

# 1 Wiener Chaos Expansion

この節は Nualart の本にある以下の Theorem 1.1.2 を示すことが目標である。基本的で重要な定理であるが、Malliavin 解析を展開する上ではこの定理を使うことしかしないため、この定理を認めて、次節へ進んでも本論の進行には影響しない。

定理を述べる前に舞台設定を説明する。確率空間を  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ ,  $B(t)$  を  $P$  に関する Brown 運動とする。有限区間  $[a, b]$  に対して、関数  $f \in L^2[a, b]$  に関する Wiener 積分

$$I(f) = \int_a^b f(t)dB(t) \quad (1)$$

は  $\mathcal{F}$  より小さな  $\sigma$ -加法族である

$$\mathcal{F}^B = \sigma\{B(t); a \leq t \leq b\} \quad (2)$$

に対して可測となり、一般には  $\mathcal{F} \neq \mathcal{F}^B$  である。以降本節では、確率空間  $(\Omega, \mathcal{F}^B, P)$  の Brown 運動  $B(t)$  を考える。

また、 $\mathcal{F}^B$ -可測な  $\Omega$  上の関数を Brown 汎関数と呼ぶが、 $\Omega$  上の  $P$ -二乗可積分な Brown 汎関数で構成される Hilbert 空間を  $L_B^2(\Omega)$  と表す。 $L_B^2(\Omega)$  は  $L^2(\Omega)$  の部分空間となる。

**Theorem 1** (Theorem 1.1.2). 任意の二乗可積分な確率変数  $F \in L^2(\Omega, \mathcal{F}^B, P)$  は重複確率積分の系列  $\{I_n(f_n)\}$  で展開することができる:

$$F = \sum_{n=0}^{\infty} I_n(f_n) \quad (3)$$

ここで、 $f_0 = E(F)$  であり、 $I_0$  は定数への恒等写像である。さらに、 $f_n \in L^2(T^n)$  は対称で  $F$  により一意に定めることができる。

上の定理を示すために、以下の手順で説明を行う。

1. Hilbert 空間  $L_B^2(\Omega)$  が直交部分空間の和で表されることを示し、それらの元から正規直交基底を構成できることを示す。これにより直交補空間の元から構成された正規直交基底によって  $\phi \in L_B^2(\Omega)$  を表現できることがわかる。(9.4,9.5)
2. 重複 Wiener 積分を構成し、上記の正規直交基底と関連することを示す。(9.6,9.7)
3. この結果の応用例として、Nualart の本の Theorem 1.1.3 に示されている Martingale 表現定理を示す。(9.8)

## 1.1 $L_B^2(\Omega)$ の直交補空間への分解と正規直交基底による表現

関数  $f_1, f_2, \dots, f_k \in L^2[a, b]$  に対する Wiener 積分の積  $I(f_1)I(f_2)\cdots I(f_k)$  は多項 chaos (polynomial chaos) と呼ばれる。 $J_0 = \mathbb{R}$  とし、定数と  $k \leq n$  次の多項 chaos で張られる線形空間の  $L_B^2(\Omega)$  の閉包で各  $n \geq 1$  に対する  $J_n$  を定める。すると、

$$J_0 \subset J_1 \subset \cdots \subset J_n \subset \cdots \subset L_B^2(\Omega) \quad (4)$$

という関係が成り立つ。これらの  $\{J_n\}$  について以下が成り立つ。

**Theorem 2.** 和  $\bigcup_{n=0}^{\infty} J_n$  は  $L_B^2(\Omega)$  の中で稠密である.

さらに,  $K_0 = \mathbb{R}$  とし,  $J_n$  中の  $J_{n-1}$  の直交補空間として  $K_n$  を定める. すなわち以下が成り立つように  $K_n$  を定める.

$$J_n = J_{n-1} \oplus K_n \quad (5)$$

このように  $K_n$  を構成すると, Hilbert 空間  $L_B^2(\Omega)$  の直交部分空間の列:

$$K_0, K_1, K_2, \dots, K_n, \dots \quad (6)$$

が得られる.

**Definition 1.** 非負整数  $n$  に対して, Hilbert 空間  $K_n$  の要素を  $n$  次の斉次 chaos (homogeneous chaoses) と呼ぶ.

$K_n \geq 1$  はすべて無限次元の空間であり, 次数 1 の斉次 chaos は正規分布に従う確率変数である. 次の定理は斉次 chaos の構成方法と定理 2 より次が成り立つ.

