1　極限と積分の交換に関する定理

単調収束定理と Fatou の補題，Lebesgue の収束定理のステートメントその証明を述べます．単調収束定理あるいは Fatou の補題のいずれかを証明できれば，他の定理はそれらから示すことができますが，最初にこれら 2 つの命題のいずれかを示すのに骨が折れます．収束定理の理解を深めるためには，以下のアプローチで命題間の関係を知ることが近道です．

- 単調収束定理を認めて，Fatou の補題・Lebesgue の収束定理を示す．
- Fatou の補題を認めて，単調収束定理・Lebesgue の収束定理を示す．

以下では，まず命題のステートメントを述べた後，各々の証明を述べます．以下命題はいずれも測度空間 $(X, \mathcal{F}, \mu)$ 上で考えるものとします．

Theorem 1 (単調収束定理)**.** $0 \leq f_n \leq f_{n+1}$ a.e., $n = 1, 2, \ldots$ かつ $f_n \to f, n$ a.e., as $n \to \infty$ である可測関数列 $f_n, n = 1, 2, \ldots$ と可測関数 f について

$$\lim_{n\to\infty} \int_X f_n d\mu = \int_X f d\mu \tag{1}$$

が成り立つ．

Theorem 2 (Fatou の補題)**.** $f_n \geq 0, n = 1, 2, \ldots$ a.e. である可測関数 f_n について

$$\liminf_{n\to\infty} \int_X f_n d\mu = \int_X \liminf_{n\to\infty} f_n d\mu \tag{2}$$

が成り立つ．

Theorem 3 (Lebesgue の収束定理)**.** 可測関数列 $f_n, n = 1, 2, \ldots$ と可測関数 f が

- $f_n \to f$ a.e., as $n \to \infty$
- 任意の n に対して $|f_n| \leq h$ a.e. となる可積分関数 g が存在する

をみたすならば，

$$\lim_{n\to\infty} \int_X f_n d\mu = \int_X f d\mu \tag{3}$$

が成り立つ．

証明

命題間の関係を示し，その後に単調収束定理および Fatou の補題をそれぞれ示す．

単調収束定理を認めたときの *Fatou* の補題の証明. $g_n = \inf_{k\geq n} f_k$ とおけば，$f_n \geq g_n$ a.e. をみたす．また下極限の定義から，$\liminf\limits_{n\to\infty} f_n = \sup\limits_{n\geq 1} \inf\limits_{k\geq n} f_k$ より，$g_n \uparrow \liminf\limits_{n\to\infty} f_n$ もみたすことがわかる．したがって，単調収束定理から，

$$\liminf_{n\to\infty} \int_X f_n d\mu \geq \liminf_{n\to\infty} \int_X g_n d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_X g_n d\mu = \int_X \lim_{n\to\infty} g_n d\mu = \int_X \liminf_{n\to\infty} f_n d\mu \tag{4}$$

となる． □

Fatou の補題を認めたときの単調収束定理の証明. 仮定から $f_n \le f, \int_X f_n d\mu \le \int_X f d\mu$ なので，

$$\limsup_{n\to\infty} \int_X f_n d\mu \le \int_X f d\mu \tag{5}$$

となる．Fatou の補題から

$$\int_X f d\mu \le \liminf_{n\to\infty} \int_X f_n d\mu \tag{6}$$

がなりたつ．一方で，上限と下限の定義から

$$\liminf_{n\to\infty} \int_X f_n d\mu \le \limsup_{n\to\infty} \int_X f_n d\mu \tag{7}$$

がなりたつので，これらの式を合わせれば，

$$\int_X f d\mu = \liminf_{n\to\infty} \int_X f_n d\mu = \limsup_{n\to\infty} \int_X f_n d\mu \tag{8}$$

が得られる． □

Fatou の補題を認めたときの *Lebesgue* の収束定理. $f_n \to f$ a.e., as $n \to \infty$，$f_n \le h$ a.e, $n = 1, 2, \ldots$ で g は可積分であることから，$|f| \le h$ となり，f も可積分である．$h + f_n \ge 0$ a.e., $h - f_n \ge 0$ a.e., $n = 1, 2, \ldots$ なので，これらに対して Fatou の補題を適用すると，

$$\begin{aligned}\int_X h d\mu + \int f d\mu = \int_X (h+f) d\mu = \int_X \liminf_{n\to\infty} (h + f_n) d\mu \qquad (9)\\ = \liminf_{n\to\infty} \int_X (h + f_n) d\mu = \int_X h d\mu + \liminf_{n\to\infty} \int_X f_n d\mu \qquad (10)\end{aligned}$$

