

贾志鹏线性筛笔记

黄嘉盛

January 23, 2018

几个梳理

- 积性函数

定义：一个定义域为 N^+ 的函数 f ，对于任意两个互质的正整数 a, b ，满足 $f(ab) = f(a) \times f(b)$

对任意两个正整数 a, b 成立时，被称为完全积性函数。

考虑一个大于1的正整数 N 。设 $N = \prod p_i^{a_i}$ ，其中 p_i 为互不相同的质数，那么对于一个积性函数 f ， $f(N) = f(\prod p_i^{a_i}) = \prod f(p_i^{a_i})$ ，如果 f 还满足完全积性，则 $f(N) = \prod f(p_i)^{a_i}$

- 欧拉函数 φ

$\varphi(n)$ 表示 $1 - n$ 中和 n 互质的个数。

结合中国定理可知，欧拉函数是积性函数，但不是完全积性函数。

考虑一个质数 p 和一个正整数 k ，不难看出 $\varphi(p^k) = p^k - p^{k-1} = (p-1)p^{k-1}$

欧拉定理： $a^{\varphi(n)} \equiv 1 \pmod{n}$

$$\sum_{d|n} \varphi(d) = n$$

[包含一些证明的一篇博客](#)