**Theorem 3.** Hilbert 空間  $L_B^2(\Omega)$  は次数  $n \geq 0$  の斉次 chaos の空間  $K_n$  の直交和となる, すなわち,

$$L_B^2(\Omega) = K_0 \oplus K_1 \oplus K_2 \oplus \dots \oplus K_n \oplus \dots \quad (7)$$

が成り立つ. また, 関数  $\phi \in L_B^2(\Omega)$  は一意な斉次 chaos 展開

$$\phi = \sum_{n=0}^{\infty} \phi_n \quad (8)$$

を持ち,  $L_B^2(\Omega)$  のノルム  $\|\cdot\|$  について

$$\|\phi\|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} \|\phi_n\|^2 \quad (9)$$

が成り立つ.

またこれに関連して次が成り立つ. この定理は正規直交基底を構成する際に用いられる.

**Theorem 4.**  $L_B^2(\Omega)$  から  $K_n$  への直行射影を  $P_n$  と表す.  $f_1, \dots, f_k$  を  $L^2[a, b]$  の非零直交関数とし,  $n_1, \dots, n_k$  非負整数とすると,

$$P_n(I(f_1)^{n_1} \dots I(f_k)^{n_k}) = H_{n_1}(I(f_1); \|f_1\|^2) \dots H_{n_k}(I(f_k); \|f_k\|^2) \quad (10)$$

が成り立つ. ただし  $n = n_1 + \dots + n_k$  である. また特に, 任意の非零関数  $f \in L^2[a, b]$  に対して,

$$P_n(I(f)^n) = H_n(I(f); \|f\|^2) \quad (11)$$

が成り立つ.

Theorem 3 により任意の  $f \in L_B^2(\Omega)$  を級数で展開することが可能であることがわかった. 次に展開に用いられる項に正規直交基底を用いることができることを示そう.

まず,  $L^2[a, b]$  の正規直交基底を  $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$  と表す. 有限和をもつ非負整数列  $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$  に対して,  $\mathcal{H}_{n_1, n_2, \dots}$  を

$$\mathcal{H}_{n_1, n_2, \dots} = \prod_k \frac{1}{\sqrt{n_k!}} H_{n_k}(\tilde{e}_k) \quad (12)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{n_1! n_2! \dots}} H_{n_1}(\tilde{e}_1) H_{n_2}(\tilde{e}_2) \dots \quad (13)$$

と定める．ただし， $H_n(x)$  は Hermite 多項式であり，

$$H_n(x) = \sum_{k=0}^{[n/2]} \frac{(-1)^k x^{n-2k}}{k!(n-2k)!2^k} \quad (14)$$

で定められる． $H_0(x) = 1$  であり， $n_k$  のうち有限個しか非零にならないため，実際は上式の積は有限項の積である．この  $\mathcal{H}_{n_1, n_2, \dots}$  について次が成り立つ．

**Theorem 5.** 任意の  $n \geq 1$  に対して，関数の集合

$$\{\mathcal{H}_{n_1, n_2, \dots}; n_1 + n_2 + \dots = n\} \quad (15)$$

は  $K_n$  の部分集合であり，この集合で張られる線形空間は  $K_n$  の中で稠密である．

**Theorem 6.** 任意の  $n \geq 1$  に対して，関数の集合

$$\{\mathcal{H}_{n_1, n_2, \dots}; n_1 + n_2 + \dots = n\} \quad (16)$$

は  $K_n$  の正規直交基底をなす．

以上を定理の形でまとめると次のとおりとなる．

**Theorem 7.** 関数の集合

$$\{\mathcal{H}_{n_1, n_2, \dots}; n_1 + n_2 + \dots = n, n+1, 2, \dots\} \quad (17)$$

は Hilbert 空間  $L_B^2(\Omega)$  の正規直交基底をなす．任意の  $\phi \in L_B^2(\Omega)$  は級数：

$$\phi = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{n_1 + n_2 + \dots = n} a_{n_1, n_2, \dots} \mathcal{H}_{n_1, n_2, \dots} \quad (18)$$

で一意に展開される．ここで， $a_{n_1, n_2, \dots} = E(\phi \mathcal{H}_{n_1, n_2, \dots}) = \int_{\Omega} \phi \mathcal{H}_{n_1, n_2, \dots} dP$  である．

Nualart の本では  $\mathcal{H}_{n_1, n_2, \dots}$  の部分が多重確率積分となっている．実際，これらの項は重複 Wiener 積分と関連づけられることを次の節で示す．それが示されれば，Nualart の本の定理の証明が完了する．

### 1.1.1 定理の証明

*Theorem 2* の証明.

