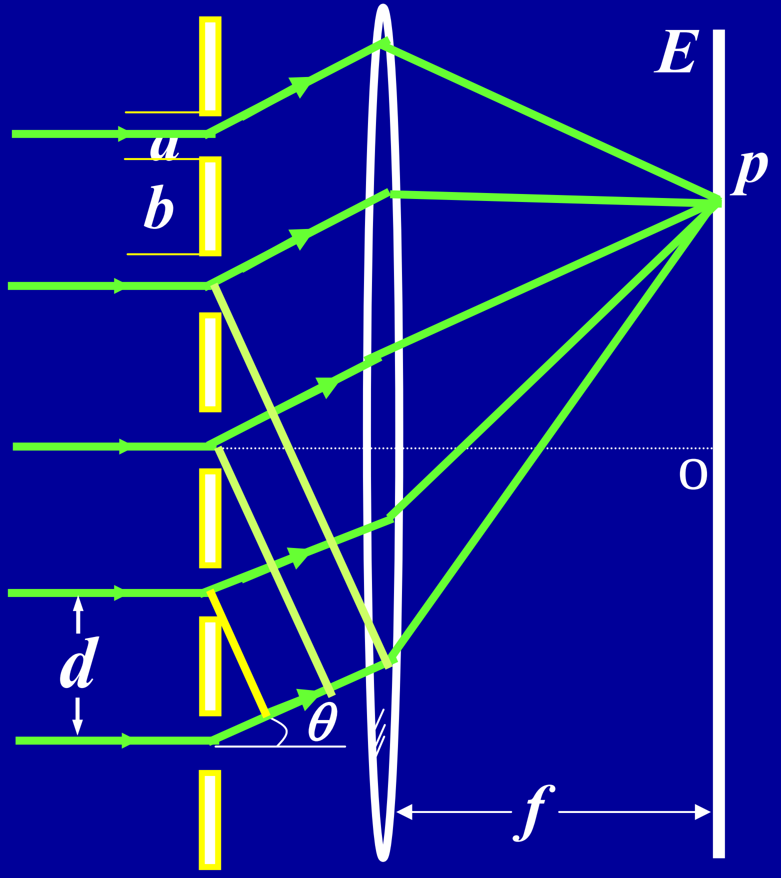
透射光栅

反射光栅

二. 透射光栅

设平行光线垂直入射。每条狭缝有衍射，缝间光线还有干涉，可证明：

屏上合成光强 =单缝衍射光强×缝间干涉光强



对于缝间干涉，两相邻狭缝光线的光程差：

$d\sin\theta = k\lambda$，主极大(亮纹)

$(k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$

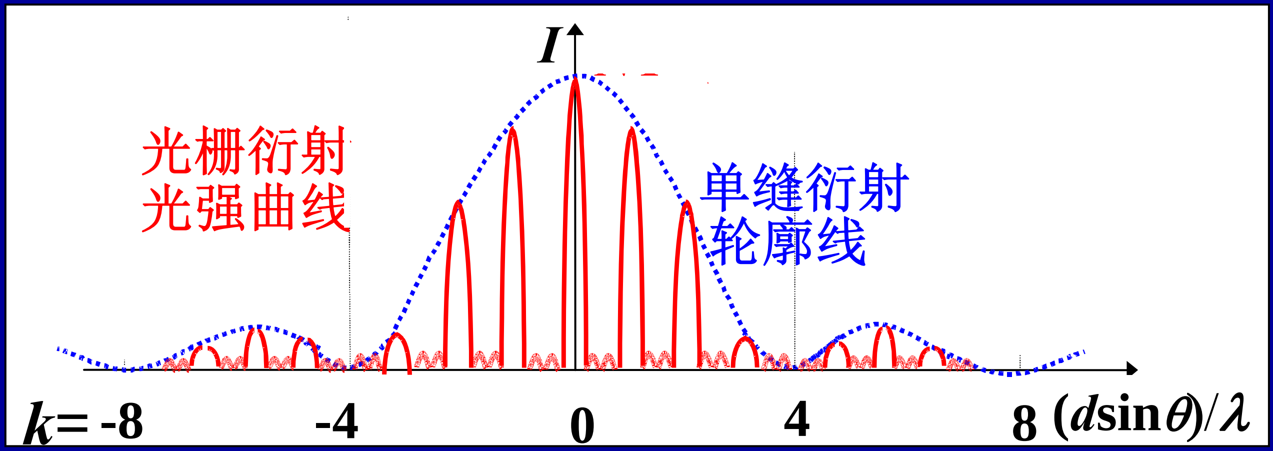
上式称为光栅方程

$d\sin\theta = k\lambda$，主极大(亮纹)（$k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$）

