2024年全国普通高等学校运动训练、民族传统体育专业单招统一招生数学试卷

本卷共15小题，满分：150分，测试时长：90分钟.

一、单选题(每小题8分，共8小题，共64分)

1．已知集合$A=\{x\mid 0\le x<5,且x\in \mathrm{N}\}$，则集合$A$的子集的个数为（　）

A．15　　B．16　　C．31　　D．32

2．函数$y=e^{x}$与$y=e^{-x}$的图象（　）

A．关于x轴对称　　B．关于y轴对称

C．关于原点对称　　D．关于直线$y=x$对称

3．已知$\sin\alpha\cos\alpha=\frac{1}{3}\left(0<\alpha<\pi\right)$，则$\sin\alpha+\cos\alpha=$（　）

A．$\frac{\sqrt{15}}{3}$　　B．$-\frac{\sqrt{15}}{3}$　　C．$\frac{5}{3}$　　D．$-\frac{5}{3}$

4．已知向量$\vec{a},\vec{b}$满足$\vec{a}=(2,1),|\vec{b}|=\sqrt{3},|\vec{a}+\vec{b}|=4$，则$\vec{a}\cdot\vec{b}=$（　）

A．8　　B．-8　　C．-4　　D．4

5．等差数列$\{a_n\}$的公差为2，且$a_1+a_5+a_9=15$，则$a_2+a_6+a_{10}=$（　）

A．21　　B．24　　C．27　　D．30

6．若$\left(1+x\right)^{4}=a_0+a_1x+a_2x^{2}+a_3x^{3}+a_4x^{4}$，则$a_0+a_1+a_2+a_3+a_4=$（　）

A．1　　B．8　　C．16　　D．32

7．若函数$f\left(x\right)=ax^{2}+2x-3$在区间$\left(-\infty,4\right]$上单调递增，则实数$a$的取值范围是（　）

A．$a>-\frac{1}{4}$　　B．$a\ge-\frac{1}{4}$

C. $-\frac{1}{4} \le a < 0$　　　　　　　　　D. $-\frac{1}{4} \le a \le 0$

8．已知 m，n 是两条不同的直线，α，β 是两个不同的平面，有以下四个命题：

①若 $m//n$，$n \subset \alpha$，则 $m//\alpha$　　　　　②若 $m \subset \alpha$，$m \perp \beta$，则 $\alpha \perp \beta$

③若 $m \perp \alpha$，$m \perp \beta$，则 $\alpha//\beta$　　　　　④若 $\alpha \perp \beta$，$m \subset \alpha$，$n \subset \beta$，则 $m \perp n$

其中正确的命题是（　）

A．②③　　　B．②④　　　C．①③　　　D．①②

二、填空题(每小题 8 分，共 4 小题，共 32 分)

9．函数 $y=\sqrt{1-3^{x^2-2x-3}}$ 的定义域为________.

10．在 $\triangle ABC$ 中，角 A，B，C 所对的边分别为 a，b，c，且 $a^2=b^2-c^2+\sqrt{3}ac$，则角 B 的大小是______.

11．已知圆 C_1：$(x-4)^2+(y-3)^2=16$ 与圆 C_2：$x^2+y^2-2x+2y-9=0$，若两圆相交于 A，B 两点，则 $|AB|=$______

12．围棋起源于中国，古代称“弈”，至今已有四千多年历史，蕴含着中华文化的丰富内涵.在某次国际围棋比赛中，甲、乙两人进入最后决赛.比赛采取五局三胜制，即先胜三局的一方获得比赛冠军（没有平局），比赛结束.假设每局比赛乙胜甲的概率都为 $\frac{2}{3}$，且各局比赛的胜负互不影响，则甲以 $3:1$ 获得冠军的概率为______.

三、解答题(每小题 18 分，共 3 大题，共 54 分)

13．在各项均为正数的等比数列 $\{a_n\}$ 中，$a_1=2, a_3=8$.

（1）求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式；

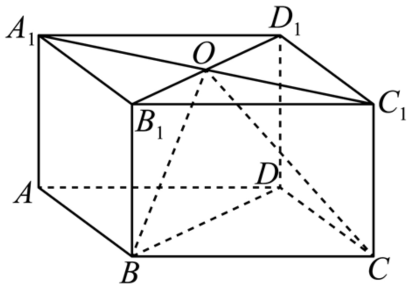
（2）若 $b_n=\log_2 a_n$，求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 T_n.

