

17. A kör és részei. Kerületi szög, középponti szög, látószög. Húrnégyszögek, érintőnégyszögek

Vázlat:

- I. Kör és részei (kör, körlap, körcikk, körgyűrű, körgyűrűcikk, körszelet)
- II. Kerületi, középponti szög, látószög, látókörív, kerületi és középponti szögek tétele, radián
- III. Húrnégyszög: definíció, tétel, terület (Heron-képlet)
- IV. Érintőnégyszög: definíció, tétel, terület
- V. Alkalmazások, matematikatörténeti vonatkozások

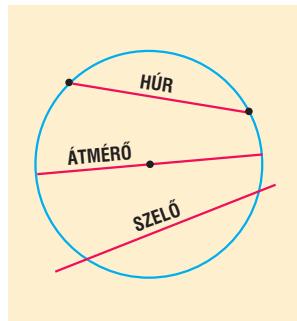
Kidolgozás

I. Kör és részei

DEFINÍCIÓ: Azoknak a pontoknak a halmaza a síkon amelyeknek a sík egy adott O pontjától adott r távolságra (adott r távolságánál nem nagyobb / adott r távolságánál kisebb) vannak O középpontú, r sugarú **körnek** (**zárt körlapnak** / **nyílt körlapnak**) nevezzük.
A kör területe $t = r^2\pi$, kerülete $k = 2r\pi$.

DEFINÍCIÓ: A körvonval két különböző pontját összekötő szakaszt **húrnak** nevezzük

DEFINÍCIÓ: A húr egyenesét **szelőnek**, a középponton áthaladó húrt **átmérőnek** nevezzük. Az átmérő a kör leghosszabb húrja, hossza: $2r$.

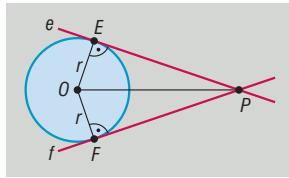


DEFINÍCIÓ: A kör **érintője** a kör síkjának olyan egyenese, amelynek pontosan egy közös pontja van a körrel.

TÉTEL: A kör minden egyes pontjába egyetlen érintő húzható és ez az érintő merőleges az érintési pontba húzott sugárra.

TÉTEL: A körhöz külső pontból húzott érintőszakaszok egyenlők.

BIZONYÍTÁS: Egy adott O középpontú körhöz adott külső P pontból húzzuk meg a két érintőt (e -t és f -et), az érintési pontok E és F . Tekintsük az OEP , illetve az FOP háromszögeket. A két háromszög egybevágó, mert két-két oldaluk és a nagyobbik oldallal szemköztes szögük egyenlő ($OE = OF = r$, OP minden két háromszög oldala, $OEP^\circ = OFP^\circ = 90^\circ$). Az egybevágóságból következik, hogy a háromszögek harmadik oldala is egyenlő, azaz $PE = PF$, ez azt jelenti, hogy az érintőszakaszok egyenlő hosszúak.



TÉTEL: A kör

- a középpontján áthaladó tetszőleges egyenesre nézve tengelyesen szimmetrikus
- a középpontjára nézve középpontosan szimmetrikus
- a középpontja körül forgatásra forgatásszimmetrikus

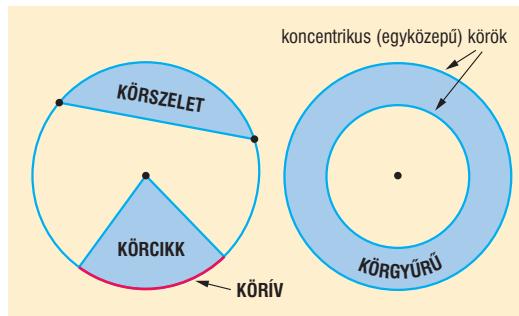
DEFINÍCIÓ: A körlapnak két sugár közé eső darabja a **körcikk**.

DEFINÍCIÓ: Egy szelő által a körlapból lemetszett rész a **körszelet**.

DEFINÍCIÓ: Két kör **koncentrikus**, ha középpontjaik egybeesnek.

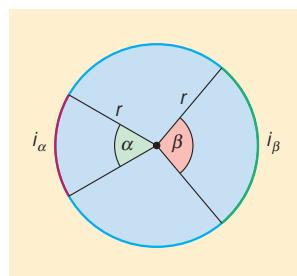
DEFINÍCIÓ: Két koncentrikus körvonal közé eső rész a **körgyűrű**.

DEFINÍCIÓ: Ha egy szög csúcsa a kör középpontja, akkor a szöget **középponti szögnek** nevezzük.



TÉTEL: Egy adott körben két középponti szöghöz tartozó **ívek hosszának aránya**, valamint a **körök területének aránya** megegyezik a középponti szögek arányával.