より，$\liminf_{n\to\infty} \int_X f_n d\mu \ge \int_X h d\mu$ が得られる．同様に

$$\begin{aligned}\int_X h d\mu + \int (-f) d\mu = \int_X (h-f) d\mu = \int_X \liminf_{n\to\infty} (h - f_n) d\mu \qquad (11)\\ = \liminf_{n\to\infty} \int_X (h - f_n) d\mu = \int_X h d\mu + \liminf_{n\to\infty} \int_X (-f_n) d\mu \qquad (12)\end{aligned}$$

より，$\limsup_{n\to\infty} \int_X f_n d\mu \le \int_X h d\mu$ が得られる．これらを合わせれば，題意を得る． □

2 Radon-Nikodym の定理

Capinski, and Kopp, *Measure, Integral and Probability*, Springer, 2004 をもとに Radon-Nikodym の定理を証明：可測空間 $(\Omega, \mathcal{F})$ 上の $F \in \mathcal{F}$ に対する測度 $\nu(F)$ が

$$F \mapsto \nu(F) = \int_F f d\mu \tag{13}$$

となるような f を見つける問題.

用語

絶対連続 (absolutely continuous)

任意の $F \in \mathcal{F}$ に対して $\mu(F) = 0$ ならば $\nu(F) = 0$，が成り立つならば，ν は μ に対して**絶対連続**であるといい，$\nu \ll \mu$ と表す.

押さえる (dominate)

任意の $F \in \mathcal{F}$ に対して $0 \leq \nu(F) \leq \mu(F)$ が成り立つとき，μ は ν を**押さえる**という．

分割 (partition)

$\mathcal{F}$ 内の有限な排反部分集合の集まり $\mathcal{P} + (F_i)_{i \leq n}$ で $\cup_i F_i = \Omega$ をみたすものを，(有限可測な)Ω の**分割**と呼ぶ．

細分 (refinement)

2 つの分割 $\mathcal{P}, \mathcal{P}'$ について，任意の $\mathcal{P}$ の要素が $\mathcal{P}'$ の排反な要素の和集合で表されるとき，$\mathcal{P}'$ は $\mathcal{P}$ の**細分**と呼ぶ．

σ-有限 (σ-finite)

$\cup_i F_i = \Omega$ をみたす $\mathcal{F}$-可測な集合列 F_i が存在して，各 i について $\nu(F_i)$ が有限の値をとるとき，ν を **σ-有限**な測度と呼ぶ．

証明

Radon-Nikodym の定理を証明する前に，以下の補助定理を証明しておくと便利．Radon-Nikodym の定理との違いは

- 2 つの測度が σ-有限ではなく，一方が片方を押さえているという仮定になっている．
- 押さえている方の測度 μ が全測度で 1 となる．

という 2 点．ただし，結論の形式は Radon-Nikodym の定理と同様なので，その雰囲気は伝わるはず．

Theorem 4. 任意の $F \in \mathcal{F}$ に対して，$\mu(\Omega) = 1$，$0 \leq \nu(F) \leq \mu(F)$ が成り立つ，つまり μ は ν を押さえる測度とする．このとき，任意の $F \in \mathcal{F}$ に対して，

$$\nu(F) = \int_F h d\mu \tag{14}$$

をみたす，(Ω 上の) 非負 $\mathcal{F}$-可測関数 h が存在する．

以下のステップで証明

- 分割 $\mathcal{P}$ に含まれる集合上で，(14) をみたすような $h_{\mathcal{P}}$ を構成する．ついでに $\mathcal{P}_{n+1}$ が $\mathcal{P}_n$ を細分するような分割の列 $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2, \ldots$ について，

  $$\int_\Omega h_{\mathcal{P}_n}^2 d\mu \tag{15}$$

  が非減少列になることを確認する．
- 1. の結果，および (15) で定められる列は上限 1 で押さえられることから，収束定理を用いて (14) をみたす h を $h_{\mathcal{P}_n}$ の極限として求めることができる．
- 2. の方法で定めた h が望ましい性質を持つことを確認する．