14．已知椭圆$C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的左顶点为$A(-2\sqrt{2},0)$，右焦点为$F(2,0)$.

(1)求椭圆C的标准方程；

(2)过点F的直线l与椭圆C交于点M，N（异于点A），直线AM，AN分别与直线$x=4$交于点P，Q．问：$\angle PFQ$的大小是否为定值？若是，求出此定值；若不是，请说明理由.

15．如图，已知直四棱柱$ABCD-A_1B_1C_1D_1$的底面$ABCD$为平行四边形，$AB=AA_1=1$，$AD=2$，$BD=\sqrt{3}$，A_1C_1与B_1D_1交于点O.



(1)求证：$BD\perp$平面CC_1D_1D；

(2)求平面AA_1B_1B与平面OBC的夹角的余弦值.

2024年全国普通高等学校运动训练、民族传统体育专业单招统一招生数学试卷（解析版）

本卷共15小题，满分：150分，测试时长：90分钟.

一、单选题(每小题8分，共8小题，共64分)

1．已知集合$A=\{x|0\le x<5,且x\in \mathrm{N}\}$，则集合$A$的子集的个数为（　）

A．15　　B．16　　C．31　　D．32

【答案】D

【分析】先求出集合A中元素的个数，再利用含有n个元素的集合的子集个数为2^n，即可求出结果.

【详解】因为$A=\{x|0\le x<5,且x\in \mathrm{N}\}=\{0,1,2,3,4\}$，可知，集合A中含有5个元素，所以集合A的子集个数为$2^5=32$.

故选：D.

2．函数$y=e^x$与$y=e^{-x}$的图象（　）

A．关于x轴对称　　B．关于y轴对称

C．关于原点对称　　D．关于直线$y=x$对称

【答案】B

【分析】设点$P(x_0,y_0)$在函数$y=e^x$图象上，证明$P(x_0,y_0)$关于y轴对称的点$(-x_0,y_0)$在函数$y=e^{-x}$的图象上.

【详解】解：设点$P(x_0,y_0)$在函数$y=e^x$图象上，则$y_0=e^{x_0}$，

则$P(x_0,y_0)$关于y轴对称的点$(-x_0,y_0)$满足$y_0=e^{-(-x_0)}=e^{x_0}$，

所以点$(-x_0,y_0)$在函数$y=e^{-x}$的图象上.

故选：B

3．已知$\sin\alpha\cos\alpha=\frac{1}{3}\left(0<\alpha<\pi\right)$，则$\sin\alpha+\cos\alpha=$（　）

A．$\frac{\sqrt{15}}{3}$　　B．$-\frac{\sqrt{15}}{3}$　　C．$\frac{5}{3}$　　D．$-\frac{5}{3}$

【答案】A

【分析】将$\sin\alpha+\cos\alpha$平方即可求解．

【详解】由于$0<\alpha<\pi$，所以$\sin\alpha>0$，又$\sin\alpha\cos\alpha=\frac{1}{3}>0$，所以$\cos\alpha>0$

$\left(\sin\alpha+\cos\alpha\right)^2=1+2\sin\alpha\cos\alpha=\frac{5}{3}$,故$\sin\alpha+\cos\alpha=\frac{\sqrt{15}}{3}$,

故选：A

4．已知向量$\vec{a},\vec{b}$满足$\vec{a}=(2,1),|\vec{b}|=\sqrt{3},|\vec{a}+\vec{b}|=4$，则$\vec{a}\cdot\vec{b}=$（　）

A．8　　B．-8　　C．-4　　D．4

【答案】D

【分析】根据模长$|\vec{a}+\vec{b}|=4$平方可得$\vec{a}\cdot\vec{b}$.

【详解】因为$|\vec{a}+\vec{b}|=4$，

所以$\vec{a}^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}^2=16$，

又因为$\vec{a}=(2,1),|\vec{b}|=\sqrt{3}$,

所以$\vec{a}^2=5,\vec{b}^2=3$，

所以$\vec{a}\cdot\vec{b}=4$.

故选：D.

