实验四　刚体的转动惯量

[实验目的]

1）用刚体转动惯量实验仪测定刚体的转动惯量；

2）验证转动惯量的平行轴定理。

[实验原理]

根据刚体转动定律，转动系统所受合外力矩 $M_{合}$ 与角加速度 β 的关系为

$$M_{合} = I\beta \tag{4-1}$$

其中 I 为该系统对转轴的转动惯量。本实验中，合外力矩 $M_{合}$ 主要由引线的张力矩 M 和轴承的摩擦力矩 $M_{阻}$ 构成，则

$$M - M_{阻} = I\beta \tag{4-2}$$

式中引线的张力矩可通过砝码所受的重力来测。可见，测定转动惯量的关键是确定角加速度 β 和摩擦力矩 $M_{阻}$。对此，可用光电计时系统直接测量转动系统转过某一角度所需的时间来测得。

依上述测定转动惯量的方法，我们可以分别测出转动系统通过互相平行轴的转动惯量，从而验证平行轴定理。

[实验方案]

1. 关于引线的张力矩 M

图 4-1 为实验室所用转动惯量仪。A 是一个具有不同半径 r 的塔轮，B 是十字形承物台，承物台上可放待测物，它们一起组成一个可以绕固定轴 OO' 转动的刚体系。塔轮上绕一细线，通过滑轮 C 与砝码 m 相连。当 m 下落时，通过细线对刚体系施加力矩，使刚体转动。K 是遮光细棒，随承物台一起转动；L 是光电门，与通用电脑式毫秒计相连组成光电计时系统，用来测量转动经过的时间。滑轮 C 的支架可以升降，以保证当细线绕在塔轴的不同半径上时，通过调节支架位置可使细线保持与转轴垂直。D 和 H 为紧固螺丝。滑轮台架上有一个标记物 f，可以作为砝码下落的起始位置。载物台在砝码的重力作用下，可作匀角加速度转动。设引线的张力为 T，绕线轴半径为 R，略去滑轮和细线的质量以及滑轮上的摩擦力，并认为线的长度不变，当砝码以匀加速度下落时，由牛顿第二定律有

$$T = m(g - a)$$

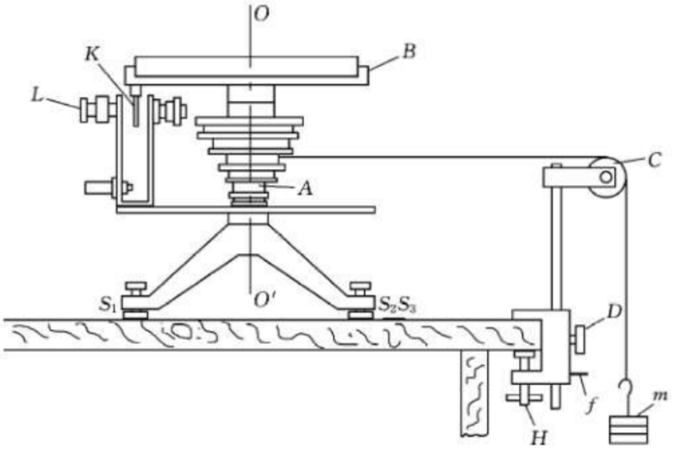


图 4-1 转动惯量仪

式中，m 是砝码的质量，g 是重力加速度，则

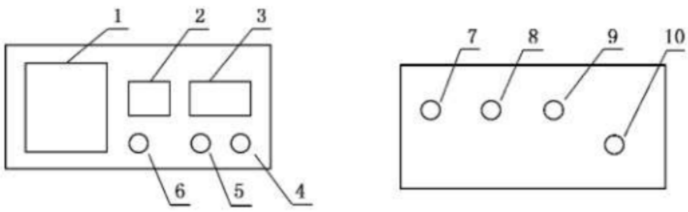
$$M = TR = m(g - a)R$$

在实验过程中，保持 $g \gg a$，则

$$M \approx mgR \tag{4-3}$$

2. 关于角加速度 β 和摩擦阻力 $M_{阻}$

图 4-2 为通用电脑式毫秒计的前后两个板面，该仪器具有记忆功能，最多时可记忆 64 个时间，可随时把需要的时间取出来，具体使用方法见说明书。



(a) 前面板 (b) 后面板

图 4-2 仪器面板

1. 按键数码盘；2. 两位脉冲个数数码块；3. 6 位计时数码块；4，5. 信号输入插孔；6. 复位电键；7，8. 光电门电源输出端；9. 电源开关；10. 电源插孔