1. 光栅方程的物理意义：

光栅方程是衍射光栅合成光强出现亮纹(主极大)的必要条件。

屏上合成光强 =单缝衍射光强×缝间干涉光强



光栅衍射的光强分布具有下述特点：亮纹又亮又细，中间隔着较宽的暗区(即在黑暗的背景上显现明亮细窄的谱线)。这些谱线的亮度受到单缝衍射因子的调制。

2. 谱线的缺级

$d\sin\theta = k\lambda$,　　(光栅)亮纹(k=0,±1, ±2,…)

$a\sin\theta = k'\lambda$,　　(单缝)暗纹(k=±1, ±2,…)

则缺的级次为:

$$\boxed{k = \frac{d}{a}k'} \quad ,(k' = 1,2,...)$$

例：(1) $b=a$,　$d=a+b=2a$, 则$k=2k'=2,4,6,\ldots$级缺。

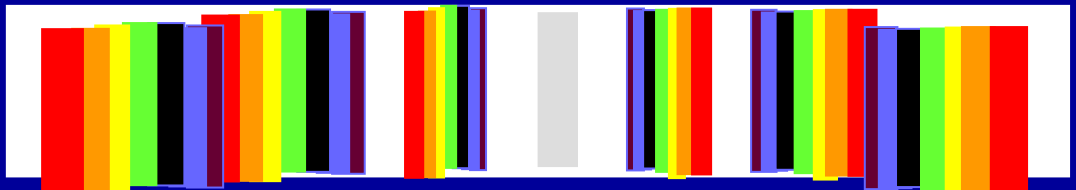
(2) $b=2a$, $d=a+b=3a$, 则$k=3k'=3,6,9,\ldots$级缺。

三. 光栅光谱

如果用白光照射光栅，由光栅方程

$d\sin\theta = k\lambda$，亮纹(k=0,±1, ±2,…)

可知，同一级谱线中，不同波长的谱线出现在不同的θ角处(中央零级除外)，由中央向外按波长由短到长的次序分开排列，形成颜色的光带—光栅光谱。这就是光栅的色散特性。



四. 光谱级的重叠

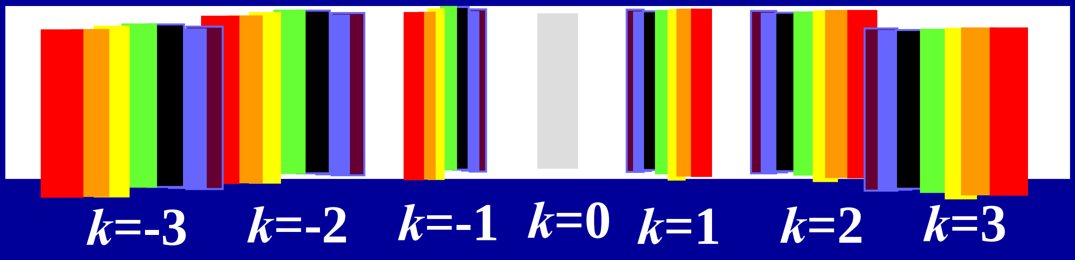
如果不同波长λ_1，λ_2同时满足：

$$d\sin\theta = k_1\lambda_1 = k_2\lambda_2$$

表明：λ_1 的k_1级和λ_2的k_2级同时出现在一个θ 角处，即λ_1和λ_2的两条谱线发生了重叠，从而造成光谱级的重叠。

在可见光范围内，第二、三级光谱一定会发生重叠。级次愈高，重叠愈复杂。

如：$d\sin\theta = 3\times 4000\mathring{A} = 2\times 6000\mathring{A}$



例 3-1 波长λ=6000Å单色平行光垂直照射光栅，发现两相邻主极大分别出现在$\sin\theta_1=0.2$和$\sin\theta_2=0.3$处，而第4级缺级。求：(1) 光栅常数d=？(2) 最小缝宽a=？(3) 屏上实际呈现的全部级别和亮纹条数。