5．等差数列$\{a_n\}$的公差为2，且$a_1+a_5+a_9=15$，则$a_2+a_6+a_{10}=$（　）

A．21　　B．24　　C．27　　D．30

【答案】A

【分析】利用等差数列的定义直接求解.

【详解】因为等差数列$\{a_n\}$的公差为2，且$a_1+a_5+a_9=15$，

所以$a_2+a_6+a_{10}=a_1+2+a_5+2+a_9+2=15+6=21$.

故选：A

6．若$(1+x)^4=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+a_4x^4$，则$a_0+a_1+a_2+a_3+a_4=$（　）

A．1　　B．8　　C．16　　D．32

【答案】C

【分析】根据展开式，利用赋值法取$x=1$求值即可.

【详解】令$x=1$，$a_0+a_1+a_2+a_3+a_4=(1+1)^4=16$

故选：C

7．若函数$f(x)=ax^2+2x-3$在区间$(-\infty,4]$上单调递增，则实数a的取值范围是（　）

A．$a>-\frac{1}{4}$　　B．$a\geq-\frac{1}{4}$

C．$-\frac{1}{4}\leq a<0$　　D．$-\frac{1}{4}\leq a\leq 0$

【答案】D

【分析】易得$a=0$满足；当$a\neq 0$时，满足$\begin{cases}a<0\\-\frac{1}{a}\geq 4\end{cases}$可求解.

【详解】当$a=0$时，$f(x)=2x-3$在$(-\infty,4]$上单调递增，满足题意；

当$a\neq 0$时，要使$f(x)$在$(-\infty,4]$上单调递增，则满足$\begin{cases}a<0\\-\frac{1}{a}\geq 4\end{cases}$，解得$-\frac{1}{4}\leq a<0$，

综上，实数a的取值范围为$\left[-\frac{1}{4},0\right]$.

故选：D.

8．已知m，n是两条不同的直线，α，β是两个不同的平面，有以下四个命题：

①若$m//n$，$n\subset\alpha$，则$m//\alpha$　　②若$m\subset\alpha$，$m\perp\beta$，则$\alpha\perp\beta$

③若$m\perp\alpha$，$m\perp\beta$，则$\alpha//\beta$　　④若$\alpha\perp\beta$，$m\subset\alpha$，$n\subset\beta$，则$m\perp n$

其中正确的命题是（　）

A．②③　　B．②④　　C．①③　　D．①②

【答案】A

【分析】由线面平行的判定定理、面面垂直的判定定理、面面平行的判定定理和面面垂直的性质定理对各命题进行检验.

【详解】若$m//n$，$n\subset\alpha$，则$m//\alpha$或$m\subset\alpha$，命题①错误；

由面面垂直的判定定理可知，命题②正确；

垂直于同一条直线的两个平面互相平行，命题③正确；

若$\alpha\perp\beta$，$m\subset\alpha$，$n\subset\beta$，则m,n可能相交可能平行可能异面，不一定互相垂直，命题④错误.

故选：A

二、填空题

9．函数$y=\sqrt{1-3^{x^2-2x-3}}$的定义域为________.

【答案】$[-1,3]$

【分析】根据根式的性质有$1-3^{x^2-2x-3}\geq 0$，利用指数函数的单调性解不等式求定义域即可.

【详解】由题设$1-3^{x^2-2x-3}\geq 0$，即$3^{x^2-2x-3}\leq 1=3^0$，

所以 $x^2-2x-3=(x+1)(x-3)\le 0$，可得 $-1\le x\le 3$，

故函数定义域为 $[-1,3]$.

故答案为：$[-1,3]$

10．在 $\triangle ABC$ 中，角 A，B，C 所对的边分别为 a，b，c，且 $a^2=b^2-c^2+\sqrt{3}ac$，则角 B 的大小是______.

【答案】$\frac{\pi}{6}$##$30°$

【分析】利用余弦定理的推论求解.

【详解】解：因为 $a^2=b^2-c^2+\sqrt{3}ac$，所以 $a^2+c^2-b^2=\sqrt{3}ac$，

由余弦定理的推论，得 $\cos B=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}=\frac{\sqrt{3}ac}{2ac}=\frac{\sqrt{3}}{2}$，

因为 $B\in(0,\pi)$，所以 $B=\frac{\pi}{6}$.

