

# 1 Wiener Chaos Expansion

この節は Nualart[2] の本にある以下の Theorem 1.1.2 を示すことが目標である．基本的で重要な定理であるが，Malliavin 解析を展開する上ではこの定理を使うことしかしないため，この定理を認めて，次節へ進んでも本論の進行には影響しない．説明および証明は基本的に Kuo[1] に従う．

まず目標となる定理を述べる前に舞台設定を説明する．確率空間を  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ ， $B(t)$  を  $P$  に関する Brown 運動とする．有限区間  $[a, b]$  に対して，関数  $f \in L^2[a, b]$  に関する Wiener 積分

$$I(f) = \int_a^b f(t)dB(t) \quad (1)$$

は  $\mathcal{F}$  より小さな  $\sigma$ -加法族である

$$\mathcal{F}^B = \sigma\{B(t); a \leq t \leq b\} \quad (2)$$

に対して可測となり，一般には  $\mathcal{F} \neq \mathcal{F}^B$  である．以降本節では，確率空間  $(\Omega, \mathcal{F}^B, P)$  の Brown 運動  $B(t)$  を考える．

また， $\mathcal{F}^B$ -可測な  $\Omega$  上の関数を Brown 汎関数と呼ぶが， $\Omega$  上の  $P$ -二乗可積分な Brown 汎関数で構成される Hilbert 空間を  $L_B^2(\Omega)$  と表す． $L_B^2(\Omega)$  は  $L^2(\Omega)$  の部分空間となる．

以上の設定のもと，Nualart[2] で述べられている定理は以下のものである．

**Theorem 1** (Nualart[?] Theorem1.1.2). 任意の二乗可積分な確率変数  $F \in L^2(\Omega, \mathcal{F}^B, P)$  は重複確率積分の系列  $\{I_n(f_n)\}$  で展開することができる:

$$F = \sum_{n=0}^{\infty} I_n(f_n) \quad (3)$$

ここで， $f_0 = E(F)$  であり， $I_0$  は定数への恒等写像である．さらに， $f_n \in L^2(T^n)$  は対称で  $F$  により一意に定めることができる．また，重複確率積分は Definition 2，対称な関数は Definition 23 で定められるものである．

Kuo[1] に従って上の定理を示すにあたって，以下の手順で説明を行う．

1. Hilbert 空間  $L_B^2(\Omega)$  が直交部分空間の和で表されることを示し，それらの元から正規直交基底を構成できることを示す．これにより直交補空間の元から構成された正規直交基底によって  $\phi \in L_B^2(\Omega)$  を表現できることがわかる．(Kuo[1] 9.4,9.5)
2. 重複 Wiener 積分を構成し，上記の正規直交基底と関連することを示す．(Kuo[1] 9.6,9.7)
3. この結果の応用例として，Nualart の本の Theorem1.1.3 に示されている Martingale 表現定理を示す．(Kuo[1] 9.8)

## 1.1 $L_B^2(\Omega)$ の直交補空間への分解と正規直交基底による表現

関数  $f_1, f_2, \dots, f_k \in L^2[a, b]$  に対する Wiener 積分の積  $I(f_1)I(f_2) \cdots I(f_k)$  は  $k$  次の多項 chaos (polynomial chaos) と呼ばれる． $J_0 = \mathbb{R}$  とし，定数と  $k \leq n$  次の多項 chaos で張られる線形空間の  $L_B^2(\Omega)$  の閉包で各  $n \geq 1$  に対する  $J_n$  を定める．すると，

$$J_0 \subset J_1 \subset \cdots \subset J_n \subset \cdots \subset L_B^2(\Omega) \quad (4)$$

という関係が成り立つ．これらの  $\{J_n\}$  について以下が成り立つ．

**Theorem 2.** 和  $\bigcup_{n=0}^{\infty} J_n$  は  $L_B^2(\Omega)$  の中で稠密である.

さらに,  $K_0 = \mathbb{R}$  とし,  $J_n$  中の  $J_{n-1}$  の直交補空間として  $K_n$  を定める. すなわち以下が成り立つように  $K_n$  を定める.

$$J_n = J_{n-1} \oplus K_n \quad (5)$$

このように  $K_n$  を構成すると, 実 Hilbert 空間  $L_B^2(\Omega)$  の直交部分空間の列:

$$K_0, K_1, K_2, \dots, K_n, \dots \quad (6)$$

が得られる.

**Definition 1.** 非負整数  $n$  に対して, Hilbert 空間  $K_n$  の要素を  $n$  次の Wiener カオス (Kuo[1] では homogeneous chaoses) と呼ぶ.

$K_n \geq 1$  はすべて無限次元の空間であり, 次数 1 の斉次 chaos は正規分布に従う確率変数である. Wiener カオスの構成方法と定理 2 より次の定理が成り立つ.

