2018期末集训归纳

黄嘉盛

January 21, 2018

1 内容概览

DP
主要讲了状压DP及DP优化，比较难
计算几何
讲了向量，凸包，格点图，KD树，旋转卡壳，半平面，V图，自适应$Simpson$积分等，有的较难
图论
讲了仙人掌，平面图和一些扩展，点分治较难，用处很大
群论
重点讲了$Burnside$引理和$Polya$定理，基本听不懂

2 内容

2.1 DP

- **哈密尔顿路径**:

  此题按常规思想从前往后转移状态很难优化，所以考虑从后往前转移。
  f[S][i] 表示当前点集为S,点为i，f[S][i]=0/1, 表示当前是否存在一条哈密尔顿路径。
  f[S][i] = f[S / i][j], j为i的连边 (一个为真则f[S][i]为真)
  如果从前往后推，则枚举i的所有连边，将i加入点集，转移状态，变成f[Si][j].
  但是那样子不是很好优化，所以考虑从后往前推。
  因为f[ ][ ]是二维的并且只存了0/1太浪费了，其实我们可以把N个点压成一个有N位的0/1串
  即$f[S]$ = 101001...101 之类的,第i位为0表示在路径集合S中选择i点是符合一条哈密尔顿路径的
  XS 所以可以得到一个状态转移方程式 $f[S/i] = f[S] \ \& \ lk[j][i]$

- **Hongcow Buys a Deck of Cards**：

  题意：小明要买卡片，卡片分红、蓝两种，每天，小明可以：1.获得一个红币和一个蓝币，注意是和。2.买卡。
  买卡需要的价格是max(ri-A,0)个红币和max(bi-B,0)个蓝币，ri、bi是第i张卡片所需红蓝币的个数，A、B是已经拥有的红蓝卡的个数。
  求买完所有卡片所需的最少天数。
  解法:
  n很小，自然可以想到状态压缩dp，由于每天是同时获得一枚红币和蓝币，所以dp数组如果存天数会变得难以处理剩下的钱。
  所以可以反过来想，dp数组存的是节省了多少钱。
  dp[1¡¡16][121]：第一维代表集合：1代表已买，0代表未买。第二维代表省下的红币，由于省的钱¡=120，开121足够。
  dp[i][j]的值表示集合i状态下，省j枚红币时，最多能省的蓝币个数，最终答案就枚举一下dp[(1¡¡n)-1][j]更新一下答案就行。
  代码中，预处理了r_a和r_b，分别表示某个集合红币和蓝币的个数。

2.2 计算几何

- **向量**：

  设$O=(x,y),P=(x_1,y_1)$, 则向量$\vec{OP}=(x_1-x,y_1-y)$。
  点积$u\cdot v=|u||v|cos<u,v>=x_1x_1+y_1y_2$。 点积相当于把向量$\vec{u}$在向量$\vec{v}$上投影的模乘以v的模， 可以用来计算几何体的高。
  叉积$uxv=|u||v|sin<u,v>=x_1y_2-x_2y_1$。 叉积相当于求出向量$\vec{u}$在向量$\vec{v}$上投影的高的模，可以用来计算向量$\vec{u},\vec{v}$围成的平行四边形的面积。
  还有几个可能会用到的，设两有意义的向量 $\vec{u},\vec{v}$
  则$u\times v=0$时，两个向量在同一直线上, $u\cdot v=0$ 时， 两向量相互垂直。

  求向量交点
  首先，若直线过两个点O,P, 向量$\vec{OP}$, 则它可以表示为$O+k\vec{OP}$,
  两条直线$P+k\vec{OP},P_1+k_1\vec{OP_1}$, 交点为$O$

  $$O=P_1-V_1\frac{V\times(P-P_1)}{V\times V_1}$$

  证明：

  $$O-P_1=P-P_1+kV=k_1V_1$$

  $$V\times(P-P_1+kV)=V\times(K_1V_1)$$

  $$k_1=\frac{V\times(P-P_1)}{V\times V_1}$$

  $$O=P_1+V_1\frac{V\times(P-P_1)}{V\times V_1}$$

复数乘法:

$$u = a + bi, v = c + di$$
$$r = uv = (ac - bd) + (ad + bc)i$$

r的幅角是u, v幅角之和， 长度是u, v长度相乘。

所以可以知道**向量旋转**
将$p = (x, y)$ 顺时针旋转α度。 把p看作复数$x + yi$, 旋转α度就是与一个长度与其相等，幅角为α度的一个复数相乘。 很容易知道这个复数就是$(\cos\alpha, \sin\alpha i)$ 与其相乘得出答案：

$$p'(x\cos\alpha - y\sin\alpha, (x\sin\alpha + y\cos\alpha)i)$$

利用向量旋转可以解决一些题目
详见pdf中求相交圆的那道题。

混合积：
计算向量a, b, c 的有向平行六面体体积

$$V = (a \times b) \cdot c$$
$$V = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}$$