解：(1) $d\sin\theta_1=k\lambda$， $d\sin\theta_2=(k+1)\lambda$

于是求得光栅常数：

$$d=\frac{\lambda}{\sin\theta_2-\sin\theta_1}=10\lambda=6\times10^{-6}m$$

(2) 因第4级缺级，由缺级公式：

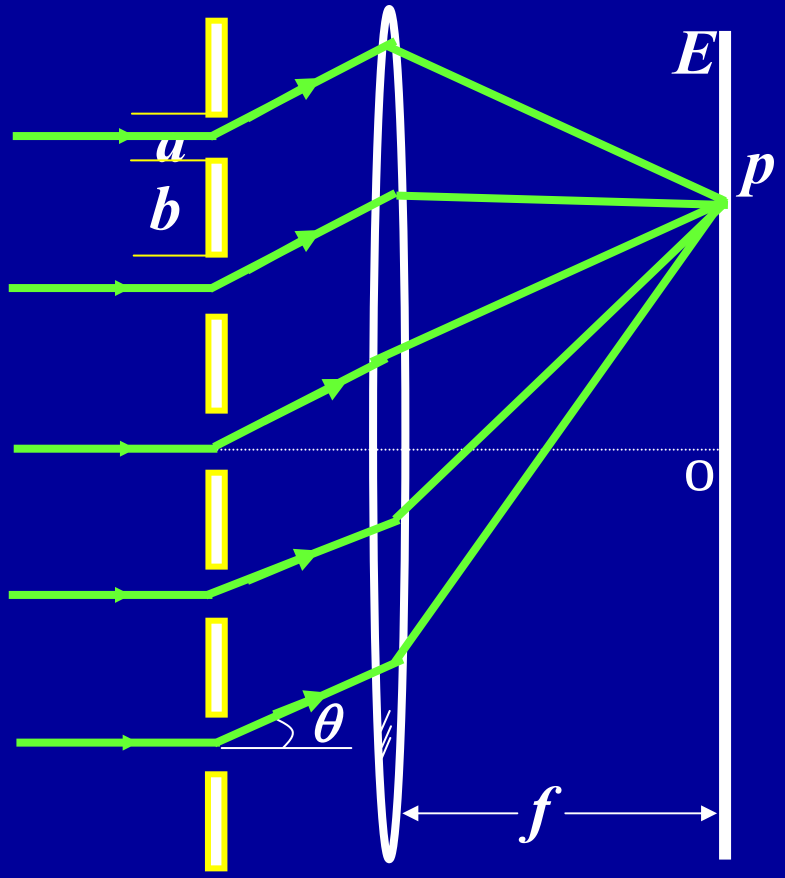
$k=\dfrac{d}{a}k'=4$，取$k'=1$(因要a最小)

求得：$a=d/4=1.5\times10^{-6}m$

(3) 屏上实际呈现的全部级别和亮纹条数:

由光栅方程： $d\sin\theta=k\lambda$

最大k对应$\theta=90°$，于是 $k_{max}=d/\lambda=10$



缺级：$d=6\times10^{-6}m$，

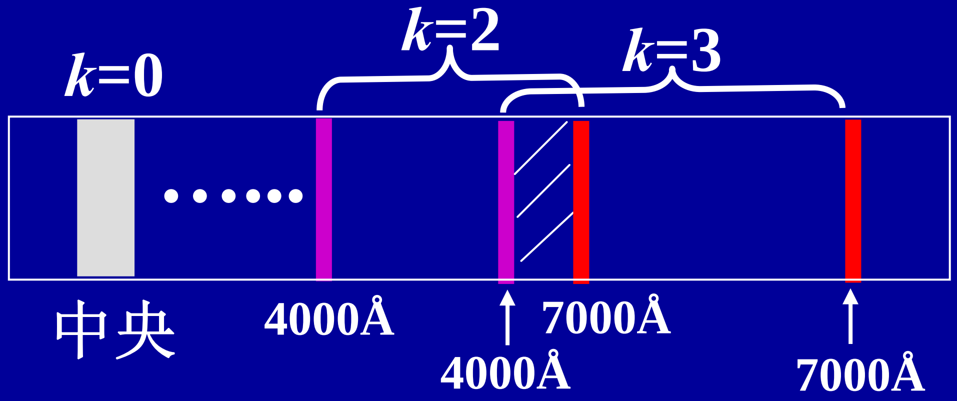
$a=1.5\times10^{-6}m$

$$k=\frac{d}{a}k'=4k'=4,8$$

屏上实际呈现：0，±1，±2，±3，±5，±6，±7，±9共8级，15条亮纹(±10在无穷远处，看不见)。

例3-2 用白光(λ=4000Å~ 7000Å)垂直照射一光栅常数$d=1.2\times10^{-5}m$的光栅，透镜焦距f=0.6m，求第2级光谱与第3级光谱的重叠范围。