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{i_\alpha}{i_\beta} = \frac{t_\alpha}{t_\beta}$$



TÉTEL: Egy körben az α középponti szögű **körcikk területe**:

$$\frac{t_\alpha}{r^2\pi} = \frac{\alpha^\circ}{360^\circ} \Rightarrow t_\alpha = \frac{r^2\pi}{360^\circ} \cdot \alpha^\circ, \text{ illetve } \frac{t_\alpha}{r^2\pi} = \frac{\hat{\alpha}}{2\pi} \Rightarrow t_\alpha = \frac{r^2\hat{\alpha}}{2},$$

a hozzá tartozó **ív hossza**:

$$\frac{i_\alpha}{2r\pi} = \frac{\alpha^\circ}{360^\circ} \Rightarrow i_\alpha = \frac{2r\pi}{360^\circ} \cdot \alpha^\circ, \text{ illetve } \frac{i_\alpha}{2r\pi} = \frac{\hat{\alpha}}{2\pi} \Rightarrow i_\alpha = r\hat{\alpha}.$$

TÉTEL: Egy körben α középponti szögű körcikk területe az ívhosszal kifejezve: $t_\alpha = \frac{r \cdot i_\alpha}{2}$.

TÉTEL: R és r határoló körgyűrű területe $t = R^2\pi - r^2\pi$.

TÉTEL: Körszelet területe: $t = \frac{r^2\hat{\alpha}}{2} - \frac{r^2 \cdot \sin \alpha}{2} = \frac{r^2}{2}(\hat{\alpha} - \sin \alpha)$.

II. Középponti és kerületi szögek

DEFINÍCIÓ: Ha egy szög csúcsa egy adott kör középpontja, akkor a szöget **középponti szögnak** nevezzük, a szög szárai két sugárra illeszkednek.

DEFINÍCIÓ: Ha egy szög csúcsa egy adott körvonal egy pontja és szárai a kör húrjai, akkor a szöget **kerületi szögnak** nevezzük.

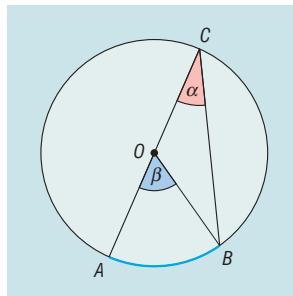
Speciális: **érintőszárú kerületi szög:** egyik szára a kör húrja, másik szára a kör érintője a húr egyik végpontjában.

A középponti szögek kapcsolatát egy körön belül már tárgyaltuk.

TÉTEL: Középponti és kerületi szögek tétele: Adott körben adott ívhez tartozó bármely kerületi szög nagysága fele az ugyanazon ívhez tartozó középponti szög nagyságának.

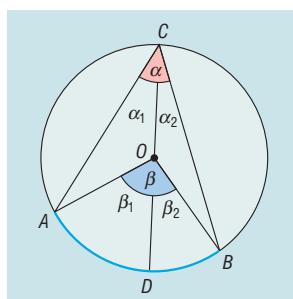
BIZONYÍTÁS: a középponti és a kerületi szögek helyzetének 4 esete van:

1. A középponti és a kerületi szög egy szára egy egyenesbe esik.



BOC háromszög egyenlő szárú $OB = OC = r \Rightarrow OCB^\circ = CBO^\circ = \alpha \Rightarrow \beta = OBC$ háromszög külső szöge, ami egyenlő a nem mellette lévő két belső szög összegével $\beta = 2\alpha$
 $\Rightarrow \alpha = \frac{\beta}{2}$.

2. A középponti szög csúcsa a kerületi szög belséjébe esik: Húzzuk be az OC -re illeszkedő átmérőt, mely az α szöget α_1 és α_2 , β szöget β_1 és β_2 részekre osztja.

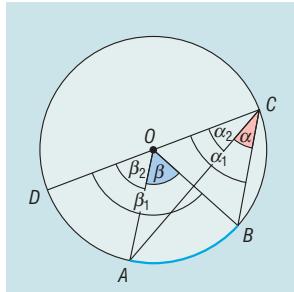


A BD , illetve AD ívekhez tartozó kerületi és középponti szögek elhelyezkedése az 1. esetnek megfelelő, tehát $\beta_1 = 2\alpha_1$ és $\beta_2 = 2\alpha_2$. Ebből következik, hogy