**Theorem 3.** Hilbert 空間  $L_B^2(\Omega)$  は次数  $n \geq 0$  の斉次 chaos の空間  $K_n$  の直交和となる, すなわち,

$$L_B^2(\Omega) = K_0 \oplus K_1 \oplus K_2 \oplus \dots \oplus K_n \oplus \dots \quad (7)$$

が成り立つ. また, 関数  $\phi \in L_B^2(\Omega)$  は一意な Wiener カオス展開

$$\phi = \sum_{n=0}^{\infty} \phi_n \quad (8)$$

を持ち,  $L_B^2(\Omega)$  のノルム  $\|\cdot\|$  について

$$\|\phi\|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} \|\phi_n\|^2 \quad (9)$$

が成り立つ.

またこれに関連して次が成り立つ. この定理は正規直交基底を構成する際に用いられる.

**Theorem 4.**  $L_B^2(\Omega)$  から  $K_n$  への直交射影を  $P_n$  と表す.  $f_1, \dots, f_k$  を  $L^2[a, b]$  の非零直交関数とし,  $n_1, \dots, n_k$  非負整数とすると,

$$P_n(I(f_1)^{n_1} \dots I(f_k)^{n_k}) = H_{n_1}(I(f_1); \|f_1\|^2) \dots H_{n_k}(I(f_k); \|f_k\|^2) \quad (10)$$

が成り立つ. ただし  $n = n_1 + \dots + n_k$  である. また特に, 任意の非零関数  $f \in L^2[a, b]$  に対して,

$$P_n(I(f)^n) = H_n(I(f); \|f\|^2) \quad (11)$$

が成り立つ.

Theorem 3 により任意の  $f \in L_B^2(\Omega)$  を級数で展開することが可能であることがわかった. 次に展開に用いられる項に正規直交基底を用いることができることを示そう.

まず,  $L^2[a, b]$  の正規直交基底を  $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$  をひとつ固定する. 有限和をもつ非負整数列  $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$  に対して,  $\mathcal{H}_{n_1, n_2, \dots}$  を

$$\mathcal{H}_{n_1, n_2, \dots} = \prod_k \frac{1}{\sqrt{n_k!}} H_{n_k}(\tilde{e}_k) \quad (12)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{n_1! n_2! \dots}} H_{n_1}(\tilde{e}_1) H_{n_2}(\tilde{e}_2) \dots \quad (13)$$

と定める。ただし、 $H_n(x)$  は Hermite 多項式であり、

$$H_n(x) = \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \frac{(-1)^k x^{n-2k}}{k!(n-2k)!2^k} \quad (14)$$

で定められる。 $H_0(x) = 1$  であり、 $n_k$  のうち有限個しか非零にならないため、実際は上式の積は有限項の積である。この  $\mathcal{H}_{n_1, n_2, \dots}$  について次が成り立つ。

**Theorem 5.** 任意の  $n \geq 1$  に対して、関数の集合

$$\{\mathcal{H}_{n_1, n_2, \dots}; n_1 + n_2 + \dots = n\} \quad (15)$$

は  $K_n$  の部分集合であり、次をみす。

1. この集合で張られる線形空間は  $K_n$  の中で稠密である。
2.  $K_n$  の正規直交基底をなす。

以上を定理の形でまとめると次のとおりとなる。

**Theorem 6.** 関数の集合

$$\{\mathcal{H}_{n_1, n_2, \dots}; n_1 + n_2 + \dots = n, n = 0, 1, 2, \dots\} \quad (16)$$

は Hilbert 空間  $L_B^2(\Omega)$  の正規直交基底をなす。任意の  $\phi \in L_B^2(\Omega)$  は級数：

$$\phi = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{n_1 + n_2 + \dots = n} a_{n_1, n_2, \dots} \mathcal{H}_{n_1, n_2, \dots} \quad (17)$$

で一意に展開される。ここで、 $a_{n_1, n_2, \dots} = E(\phi \mathcal{H}_{n_1, n_2, \dots}) = \int_{\Omega} \phi \mathcal{H}_{n_1, n_2, \dots} dP$  である。

Nualart の本では  $\mathcal{H}_{n_1, n_2, \dots}$  の部分が多重確率積分となっている。実際、これらの項は重複 Wiener 積分と関連づけられることを次の節で示す。それが示されれば、Nualart の本の定理の証明が完了する。

## 1.2 正規直交基底の重複 Wiener 積分による表現

この節では重複 Wiener 積分を定め、その重複 Wiener 積分が Hermite 多項式および Wiener カオスと関連することを示す。

表記を簡単にするため  $T = [a, b]$  とすれば、本節の最初の目標は  $f \in L^2(T^n)$  に対して

$$\int_{T^n} f(t_1, t_2, \dots, t_n) dB(t_1) dB(t_2) \cdots dB(t_n) \quad (18)$$

を定めることである。集合  $D$  を

$$D = \{(t_1, t_2, \dots, t_n) \in T^n; \exists i \neq j \text{ such that } t_i = t_j\} \quad (19)$$

と定め、 $T^n$  の対角集合と呼ぶ。 $T^n$  の部分集合で  $[t_1^{(1)}, t_1^{(2)}] \times [t_2^{(1)}, t_2^{(2)}] \times \cdots \times [t_n^{(1)}, t_n^{(2)}]$  の形をとる集合を長方形と呼ぶ。