故答案为：$\frac{\pi}{6}$.

11．已知圆 C_1：$(x-4)^2+(y-3)^2=16$ 与圆 C_2：$x^2+y^2-2x+2y-9=0$，若两圆相交于 A，B 两点，则 $|AB|=$______

【答案】$2\sqrt{7}$

【分析】根据两圆相交时公共弦所在直线方程的求法和弦长公式求解.

【详解】圆 C_1 的方程为 $(x-4)^2+(y-3)^2=16$，即 $x^2+y^2-8x-6y+9=0$①，

又圆 C_2：$x^2+y^2-2x+2y-9=0$②，

②－①可得两圆公共弦所在的直线方程为 $6x+8y-18=0$，

圆 C_1 的圆心 $(4,3)$ 到直线的距离 $d=\frac{|24+24-18|}{\sqrt{6^2+8^2}}=3$，

所以$|AB|=2\sqrt{16-9}=2\sqrt{7}$.

故答案为: $2\sqrt{7}$.

12．围棋起源于中国，古代称“弈”，至今已有四千多年历史，蕴含着中华文化的丰富内涵.在某次国际围棋比赛中，甲、乙两人进入最后决赛.比赛采取五局三胜制，即先胜三局的一方获得比赛冠军（没有平局），比赛结束.假设每局比赛乙胜甲的概率都为$\frac{2}{3}$，且各局比赛的胜负互不影响，则甲以$3:1$获得冠军的概率为______.

【答案】$\frac{2}{27}$

【分析】四局比赛甲以$3:1$获得冠军，则前三局甲胜两局，败一局，第四局甲胜，进一步计算概率即可.

【详解】若四局比赛甲以$3:1$获得冠军，则前三局甲胜两局，败一局，第四局甲胜，

概率为：$P=\mathrm{C}_3^2\left(\frac{1}{3}\right)^2\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{2}{27}$.

故答案为：$\frac{2}{27}$.

三、解答题

13．在各项均为正数的等比数列$\{a_n\}$中，$a_1=2,a_3=8$.

（1）求数列$\{a_n\}$的通项公式；

（2）若$b_n=\log_2 a_n$,求数列$\{b_n\}$的前n项和T_n.

【答案】（1）$a_n=2^n$，（2）$T_n=\frac{n^2+n}{2}$

【分析】（1）设等比数的公比为q（$q>0$），则由$a_1=2,a_3=8$列方程可求出公比q，从而可求出数列$\{a_n\}$的通项公式；

（2）由（1）可得$b_n=\log_2 a_n=\log_2 2^n=n$，然后利用等差数列的求和公式求解即可

【详解】（1）由题意设等比数的公比为q（$q>0$），

因为$a_1=2,a_3=8$，所以$2q^2=8$，

解得$q=2$或$q=-2$（舍去），

所以$a_n=a_1q^{n-1}=2\times 2^{n-1}=2^n$，

（2）由（1）可得$b_n=\log_2 a_n=\log_2 2^n=n$，

所以$T_n=1+2+3+\cdots+n=\dfrac{n(n+1)}{2}=\dfrac{n^2+n}{2}$

14．已知椭圆$C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的左顶点为$A(-2\sqrt{2},0)$，右焦点为$F(2,0)$.

(1)求椭圆 C 的标准方程；

(2)过点 F 的直线 l 与椭圆 C 交于点 M，N（异于点 A），直线 AM，AN 分别与直线$x=4$交于点 P，Q．问：$\angle PFQ$的大小是否为定值？若是，求出此定值；若不是，请说明理由.

【答案】(1)$\dfrac{x^2}{8}+\dfrac{y^2}{4}=1$

(2)$\angle PFQ$的大小为定值$\dfrac{\pi}{2}$

【分析】（1）根据题意得到$a=2\sqrt{2},c=2$，即可得到答案；

（2）当直线$l\perp x$轴时，得到$P(4,2)$，$Q(4,-2)$，从而得到$k_{PF}\cdot k_{QF}=-1$，即可得到$\angle PFQ=\dfrac{\pi}{2}$，当直线 l 的斜率不为 0 时，设直线$l:x=my+2,M\left(x_1,y_1\right),N\left(x_2,y_2\right)$，得到$P\left(4,\dfrac{(4+2\sqrt{2})y_1}{x_1+2\sqrt{2}}\right)$，$Q\left(4,\dfrac{(4+2\sqrt{2})y_2}{x_2+2\sqrt{2}}\right)$，再根据$\overrightarrow{FP}\cdot\overrightarrow{FQ}=0$即可得到$\angle PFQ=\dfrac{\pi}{2}$.