解:



先求重叠的波长范围，再求重叠区域的宽度。

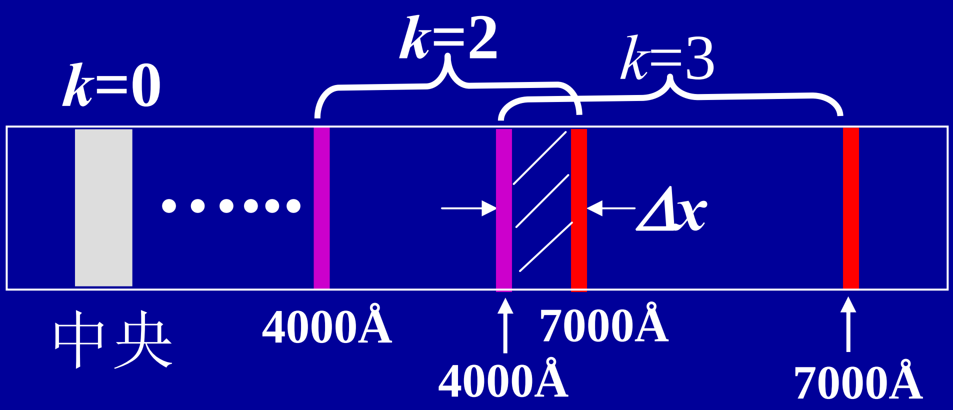
由公式： $d\sin\theta=k_1\lambda_1=k_2\lambda_2$

第2级光谱被第3级光谱重叠的波长范围

6000Å~ 7000Å

第3级光谱被第2级光谱重叠的波长范围：

4000Å~ 4667Å

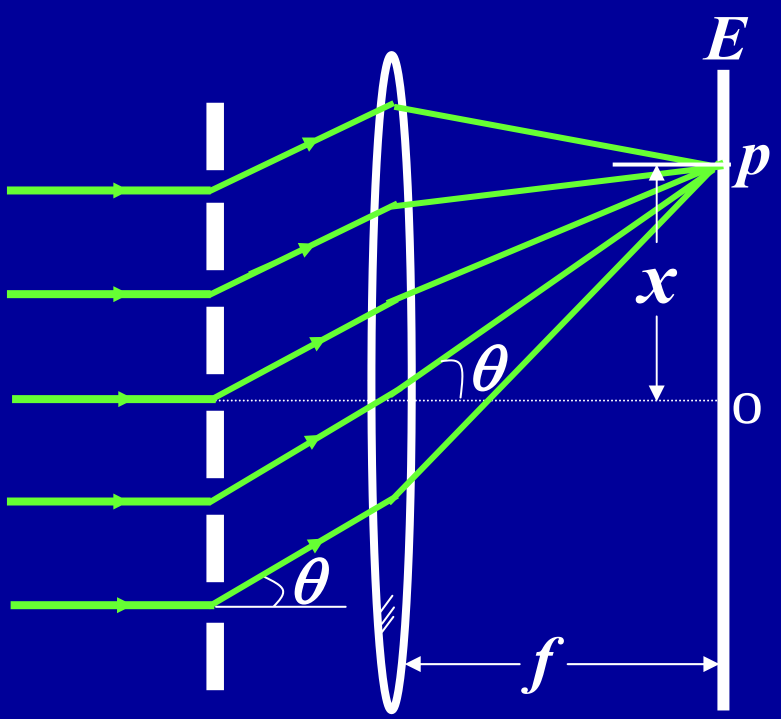


重叠区域的宽度：

Δx=4000Å的第3级与 7000Å的第2级谱线间的距离。

$d\sin\theta_1=3\lambda_1$， λ_1=4000Å

$d\sin\theta_2=2\lambda_2$， λ_2=7000Å



因θ很小，所以 $x/f=tg\theta\approx\sin\theta$

代入可得$d.x_1/f=3\lambda_1$，$d.x_2/f=2\lambda_2$

重叠区域的宽度：$\Delta x=x_2-x_1=f(2\lambda_2-3\lambda_1)/d$=10$mm$

例3-4　光栅常数$d=2.1\times10^{-6}m$，缝宽$a=0.7\times10^{-6}$，用波长$\lambda=5000\mathring{A}$的光、以$i=30°$的入射角照射，求能看见几级、几条谱线。法线逆时针转向光线，角度为正