### Step 1. 対角なし階段関数 (Off-diagonal step functions)

Step 1. では対角なし階段関数とそれに対する確率積分を定める。また、関数の対称化を導入し、対角なし階段関数に関する確率積分について、非積分関数の対称化によって導かれる重要な性質を示す。

$T^n$  上の階段関数とは

$$f = \sum_{1 \leq i_1, i_2, \dots, i_n \leq k} a_{i_1, i_2, \dots, i_n} 1_{[\tau_{i_1-1}, \tau_{i_1}) \times [\tau_{i_2-1}, \tau_{i_2}) \times \dots \times [\tau_{i_n-1}, \tau_{i_n})} \quad (20)$$

と表される関数である。ただし、 $a = \tau_0 < \tau_1 < \tau_2 < \dots < \tau_k = b$  とする。また、対角なし階段関数を階段関数のうち

$$a_{i_1, i_2, \dots, i_n} = 0, i_p = i_q \text{ for some } p \neq q \quad (21)$$

をみたまものとする。すなわち、階段関数で集合  $D$  上では 0 となる関数を対角なし階段関数とする。また、対角なし階段関数の集合はベクトル空間をなす。

対角なし階段関数に対する確率積分を、異なる次数の係数が 0 となるように

$$I_n(f) = \sum_{1 \leq i_1, i_2, \dots, i_n \leq k} a_{i_1, i_2, \dots, i_n} \xi_{i_1} \xi_{i_2} \dots \xi_{i_n} \quad (22)$$

で定める。ここで、 $\xi_{i_p} = B(\tau_{i_p}) - B(\tau_{i_p-1})$ ,  $1 \leq p \leq n$  である。 $I_n(f)$  の値は  $f$  の表現によらないという意味で well-defined であり、写像  $I_n(f)$  は対角なし階段関数のベクトル空間上で線形である。

また、関数  $f(t_1, \dots, t_n)$  の対称化  $\hat{f}(t_1, \dots, t_n)$  を

$$\hat{f}(t_1, t_2, \dots, t_n) = \frac{1}{n!} \sum_{\sigma} f(t_{\sigma(1)}, t_{\sigma(2)}, \dots, t_{\sigma(n)}) \quad (23)$$

で定める。ただし、右辺の和は  $\{1, 2, \dots, n\}$  の順列  $\sigma$  のすべてに対してとる。Lebesgue 測度は対称であることから、任意の順列  $\sigma$  に対して、

$$\int_{T^n} |f(t_{\sigma(1)}, \dots, t_{\sigma(n)})|^2 dt_1 \dots dt_n = \int_{T^n} |f(t_1, \dots, t_n)|^2 dt_1 \dots dt_n \quad (24)$$

が成り立つ。したがって、三角不等式より

$$\|\hat{f}\| \leq \frac{1}{n!} \sum_{\sigma} \|f\| = \frac{1}{n!} n! \|f\| = \|f\| \quad (25)$$

が成り立つので、 $\|\hat{f}\| \leq \|f\|$  が得られる。また、 $f$  が対角なし階段関数ならば、 $\hat{f}$  も対角なし階段関数である。対角なし階段関数に関わる確率積分について以下が成り立つ。

**Lemma 1.**  $f$  が対角なし階段関数ならば、 $f$  に対する確率積分  $I_n(f)$  について次が成り立つ。

1.  $I_n(f) = I_n(\hat{f})$
2.  $E(I_n(f)) = 0$
3. 次が成り立つ。

$$E[I_n(f)^2] = n! \int_{T^n} |\hat{f}(t_1, \dots, t_n)|^2 dt_1 \dots dt_n \quad (26)$$

Step 2. 対角なし階段関数による近似

集合  $D$  は  $D = \cup_{i \neq j} [\{t_i = t_j\} \cap D]$  と書き直すことができる。これは、集合  $D$  は  $(n-1)$  次元超平面の共通部分に関する有限和で表されるということで、すなわち集合  $D$  の Lebesgue 測度は 0 であるということである。これから次の補題を示すことができる

**Lemma 2.**  $f \in L^2(T^n)$  に対して, 対角なし階段関数  $\{f_k\}$  が存在して,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{T^n} |f(t_1, \dots, t_n) - f_k(t_1, \dots, t_n)|^2 dt_1 \cdots dt_n = 0 \quad (27)$$

がなりたつ.

この補題から,  $f \in L^2(T^n)$  に収束する対角なし階段関数の列  $\{f_k\}$ ,  $\{f_l\}$  がとれ,  $I_n$  の線形性と Lemma ?? から,

$$E \left[ (I_n(f_k) - I_n(f_l))^2 \right] = n! \|\hat{f}_k - \hat{f}_l\|^2 \leq n! \|f_k - f_l\|^2 \rightarrow 0 \text{ (as } k, l \rightarrow \infty) \quad (28)$$

が得られるので,  $\{I_n(f_k)\}_{k=1}^\infty$  は  $L^2(\Omega)$  で Cauchy 列をなす. したがって,

$$I_n(f) = \lim_{k \rightarrow \infty} I_n(f_k) \text{ in } L^2(\Omega) \quad (29)$$

として,  $f \in L^2(T^n)$  に対する確率積分を定めれば,  $\{f_k\}$  のとり方に依存しないという意味で well-defined である.

