计数

罗进

January 6, 2018

Outline

1. 容斥原理
2. Stirling 数
3. Dp of Dp
4. Burnside 引理与 Pólya 定理
5. 一些题目

容斥原理

定理

$$|S_1 \cup S_2 \cdots \cup S_n| = \sum_i |S_i| - \sum_{i<j} |S_{i_1} \cap S_{i_2}| + \sum_{i<j<k} |S_i \cap S_j \cap S_k| + \cdots$$
$$\cdots + (-1)^n |S_1 \cap S_2 \cdots \cap S_n|$$

推广

- 如果对两个关于集合的函数 $g(S), f(S)$.
- 如果 $g(S) = \sum_{T \subseteq S} f(T)$, 那么 $f(S) = \sum_{T \subseteq S} (-1)^{|S|-|T|} g(T)$.
- 如果 $g(S) = \sum_{T \supseteq S} f(T)$, 那么 $f(S) = \sum_{T \supseteq S} (-1)^{|S|-|T|} g(T)$.

题目

HAOI 2008 硬币购物

- 有四种面值的硬币. T 个询问, 每次给出四种硬币的个数 d_i, 和一个数 N. 你需要回答用这四种硬币凑成 N 的方案数.
- 面值是固定的, $T \leq 1000000$, $d_i, s \leq 1000000$.

Solution

- 如果没有个数的限制, 就是一个完全背包.
- 可以 $O(N)$ 预处理出所有 N 的答案.

Solution

- 如果没有个数的限制, 就是一个完全背包.
- 可以 $O(N)$ 预处理出所有 N 的答案.
- 考虑去掉个数的限制.

Solution

- 如果没有个数的限制, 就是一个完全背包.
- 可以 $O(N)$ 预处理出所有 N 的答案.
- 考虑去掉个数的限制.
- 设 $f(S)$ 为 只有 S 中的硬币超过了限制的方案数, $g(S)$ 为 S 中的硬币超过了限制 (其它的任意) 的方案数.
- 那么 $g(S) = \sum_{T \supseteq S} f(T)$, 我们要求 $f(\emptyset)$.

Solution

- 如果没有个数的限制，就是一个完全背包.
- 可以 $O(N)$ 预处理出所有 N 的答案.

- 考虑去掉个数的限制.

- 设 $f(S)$ 为 只有 S 中的硬币超过了限制的方案数，$g(S)$ 为 S 中的硬币超过了限制 (其它的任意) 的方案数.
- 那么 $g(S) = \sum\limits_{T \supseteq S} f(T)$，我们要求 $f(\emptyset)$.

- $g(S)$ 很好求，把 N 减去 S 中硬币选了 $d_i + 1$ 个的和，然后剩下的就是一个完全背包.
- 这样就去掉的个数的限制，可以预处理，询问时容斥计算.

题目

游戏 [a]

[a] from “浅谈容斥原理”, 王迪

- 有一个 N 个点的无向完全图和 M 中颜色, 图 G 的价值 $f(G)$ 为使得同一个联通块的点颜色相同的染色方案. 求 $\sum_{S\subseteq E, S\neq\emptyset}(-1)^{|S|-1}f(G(S))$.
- E 为边集, S 取遍 E 的所有非空子集, $G(S)$ 为 S 中的边构成的图.
- $N, M \leq 10^6$.

Solution

- 考虑换种方式表示 $f(S)$.
- 设 $H(x)$ 表示满足条件 x 的染色方案的集合.

Solution

- 考虑换种方式表示 $f(S)$.
- 设 $H(x)$ 表示满足条件 x 的染色方案的集合.
- 把同一个联通块颜色相同的限制转换一下, 变成有边相邻的颜色必须相同.
- 那么 $f(S) = |\bigcap_{e\in S} H(e_x = e_y)|$.

Solution

- 考虑换种方式表示 $f(S)$.
- 设 $H(x)$ 表示满足条件 x 的染色方案的集合.
- 把同一个联通块颜色相同的限制转换一下，变成有边相邻的颜色必须相同.
- 那么 $f(S) = |\bigcap_{e \in S} H(e_x = e_y)|$.
- 设条件 $P_e = [e_x = e_y]$.
- 那么原式就成了 $\sum_i |H(P_i)| - \sum_{i<j} |H(P_i) \bigcap H(P_j)| + \cdots (-1)^{|E|-1} |H(P_1) \bigcap H(P_2) \cdots H(P_{|E|})|$.

