SJ 定理

概述：

若把游戏中的**空状态**定义为**必胜态(划重点，不是必败态)**，那么一个状态是必胜态(指先手必胜，下同)当且仅当下述条件**同时成立**或**同时不成立**：

1：**sg[s] = 0;**

2：$\forall x \in s \quad sg[x] \le 1$**.**

s 为**状态**.
x 为**子问题**.

证明：

我们用一个二元组(a, b)来表示两个条件是否成立:

条件 1 当且仅当 a = 1 时成立

条件 2 当且仅当 b = 1 时成立

如当某个状态同是满足两个条件，我们说这个状态是(1, 1)的，记这个状态为 $s_{(1,1)}$.

*函数 **card()**的值为集合的**元素个数**.*

证明分三部分:

一首先，终止状态是(0, 1)的，属于必败态.

一其次，证明必败态的后继**全是**必胜态：

即证必败态之间不能互相转移.

*即 $s_{(0,1)}$ **不能转移到** $s_{(1,0)}$，同样 $s_{(1,0)}$ **不能转移到** $s_{(0,1)}$.*

1：$s_{(1,0)}$ ***不能转移到*** $s_{(0,1)}$.

可证$\forall x \in s_{(1,0)}$, card({x | sg[x] > 1}) > 1.

那么，进行任意操作后，sg[s]不为 0，仍存在 sg 值大于一的 x，转移到 $s_{(0,0)}$.

2：$s_{(0,1)}$ ***不能转移到*** $s_{(1,0)}$.

可证$\forall x \in s_{(0,1)}$, card({x | sg[x] = 1}) mod 2 = 1 .

那么现在有两种可能：

(下面说的将一个 x 变为 y 指的是，将某个子问题的 sg 值由 x 转移到 y)

*(当存在某个子问题 sg 值为 x 时，我们说存在一个**数**等于 x，同理定义大于和小于)*

(1)将一个 1 变成 0，或将一个 0 变成 1, sg[s]变 0. 转移到 $s_{(1,1)}$.

(2)将一个数变得大于 1. 此时 sg 值异或和必不为 0. 转移到 $s_{(0,0)}$.

综上，$s_{(0,1)}$ ***不能转移到*** $s_{(1,0)}$，*同样* $s_{(1,0)}$ ***不能转移到*** $s_{(0,1)}$.

一最后，证明必胜态**至少有一个**后继状态是必败态：

1：对于 $s_{(1,1)}$：

显然地，$\forall x \in s_{(1,1)}$, card({x | sg[x] = 1}) mod 2 = 0 .

此时只需要将一个 1 变成 0 .

即可转移到 $s_{(0,1)}$.

2：对于 $s_{(0,0)}$：

(1) 若 card({x | sg[x] > 1}) = 1，那么将 x(x > 1)(注意这里的 x 只 sg 值为 x 的子问题) 变为 0 和变为 1 都会满足条件 2，且必有一个选择使 sg[s] 不为 0 . 具体的:

1° 若 card({x | sg[x] = 1}) % 2 = 1.

将 x 变为 0

2° 若 card({x | sg[x] = 1}) % 2 = 0.

将 x 变为 1

即可转移到 $s_{(0,1)}$.

(2) 否则，可以通过使 sg 值变为 0，转移到 $s_{(1,0)}$.

得证