刚体转动时，遮光细棒随着一起转动，每转动一周，它通过光电门一次，计时一次，所以转动几周用了多少时间是可知的。由于视刚体作匀变速转动，其角位移 θ

和转动经过的时间 t 满足以下关系：

$$\theta = \omega_0 t + \frac{1}{2}\beta t^2$$

其中 ω_0 为初角速度，也就是遮光棒第一次遮光(第一次遮光开始计时，$t=0$)时的角速度，是个未知数，为了消去 ω_0，取两个不同时间 t_1 和 t_2，设相应的角位移为 θ_1 和 θ_2，则有

$$\theta_1 = \omega_0 t_1 + \frac{1}{2}\beta t_1^2$$

$$\theta_2 = \omega_0 t_2 + \frac{1}{2}\beta t_2^2$$

于是，得

$$\beta = \frac{2(\theta_1 t_2 - \theta_2 t_1)}{t_1^2 t_2 - t_2^2 t_1} \tag{4-4}$$

t_1 和 t_2 分别选刚体转动 n_1 周和 n_2 周经过的时间，对应的遮光次数为 $N_1 = n_1 + 1$ 和 $N_2 = n_2 + 1$，因而

$$\theta_1 = 2n_1\pi = 2(N_1 - 1)\pi \tag{4-5}$$

$$\theta_2 = 2n_2\pi = 2(N_2 - 1)\pi \tag{4-6}$$

当外力矩 $M=0$ 时，转动系统只在摩擦力矩 $M_{阻}$ 下作匀减速转动，重复上述方法，可以得到

$$\beta' = \frac{2(\theta_1 t'_2 - \theta_2 t'_1)}{t'^2_1 t'_2 - t'^2_2 t'_1} \tag{4-7}$$

当选定 N_1 和 N_2 后，θ_1 和 θ_2 由式(4-5)和式(4-6)两式确定，而 t_1，t'_1 和 t_2，t'_2 由毫秒计直接读出，由于

$$-M_{阻} = I\beta' \tag{4-8}$$

又 $M - M_{阻} = I\beta$，$M = mgR$，所以

$$I = \frac{mgR}{\beta - \beta'} \tag{4-9}$$

把 β 和 β' 代入式(4-8)和式(4-9)中，便可计算出 I 和 $M_{阻}$。注意上边各式中 $\beta' < 0$。

承物台上不放物体时，转动体系由承物台和塔轮组成，该体系对转轴的转动惯量用 I_0 表示。当要测某刚体如铝圆环对其中心轴的转动惯量 I_x 时，把圆环放在承物台上，其中心轴与转动惯量仪的中心轴重合，这时整个转动体系的转动惯量为 I，则 $I = I_0 + I_x$，分别测出 I_0 和 I 后，便可求出 I_x。

$$I_x = I - I_0 \tag{4-10}$$

3. 验证平行轴定理

图 4-3 为承物台的俯视图。十字形承物台上，沿半径方向等距离地分布着三个小孔，小孔之间距离为 d。小钢柱可以放在这些小孔的位置上，改变小钢柱的位置，可以改变包括小钢柱在内的转动体系的转动惯量。

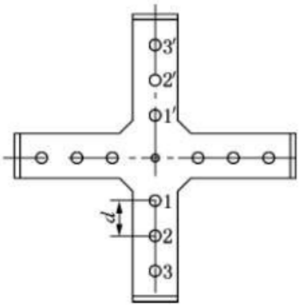


图 4-3　承物台俯视图

两个完全相同的小钢柱先后放于承物台的小孔(2，2′)处和(1，3′)处，它们随承物台转动时，相当于由两个距离一定，质量相同的物体组成的刚体先后绕不同的但相互平行的轴转动。测出先后两次整个体系的转动惯量，可以验证平行轴定理。

[实验器材]

刚体转动惯量实验仪、通用电脑式毫秒计、存储式数字毫秒计、圆环、小钢柱(两个)、游标卡尺、天平、砝码、卷尺。

[内容及要求]

一、用通用电脑式毫秒计计时测铝圆环的转动惯量

1. 把铝圆环放置在承物台上，测整个转动系统的 I。

选 $R \approx 3\,\text{cm}$，$m \approx 30\,\text{g}$ (用 5 个砝码，每个约 5 g，砝码托盘的质量是 5 g)，转动系统在 M 和 $M_{阻}$ 的作用下转动。取 $N_1 = 2$，$N_2 = 5$。由毫秒计读出 t_1 和 t_2。由式(4-5)，式(4-6)两式计算 θ_1 和 θ_2，由式(4-4)计算出 β。

使砝码脱落，即体系只在 $M_{阻}$ 作用下作匀减速转动。同样由毫秒计读出 t_1' 和 t_2'。由式(4-8)计算出 β'。

把 β、β'、m、R 分别代入式(4-8)和式(4-9)，可得到 $M_{阻}$ 和 I。

如果使用存储式数字毫秒计，此仪器提供了对 β 值的直接测量功能。在摩擦力矩作用下的角加速度 β' 值，注意它前面的负号。

注意：

1) 实验前先看电脑式毫秒计说明书，了解其使用方法。

2) 测前调节支架位置，使细线水平；转动塔轮时，通过滑轮细线能自动密绕在所选半径上；绕线的长度应调到砝码落地刚好放完。

3) R 要用卡尺细测，砝码质量用天平测。

4) N_1，N_2 取值是连续的，即保证两次取值是在相同初速度情况下进行的。

2. 把铝环从承物台上取下，测转动惯量仪的转动惯量 I_0。(测 I_0 的步骤与测 I 的步骤完全相同。)