Solution

- 考虑换种方式表示 $f(S)$.
- 设 $H(x)$ 表示满足条件 x 的染色方案的集合.
- 把同一个联通块颜色相同的限制转换一下，变成有边相邻的颜色必须相同.
- 那么 $f(S) = |\bigcap_{e\in S} H(e_x = e_y)|$.
- 设条件 $P_e = [e_x = e_y]$.
- 那么原式就成了 $\sum_i |H(P_i)| - \sum_{i<j} |H(P_i) \bigcap H(P_j)| + \cdots (-1)^{|E|-1} |H(P_1) \bigcap H(P_2) \cdots H(P_{|E|})|$.
- 对应上容斥的式子，就变成了 $ans = |\bigcup_{e\in E} H(P_e)|$.
- 也就是至少有两个点颜色相同的方案数，即 $M^N - \prod_{i=1}^{N}(M - i + 1)$.

第一类斯特灵数

定义

- $s(n,k)$ 或 $\left[{n \atop k}\right]$ 为把 n 个不同的元素划分成 k 个圆排列的方案数.

递推公式

- $s(n,0)=0, s(1,1)=1.$
- $s(n,k)=s(n-1,k-1)+(n-1)s(n-1,k)$

解释

- 考虑前 $n-1$ 个物品已经分好了，第 n 个物品要么单独成为一个环，要么插在前 $n-1$ 个物品中某个物品的后面.

题目

Count the Buildings

- 有 N 栋建筑排成一列，每栋建筑的高度在 $[1, N]$ 之间且互不相等，从左往右能够看到 F 栋建筑，从右往做能够看到 B 栋建筑，一栋建筑能够被看到当且仅当这栋建筑比你到它之间的所有建筑都高.
- T 组询问，每次给出 N，F，B，求满足条件的方案数模 $10^9 + 7$.
- $T \leq 10^5$, $0 < N, F, B \leq 2000$.

Solution

- 把一个能够被看见的建筑和被它挡住的建筑看作一段.
- 加入知道了某一段的长度为 n, 那么这一段的排列方案有 $(n-1)!$ 种, 跟环排列的方案数一样, 所以可以联系到第一类斯特灵数上来.

Solution

- 把一个能够被看见的建筑和被它挡住的建筑看作一段.
- 加入知道了某一段的长度为 n, 那么这一段的排列方案有 $(n-1)!$ 种, 跟环排列的方案数一样, 所以可以联系到第一类斯特灵数上来.
- 那么答案就是 $\binom{F+B-2}{F-1} \times s(N-1, F+B-2)$.
- $O(n^2)$ 预处理, 询问 $O(1)$.

第二类斯特灵数

定义

- $S(n,k)$ 或 $\left\{ {n \atop k} \right\}$ 为把 n 个不同的元素划分成 k 个集合的方案数.

递推公式

- $S(n,n) = S(n,1) = 1$
- $S(n,k) = S(n-1,k-1) + kS(n-1,k)$.

解释

- 考虑前 $n-1$ 个数已经分好了，第 n 个数要们单独作为一个集合，要么和加入 k 个集合中的某一个.

题目

图的价值

- 给出 n 和 k, 定义一个简单无向图的价值为每个点度数的 k 次方之和. 你需要求出所有 n 个点有标号的简单无向图的价值之和模 998244353 的结果.
- $1 \leq n \leq 10^9, 1 \leq k \leq 200000.$

Solution

- 考虑一个点的贡献.

$$\sum_{d=0}^{n-1} d^k \cdot \binom{n-1}{d} \cdot 2^{\binom{n-1}{2}}$$

.

Solution

- 考虑一个点的贡献.

$$\sum_{d=0}^{n-1} d^k \cdot \binom{n-1}{d} \cdot 2^{\binom{n-1}{2}}$$

.

- $2^{\binom{n-1}{2}}$ 为常数可以提出来.
- 只要处理 $\sum_{d=0}^{n-1} d^k \cdot \binom{n-1}{d}$.

Solution

- 考虑一个点的贡献.

$$\sum_{d=0}^{n-1} d^k \cdot \binom{n-1}{d} \cdot 2^{\binom{n-1}{2}}$$

.

