高斯消元法

kix6

December 14, 2017

引入

- 高斯消元法，又称高斯消去法，就是通过加减消元来不断消去某个未知数.

引入

- 高斯消元法，又称高斯消去法，就是通过加减消元来不断消去某个未知数.
- 可以用于解决这个问题:
  给出

$$a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \cdots + a_{1,n}x_n = b_1$$
$$\vdots$$
$$a_{m,1}x_1 + a_{m,2}x_2 + \cdots + a_{m,n}x_n = b_m$$

求出一组满足条件的 $[x_1, x_2, \cdots x_n]$，或声明无解.

算法

- 类比初中学过的解二元一次方程组的方法, 不难弄出一个方法.

算法

- 类比初中学过的解二元一次方程组的方法, 不难弄出一个方法.
- 首先只保留第 1 个式子中的 x_1, 于是可以用第一个式子与其它式子相加减, 然后变成

算法

- 类比初中学过的解二元一次方程组的方法, 不难弄出一个方法.
- 首先只保留第 1 个式子中的 x_1, 于是可以用第一个式子与其它式子相加减, 然后变成 这样

$$
\begin{aligned}
a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \cdots + a_{1,n}x_n &= b_1 \\
0 + a_{2,2}x_2 + \cdots + a_{2,n}x_n &= b_2 \\
&\vdots \\
0 + a_{m,2}x_2 + \cdots + a_{m,n}x_n &= b_m
\end{aligned}
$$

算法

- 类比初中学过的解二元一次方程组的方法, 不难弄出一个方法.
- 首先只保留第 1 个式子中的 x_1, 于是可以用第一个式子与其它式子相加减, 然后变成 这样

$$
\begin{gathered}
a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \cdots + a_{1,n}x_n = b_1 \\
0 + a_{2,2}x_2 + \cdots + a_{2,n}x_n = b_2 \\
\vdots \\
0 + a_{m,2}x_2 + \cdots + a_{m,n}x_n = b_m
\end{gathered}
$$

- 然后依次消去其他未知数.

算法

最后我们会消成这样子:

$$
\begin{aligned}
a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + a_{1,3}x3 + \cdots + a_{1,n}x_n &= b_1 \\
0 + a_{2,2}x_2 + a_{2,3}x3 + \cdots + a_{2,n}x_n &= b_2 \\
0 + 0 + a_{3,3}x3 + \cdots + a_{3,n}x_n &= b_3 \\
&\vdots \\
0 + 0 + 0 + \cdots + a_{n,n}x_n &= b_n \\
0 + 0 + 0 + \cdots + 0 &= b_{n+1} \\
&\vdots \\
0 + 0 + 0 + \cdots + 0 &= b_m
\end{aligned}
$$

算法

最后我们会消成这样子:

$$
\begin{aligned}
a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + a_{1,3}x3 + \cdots + a_{1,n}x_n &= b_1 \\
0 + a_{2,2}x_2 + a_{2,3}x3 + \cdots + a_{2,n}x_n &= b_2 \\
0 + 0 + a_{3,3}x3 + \cdots + a_{3,n}x_n &= b_3 \\
&\vdots \\
0 + 0 + 0 + \cdots + a_{n,n}x_n &= b_n \\
0 + 0 + 0 + \cdots + 0 &= b_{n+1} \\
&\vdots \\
0 + 0 + 0 + \cdots + 0 &= b_m
\end{aligned}
$$

- 如果 $b[n+1 \sim m]$ 中有不为 0 的, 那么无解.

算法

最后我们会消成这样子:

$$
\begin{aligned}
a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + a_{1,3}x3 + \cdots + a_{1,n}x_n &= b_1 \\
0 + a_{2,2}x_2 + a_{2,3}x3 + \cdots + a_{2,n}x_n &= b_2 \\
0 + 0 + a_{3,3}x3 + \cdots + a_{3,n}x_n &= b_3 \\
&\vdots \\
0 + 0 + 0 + \cdots + a_{n,n}x_n &= b_n \\
0 + 0 + 0 + \cdots + 0 &= b_{n+1} \\
&\vdots \\
0 + 0 + 0 + \cdots + 0 &= b_m
\end{aligned}
$$

- 如果 $b[n+1 \sim m]$ 中有不为 0 的, 那么无解.
- 如果 $a_{i,i} = 0$, 那么我们称 x_i 为自由元, 显然 x_i 的取值对解的存在性没有影响, 但是对具体的解有影响.

代码

```
void Gauss(){
  for (int i = 1; i <= n; ++i){
    int k = i;
    for (int j = i+1; j <= n; ++j)
    if (fabs(A[j][i]) > fabs(A[k][i])) k = j;
    if (k != i){
      for (int j = 1; j <= n; ++j) std::swap(A[i][j], A[k][j]);
      std::swap(B[i], B[k]);
    }
    for (int j = i+1; j <= n; ++j){
      long double del = (long double)A[j][i]/A[i][i];
      for (k = i; k <= n; ++k)
      A[j][k] = A[j][k]-A[i][k]*del;
      B[j] = B[j]-B[i]*del;
    }
  }
  for (int i = n; i; --i){
    for (int j = n; j > i; --j) B[i] -= (double)A[i][j]*res[j];
    res[i] = (double)B[i]/A[i][i];
  }
}
```

注意一个细节, 在消去 x_i 时, 要通过找 x_i 系数最大的方程与其它方程消元来减小误差.

总结

- Q: 高斯消元很简单啊, 一下就学会了.

总结

- Q: 高斯消元很简单啊, 一下就学会了.
- A: 当然啊, 你们这么强.