**Definition 2.**  $f \in L^2(T^n)$  に対して, (29) で定められる極限  $I_n(f)$  を  $f$  の重複 Wiener-Itô 積分と呼び

$$\int_{T^n} f(t_1, \dots, t_n) dB(t_1) \cdots dB(t_n) \quad (30)$$

と表す.

Lemma 2 を用いれば Lemma 1 の結果は  $f \in L^2(T^n)$  に対して拡張可能である. これを以下にまとめる.

**Theorem 7.**  $f \in L^2(T^n)$ ,  $n \geq 1$  とするとき次が成り立つ.

1.  $I_n(f) = I_n(\hat{f})$ .  $\hat{f}$  は  $f$  の対称化である.
2.  $E[I_n(f)] = 0$ .
3.  $E[I_n(f)^2] = n! \|\hat{f}\|^2$ .  $\|\cdot\|$  は  $L^2(T^n)$  のノルムである.

**Theorem 8.**  $f \in L^2(T^n)$ ,  $n \geq 2$  とするとき, 次が成り立つ.

$$\int_{T^n} f(t_1, \dots, t_{n-1}, t_n) dB(t_1) \cdots dB(t_{n-1}) dB(t_n) \quad (31)$$

$$= n! \int_a^b \cdots \int_a^{t_{n-2}} \left[ \int_a^{t_{n-1}} \hat{f}(t_1, \dots, t_{n-1}, t_n) dB(t_n) \right] dB(t_{n-1}) \cdots dB(t_1). \quad (32)$$

ただし,  $\hat{f}$  は  $f$  の対称化である.

Step 3. 重複 Wiener-Itô 積分と斉次 chaos の対応づけ

**Definition 3.**  $g_1, \dots, g_n \in L^2[a, b]$  のとき,

$$g_1 \otimes \cdots \otimes g_n(t_1, \dots, t_n) = g_1(t_1) \cdots g_n(t_n) \quad (33)$$

で tensor 積  $g_1 \otimes \cdots \otimes g_n(t_1, \dots, t_n)$  を定める. また, tensor 積  $f_1^{\otimes n_1} \otimes \cdots \otimes f_k^{\otimes n_k}$  は  $f_i$  が  $n_i$  回繰り返されていることを意味する.

**Theorem 9.**  $f_1, f_2, \dots, f_k$  を  $L^2[a, b]$  の非負直交関数とし,  $n_1, n_2, \dots, n_k$  を正整数とする. このとき,

$$I_n(f_1^{\otimes n_1} \otimes \cdots \otimes f_k^{\otimes n_k}) = \prod_{j=1}^k H_{n_j}(I(f_j); \|f_j\|^2) \quad (34)$$

が成り立つ。ただし、 $n = n_1 + n_2 \cdots n_k$  であり、 $H_n(x; \rho)$  は

$$H_n(x; \rho) = \sum_{k=0}^{[n/2]} \binom{n}{2k} (2k-1)!! (-\rho)^k x^{n-2k} \quad (35)$$

で定められる Hermite 多項式である。特に任意の非負関数  $f \in L^2[a, b]$  に対して

$$I_n(f^{\otimes n}) = H_n(I(f); \|f\|^2) \quad (36)$$

が成り立つ。

$I_n(f)$  の性質として、最後に Hilbert 空間  $L_B^2(\Omega)$  上における  $I_n(f)$  と  $I_m(g)$ ,  $n \neq m$  の直交性を示す。

**Theorem 10.** 任意の  $f \in L^2(T^n)$ ,  $g \in L^2(T^m)$  と  $n \neq m$  に対して、 $E(I_n(f)I_m(g)) = 0$  が成り立つ。

実は  $n$  次の斉次 chaos は、 $n$  重重複 Wiener-Itô 積分と一致する。この事実を次で示す。

**Theorem 11.**  $f \in L^2(T^n)$ ,  $n \geq 1$  ならば、 $I_n(f) \in K_n$  である。逆に、 $\phi \in K_n$ ,  $n \geq 1$  ならば、関数  $f \in L_{\text{sym}}^2(T^n)$  が存在して、 $\phi = I_n(f)$  をみたす。ただし、 $L_{\text{sym}}^2(T^n)$  は  $T^n$  上の対称な二乗可積分関数からなる実 Hilbert 空間を表す。

次の定理は Theorem 3 と Theorem 11 から得られる。

**Theorem 12** (Wiener-Itô). 空間  $L_B^2(\Omega)$  は以下の直交直和に分解できる。

$$L_B^2(\Omega) = K_0 \oplus K_1 \oplus K_2 \oplus \cdots \oplus K_n \oplus \cdots \quad (37)$$

ここで、 $K_n$  は  $n$  重重複 Wiener-Itô 積分からなる。また、任意の関数  $\phi \in L_B^2(\omega)$  は

$$\phi = \sum_{n=0}^{\infty} I_n(f_n), f \in L_{\text{sym}}^2(T^n) \quad (38)$$

で一意に展開することができ、

$$\|\phi\|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} n! \|f_n\|^2 \quad (39)$$

が成り立つ。

### 1.3 命題の証明

Theorem 2 の証明. □

Theorem 4 の証明. □

Theorem 5 の証明. □

Lemma 1 の証明. □

Lemma 2 の証明. □

Theorem 9 の証明. □

Theorem 10 の証明. □

Theorem 11 の証明. □

Theorem 12 の証明. □

## 2 The Derivative Operator

微分作用素については以下の段取りで Nualart[2] の 1.2 節の内容を説明する.