- $2^{\binom{n-1}{2}}$ 为常数可以提出来.
- 只要处理 $\sum_{d=0}^{n-1} d^k \cdot \binom{n-1}{d}$.
- 有一个很重要的式子, $x^n = \sum_{k=0}^{x} {n \brace k} x^{\underline{k}}$.
- 其中 $n^{\underline{k}} = n \cdot (n-1) \cdots (n-k+1)$.

Solution

- 考虑一个点的贡献.

$$\sum_{d=0}^{n-1} d^k \cdot \binom{n-1}{d} \cdot 2^{\binom{n-1}{2}}$$

.

- $2^{\binom{n-1}{2}}$ 为常数可以提出来.
- 只要处理 $\sum_{d=0}^{n-1} d^k \cdot \binom{n-1}{d}$.
- 有一个很重要的式子, $x^n = \sum_{k=0}^{x} \left\{ {n \atop k} \right\} x^{\underline{k}}$.
- 其中 $n^{\underline{k}} = n \cdot (n-1) \cdots (n-k+1)$.
- 考虑组合意义, 左边是把 n 个不同的球分到 x 的不同的盒子中, 右边是在枚举多少个盒子有球.

Solution

- 原式就变成了 $\sum_{d=0}^{n-1}\binom{n-1}{d}\cdot\sum_{x=0}^{d}\left\{{k \atop x}\right\}d^{\underline{x}}$.

$$\begin{aligned}\sum_{d=0}^{n-1}\binom{n-1}{d}\cdot\sum_{x=0}^{d}\left\{{k \atop x}\right\}d^{\underline{x}} &= \sum_{d=0}^{n-1}\binom{n-1}{d}\cdot\sum_{x=0}^{d}\left\{{k \atop x}\right\}\binom{d}{x}x! \\ &= \sum_{x=0}^{n-1}\left\{{k \atop x}\right\}x!\cdot\sum_{d=0}^{n-1}\binom{n-1}{d}\binom{d}{x} \\ &= \sum_{x=0}^{n-1}\left\{{k \atop x}\right\}x!\cdot\binom{n-1}{x}\cdot 2^{n-x-1}\end{aligned}$$

- 式子的后面部分的组合意义是现在 $n-1$ 个数中选 d 个, 再在这 d 个中选 x 个, 相当于先选 x 个, 其他的任意.

Solution

- 然后就只要求出 $\left\{ k \atop x \right\}(0 \leq x \leq k)$ 就行了.
- $\left\{ n \atop m \right\} = \frac{1}{m!} \cdot \sum_{i=0}^{m} (-1)^i \binom{m}{i} (m-i)^n$.
- 等于 $\sum_{i=0}^{m} \frac{(-1)^i}{i!} \cdot \frac{(m-i)^n}{(m-i)!}$.
- 可以使用 NTT, 复杂度 $O(K \log K)$.

Dp of Dp

- 对于一个可以用 DP 解决问题, 求有多少中输入使得这个问题的答案为 A.
- 在原 DP 的基础上暴力加上一维来记录每个状态的 DP 值, 并统计这种情况下的方案数.

题目

Hero meet devil

- 给一个由 $AGCT$ 组成的字符串 S, 对于每个 $1 \le i \le |S|$, 问有多少个只由 $AGCT$ 组成的长度为 m 的串 T, 使得 S 和 T 的最长公共子序列为 i.
- $|S| \le 15, 1 \le m \le 1000$.

题目

Hero meet devil

- 给一个由 $AGCT$ 组成的字符串 S, 对于每个 $1 \le i \le |S|$, 问有多少个只由 $AGCT$ 组成的长度为 m 的串 T, 使得 S 和 T 的最长公共子序列为 i.
- $|S| \le 15, 1 \le m \le 1000$.

Solution

- 设 $f(i,j)$ 为用 T 的前 i 个字符, S 的前 j 个字符的最长公共子序列的长度.
- $0 \le f(i,j) - f(i,j-1) \le 1$, 于是可以记录 $f(i,j)$ 差分的结果作为一个状态, 用 Dp of Dp.

题目

Number

- 给出 T, A, B, C, D, 求对于所有 $A \leq x \leq B, C \leq y \leq D$, $x \& y = T$, $x|y$ 有多少种不同的取值.
- $0 \leq T, A, B, C, D \leq 2^{60}$.