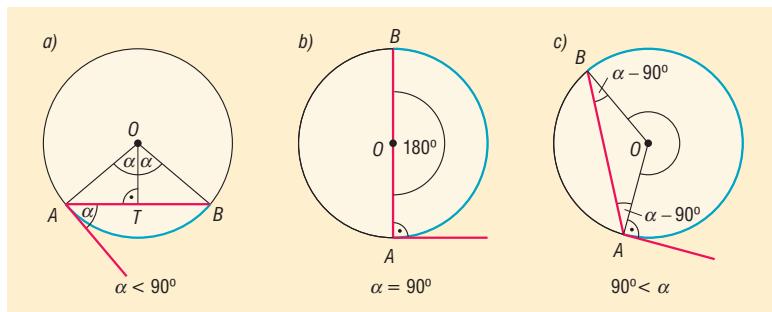
$$\beta = \beta_1 + \beta_2 = 2\alpha_1 + 2\alpha_2 = 2(\alpha_1 + \alpha_2) = 2\alpha \Rightarrow \alpha = \frac{\beta}{2}.$$

3. A középponti szög csúcsa a kerületi szög szögtartományán kívül esik: Húzzuk be az OC -re illeszkedő átmérőt. Az $\alpha = \alpha_1 - \alpha_2$ és $\beta = \beta_1 - \beta_2$ összefüggések írhatók fel a DB és a DA ívekhez tartozó kerületi és középponti szögek elhelyezkedésére az 1. esetnek megfelelő, tehát $\beta_1 = 2\alpha_1$ és $\beta_2 = 2\alpha_2$. Ebből következik, hogy

$$\beta = \beta_1 - \beta_2 = 2\alpha_1 - 2\alpha_2 = 2(\alpha_1 - \alpha_2) = 2\alpha \Rightarrow \alpha = \frac{\beta}{2}.$$



4. Ha a kerületi szög érintőszárú, akkor 3 eset van:
Jelölje α az AB íven nyugvó érintőszárú kerületi szöget.



a) $0^\circ < \alpha < 90^\circ$. Ekkor

$$BAO^\circ = ABO^\circ = 90^\circ - \alpha \Rightarrow AOB^\circ = 180^\circ - 2\alpha = \beta \Rightarrow \alpha = \frac{\beta}{2}.$$

b) $\alpha = 90^\circ \Rightarrow \beta = 180^\circ \Rightarrow \alpha = \frac{\beta}{2}$.

c) $90^\circ < \alpha < 180^\circ$. Ekkor

$$BAO^\circ = ABO^\circ = \alpha - 90^\circ \Rightarrow AOB^\circ = 180^\circ - 2(\alpha - 90^\circ) = 360^\circ - 2\alpha \Rightarrow \beta = 2\alpha \Rightarrow \alpha = \frac{\beta}{2}.$$

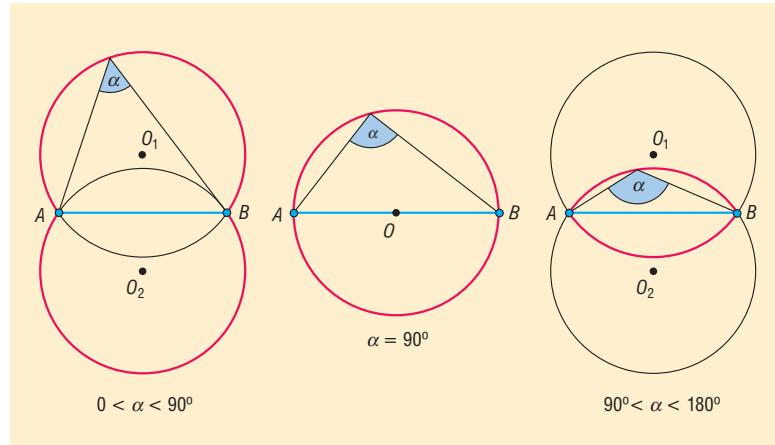
TÉTEL: Kerületi szögek tétele: adott kör adott ívéhez tartozó kerületi szögek egyenlő nagyságúak vagy adott kör adott AB húrja az AB ív belső pontjaiból ugyanakkora szögekben látszik.

TÉTEL: Általánosan: egyenlő sugarú körökben az azonos hosszúságú ívekhez tartozó kerületi szögek egyenlő nagyságúak.

TÉTEL: Ebből megfogalmazható **Thalész tétele és annak megfordítása**: Azon pontok halmaza síkon, amelyekből a sík egy AB szakasza derékszögen látszik, az AB átmérőjű körvonallal, kivéve az A és a B pontokat.

DEFINÍCIÓ: Tekintsünk a síkon egy AB szakaszt és egy P pontot. Legyen $APB^\circ = \alpha$. Ekkor azt mondhatjuk, hogy a P pontból az AB szakasz α szög alatt látszik. Az α szöget **látószögnak** nevezzük.

DEFINÍCIÓ: Azon pontok halmaza amelyekből a sík egy AB szakasza adott α ($0^\circ < \alpha < 180^\circ$) szög alatt látszik, két, az AB egyenesre szimmetrikusan elhelyezhető körív, melynek neve az AB szakasz α szögű **látóköríve**. A szakasz két végpontja nem tartozik a ponthalmazba.