□

*Theorem 4* の証明.

□

*Theorem 5* の証明.

□

*Theorem 6* の証明.

□

## 1.2 正規直交基底の重複 Wiener 積分による表現

この節では重複 Wiener 積分を定め，その重複 Wiener 積分が Hermite 多項式および斉次 chaos と関連することを示す．

表記を簡単にするため  $T = [a, b]$  とすれば，本節の最初の目標は  $f \in L^2(T^n)$  に対して

$$\int_{T^n} f(t_1, t_2, \dots, t_n) dB(t_1) dB(t_2) \cdots dB(t_n) \quad (19)$$

を定めることである。集合  $D$  を

$$D = \{(t_1, t_2, \dots, t_n) \in T^n; \exists i \neq j \text{ such that } t_i = t_j\} \quad (20)$$

と定め、 $T^n$  の対角集合と呼ぶ。  $T^n$  の部分集合で  $[t_1^{(1)}, t_1^{(2)}) \times [t_2^{(1)}, t_2^{(2)}) \times \dots \times [t_n^{(1)}, t_n^{(2)})$  の形をとる集合を長方形と呼ぶ。

### Step 1. Off-diagonal step functions

$T^n$  上の階段関数とは

$$f = \sum_{1 \leq i_1, i_2, \dots, i_n \leq k} a_{i_1, i_2, \dots, i_n} 1_{[\tau_{i_1-1}, \tau_{i_1}) \times [\tau_{i_2-1}, \tau_{i_2}) \times \dots \times [\tau_{i_n-1}, \tau_{i_n})} \quad (21)$$

と表される関数である。ただし、 $a = \tau_0 < \tau_1 < \tau_2 < \dots < \tau_k = b$  とする。また、対角なし階段関数を階段関数のうち

$$a_{i_1, i_2, \dots, i_n} = 0, i_p = i_q \text{ for some } p \neq q \quad (22)$$

をみたすものとする。すなわち、階段関数で集合  $D$  上では 0 となる関数を対角なし階段関数とする。また、対角なし階段関数の集合はベクトル空間をなす。

対角なし階段関数に対する確率積分を

$$I_n(f) = \sum_{1 \leq i_1, i_2, \dots, i_n \leq k} a_{i_1, i_2, \dots, i_n} \xi_{i_1} \xi_{i_2} \dots \xi_{i_n} \quad (23)$$

で定める。ここで、 $\xi_{i_p} = B(\tau_{i_p}) - B(\tau_{i_p-1}), 1 \leq p \leq n$  である。  $I_n(f)$  の値は  $f$  の表現によらないという意味で well-defined であり、写像  $I_n(f)$  は対角なし階段関数のベクトル空間上で線形である。

また、関数  $f(t_1, \dots, t_n)$  の対称化  $\hat{f}(t_1, \dots, t_n)$  を

$$\hat{f}(t_1, t_2, \dots, t_n) = \frac{1}{n!} \sum_{\sigma} f(t_{\sigma(1)}, t_{\sigma(2)}, \dots, t_{\sigma(n)}) \quad (24)$$

で定める。ただし、右辺の和は  $\{1, 2, \dots, n\}$  の順列  $\sigma$  のすべてに対してとる。Lebesgue 測度は対称であることから、任意の順列  $\sigma$  に対して、

$$\int_{T^n} |f(t_{\sigma(1)}, \dots, t_{\sigma(n)})|^2 dt_1 \dots dt_n = \int_{T^n} |f(t_1, \dots, t_n)|^2 dt_1 \dots dt_n \quad (25)$$

が成り立つ。したがって、三角不等式より

$$\|\hat{f}\| \leq \frac{1}{n!} \sum_{\sigma} \|f\| = \frac{1}{n!} \|f\| = \|f\| \quad (26)$$