1. 微分作用素の定義
2. 微分作用素の例
3. 微分作用素の性質

### 2.1 微分作用素の定義

#### 2.1.1 微分作用素の定義

Brown 運動  $W(h)$  は確率空間  $(\Omega, \mathcal{F}^B, P)$  上で定められ, その添字全体の集合を Hilbert 空間  $H$  とする. ここでは

$$F = f(W(h_1), \dots, W(h_n)) \quad (40)$$

で表される確率変数で  $f$  は適当に微分が滑らかである関数とする.  $f$  にどの程度の滑らかが必要であるかは微分作用素の定義域を論じる際に補足する. この  $f$  に対する偏微分の表記については  $\partial_i f = \frac{\partial f}{\partial x_i}$  および  $\nabla f = (\partial_1 f, \dots, \partial_n f)$  を用いる. まず, 添字集合を値にとる確率変数に対する微分を次のように定める.

**Definition 4.** (40) の形で表される滑らかな確率変数  $F$  の微分  $DF$  を, 次で表される  $H$ -値確率変数で定める.

$$DF = \sum_{i=1}^n \partial_i f(W(h_1), \dots, W(h_n)) h_i. \quad (41)$$

$DF$  を方向微分と解するには, 任意の  $h \in H$  に対して,

$$\langle DF, h \rangle_H = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon} [f(W(h_1) + \epsilon \langle h_1, h \rangle_H, \dots, W(h_n) + \epsilon \langle h_n, h \rangle_H) - f(W(h_1), \dots, W(h_n))]. \quad (42)$$

が得られることに注意する. ラフに言うと,  $\langle DF, h \rangle_H$  は, シフトした過程  $\{W(g) + \epsilon \langle g, h \rangle_H, g \in H\}$  と確率変数  $F$  を合わせた  $\epsilon = 0$  における微分であると解することができる.

次の結果はいわゆる部分積分の公式である.

**Lemma 3.**  $F$  を滑らかな確率変数とし,  $h \in H$  とすると次が成り立つ.

$$E(\langle DF, h \rangle_H) = E(FW(h)). \quad (43)$$

この補題を確率変数の積  $FG$  に適用することで次の結果が得られる.

**Lemma 4.**  $F, G$  を滑らかな確率変数,  $h \in H$  とするとき, 次が成り立つ.

$$E(G \langle DF, h \rangle_H) = E(-F \langle DG, h \rangle_H + FGW(h)) \quad (44)$$

さらにこの補題から次の結果が得られる.

**Proposition 1.** 任意の  $p \geq 1$  に対して, 作用素  $D$  は  $L^p(\Omega)$  から  $L^p(\Omega; H)$  への作用素として閉じている.

### 2.1.2 微分作用素の定義域

微分作用素  $D$  の定義域を考えるために以下の関数空間を定めておく．  $C_p^\infty(\mathbb{R}^n)$  を無限回連続微分可能な関数  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  で、その偏微分が  $p$  次多項式のオーダーで増大するものの集合とし、同様に偏微分が有限である関数  $f$  の集合を  $C_b^\infty(\mathbb{R}^n)$ 、コンパクトな台を持つ関数  $f$  の集合を  $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$  と表す．

また (40) で表される確率変数で  $f$  が  $C_p^\infty(\mathbb{R}^n)$  に属する、なめらかな確率変数  $F$  の集合を  $\mathcal{S}$  と表す． (40) で定められる滑らかな確率変数で、  $f$  が  $C_b^\infty(\mathbb{R}^n)$  に含まれるものの集合を  $\mathcal{S}_b$ 、  $f$  が  $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$  に含まれるものの集合を  $\mathcal{S}_0$ 、  $f$  が多項式である確率変数の集合を  $\mathcal{P}$  と表す．  $\mathcal{P} \subset \mathcal{S}$ 、  $\mathcal{S}_0 \subset \mathcal{S}_b \subset \mathcal{S}$  という関係式が成り立ち、  $\mathcal{P}$  と  $\mathcal{S}_0$  は  $L^2(\Omega)$  の中で稠密に存在することに注意．以上の定義をもとに、以降で微分作用素  $D$  の定義域  $\mathbb{D}^{h,p}$  を定める．