总结

- Q: 高斯消元很简单啊，一下就学会了.
- A: 当然啊，你们这么强.
- Q: 高斯消元能干什么?

总结

- Q: 高斯消元很简单啊，一下就学会了.
- A: 当然啊，你们这么强.
- Q: 高斯消元能干什么?
- A: ~~刷裸题~~.

其实还没完

- 下面介绍一个线性代数中的一个东西叫做行列式.

其实还没完

- 下面介绍一个线性代数中的一个东西叫做行列式.
- 对于方阵 ($n \times n$ 的矩阵) A , 我们记它的行列式为 $det(A)$.
- 也记作 $\begin{vmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,n} \end{vmatrix}$

其实还没完

- 下面介绍一个线性代数中的一个东西叫做行列式.
- 对于方阵 ($n \times n$ 的矩阵) A，我们记它的行列式为 $det(A)$.
- 也记作 $\begin{vmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,n} \end{vmatrix}$

$$det(A) = \sum_{\sigma \in S} sgn(\sigma) \prod_{i=1}^{n} a_{i,\sigma_i}$$

其实还没完

- 下面介绍一个线性代数中的一个东西叫做行列式.
- 对于方阵 ($n \times n$ 的矩阵) A ，我们记它的行列式为 $det(A)$.
- 也记作 $\begin{vmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,n} \end{vmatrix}$

$$det(A) = \sum_{\sigma \in S} sgn(\sigma) \prod_{i=1}^{n} a_{i,\sigma_i}$$

- σ 代表一个 $1 \sim n$ 的排列，当它有偶数个逆序数对时，$sgn(\sigma)$ 为 1，否则为-1.

行列式的性质

Theorem

单位矩阵 *I (*对角线为 *1,* 其它位置为 *0)* 的行列式为 *1.*

Theorem

$det(A) = det(A^T)$, A^T 为 A 的转置矩阵, $A^T[i][j] = A[j][i]$.

Theorem

如果 A 的某一行或某一列全为 *0,* 那么 $det(A) = 0$.

Theorem

如果 A 的某一行或某一列相等, 那么 $det(A) = 0$.

更高级的性质

Theorem

交换 A 的某一行或某一列, $det(A)$ 的值变为原来的相反数.

Theorem

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & \ddots & & \vdots \\ a_{k,1}+b_1 & a_{k,2}+b_2 & \cdots & a_{k,n}+b_n \\ \vdots & \ddots & & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,n} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & \ddots & & \vdots \\ a_{k,1} & a_{k,2} & \cdots & a_{k,n} \\ \vdots & \ddots & & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,n} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & \ddots & & \vdots \\ b_1 & b_2 & \cdots & b_n \\ \vdots & \ddots & & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,n} \end{vmatrix}$$

Theorem

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & \ddots & & \vdots \\ Ka_{i,1} & Ka_{i,2} & \cdots & Ka_{i,n} \\ \vdots & \ddots & & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,n} \end{vmatrix} = K \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & \ddots & & \vdots \\ a_{i,1} & a_{i,2} & \cdots & a_{i,n} \\ \vdots & \ddots & & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,n} \end{vmatrix}$$

更高级的性质

Theorem

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & \ddots & & \vdots \\ a_{i,1}+a_{j,1} & a_{i,2}+a_{j,2} & \cdots & a_{i,n}+a_{j,n} \\ \vdots & \ddots & & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,n} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & \ddots & & \vdots \\ a_{i,1} & a_{i,2} & \cdots & a_{i,n} \\ \vdots & \ddots & & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,n} \end{vmatrix}$$

Theorem

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ 0 & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{n,n} \end{vmatrix} = \prod_{i=1}^{n} a_{i,i}$$

怎么求

- 怎么求行列式呢?

怎么求

- 怎么求行列式呢?
- 高斯消元就是把一个矩阵变成一个上三角矩阵. 所以可以用高斯消元来求行列式的值.

怎么求

- 怎么求行列式呢?
- 高斯消元就是把一个矩阵变成一个上三角矩阵. 所以可以用高斯消元来求行列式的值.
- 每次将某一行的 K 倍加到另一行去, 行列式的值不会变, 可以利用这个性质把矩阵变成上三角矩阵, 然后就能计算了.

其它

- Q: 为什么不给证明.

其它

- Q: 为什么不给证明.
- A: Hanc marginis exiguitas non caperet.

其它

- Q: 为什么不给证明.
- A: Hanc marginis exiguitas non caperet.
- Q: 行列式又有什么用.

其它

- Q: 为什么不给证明.
- A: Hanc marginis exiguitas non caperet.
- Q: 行列式又有什么用.
- A: 行列式是线性代数中的一个重要概念, 有些问题利用行列式能很好解决.

其它

- Q: 为什么不给证明.
- A: Hanc marginis exiguitas non caperet.
- Q: 行列式又有什么用.
- A: 行列式是线性代数中的一个重要概念, 有些问题利用行列式能很好解决.
- vjudge 上面有一些练习, 请大家注册一个以自己名字拼音为用户名的用户, 并完成练习. 网址`https://vjudge.net/contest/204353`.

其它

- Q: 为什么不给证明.
- A: Hanc marginis exiguitas non caperet.
- Q: 行列式又有什么用.
- A: 行列式是线性代数中的一个重要概念, 有些问题利用行列式能很好解决.
- vjudge 上面有一些练习, 请大家注册一个以自己名字拼音为用户名的用户, 并完成练习. 网址`https://vjudge.net/contest/204353`.
- 证明都很简单, 可以自己想想. 实在想不出再来问我.