

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 12

ВЫЧИСЛЕНИЕ ОПРЕДЕЛЕННЫХ ИНТЕГРАЛОВ

Цель работы: получение практических навыков программирования численных методов.

Краткие теоретические сведения

Формулы для вычисления интеграла $U = \int_a^b f(x)dx$

получают следующим образом. Область интегрирования $[a, b]$ разбивают на малые отрезки, тогда значение интеграла по всей области равно сумме интегралов на этих отрезках.

Выбирают на каждом отрезке $[x_i, x_{i+1}]$ 1–5 узлов и строят интерполяционный многочлен соответствующего порядка. Вычисляют интеграл от этого многочлена, и в результате получают формулу численного интегрирования через значения подынтегральной функции в выбранной системе точек. Такие выражения называют **квадратурными формулами**.

Рассмотрим наиболее часто используемые квадратурные формулы для равных отрезков длиной $h = (b - a)/m$; $x_i = a + (i - 1) \cdot h$; $i = 1, 2, \dots, m$; где m – количество разбиений отрезка интегрирования.

Формула средних

Формула средних получается, если на каждом i -м отрезке взять один центральный узел $x_{i+1/2} = (x_i + x_{i+1})/2$, соответствующий середине отрезка. Функция на каждом отрезке аппроксимируется многочленом нулевой степени (константой) $P_0(x) = y_{i+1/2} = f(x_{i+1/2})$. Заменяя площадь криволинейной фигуры площадью прямоугольника высотой $y_{i+1/2}$ и основанием h , получим формулу средних (рис. 12.1):

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{i=1}^m \int_{x_i}^{x_{i+1}} P_0(x)dx = h \sum_{i=1}^m y_{i+1/2} = \Phi_{CP}.$$

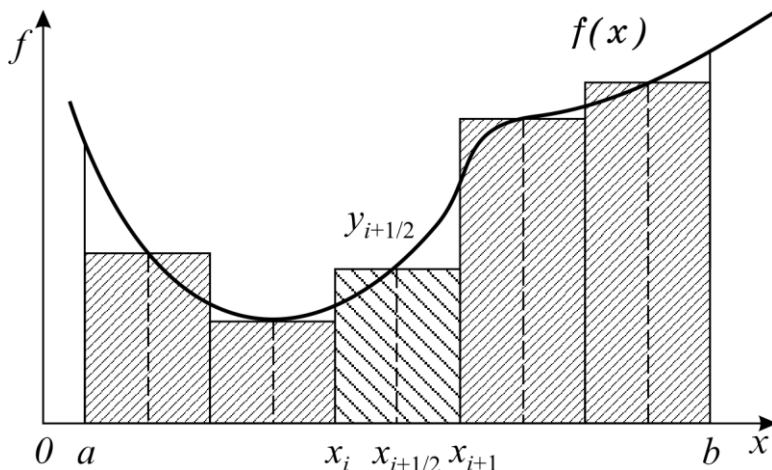


Рис. 12.1

Формула трапеций

Формула трапеций получается при аппроксимации функции $f(x)$ на каждом отрезке $[x_i, x_{i+1}]$ интерполяционным многочленом первого порядка, т.е. прямой, проходящей через точки (x_i, y_i) , (x_{i+1}, y_{i+1}) . Площадь криволинейной фигуры заменяется площадью трапеции с основаниями y_i , y_{i+1} и высотой h (рис. 12.2):

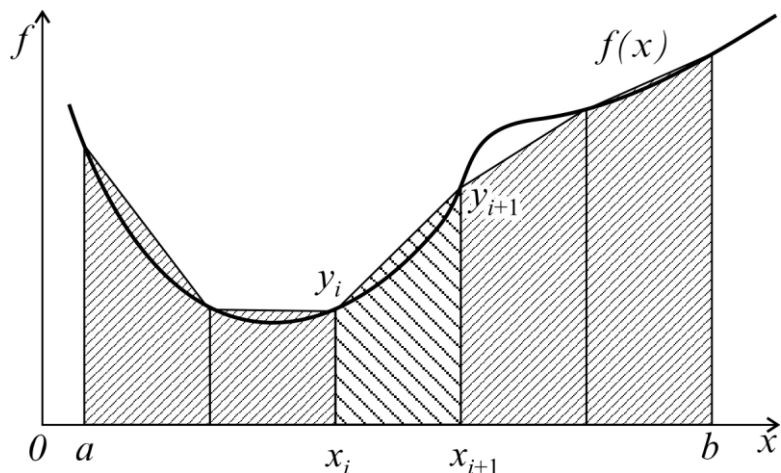


Рис. 12.2

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{i=1}^m \int_{x_i}^{x_{i+1}} P_1(x)dx = h \sum_{i=1}^m \frac{y_i + y_{i+1}}{2} = h \left[\frac{y_1 + y_{m+1}}{2} + \sum_{i=2}^m y_i \right] = \Phi_{TP}$$

Порядок выполнения работы

1. Изучить теоретические сведения.
2. Ответить на контрольные вопросы.
3. Выполнить задание.

Контрольные вопросы

1. Почему при программировании формулы трапеций и прямоугольников индексированные переменные x_i и $f(x_i)$ можно заменить простыми переменными?
2. Почему начальное значение суммы по формуле трапеций принимается не равным нулю, а по формуле прямоугольников - равное нулю?
3. Какой метод при одном и том же значении n дает лучшее приближение?

4. В чем состоят преимущества использования операторов цикла в программах?

Задания для выполнения

Написать и отладить программы вычисления интеграла указанными методами:

Функция $f(x)$	a	b	Метод интегрирования	Значение интеграла
$4x - 7\sin(x)$	-2	3	Средних	5.983
$x^2 - 10\sin^2(x)$	0	3	Трапеций	-6.699