解：光线斜入射时，光栅方程应写为：

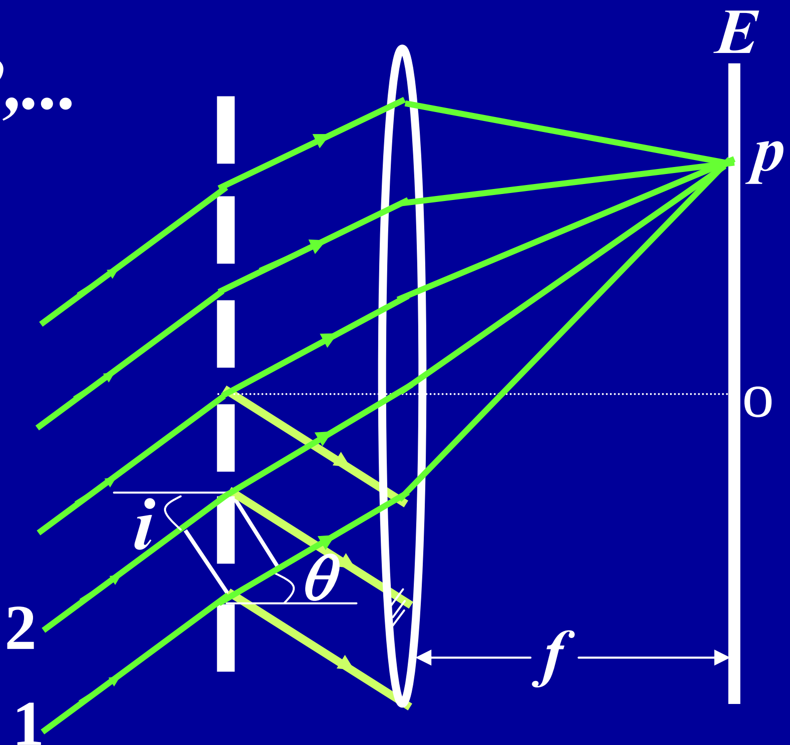
$$d(\sin\theta-\sin30)=k\lambda,\ k=0,\pm1,\pm2,...$$

