# 1　収束定理

単調収束定理と Fatou の補題，Lebesgue の収束定理のステートメントその証明を述べます．単調収束定理あるいは Fatou の補題のいずれかを証明できれば，他の定理はそれらから示すことができますが，最初にこれら 2 つの命題のいずれかを示すのに骨が折れます．収束定理の理解を深めるためには，以下のアプローチで命題間の関係を知ることが近道です．

- 単調収束定理を認めて，Fatou の補題・Lebesgue の収束定理を示す．
- Fatou の補題を認めて，単調収束定理・Lebesgue の収束定理を示す．

以下では，まず命題のステートメントを述べた後，各々の証明を述べます．以下命題はいずれも測度空間 $(X, \mathcal{F}, \mu)$ 上で考えるものとします．

**Theorem 1** (単調収束定理)**.** $0 \leq f_n \leq f_{n+1}$ a.e., $n = 1, 2, \ldots$ かつ $f_n \to f, n$ a.e., as $n \to \infty$ である可測関数列 $f_n, n = 1, 2, \ldots$ と可測関数 $f$ について

$$\lim_{n\to\infty} \int_X f_n d\mu = \int_X f d\mu \tag{1}$$

が成り立つ．

**Theorem 2** (Fatou の補題)**.** $f_n \geq 0, n = 1, 2, \ldots$ a.e. である可測関数 $f_n$ について

$$\liminf_{n\to\infty} \int_X f_n d\mu = \int_X \liminf_{n\to\infty} f_n d\mu \tag{2}$$

が成り立つ．

**Theorem 3** (Lebesgue の収束定理)**.** 可測関数列 $f_n, n = 1, 2, \ldots$ と可測関数 $f$ が

- $f_n \to f$ a.e., as $n \to \infty$
- 任意の $n$ に対して $|f_n| \leq h$ a.e. となる可積分関数 $g$ が存在する

をみたすならば，

$$\lim_{n\to\infty} \int_X f_n d\mu = \int_X f d\mu \tag{3}$$

が成り立つ．

## 証明

命題間の関係を示し，その後に単調収束定理および Fatou の補題をそれぞれ示す．

*単調収束定理を認めたときの Fatou の補題の証明.* $g_n = \inf_{k\geq n} f_k$ とおけば，$f_n \geq g_n$ a.e. をみたす．また下極限の定義から，$\liminf_{n\to\infty} f_n = \sup_{n\geq 1} \inf_{k\geq n} f_k$ より，$g_n \uparrow \liminf_{n\to\infty} f_n$ もみたすことがわかる．したがって，単調収束定理から，

$$\liminf_{n\to\infty} \int_X f_n d\mu \geq \liminf_{n\to\infty} \int_X g_n d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_X g_n d\mu = \int_X \lim_{n\to\infty} g_n d\mu = \int_X \liminf_{n\to\infty} f_n d\mu \tag{4}$$

となる． □

*Fatou* の補題を認めたときの単調収束定理の証明. 仮定から $f_n \leq f, \int_X f_n d\mu \leq \int_X f d\mu$ なので,

$$\limsup_{n\to\infty} \int_X f_n d\mu \leq \int_X f d\mu \tag{5}$$

となる. Fatou の補題から

$$\int_X f d\mu \leq \liminf_{n\to\infty} \int_X f_n d\mu \tag{6}$$

がなりたつ. 一方で, 上限と下限の定義から

$$\liminf_{n\to\infty} \int_X f_n d\mu \leq \limsup_{n\to\infty} \int_X f_n d\mu \tag{7}$$

がなりたつので, これらの式を合わせれば,

$$\int_X f d\mu = \liminf_{n\to\infty} \int_X f_n d\mu = \limsup_{n\to\infty} \int_X f_n d\mu \tag{8}$$

が得られる. □

*Fatou* の補題を認めたときの *Lebesgue* の収束定理. $f_n \to f$ a.e., as $n \to \infty$, $f_n \leq h$ a.e, $n = 1, 2, \ldots$ で $g$ は可積分であることから, $|f| \leq h$ となり, $f$ も可積分である. $h + f_n \geq 0$ a.e., $h - f_n \geq 0$ a.e., $n = 1, 2, \ldots$ なので, これらに対して Fatou の補題を適用すると,

$$\begin{aligned} \int_X h d\mu + \int f d\mu = \int_X (h+f) d\mu = \int_X \liminf_{n\to\infty} (h+f_n) d\mu \qquad (9) \\ = \liminf_{n\to\infty} \int_X (h+f_n) d\mu = \int_X h d\mu + \liminf_{n\to\infty} \int_X f_n d\mu \qquad (10) \end{aligned}$$