【详解】（1）依题意，得$a=2\sqrt{2},c=2$，

$\therefore b=\sqrt{a^2-c^2}=2$，

所以椭圆 C 的标准方程为 $\dfrac{x^2}{8}+\dfrac{y^2}{4}=1$；

（2）$\angle PFQ$ 为定值 $\dfrac{\pi}{2}$.

①当直线 $l\perp x$ 轴时，代入椭圆方程，得 $M(2,\sqrt{2}),N(2,-\sqrt{2})$，

$\therefore$ 直线 AM 的方程为 $y=\dfrac{x+2\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}$，$\therefore$ 令 $x=4$，得 $y=2$，$P(4,2)$．同理可得 $Q(4,-2)$，

$\therefore k_{PF}=1,k_{QF}=-1$，则 $k_{PF}\cdot k_{QF}=-1$，即 $\angle PFQ=\dfrac{\pi}{2}$；

②当直线 l 的斜率不为 0 时，设直线 $l:x=my+2,M\left(x_1,y_1\right),N\left(x_2,y_2\right)$，

联立 $\begin{cases}\dfrac{x^2}{8}+\dfrac{y^2}{4}=1,\\ x=my+2,\end{cases}$ 整理得 $\left(m^2+2\right)y^2+4my-4=0$，

易知 $\Delta=16m^2+16\left(m^2+2\right)>0$，且 $y_1+y_2=-\dfrac{4m}{m^2+2},y_1y_2=-\dfrac{4}{m^2+2}$，

直线 AM 的方程为 $y=\dfrac{y_1}{x_1+2\sqrt{2}}(x+2\sqrt{2})$，

令 $x=4$，得 $y=\dfrac{(4+2\sqrt{2})y_1}{x_1+2\sqrt{2}}$，则 $P\left(4,\dfrac{(4+2\sqrt{2})y_1}{x_1+2\sqrt{2}}\right)$，同理可得 $Q\left(4,\dfrac{(4+2\sqrt{2})y_2}{x_2+2\sqrt{2}}\right)$.

$\therefore \overrightarrow{FP}=\left(2,\dfrac{(4+2\sqrt{2})y_1}{x_1+2\sqrt{2}}\right),\overrightarrow{FQ}=\left(2,\dfrac{(4+2\sqrt{2})y_2}{x_2+2\sqrt{2}}\right)$，

$$\therefore \overrightarrow{FP}\cdot\overrightarrow{FQ}=4+\frac{(4+2\sqrt{2})y_1}{x_1+2\sqrt{2}}\times\frac{(4+2\sqrt{2})y_2}{x_2+2\sqrt{2}}=4+\frac{(24+16\sqrt{2})y_1y_2}{\left(my_1+2+2\sqrt{2}\right)\left(my_2+2+2\sqrt{2}\right)}$$

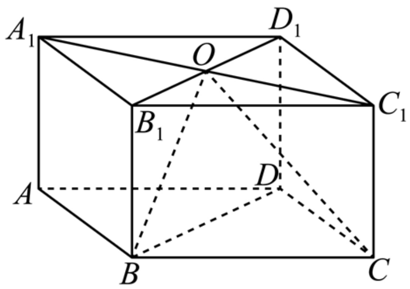
$$=4+\frac{(24+16\sqrt{2})\cdot\left(-\dfrac{4}{m^2+2}\right)}{-\dfrac{4m^2}{m^2+2}+(2+2\sqrt{2})m\cdot\dfrac{-4m}{m^2+2}+(12+8\sqrt{2})}=4+\frac{-4(24+16\sqrt{2})}{-4m^2(3+2\sqrt{2})+\left(m^2+2\right)(12+8\sqrt{2})}$$

$=4+\dfrac{-4(24+16\sqrt{2})}{2(12+8\sqrt{2})}=4-4=0$，

$\therefore \overrightarrow{PF}\perp\overrightarrow{PQ},\therefore \angle PFQ=\dfrac{\pi}{2}$，

综上所述，$\angle PFQ$ 的大小为定值 $\dfrac{\pi}{2}$.