まず、任意に  $p \geq 1$  を固定して、  $L^2(\Omega)$  内の  $D$  の定義域を  $\mathbb{D}^{1,p}$  と表す．  $\mathbb{D}^{1,p}$  の意味は、滑らかな確率変数の集合  $\mathcal{S}$  のノルム

$$\|F\|_{1,p} = [E(|F|^p) + E(\|DF\|_H^p)]^{1/p} \quad (45)$$

に関する閉包という意味である．  $p = 2$  のとき、  $\mathbb{D}^{1,2}$  は内積

$$\langle F, G \rangle_{1,2} = E(FG) + E(\langle DF, DG \rangle_H) \quad (46)$$

を持つ Hilbert 空間である．

滑らかな確率変数  $F$  に対して、  $k$  階の微分  $D^k F$  は  $H^{\otimes k}$  に値をとる確率変数として定めることができる．  $p \geq 1$  と自然数  $k \geq 1$  に対して、  $\mathcal{S}$  上の準ノルムを

$$\|F\|_{k,p} = \left[ E(|F|^p) \sum_{j=1}^k E(\|D^j F\|_{H^{\otimes j}}^p) \right]^{1/p} \quad (47)$$

で定める．この準ノルムは次の性質を持つ．

1. 単調性：任意の  $F \in \mathcal{S}$  に対して、  $\|F\|_{k,p} \leq \|F\|_{j,q}$ 、  $p \leq q$ 、  $k \leq j$  が成り立つ．
2. 閉じている：任意の  $p \geq 1$  に対して、  $\mathcal{S}$  から  $L^p(\Omega; H^{\otimes k})$  への作用素  $D^k$  は閉じている．
3. 無矛盾性：  $p, q \geq 1$  を実数、  $k, j$  を自然数とする．  $F_n$  を滑らかな確率変数列とする．

なめらかな確率変数の族  $\mathcal{S}$  をノルム  $\|\cdot\|_{k,p}$  完備化した集合族を  $\mathbb{D}^{k,p}$  と表す．上の性質 1. から、  $\mathbb{D}^{k+1,p} \subset \mathbb{D}^{k,p}$ 、  $k \geq 0$ 、  $p > q$  がわかる．  $k = 0$  については  $\|\cdot\|_{0,p} = \|\cdot\|_p$ 、  $\mathbb{D}^{0,p} = L^p(\Omega)$  とおく．

任意に  $h \in H$  を固定し、  $\mathcal{S}$  上の微分  $D^h$  を

$$D^h F = \langle DF, h \rangle_H \quad (48)$$

で定める． Lemma 4 より、任意の  $p \geq 1$  に対してこの微分作用素は  $L^p(\Omega)$  から  $L^p(\Omega)$  への作用として閉じており、この微分作用素の定義域を  $\mathbb{D}^{h,p}$  と表す．

## 2.2 微分作用素の例

微分作用素  $D$  の簡単な適用例として、  $n = 1$ 、  $f = x$  のときは、  $\partial f = \partial x = 1$  より  $DW(h) = \partial W(h)h = h$  となる．



### 2.2.1 Nualart [2] 1.2.1 の例

冒頭の例に加えて, Nualart[2] 1.2.1 項にある, white noise の例での種々の微分作用素の計算を説明する. この項の以降では,  $H = L^2(T, \mathcal{B}, \mu)$  を可分 Hilbert 空間で,  $\mu$  は可測空間  $(T, \mathcal{B})$  上の  $\sigma$ -有限でアトムを持たない測度とする.

$L^2(\Omega; H)$ ,  $L^2(T \times \Omega)$  を区別するため, この場合の, 確率変数  $F \in \mathbb{D}^{1,2}$  の微分を確率過程  $\{D_t F, t \in T\}$  で定める. さらに一般に  $F \in \mathbb{D}^{k,2}, k \geq 2$  に対しては, 微分

$$D^k F = \{D_{1, \dots, t_k}^k F, t_i \in T\} \quad (49)$$

は  $T^k \times \Omega$  上の可測関数となる. この定義では,  $k \geq 1$  に対して,  $D^k F$  は測度  $\mu^k \times P$  に関して a.e. で定めることができる.

正準空間  $\Omega = C_0([0, 1]; \mathbb{R}^d)$  上で定められた区間  $[0, 1]$  上の  $d$ -次元 Brown 運動を考える. 二乗可積分な微分を持つ絶対連続な関数  $x : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^d$  からなる  $\Omega$  の部分空間を  $H^1$  と表す. すなわち  $x \in H^1$  は,  $x(t) = \int_0^t \dot{x}(s) ds$ ,  $\dot{x} \in H = L^2([0, 1]; \mathbb{R}^d)$  である.  $H^1$  は Cameron-Martin 空間と呼ばれる.  $H^1$  の内積を

$$\langle x, y \rangle_{H^1} = \langle \dot{x}, \dot{y} \rangle_H = \sum_{i=1}^d \int_0^1 \dot{x}^i(s) \dot{y}^i(s) ds \quad (50)$$

と定めることで,  $H$  の Hilbert 空間としての構造を  $H^1$  へ移すことができ,  $H^1$  は  $H$  と位相同型 (isomorphic) な Hilbert 空間となる. また, 次の関係式から  $H^1$  の  $\Omega$  への単射は連続であることがわかる.

$$\sup_{0 \leq t \leq 1} |x(t)| \leq \int_0^1 |\dot{x}(s)| ds \leq \|\dot{x}\|_H = \|x\|_{H^1} \quad (51)$$