Solution

- 按照数位 DP 的常规思路，我们会设 $f[a][b][c][d]$ 表示 x, y 与 A, B, C, D 的相对关系分别为 a, b, c, d 时的情况．但这样可能有不同的状态达到相同的值，所以会算重．

Solution

- 按照数位 DP 的常规思路, 我们会设 $f[a][b][c][d]$ 表示 x, y 与 A, B, C, D 的相对关系分别为 a, b, c, d 时的情况. 但这样可能有不同的状态达到相同的值, 所以会算重.
- 一共有 16 种不同的 (a, b, c, d), 我们设 $g[S]$ 为 S 中的状态都能够达到的数字个数, 然后就可以逐位 DP 了.

置换

- 设 σ 是一个从集合 $1, 2, \cdots, n$ 到自身的一一映射，则可称 σ 为置换，形如:

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \end{pmatrix}$$

- 其中 a 是一个排列.
- 置换可以做乘法，如 $\binom{a}{b} * \binom{b}{c} = \binom{a}{c}$

引入

置换群

- 置换群 G 是一个置换的集合，并且满足以下条件.
  1. 封闭性.
  2. 结合率.
  3. 存在唯一单位元.
  4. 存在唯一逆元.

染色与等价

- x 为对元素的着色方案，C 为所有着色方案的集合.
- 如果 $\exists f \in G$ 使得 $f * c = d$，我们就称 c, d 等价.
- 要解决的问题就是在给定置换群 G 和着色方案集合 C 的情况下，求出有多少种本质不同的着色方案 (也就是两两不等价).

定理

Burnside 引理

- 定义 $C(f)$ 为在置换 f 的作用下不变的集合 (集合中的元素又称该置换下的不动点).
- $N(G,X)=\frac{1}{|G|}\sum_{f\in G}|C(f)|$
- 证明就略了, 有兴趣的同学可以自己找.

Pólya 定理

- 设 G 为对 n 个对象的置换群, 每个对象可以用 m 中颜色染, 则本质不同的方案数为
$N(G,C)=\frac{1}{|G|}\left(m^{c(g_1)}+m^{c(g_2)}+\cdots+m^{c\left(g_{|G|}\right)}\right)$.
- $c(g_i)$ 为 g_i 的轮换 (循环节) 个数.

定理

Burnside 引理

- 定义 $C(f)$ 为在置换 f 的作用下不变的集合 (集合中的元素又称该置换下的不动点).
- $N(G,X)=\frac{1}{|G|}\sum_{f\in G}|C(f)|$
- 证明就略了，有兴趣的同学可以自己找.

Pólya 定理

- 设 G 为对 n 个对象的置换群，每个对象可以用 m 中颜色染，则本质不同的方案数为 $N(G,C)=\frac{1}{|G|}\left(m^{c(g_1)}+m^{c(g_2)}+\cdots+m^{c\left(g_{|G|}\right)}\right)$.
- $c(g_i)$ 为 g_i 的轮换 (循环节) 个数.
- 如果染色 x 在 f 的作用下不变，那么每个轮换中的元素都必须染同种颜色.

题目

[HNOI2008] Cards

- 有三种颜色，每种颜色分别有 Sr, Sb, Sg 个，现在要把 n 个位置染上这 3 种颜色，给出对于 n 的置换群 G，求有多少中本质不同的染色方案模质数 P.
- $n = Sr + Sb + Sg$, $1 \leq Sr, Sb, Sg \leq 20$, $1 \leq |G| \leq 100$.

Solution

- 一道入门题.
- 枚举置换然后背包 DP 出不动点的个数.

题目

POJ 2154 Color

- m 种颜色对一串 n 个珠子染色，求有多少中本质不同染色方案模 10^9+7 (如果两种染色方案旋转后重合则算本质相同).
- $n, m \le 10^9$.

Solution

- 使用 Pólya 定理.
- G 为所有顺时针旋转 k 个的置换的集合, $|G| = n$.

Solution

- 使用 Pólya 定理.
- G 为所有顺时针旋转 k 个的置换的集合, $|G| = n$.
- 旋转 k 格, 轮换的个数为 $gcd(n, k)$.
- 答案就是

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} m^{gcd(k,n)}$$

.

- 枚举 $gcd(k, n)$, 答案就是

$$\frac{1}{n}\sum_{g|n} m^{g}\varphi(\frac{n}{g})$$

.