15．如图，已知直四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的底面 $ABCD$ 为平行四边形，$AB=AA_1=1$，$AD=2$，$BD=\sqrt{3}$，A_1C_1 与 B_1D_1 交于点 O.



(1)求证：$BD\perp$ 平面 CC_1D_1D；

(2)求平面 AA_1B_1B 与平面 OBC 的夹角的余弦值.

【答案】(1)证明见解析

(2) $\dfrac{2\sqrt{19}}{19}$

【分析】（1）先由勾股定理证出 $BD\perp CD$，再证明直棱柱中 $DD_1\perp BD$，再使用线面垂直判定定理进行证明即可.

（2）以 D 为坐标原点，DB，DC，DD_1 所在的直线分别为 x 轴，y 轴，z 轴建立空间直角坐标系，求出平面的法向量进行求解即可.

【详解】（1）由已知可得 $DC=AB=1$，$BC=AD=2$，$BD=\sqrt{3}$，

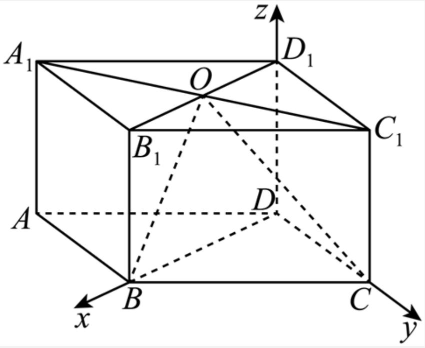
$\therefore BD^2+DC^2=BC^2$，$\therefore \angle BDC=90°$，即 $BD\perp CD$.

$\because DD_1 \perp$ 平面 $ABCD$， $BD \subset$ 平面 $ABCD$，$\therefore DD_1 \perp BD$.

又$\because CD \cap DD_1 = D$， $CD \subset$ 平面 CC_1D_1D， $DD_1 \subset$ 平面 CC_1D_1D，

$\therefore BD \perp$ 平面 CC_1D_1D .

（2）如图，以 D 为坐标原点， DB， DC， DD_1 所在的直线分别为 x 轴， y 轴， z 轴建立空间直角坐标系，



则 $D(0,0,0)$， $B(\sqrt{3},0,0)$， $C(0,1,0)$， $O\left(\frac{\sqrt{3}}{2},0,1\right)$.

$\therefore \overrightarrow{OB}=\left(\frac{\sqrt{3}}{2},0,-1\right)$， $\overrightarrow{BC}=\left(-\sqrt{3},1,0\right)$， $\overrightarrow{DB}=\left(\sqrt{3},0,0\right)$.

设平面 OBC 的法向量为 $\vec{n}=(x,y,z)$，

则 $\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{OB}=0\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{BC}=0\end{cases}$， $\therefore \begin{cases}\frac{\sqrt{3}}{2}x-z=0\\ -\sqrt{3}x+y=0\end{cases}$， 令 $x=2$， 则 $y=2\sqrt{3}$， $z=\sqrt{3}$，

$\therefore \vec{n}=\left(2,2\sqrt{3},\sqrt{3}\right)$，

易知，平面 CC_1D_1D // 平面 AA_1B_1B， $\because BD \perp$ 平面 CC_1D_1D， $\therefore BD \perp$ 平面 AA_1B_1B，

$\therefore \overrightarrow{DB}=\left(\sqrt{3},0,0\right)$ 为平面 AA_1B_1B 的一个法向量，

设平面 AA_1B_1B 与平面 OBC 的夹角为 θ，

$\therefore \cos\theta=\left|\cos\left\langle \vec{n},\overrightarrow{DB}\right\rangle\right|=\left|\frac{\vec{n}\cdot\overrightarrow{DB}}{\left|\vec{n}\right|\left|\overrightarrow{DB}\right|}\right|=\left|\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{4+12+3}\times\sqrt{3}}\right|=\frac{2\sqrt{19}}{19}$，

$\therefore$平面AA_1B_1B与平面OBC的夹角的余弦值为$\frac{2\sqrt{19}}{19}$