$d = 1$  として,  $F = f(W(t_1), \dots, W(t_n)), f \in C_p^\infty(\mathbb{R}^n), 0 \leq t_1 < \dots < t_n, W(t_i) = \int_0^{t_i} dW(t) = W(1_{[0, t_i]})$  で定められる確率変数  $F$  に関して,  $h \in H$  に対する内積  $\langle DF, h \rangle_H$  を計算すると次のようになる.

$$\langle DF, h \rangle_H = \sum_{i=1}^n \partial_i f(W(t_1), \dots, W(t_n)) \langle 1_{[0, t_i]}, h \rangle_H \quad (52)$$

$$= \sum_{i=1}^n \partial_i f(W(t_1), \dots, W(t_n)) \int_0^{t_i} h(s) ds \quad (53)$$

$$= \frac{d}{d\epsilon} F \left( \omega + \epsilon \int_0^{\cdot} h(s) ds \right) \Big|_{\epsilon=0}. \quad (54)$$

したがって, 内積  $\langle DF, h \rangle_H$  は  $H^1$  に属する  $\int_0^{\cdot} h(s) ds$  の方向に向かう  $F$  の方向微分と一致することがわかる.

一方,  $F$  を Fréchet 微分可能とし  $F$  の Fréchet 微分に関する符号付測度を  $\lambda^F$  と表すと,  $h \in H$  に対して

$$\langle DF, h \rangle_H = \int_0^1 \lambda^F(dt) \left( \int_0^t h(s) ds \right) dt = \int_0^1 \lambda^F((t, 1]) h(t) dt \quad (55)$$

と計算できることから,  $D_t F = \lambda^F((t, 1])$  が成り立つことがわかる.

次に, 一般に二乗可積分な確率変数  $F$  が Wiener カオス展開により

$$F = \sum_{n=1}^{\infty} I_n(f_n) \quad (56)$$

と表されているものとする. ここで  $\text{kernel } f_n$  は  $L^2(T^n)$  に属する対称な関数である. この表現を用いると, 次の命題のとおり, 微分を簡単に計算することができる.

**Proposition 2.**  $F \in \mathbb{D}^{1,2}$  を (56) で展開される二乗可積分な確率変数とすると、次が成り立つ。

$$D_t F = \sum_{n=1}^{\infty} n I_{n-1}(f_n(\cdot, t)). \quad (57)$$

この命題の意味は、 $F$  の Wiener カオス展開のうち、一つの積分を消し、変数  $t$  を可変にし、各項に  $n$  をかければ、 $D_t F$  が得られるということ。ただし、 $F$  は

$$F = \int_T \cdots \int_T f_n(t_1, \dots, t_n) W(t_1) \cdots W(t_n) \quad (58)$$

で表され、微分作用素の定義域に属していなければならない。

### 2.2.2 条件付期待値に対する微分

前項の設定のまま、Gaussian の確率積分から生成される  $\sigma$ -加法族に関する条件付期待値の微分を計算する方法を説明する。 $A \in \mathcal{B}$  として、 $\{W(B), B \subset A, B \in \mathcal{B}_0\}$  から生成され、確率  $P$  に関して完備な  $\sigma$ -加法族を  $\mathcal{F}_A$  と表す。条件付期待値の計算公式を得る際の証明に以下の補題を使う。

**Lemma 5.**  $F$  を (56) で展開される二乗可積分な確率変数とすると、 $A \in \mathcal{B}$  に対して次が成り立つ。

$$E(F|\mathcal{F}_A) = \sum_{n=0}^{\infty} I_n(f_n 1_A^{\otimes n}). \quad (59)$$

この補題を用いて、次の命題とその系を示すことができる。

**Proposition 3.**  $F \in \mathbb{D}^{1,2}$ ,  $A \in \mathcal{B}$  とすると、 $E(F|\mathcal{F}_A) \in \mathbb{D}^{1,2}$  であり、次が、 $T \times \Omega$  上で a.e. で成り立つ。

$$D_t(E(F)|\mathcal{F}_A) = E(D_t F|\mathcal{F}_A) 1_A(t). \quad (60)$$

**Corollary 1.**  $A \in \mathcal{B}$  とし、 $F \in \mathbb{D}^{1,2}$  は  $\mathcal{F}_A$ -可測であるとする。このとき、 $D_t F$  は  $A^c \times \Omega$  上 a.e. で 0 となる。

最後に後の 3 節で Skorohod 積分で使用する空間を定義する。可測集合  $A \in \mathcal{B}$  に対して、 $A$  上で微分可能な確率変数の集合を  $\mathbb{D}^{A,2}$  で表し、準ノルム

$$\|F\|_{A,2}^2 = E(F^2) + E\left(\int_A (D_t F)^2 \mu(dt)\right) \quad (61)$$

によって  $\mathcal{S}$  の閉包として定める。

## 2.3 微分作用素の性質

$\mathcal{S}$  に対して定めた準ノルム：

$$\|F\|_{k,p} = \left[ E(|F|^p) \sum_{j=1}^k E(\|D^j F\|_{H^{\otimes j}}^p) \right]^{1/p} \quad (62)$$