可以用来判断是否是右手系(这个我也不知道)
确定了一个面的内部和外部后，可以判断点是在面的哪边。

多边形内格点数
线段格点数：
设$u = (x, y), v = (x, y)$, 其中$x, y, x_1, y_1 \in$ 。则线段uv过格点(不含两端)数目为

$$GCD(x_1 - x, y_1 - y) - 1$$

证明方法：
首先，把坐标差看成它们横向，竖向的长度，设最大公约数为i,则表示**可以把两个长度都分别划分成i个相同的长度，就是i个全等的图形，并且他们的位置在同一直线上**(可以这么看)
所以在格点上的点个数就是每两个相邻的全等图形的交点，自然就是$i - 1$个了。

格点多边形内部点数
因为边界上点数和多边形面积[1]比较容易求出来，所以可以通过求出其他两个将格点内部点数求出来。

- **凸包**

[1]可以使用Pick's Theorem：$2S = 2a + b - 2$求出多边形面积，S为面积，b为边界上点数，a为多边形内部点数。

2.3 图论

- **仙人掌**：
  定义：一个无向联通图,满足每条边都至多在一个简单环上。
  因为有环，仙人掌是不好处理的，但是相对来说树要好处理得多。
  可以构造一张圆方图来做。
  所以考虑把仙人掌转化成一棵树，把环去掉，变成一个方点，环上有很多点与方点相连，有一个点x [2]到方点距离为0。
  此时应该考虑其他点到方点的距离(此时环上各点之间是没有距离的)。
  显然环上其它点到方点的距离可以看成到i的在环上两条路径中较短的一条的长度(实际上好像也是这样的)。
  所以就把一颗仙人掌转化成了一颗~~比较好处理~~的树。
  其实我解释得也不是非常清楚，WWTdalao的讲课资料上已经讲的还算明确了。
  其实上，仙人掌的问题通常和LCA相结合。但是在这里就不说了，可以到网上查一下。

2.4 群论

其实群论只是重点讲了$Burnside$引理和$Polya$定理

- **Burnside引理**
  $Burnside$引理经常用与等价类计数问题相联系，还是比较难的。
  其实刘汝佳的蓝书P144页已经有详细的解释了(我就是看那里才懂的)。
  但还是有必要总结提炼一下的。
  首先置换是个贯穿整个算法的东西，如果没懂置换就很难懂整个算法。
  其实置换并不难懂，可以简单地将其看成一个映射，可能会好懂很多。
  将某个东西丢进置换里去，他就变成置换里相对的一个元素了。
  所以引入置换的积，两个置换是可以求积的，可以将其看作函数的复合。
  设两个置换$f=1,3,2,g=2,1,3$，则$fg=1,3,2$，怎么理解。
  fg_1可以先找f_1,再找到g_{f1},就是fg_1。
  所以给出几个序列就可以知道置换乘积了：
  $1->1->2,2->3->3,3->2->1$

  $Burnside$如果举例就很容易理解，蓝书P146已经给出例子了。
  首先，如果不给出分类，方案数还是比较容易的。
  如果给出一种等价关系，满足等价关系的被分到一类，记为一个方案,比如“旋转90°”
  此时应该用置换来描述这些等价关系，如果一个置换中的一个方案映射到了另一个方案，就说二者是等价的。
  所以可以定义一个置换集合F来描述它们[3]

[2]这里的x点是环上深度最小的点
[3]注意F中任意两个置换的乘积页应该在F中，否则F无法构成置换群

对于一个置换f，如果一个方案s经过置换之后仍不改变，则称s为f的**不动点**。
将置换f的不动点记为$C(f)$，此时可以得出著名的$Burnside$引理:

$$|X/G| = (\sum_{f\in G} C(f)) \div |G|$$

其中$|X/G|$为不同方案数(等价类数目)，$C(f)$为置换f的不动点数量。
可以浅显易懂的描述为：等价类数目为所有$C(f)$（不动点数目）的平均值。
至于如何求$C(f)$，可以参考蓝书$P146$ 。

一般地，如果把置换f分解成$m(f)$个循环的乘积，那么每个循环中的格子颜色必须相同。
假设涂k种颜色则有 $C(f) = k^{m(f)}$,带入$Burnside$即可得到$Polya$定理:

$$|Y^X/G| = (\sum_{f\in G} k^{C(f)}) \div |G|$$

其中，$|Y^X/G|$是等价类数目。其他的和上文相同。
一般的等价类数目问题都是可以用以上两种方法做出来的。

2.5 组合计数，概率期望

- 组合
  首先一个最简单的组合数公式:

  $$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

  所以，$Lucas$定理:
  对于质数p,有:

  $$\binom{n}{k} = \binom{n/p}{k/p}\binom{n\%\ p}{k\%\ p}$$

  $Fibonacci$数， 定义就不说了。
  求第n项
  直接矩阵乘法
  或折半递归

  参考资料:
  http://oeis.org/A000045
  https://en.wikipedia.org/wiki/Fibonacci$_n$$umber$

  然后就是一些题目，在BiKe的pdf上已经有了讲解和题解链接。
  ~~其实这些题还挺有趣的~~