当$\theta=90°$时，$k=2.1=2$

当$\theta=-90°$时，$k=-6.3=-6$

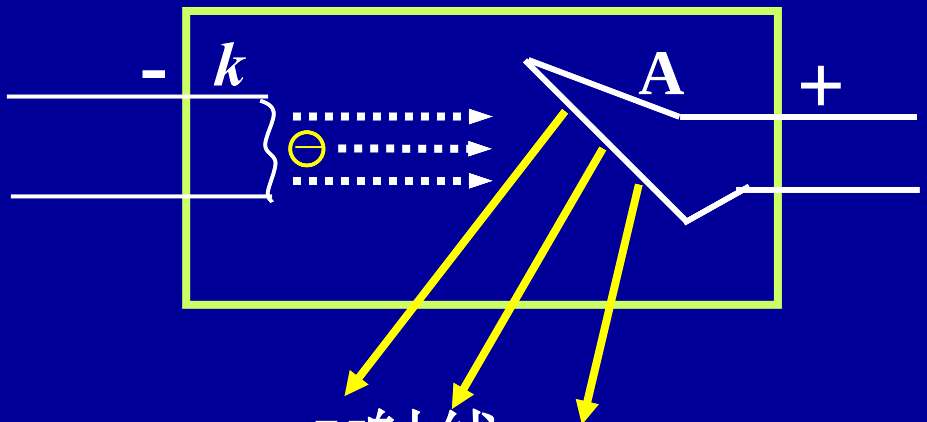
缺级：$k=\dfrac{d}{b}k'=3k'=3,6$

能看见 2, 1, 0, -1, -2, -4, -5，共5级，7条谱线。



§14.5 X射线的衍射

*X*射线是伦琴(W.C.RÖntgen)在1895年发现的。



*X*射线

*X*射线不受电场和磁场的影响，说明它不是带电粒子流。

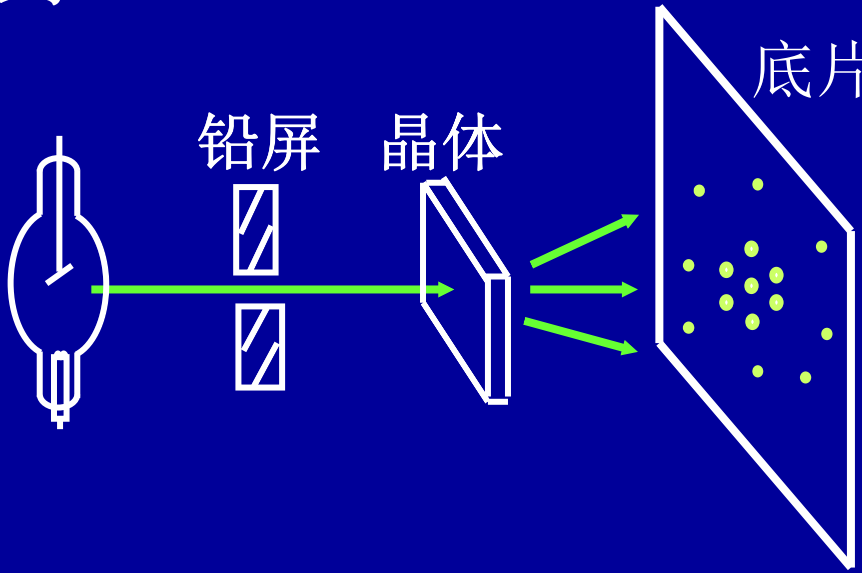
但能使一些物质发荧光，使照相底片感光，使空气电离，产生一些生物和化学反应。

科学家认为：*X*射线本质上和可见光一样，是一种波长极短(几埃到几十埃)的电磁波。

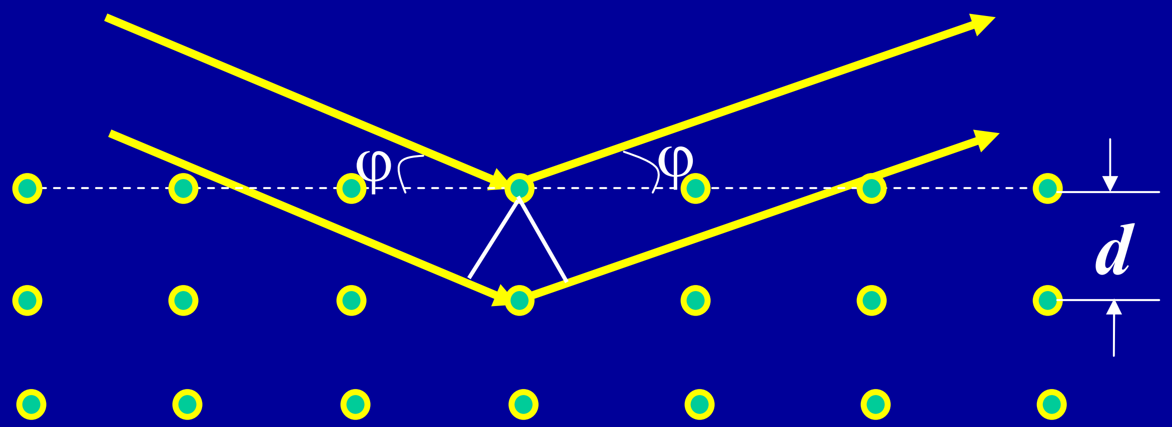
*X*射线既然是一种电磁波动，就应当具有衍射现象。由于*X*射线波长极短，普通光栅无能为力。

1912年，劳厄突然想到：

构成晶体的粒子是整齐排列的，粒子间的距离约为1Å，它也许就是观察*X*射线衍射的一个极好的光栅。



1913年，布喇格父子又提出了一种观察X射线衍射的方法。



相长条件：$2d\sin\varphi = k\lambda,\quad k=1,2,\ldots$

—— 布喇格公式，d —— 晶格常数

由于劳厄和布喇格父子在研究X射线晶体衍射方面的突出贡献获得了诺贝尔物理学奖。

小结

一、单缝衍射明暗纹的中心位置

$$a\sin\theta = \pm 2k\frac{\lambda}{2}$$ 暗纹 (k=1,2,3,…)

$$a\sin\theta = \pm(2k+1)\frac{\lambda}{2}$$ 亮纹 (k=1,2,3,…)

$$\boldsymbol{\theta = 0}$$ 零级(中央)亮纹

$$\frac{x}{f} = tg\theta$$

波带数

二、光栅衍射

$d\sin\theta = k\lambda$，　(光栅)亮纹(k=0,±1, ±2,…)

$a\sin\theta = k'\lambda$，　(单缝)暗纹(k=±1, ±2,…)

$$\boxed{k = \frac{d}{a}k'},\ (k' = 1,2,\ldots)$$

$x/f = tg\theta \approx \sin\theta$