が成り立つので、 $\|\hat{f}\| \leq \|f\|$  が得られる。また、 $f$  が対角なし階段関数ならば、 $\hat{f}$  も対角なし階段関数である。対角なし階段関数に関わる確率積分について以下が成り立つ。

**Lemma 1.**  $f$  が対角なし階段関数ならば、 $I_n(f) = I_n(\hat{f})$  である。

また、この確率積分について次の性質がある。

**Lemma 2.**  $f$  が対角なし階段関数ならば、 $E(I_n(f)) = 0$  であり

$$E[I_n(f)^2] = n! \int_{T^n} |\hat{f}(t_1, \dots, t_n)|^2 dt_1 \dots dt_n \quad (27)$$

が成り立つ。

**Step 2. Approximation by off-diagonal step functions**

集合  $D$  は  $D = \cup_{i \neq j} [\{t_i = t_j\} \cap D]$  と書き直すことができる。これは、集合  $D$  は  $(n-1)$  次元超平面の共通部分に関する有限和で表されるということで、すなわち集合  $D$  の Lebesgue 測度は 0 であるということである。これから次の補題を示すことができる

**Lemma 3.**  $f \in L^2(T^n)$  に対して、対角なし階段関数  $\{f_k\}$  が存在して、

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{T^n} |f(t_1, \dots, t_n) - f_k(t_1, \dots, t_n)|^2 dt_1 \cdots dt_n = 0 \quad (28)$$

がなりたつ。

この補題から、 $f \in L^2(T^n)$  に収束する対角なし階段関数の列  $\{f_k\}$  がとれ、 $I_n$  の線形性と Lemma 2 から、

$$E \left[ (I_n(f_k) - I_n(f_l))^2 \right] = n! \|\hat{f}_k - \hat{f}_l\|^2 \leq n! \|f_k - f_l\|^2 \rightarrow 0 \text{ (as } k, l \rightarrow \infty) \quad (29)$$

が得られるので、 $\{I_n(f_k)\}_{k=1}^\infty$  は  $L^2(\Omega)$  で Cauchy 列をなす。したがって、

$$I_n(f) = \lim_{k \rightarrow \infty} I_n(f_k) \text{ in } L^2(\Omega) \quad (30)$$

として、 $f \in L^2(T^n)$  に対する確率積分を定めれば、 $\{f_k\}$  のとり方に依存しないという意味で well-defined である。

**Definition 2.**  $f \in L^2(T^n)$  に対して、(30) で定められる極限  $I_n(f)$  を  $f$  の重複 Wiener-Itô 積分と呼び

$$\int_{T^n} f(t_1, \dots, t_n) dB(t_1) \cdots dB(t_n) \quad (31)$$

と表す。

Lemma ?? を用いれば Lemma 1 および Lemma 2 の結果は  $f \in L^2(T^n)$  に対して拡張可能である。これを以下にまとめる。

**Theorem 8.**  $f \in L^2(T^n), n \geq 1$  とするとき次が成り立つ。

1.  $I_n(f) = I_n(\hat{f})$ .  $\hat{f}$  は  $f$  の対称化である。
2.  $E[I_n(f)] = 0$ .
3.  $E[I_n(f)^2] = n! \|\hat{f}\|^2$ .  $\|\cdot\|$  は  $L^2(T^n)$  のノルムである。

**Theorem 9.**  $f \in L^2(T^n), n \geq 2$  とするとき、次が成り立つ。

$$\int_{T^n} f(t_1, \dots, t_{n-1}, t_n) dB(t_1) \cdots dB(t_{n-1}) dB(t_n) \quad (32)$$

$$= n! \int_a^b \cdots \int_a^{t_{n-2}} \left[ \int_a^{t_{n-1}} \hat{f}(t_1, \dots, t_{n-1}, t_n) dB(t_n) \right] dB(t_{n-1}) \cdots dB(t_1). \quad (33)$$

ただし、 $\hat{f}$  は  $f$  の対称化である。

**Step 3. 重複 Wiener-Itô 積分と斉次 chaos の対応づけ**

**Definition 3.**  $g_1, \dots, g_n \in L^2[a, b]$  のとき、

$$g_1 \otimes \cdots \otimes g_n(t_1, \dots, t_n) = g_1(t_1) \cdots g_n(t_n) \quad (34)$$

で *tensor* 積  $g_1 \otimes \cdots \otimes g_n(t_1, \dots, t_n)$  を定める. また, *tensor* 積  $f_1^{\otimes n_1} \otimes \cdots \otimes f_k^{\otimes n_k}$  は  $f_i$  が  $n_i$  回繰り返されていることを意味する.

