1 Radon-Nikodym の定理

Capinski, and Kopp, *Measure, Integral and Probability*, Springer, 2004 をもとに Radon-Nikodym の定理を証明：可測空間 $(\Omega, \mathcal{F})$ 上の $F \in \mathcal{F}$ に対する測度 $\nu(F)$ が

$$F \mapsto \nu(F) = \int_F f d\mu \tag{1}$$

となるような f を見つける問題.

用語

絶対連続 (absolutely continuous)

任意の $F \in \mathcal{F}$ に対して $\mu(F) = 0$ ならば $\nu(F) = 0$，が成り立つならば，ν は μ に対して**絶対連続**であるといい，$\nu \ll \mu$ と表す.

押さえる (dominate)

任意の $F \in \mathcal{F}$ に対して $0 \leq \nu(F) \leq \mu(F)$ が成り立つとき，μ は ν を**押さえる**という.

分割 (partition)

$\mathcal{F}$ 内の有限な排反部分集合の集まり $\mathcal{P} + (F_i)_{i \leq n}$ で $\cup_i F_i = \Omega$ をみたすものを，(有限可測な)Ω の**分割**と呼ぶ.

細分 (refinement)

2 つの分割 $\mathcal{P}, \mathcal{P}'$ について，任意の $\mathcal{P}$ の要素が $\mathcal{P}'$ の排反な要素の和集合で表されるとき，$\mathcal{P}'$ は $\mathcal{P}$ の**細分**と呼ぶ.

σ-有限 (σ-finite)

$\cup_i F_i = \Omega$ をみたす $\mathcal{F}$-可測な集合列 F_i が存在して，各 i について $\nu(F_i)$ が有限の値をとるとき，ν を **σ-有限**な測度と呼ぶ.

証明

Radon-Nikodym の定理を証明する前に，以下の補助定理を証明しておくと便利．Radon-Nikodym の定理との違いは

- 2 つの測度が σ-有限ではなく，一方が片方を押さえているという仮定になっている.
- 押さえている方の測度 μ が全測度で 1 となる.

という 2 点．ただし，結論の形式は Radon-Nikodym の定理と同様なので，その雰囲気は伝わるはず.

Theorem 1. 任意の $F \in \mathcal{F}$ に対して，$\mu(\Omega) = 1$，$0 \leq \nu(F) \leq \mu(F)$ が成り立つ，つまり μ は ν を押さえる測度とする．このとき，任意の $F \in \mathcal{F}$ に対して，

$$\nu(F) = \int_F h d\mu \tag{2}$$

をみたす，(Ω 上の) 非負 $\mathcal{F}$-可測関数 h が存在する.

以下のステップで証明

- 分割 $\mathcal{P}$ に含まれる集合上で，(2) をみたすような $h_{\mathcal{P}}$ を構成する．ついでに $\mathcal{P}_{n+1}$ が $\mathcal{P}_n$ を細分するような分割の列 $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2, \ldots$ について，
$$\int_\Omega h^2_{\mathcal{P}_n}\,d\mu \tag{3}$$
が非減少列になることを確認する．
- 1. の結果，および (3) で定められる列は上限 1 で押さえられることから，収束定理を用いて (2) をみたす h を $h_{\mathcal{P}_n}$ の極限として求めることができる．
- 2. の方法で定めた h が望ましい性質を持つことを確認する．