は次の性質を持つ。

1. 単調性：任意の  $F \in \mathcal{S}$  に対して、 $\|F\|_{k,p} \leq \|F\|_{j,q}, p \leq q, k \leq j$  が成り立つ。
2. 閉じている：任意の  $p \geq 1$  に対して、 $\mathcal{S}$  から  $L^p(\Omega; H^{\otimes k})$  への作用素  $D^k$  は閉じている。
3. 無矛盾性： $p, q \geq 1$  を実数、 $k, j$  を自然数とする。 $F_n$  を滑らかな確率変数列とする。

微分作用素の定義域  $\mathbb{D}^{1,2}$  を以下のように特徴付けることができる。

**Proposition 4.**  $F$  を二乗可積分な確率変数で  $F = \sum_{n=1}^{\infty} J_n F$  で Wiener カオス展開できるとする。 $F \in \mathbb{D}^{1,2}$  であるための必要十分条件は次式が成り立つことである。

$$E(\|DF\|_H^2) = \sum_{n=1}^{\infty} n \|J_n F\|_2^2 < \infty \quad (63)$$

さらに上式が成り立つならば、任意の  $\geq 1$  に対して  $D(J_n F) = J_{n-1}(DF)$  がえられる。

繰り返し適用することで、任意の  $n \geq k \geq 2$  に対して  $D^k(J_n F) = J_{n-k}(D^k F)$  が得られるので、

$$E(\|D^k F\|_{H^{\otimes k}}^2) = \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1) \cdots (n-k+1) \|J_n F\|_2^2 \quad (64)$$

かつ  $F \in \mathbb{D}^{k,2}$  が成り立つための必要十分条件は  $\sum_{n=1}^{\infty} n^k \|J_n F\|_2^2 < \infty$  であることがわかる。

次の結果が連鎖公式である。

**Proposition 5.**  $\varphi : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$  を偏微分が有限となる連続微分可能な関数とし、任意に  $p \geq 1$  を固定する。 $F = (F^1, \dots, F^m)$  を各要素が  $\mathbb{D}^{1,p}$  に属する確率ベクトルとすると、 $\varphi(F) \in \mathbb{D}^{1,p}$  となり、次が成り立つ。

$$D(\varphi(F)) = \sum_{i=1}^m \partial_i \varphi(F) DF^i. \quad (65)$$

確率変数  $F$  をなめらかな確率変数で近似し、関数  $\varphi$  を  $\varphi * \psi_\epsilon$  で近似することで示すことができる。ただし、 $\psi_\epsilon$  は恒等写像を近似する関数である。

連鎖公式は Lipschitz 連続な関数に対して拡張可能であるが、その結果を示すために次の補題を示す必要がある。

**Lemma 6.**  $\{F_n; n \geq 1\}$  を、 $L^2(\Omega)$  内の確率変数  $F$  に収束する  $\mathbb{D}^{1,2}$  内の確率変数列で、

$$\sup_n E(\|DF_n\|_H^2) < \infty \quad (66)$$

をみたすものとする。このとき、 $F$  は  $\mathbb{D}^{1,2}$  に属し、微分の列  $\{DF_n, n \geq 1\}$  は  $L^2(\Omega; H)$  の弱位相で  $DF$  に収束する。

**Proposition 6.**  $\varphi : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$  を、任意の  $x, y \in \mathbb{R}^m$  に対して

$$|\varphi(x) - \varphi(y)| \leq K|x - y| \quad (67)$$

をみたす関数とし、 $F = (F^1, \dots, F^m)$  を各要素が  $\mathbb{D}^{1,2}$  に属する確率ベクトルとする。このとき、 $\varphi(F) \in \mathbb{D}^{1,2}$  であり、 $K$  で有界な  $G = (G_1, \dots, G_m)$  が存在し、

$$D(\varphi(F)) = \sum_{i=1}^m G_i DF^i \quad (68)$$

が成り立つ。

確率ベクトル  $F$  の分布が  $\mathbb{R}^m$  上の Lebesgue 測度に関して絶対連続ならば、(68) で  $G^i = \partial_i \varphi(F)$  とすることができる。また、任意  $p \geq 1$  で  $\mathbb{D}^{1,2}$  を  $\mathbb{D}^{1,p}$  に変えても、Proposition 6 と Lemma 6 が成り立つ。

次の技術的結果を後で使う。

**Lemma 7.** 確率変数の族  $\{1, W(h)G - D^h G, G \in \mathcal{S}_b, h \in H\}$  は  $L^2(\Omega)$  全体の部分集合をなす。

**Proposition 7.**  $F$  を  $\mathbb{D}^{1,1}$  に属する確率変数で  $DF = 0$  をみたすものとする. このとき,  $F = E(F)$  が成り立つ.

**Proposition 8.**  $A \in \mathcal{F}$  とする.  $A$  の定義関数が  $\mathbb{D}^{1,1}$  に属するための必要十分条件は  $P(A)$  が 0 または 1 を値にとることである.

## 2.4 命題の証明

*Lemma 3* の証明. □

*Lemma 4* の証明. □

*Proposition 1* の証明. □

## 参考文献

- [1] Kuo, Hui-Hsiung: Introduction to Stochastic Integration, Springer, 2006.
- [2] Nualart, D.: The Malliavin Calculus and Related Topics Second Edition, Springer, 2006.