得 分

一、简答题（共 40 分，共 4 题，每题 10 分）

1、**参考答案**：假定人群的高度服从正态分布N(μ, σ^2), 计算概率

$$\mathbf{0.01} \geq P\{X \geq h\} = P\{\frac{X-\mu}{\sigma} \geq \frac{h-\mu}{\sigma}\} = \mathbf{1} - \Phi(\frac{h-\mu}{\sigma})$$

解得 $\Phi(\frac{h-\mu}{\sigma}) \geq \mathbf{0.99}$，根据$\Phi(x)$ 的单调性,有 $\frac{h-\mu}{\sigma} \geq \mathbf{2.33}$ 确定出参数μ和σ^2后,可解出 $h \geq \mathbf{2.33}\sigma + \mu$.

2、

参考答案 既非连续型随机变量,也非离散型随机变量.

离散型随机变量至多仅取可列多个值,但 X 可取区间(0, 1)中的任意值, 对任意$a,b \in (0,1)$且$a<b$,有

$$P\{a \leq X < b\} = F(b) - F(a) = \frac{1+b}{2} - \frac{1+a}{2} = \frac{b-a}{2} > 0$$

连续型随机变量的分布函数处处连续，但此分布函数在 x=0 处不连续；

或 连续型随机变量对任意$x \in R$, $P\{X = x\} = 0$,但

$$P\{\mathrm{X} = x\} = F(x) - F(x-0) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & x = 0, \\ 0, & x \neq 0. \end{cases}$$

3.

参考答案 n 重贝努里试验具有独立性与可重复性，仅关心两个可能结果：A 与 $\overline{A}$

设$P(A) = p$，A_i表示第 i 次试验事件 A 发生。

$$P\{Y=k\} = P\{\overline{A}_1\overline{A}_2\cdots\overline{A}_{k-1}A_k\} = P(\overline{A}_1)P(\overline{A}_2)\cdots P(\overline{A}_{k-1})P(A_k) = (1-p)^{k-1}p，\ k=1,2,\cdots,9$$ （8分）

$$P\{Y=10\} = P[\{\overline{A}_1\overline{A}_2\cdots\overline{A}_9A_{10}\} \cup \{\overline{A}_1\overline{A}_2\cdots\overline{A}_9\overline{A}_{10}\}] = (1-p)^9p + (1-p)^{10} = (1-p)^9$$ （10 分）

4.

参考答案：

写出公式

从中任取 2 个事件满足$P(A_iA_j) = P(A_i)P(A_j)$有C_4^2种取法；从中任取 3 个事件有C_4^3种取法；任取 4 个事件有C_4^4种取法。

因为$C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + ... + C_n^n = 2^n$，

所以$C_4^2 + C_4^3 + C_4^4 = 2^4 - C_4^1 - C_4^0 = 2^4 - 4 - 1.$

而要说明随机变量(X_1,X_2,X_3,X_4)相互独立，因为若已知分布函数满足

$F(x_1,x_2,x_3,x_4)=F_1(x_1)F_2(x_2)F_3(x_3)F_4(x_4)$，则：

任取 2 个随机变量X_i,X_j均有X_i,X_j相互独立，即

$$F(x_ix_j)=\lim_{\substack{x_k\to+\infty\\x_r\to+\infty}}F(x_i,x_j,x_k,x_r)=F_i(x_i)F_j(x_j)F_k(+\infty)F_r(+\infty)=F_i(x_i)F_j(x_j).$$

同理任取 3 或 4 个随机变量均有如上类似结果成立。故(X_1,X_2,X_3,X_4)相互独立仅需要知道$F(x_1,x_2,x_3,x_4)=F_1(x_1)F_2(x_2)F_3(x_3)F_4(x_4)$一个式子即可。

二、

解： 设A表示通过检验；B_i表示 10 件产品中有i件次品，$i=0,1,2$。B_0、B_1。B_2构成有限划分

$$P(B_0)=0.1,P(B_1)=0.3,P(B_2)=0.6,P(A\mid B_i)=\frac{C_{10-i}^5}{C_{10}^5},i=0,1,2$$

根据全概率公式有：

$$P(A)=\sum_{i=0}^{2}P(\mathrm{B}_i)P(A|B_i)=0.1\times\frac{C_{10}^5}{C_{10}^5}+0.3\times\frac{C_9^5}{C_{10}^5}+0.6\times\frac{C_8^5}{C_{10}^5}=\frac{23}{60}\approx0.3833$$

当$i=0$时，有

$$P(B_0|A)=\frac{P(B_0A)}{P(A)}=\frac{P(B_0)P(A|B_0)}{P(A)}=\frac{0.1\times1}{23/60}=\frac{6}{23}\approx0.2609\ldots$$

三、

解：（1）由于$f_X(x)=\begin{cases}0.5, & 0\le x\le 2\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$，$f_Y(y)=\begin{cases}2e^{-2y}, & y>0\\ 0, & y\le 0\end{cases}$，且$X,Y$相互独立，故

$f(x,y)=\begin{cases}e^{-2y}, & 0\le x\le 2,y>0\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$，（6 分）方程$a^2+Xa+Y=0$有实根，则需要$X^2-4Y\ge0$，即

$Y \le \dfrac{X^2}{4}$，（9 分）故方程有实根的概率为

$$P\{Y \le \frac{X^2}{4}\} = \iint\limits_{y \le \frac{x^2}{4}} f(x,y)dxdy = \iint\limits_{y \le \frac{x^2}{4}} e^{-2y}dxdy = \int_0^2 dx \int_0^{\frac{x^2}{4}} e^{-2y}dy$$

$$= -\frac{1}{2}\int_0^2 (e^{-\frac{x^2}{2}} - 1)dx = 1 - \frac{1}{2}\int_0^2 e^{-\frac{x^2}{2}}dx = 1 - \sqrt{\frac{\pi}{2}}(\phi(2) - \phi(0)) = 1 - \sqrt{\frac{\pi}{2}}(\phi(2) - 0.5)$$ （12 分）

（2）$P\{X + 2Y \le 3\} = \iint\limits_{x+2y \le 3} f(x,y)dxdy$

$$= \int_0^2 dx \int_0^{\frac{3-x}{2}} e^{-2y}dy = \frac{1}{2}\int_0^2 (1 - e^{-3+x})dx = 1 - \frac{1}{2}e^{-1} + \frac{1}{2}e^{-3}$$