より, $\liminf_{n\to\infty} \int_X f_n d\mu \geq \int_X h d\mu$ が得られる. 同様に

$$\begin{aligned} \int_X h d\mu + \int (-f) d\mu = \int_X (h-f) d\mu = \int_X \liminf_{n\to\infty} (h-f_n) d\mu \qquad (11) \\ = \liminf_{n\to\infty} \int_X (h-f_n) d\mu = \int_X h d\mu + \liminf_{n\to\infty} \int_X (-f_n) d\mu \qquad (12) \end{aligned}$$

より, $\limsup_{n\to\infty} \int_X f_n d\mu \leq \int_X h d\mu$ が得られる. これらを合わせれば, 題意を得る. □

## 2 Radon-Nikodym の定理

Capinski, and Kopp, *Measure, Integral and Probability*, Springer, 2004 をもとに Radon-Nikodym の定理を証明：可測空間 $(\Omega, \mathcal{F})$ 上の $F \in \mathcal{F}$ に対する測度 $\nu(F)$ が

$$F \mapsto \nu(F) = \int_F f d\mu \tag{13}$$

となるような $f$ を見つける問題.

### 用語

#### 絶対連続 (absolutely continuous)

任意の $F \in \mathcal{F}$ に対して $\mu(F) = 0$ ならば $\nu(F) = 0$, が成り立つならば, $\nu$ は $\mu$ に対して**絶対連続**であるといい, $\nu \ll \mu$ と表す.

押さえる (dominate)

任意の $F \in \mathcal{F}$ に対して $0 \leq \nu(F) \leq \mu(F)$ が成り立つとき，$\mu$ は $\nu$ を**押さえる**という．

分割 (partition)

$\mathcal{F}$ 内の有限な排反部分集合の集まり $\mathcal{P} + (F_i)_{i \leq n}$ で $\cup_i F_i = \Omega$ をみたすものを，(有限可測な)$\Omega$ の**分割**と呼ぶ．

細分 (refinement)

2 つの分割 $\mathcal{P}$,$\mathcal{P}'$ について，任意の $\mathcal{P}$ の要素が $\mathcal{P}'$ の排反な要素の和集合で表されるとき，$\mathcal{P}'$ は $\mathcal{P}$ の**細分**と呼ぶ．

$\sigma$-有限 ($\sigma$-finite)

$\cup_i F_i = \Omega$ をみたす $\mathcal{F}$-可測な集合列 $F_i$ が存在して，各 $i$ について $\nu(F_i)$ が有限の値をとるとき，$\nu$ を **$\sigma$-有限**な測度と呼ぶ．

## 証明

Radon-Nikodym の定理を証明する前に，以下の補助定理を証明しておくと便利．Radon-Nikodym の定理との違いは

- 2 つの測度が $\sigma$-有限ではなく，一方が片方を押さえているという仮定になっている．
- 押さえている方の測度 $\mu$ が全測度で 1 となる．

という 2 点．ただし，結論の形式は Radon-Nikodym の定理と同様なので，その雰囲気は伝わるはず．

**Theorem 4.** 任意の $F \in \mathcal{F}$ に対して，$\mu(\Omega) = 1$，$0 \leq \nu(F) \leq \mu(F)$ が成り立つ，つまり $\mu$ は $\nu$ を押さえる測度とする．このとき，任意の $F \in \mathcal{F}$ に対して，

$$\nu(F) = \int_F h d\mu \tag{14}$$

をみたす，($\Omega$ 上の) 非負 $\mathcal{F}$-可測関数 $h$ が存在する．

以下のステップで証明

- 分割 $\mathcal{P}$ に含まれる集合上で，(14) をみたすような $h_{\mathcal{P}}$ を構成する．ついでに $\mathcal{P}_{n+1}$ が $\mathcal{P}_n$ を細分するような分割の列 $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2, \ldots$ について，

  $$\int_\Omega h_{\mathcal{P}_n}^2 d\mu \tag{15}$$

  が非減少列になることを確認する．
- 1. の結果，および (15) で定められる列は上限 1 で押さえられることから，収束定理を用いて (14) をみたす $h$ を $h_{\mathcal{P}_n}$ の極限として求めることができる．
- 2. の方法で定めた $h$ が望ましい性質を持つことを確認する．