**Theorem 10.**  $f_1, f_2, \dots, f_k$  を  $L^2[a, b]$  の非負直交関数とし,  $n_1, n_2, \dots, n_k$  を正整数とする. このとき,

$$I_n(f_1^{\otimes n_1} \otimes \cdots \otimes f_k^{\otimes n_k}) = \prod_{j=1}^k H_{n_j}(I(f_j; \|f_j\|^2)) \quad (35)$$

が成り立つ. ただし,  $n = n_1 + n_2 + \cdots + n_k$  であり,  $H_n(x; \rho)$  は

$$H_n(x; \rho) = \sum_{k=0}^{[n/2]} \binom{n}{2k} (2k-1)!! (-\rho)^k x^{n-2k} \quad (36)$$

で定められる *Hermite* 多項式である. 特に任意の非負関数  $f \in L^2[a, b]$  に対して

$$I_n(f^{\otimes n}) = H_n(I(f); \|f\|^2) \quad (37)$$

が成り立つ.

$I_n(f)$  の性質として, 最後に Hilbert 空間  $L_B^2(\Omega)$  上における  $I_n(f)$  と  $I_m(g)$ ,  $n \neq m$  の直交性を示す.

**Theorem 11.** 任意の  $f \in L^2(T^n)$ ,  $g \in L^2(T^m)$  と  $n \neq m$  に対して,  $E(I_n(f)I_m(g)) = 0$  が成り立つ.

実は  $n$  次の斉次 chaos は,  $n$  重重複 Wiener-Itô 積分と一致する. この事実を次で示す.

**Theorem 12.**  $f \in L^2(T^n)$ ,  $n \geq 1$  ならば,  $I_n(f) \in K_n$  である. 逆に,  $\phi \in K_n$ ,  $n \geq 1$  ならば, 関数  $f \in L_{\text{sym}}^2(T^n)$  が存在して,  $\phi = I_n(f)$  をみたす. ただし,  $L_{\text{sym}}^2(T^n)$  は  $T^n$  上の対称な二乗可積分関数からなる実 Hilbert 空間を表す.

次の定理は Theorem 3 と Theorem 12 から得られる.

**Theorem 13** (Wiener-Itô). 空間  $L_B^2(\Omega)$  は以下の直交直和に分解できる.

$$L_B^2(\Omega) = K_0 \oplus K_1 \oplus K_2 \oplus \cdots \oplus K_n \oplus \cdots \quad (38)$$

ここで,  $K_n$  は  $n$  重重複 Wiener-Itô 積分からなる. また, 任意の関数  $\phi \in L_B^2(\omega)$  は

$$\phi = \sum_{n=0}^{\infty} I_n(f_n), f \in L_{\text{sym}}^2(T^n) \quad (39)$$

で一意に展開することができ,

$$\|\phi\|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} n! \|f_n\|^2 \quad (40)$$

が成り立つ.

### 1.2.1 定理の証明

*Lemma 1* の証明. □

*Lemma 2* の証明. □

*Lemma 3* の証明. □

Theorem 10 の証明.

□

Theorem 11 の証明.

□

Theorem 12 の証明.

□

Theorem 13 の証明.

□

### 1.3 Hermite 多項式

Hermite 多項式について次が成り立つ.

**Theorem 14.**  $\nu$  を平均 0 分散  $\rho$  の Gauss 測度とすると, 任意の関数  $f \in L^2(\nu)$  は一意に

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{H_n(x; \rho)}{\sqrt{n! \rho^n}} \quad (41)$$

と展開される. ここで  $H_n(x; \rho)$  は Hermite 多項式:

$$H_n(x; \rho) = \sum_{k=0}^{[n/2]} \binom{n}{2k} (2k-1)!! (-\rho)^k x^{n-2k} \quad (42)$$

であり, 係数  $a_n$  は

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{n! \rho^n}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) H_n(x; \rho) d\nu(x), n \geq 0 \quad (43)$$

で与えられる. さらに次が成り立つ.

$$\|f\|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} a_n^2. \quad (44)$$