题目

- 与前一题类似，但是 $m \leq 10$ 且存在 k 个限制，第 i 限制为颜色 a_i, b_i 不能相邻.

Solution

- G 仍然没有变, 一个置换的贡献不再是 m 的轮换个数次方.

Solution

- G 仍然没有变，一个置换的贡献不再是 m 的轮换个数次方.
- 如果把一个循环节看成一个点，在两个相邻的循环节之间连一条边，那么这些点构成了一个环.
- 要求给新的环染 m 中颜色，某些颜色不能相邻.

Solution

- G 仍然没有变，一个置换的贡献不再是 m 的轮换个数次方.
- 如果把一个循环节看成一个点，在两个相邻的循环节之间连一条边，那么这些点构成了一个环.
- 要求给新的环染 m 中颜色，某些颜色不能相邻.
- 枚举第一个点的颜色，然后矩阵快速幂.

Codeforces Wizards and Bets

- 有一个 n 个点 m 条边的 DAG, 称入度为 0 的点为源点, 出度为 0 的点为汇点. 这个 DAG 中源点和汇点的个数相等. 现在要对于每一个源点都找一条路径连向汇点, 要求任意两条路径都不能够在某个节点相交, 求有多少种方案. 答案对 10^9+7 取模.
- $1 \leq n \leq 600, 1 \leq m \leq 10^5$.

Solution

- 令矩阵 $A[i][j]$ 为第 i 个到第 j 个汇点的路径条数，那么 $\det(A)$ 即为答案.
- 如果两条路径相交，那么交换配对的方案就会相互抵消.
- $O(N^2+M)$ 求路径条数，$O(N^3)$ 求行列式.

BZOJ 2655 calc

- 一个长度为 N 的序列是合法的当且仅当: $a_1, \cdots, a_n$ 均为 $[1, A]$ 中的整数, 且 $a_1, \cdots, a_n$ 互不相同.
- 一个序列的权值为 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 的乘积, 求所有合法序列的权值之和模 $10^9 + 7$ 的结果.
- $B \leq 500, A \leq 10^9$.

Solution

- 设 $S_n(d)=\sum_{i=1}^{n} i^d$，$f(N)$ 为长度为 N 的答案.
- $f(N)=\sum_{i=1}^{N}(-1)^{i-1}f(N-i)*S_A(i)*(N-1)^{\underline{i-1}}$.
- 怎么求 $\sum_{i=1}^{n} i^d$?

$$\sum_{i=1}^{n+1} i^{d+1}=\sum_{i=0}^{n}(i+1)^{d+1}$$

$$\sum_{i=1}^{n+1} i^{d+1}=\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{d+1}\binom{d+1}{j}*i^j$$

$$(n+1)^{d+1}=\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{d}\binom{d+1}{j}*i^j$$

$$(n+1)^{d+1}-\sum_{j=0}^{d-1}\sum_{i=0}^{n}\binom{d+1}{j}*i^j=(d+1)*\sum_{i=1}^{n} i^d$$

- $O(N^2)$ 递推.

CodeChef CHNBGMT

- 有一个 N 行 M 列的网格，有 C 物品散布在网格上，左上角和右下角没有物品.
- 现在要找两条左上角到右下角的路径，满足这两条路径不相交且两条路径上共有 D 个物品.
- 求方案数模 10^9+7 的结果.
- $2 \leq N, M \leq 10^5, 0 \leq D \leq C \leq \min(200, N*M-2)$.

Solution

- 两条路径肯定分为从 $(2, 1)$ 到 $(N, M-1)$, 和从 $(1, 2)$ 到 $(N-1, M)$.
- 如果相交, 那么肯定能和从 $(2, 1)$ 到 $(N-1, M)$, 从 $(1, 2)$ 到 $(N, M-1)$ 一一对应.

Solution

- 两条路径肯定分为从 $(2,1)$ 到 $(N, M-1)$，和从 $(1,2)$ 到 $(N-1, M)$.
- 如果相交，那么肯定能和从 $(2,1)$ 到 $(N-1, M)$，从 $(1,2)$ 到 $(N, M-1)$ 一一对应.
- 把两条路径分开求.
- 设 $f_{i,j}$ 为走到第 i 个物品，共经过了 j 个物品的方案数.
- $f_{i,j} = \sum_k (f_{k,j-1} - f_{k,j}) * way(i,j)$.
- 最后再合并.