3　収束定理

この節では確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ を固定して考える．

Definition 1 (概収束 (almost sure convergence))**.** 確率変数 X_n, X が $P\left(\lim_{n\to\infty}|X_n - X| = 0\right) = 1$ をみたすとき，X_n は X に**概収束**するいい，$X_n \xrightarrow{\text{a.s.}} X$ と書く．

Definition 2 (確率収束 (convergence in probability))**.** 確率変数 X_n, X が，任意の $\varepsilon > 0$ に対して $\lim_{n\to\infty} P(|X_n - X| > \varepsilon) = 0$ をみたすとき，X_n は X に**確率収束**するいい，$X_n \xrightarrow{\text{a.s.}} X$ と書く．

Definition 3 (L^p-収束 (convergence in L^p))**.** 確率変数 X_n, X が $\lim_{n\to\infty} ||X_n - X|| = 0$ をみたすとき，X_n は X に L^p**-収束**するいい，$X_n \xrightarrow{L^p} X$ と書く．

Definition 4 (弱収束 (weakly convergence))**.** Borel-確率測度の列 P_n が Borel-確率測度 P に**分布収束** (or **弱収束**) するとは，$F, Fn, n = 1, 2, \ldots$ を $\mathbb{R}^k$ 上の累積分布関数とし，これらに対応する確率測度 $P, Pn, n = 1, 2, \ldots$ とする．任意の $F(x)$ の連続点 x に対して $\lim_{n\to\infty} F_n(x) = F(x)$ がなりたつとき，$\{F_n\}$ が F に**弱収束**する，あるいは $\{P_n\}$ が P に**弱収束**するといい，$F_n \xrightarrow{\text{w}} F$，あるいは $P_n \xrightarrow{\text{w}} P$ と書く．

Definition 5 (分布収束 (convergence in distribution))**.** 確率変数 X_n, X の分布関数 F_{X_n}, F_X について $F_{X_n} \xrightarrow{\text{w}} F_X$ がなりたつとき，$\{X_n\}$ は X に**分布収束**するといい，$X_n \xrightarrow{\text{d}} X$ と書く．

Theorem 5. 確率変数 X_n, Y_n, X について次がなりたつ．

1. $X_n \xrightarrow{\text{a.s.}} X$ ならば $X_n \xrightarrow{\text{p}} X$ がなりたつ．逆は一般的に真ではない．
2. $X_n \xrightarrow{\text{p}} X$ ならば $X_n \xrightarrow{\text{d}} P_X$ がなりたつ．逆は一般的に真ではないが，次の 3. がなりたつ．
3. X_n の極限が定数 c であるとき，$X_n \xrightarrow{\text{p}} X$ と $X_n \xrightarrow{\text{d}} X$ は同値である．

Theorem 6 (Slutsky の定理)**.** X_n, Y_n, X は確率変数，c は定数のとき，$X_n \xrightarrow{\text{d}} X$ かつ $Y_n \xrightarrow{\text{p}} c$ ならば，次の 2 がなりたつ．

1. $X_n + Y_n \xrightarrow{\text{d}} X + c$
2. $Y_n X_n \xrightarrow{\text{d}} cX$

Theorem 7 (Slutsky の補題)**.** X_n, Y_n, X は確率変数，c は定数のとき，$X_n \xrightarrow{\text{d}} X$ かつ $Y_n \xrightarrow{\text{p}} c$ ならば，$(X_n, Y_n) \xrightarrow{\text{d}} (X, c)$ がなりたつ．

× $X_n \xrightarrow{\text{d}} X$，$Y_n \xrightarrow{\text{d}} Y$ ならば $X_n + Y_n \xrightarrow{\text{d}} X + Y$，$X_n Y_n \xrightarrow{\text{d}} XY$．
○ $(X_n, Y_n) \xrightarrow{\text{d}} (X, Y)$ ならば，$X_n + Y_n \xrightarrow{\text{d}} X + Y$，$X_n Y_n \xrightarrow{\text{d}} XY$．

Theorem 8 (Cramer-Wald's device)**.** 確率変数ベクトルの列 $X_n = (X_n^1, \ldots, X_n^d)^\top$ とその極限 $X = (X^1, \ldots, X^d)^\top$ が，$X \xrightarrow{\text{d}} X$ であることと，任意の定数ベクトル $c = (c^1, \ldots, c^d)$ に対して $c^\top X_n \xrightarrow{\text{d}} c^\top X$ であることは同値である．