3) 根据式(4-10)算出铝环的转动惯量 I_x。

4) 用理论公式计算铝圆环的转动惯量,并与实验结果进行比较,求出相对误差。

$$I_{理} = \frac{1}{2} m_{环} (R_{内}^2 + R_{外}^2)$$

式中,$m_{环}$是铝环质量,$R_{内}$是内半径,$R_{外}$是外半径。

二、验证平行轴定理

1) 测出两个质量均为 m 的小钢柱在承物台小孔 2 和 2′处时,整个转动体系的转动惯量 I_1。

把两个质量均为 m 的小钢柱分别放在承物台小孔 2 和 2′处,由两个小钢柱组成的体系的质心正好通过转动惯量仪的轴心 OO',它们随承物台一起转动,就是绕通过质心的轴的转动,其转动惯量为 I_c,则

$$I_1 = I_0 + I_c$$

2) 测出两个质量均为 m 的小钢柱在承物台小孔 1 和 3′(或 1′和 3)处时,整个转动体系的转动惯量 I_2。

此时两个小钢柱组成的体系的质心与转轴 OO'相距为 d,则

$$I_2 = I_0 + I_c + 2md^2$$

即

$$I_2 - I_1 = 2md^2 \tag{4-11}$$

分别把 I_1, I_2, m 和 d 代入(4-11),如果两边相等,就是验证了平行轴定理。m 和 d 由天平和卡尺测得。

[数据记录及处理]

1. 各单次直接测量量

砝码质量 $m_1 =$　　　　塔轮半径 $R =$

铝环的质量 $m_{环} =$　　　　铝环的外径 $D_{外} =$

铝环的内径 $D_{内} =$　　　　小圆柱质量 $m_{柱} =$

小孔中心距 $d_{max} =$　　　　小孔中心距 $d_{min} =$

2. 系统本身的转动惯量 I_0

表 4-1　数据记录 1

测量次数	$\beta_{显示}/(\mathrm{rad/s^2})$	$\beta'_{显示}/(\mathrm{rad/s^2})$
1		
2		
3		
4		
5		
6		
平均值		

$$\overline{I_0} = \frac{m_1 g R}{\bar{\beta} - \overline{\beta'}} =$$

3. 铝环对中心轴的转动惯量 I (最小二乘法)

由公式 $mgR - M_v = I\beta$ 可推导出：$m = \dfrac{I}{gR}\beta + \dfrac{M_v}{gR}$

设：$y = a_0 + a_1 x$，$y = m$，$a_1 = \dfrac{I}{gR}$，$x = \beta$，$a_0 = \dfrac{M_v}{gR}$

表 4-2　数据记录 2

y/g	y^2/g^2	x/s^{-2}	x^2/s^{-4}	$xy/(\mathrm{g/s^2})$
15				
20				
25				
30				
35				
40				
45				
50				
平均值				

$$a_1 = \frac{\bar{x} \cdot \bar{y} - \overline{x \cdot y}}{\bar{x}^2 - \overline{x^2}} = \qquad, a_0 = \bar{y} - a_1 \bar{x} = \qquad,$$

$I = a_1 gR =$ $\qquad$, $I_{盘} = I - \overline{I_0} =$ $\qquad$,

$M_\nu = a_0 gR =$ $\qquad$,

回归系数：$\gamma = \dfrac{\overline{x \cdot y} - \bar{x} \cdot \bar{y}}{\sqrt{(\overline{x^2} - \bar{x}^2)(\overline{y^2} - \bar{y}^2)}} =$ $\qquad$,

$I_{环}$ 与 $I_{环理论}$ 的比较：$E = \dfrac{I_{环} - I_{环理论}}{I_{环理论}} \times 100\% =$

4. 验证平行轴定理

表 4-3　数据记录 3

	测 $I_1(2, 2')$		测 $I_2(1, 3')$
$\beta_1/\text{rad} \cdot \text{s}^{-2}$		$\beta_2/\text{rad} \cdot \text{s}^{-2}$	
$\beta_1'/\text{rad} \cdot \text{s}^{-2}$		$\beta_2'/\text{rad} \cdot \text{s}^{-2}$	

两小孔中心间的距离为：$d = \dfrac{1}{2}(d_{\max} + d_{\min}) =$

$I_1 = \dfrac{m_1 gR}{\beta_1 - \beta_1'} =$ $\qquad$, $I_2 = \dfrac{m_1 gR}{\beta_2 - \beta_2'} =$ $\qquad$,

$I_2 - I_1 =$ $\qquad$, $2m_{柱} d^2 =$ $\qquad$,

$E = \dfrac{|2m_{柱} d^2 - (I_2 - I_1)|}{2m_{柱} d^2} \times 100\% =$

[思考题]

1）总结本实验所要求保证的实验条件，说明它们在实验中是如何实现的。