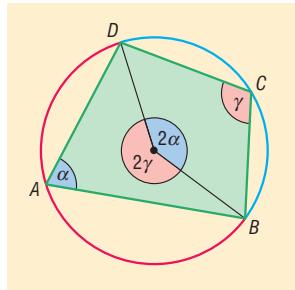


III. Húrnégyszög

DEFINÍCIÓ: Azokat a négyzeteket, amelyeknek van köré írható körük, **húrnégyszögeknek** nevezzük. Ezzel ekvivalens: a húrnégyszög olyan négyzet, amelynek oldalai ugyanakkor a körök körül járnak.

TÉTEL: Ha egy négyzet húrnégyszög, akkor szemközti szögeinek összege 180° .

BIZONYÍTÁS: Vegyük fel egy $ABCD$ húrnégyszöget, és a köré írt kört. Legyen a négyzetben $DAB\angle = \alpha, BCD\angle = \gamma$.



Ekkor α a C csúcsot tartalmazó BD ívhez, γ pedig az A csúcsot tartalmazó DB ívhez tartozó kerületi szög. A kerületi és középponti szögek tételeből következően az ugyanezenek az ívekhez tartozó középponti szögek nagysága 2α , illetve 2γ .

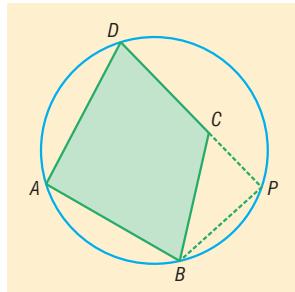
Ezek összegéről tudjuk, hogy $2\alpha + 2\gamma = 360^\circ$. Tehát $\alpha + \gamma = 180^\circ$. Mivel a négyzet belső szögeinek összege 360° , ezért a másik két szemközti szög összege is 180° .

TÉTEL: Ha egy négyzet szemközti szögeinek összege 180° , akkor az húrnégyszög.

BIZONYÍTÁS: indirekt

Tegyük fel, hogy a szemközti szögeinek összege 180° , és a négyzet nem húrnégyszög. Tehát az egyik csúcs (C) nem illeszkedik a másik három által meghatározott körre. Legyen P a DC egyenesének és a körnek a metszéspontja.

Legyen $DAB\angle = \alpha$, a feltétel szerint $BCD\angle = 180^\circ - \alpha \Rightarrow BCP\angle = \alpha$.



Ekkor az $ABPD$ négyzet húrnégyszög, amiről már beláttuk, hogy szemközti szögeinek összege 180° , tehát $DPB\hat{\alpha} = 180^\circ - \alpha$. Ebből viszont az következik, hogy a BPC háromszög egyik szöge ($BCP\hat{\alpha}$) α , egy másik ($BPC\hat{\alpha}$) pedig $180^\circ - \alpha$. Ezek összege a harmadik szög nélkül is 180° , ami ellentmond a belső szögek összegére vonatkozó tételeknek. Mivel helyesen következtettünk, csak a kiindulási feltételben lehet a hiba, tehát nem igaz, hogy C nincs a körön $\Rightarrow C$ illeszkedik a körre. Ez viszont azt jelenti, hogy $ABCD$ mindegyik csúcsa ugyanazon körön van $\Rightarrow ABCD$ húrnégyszög.

TÉTEL: Húrnégyszög-tétel: egy négyzet akkor és csak akkor húrnégyszög, ha szemközti szögeinek összege 180° .

TÉTEL: A nevezetes négyzögek közül biztosan húrnégyszög a szimmetrikus trapéz (húrtrapéz), a téglalap és a négyzet.

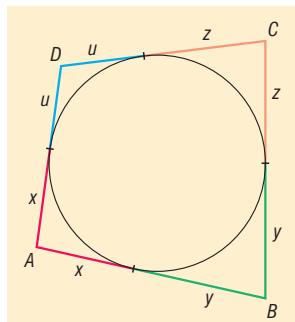
TÉTEL: A paralelogramma akkor és csak akkor húrnégyszög, ha téglalap.

TÉTEL: A húrnégyszög területe kifejezhető a négyzet kerületével és az oldalakkal: Ha $s = \frac{k}{2}$, akkor $t = \sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}$. Ez a **Heron-képlet** húrnégyszögekre.

IV. Érintőnégyszög

DEFINÍCIÓ: Azokat a négyzögeket, amelyeknek van beírt körük, **érintőnégyszögeknek** nevezzük. Ezzel ekvivalens: az érintő négyzet olyan négyzet, amelynek az oldalai ugyanannak a körnek érintői.

TÉTEL: Ha egy konvex négyzet érintőnégyszög, akkor szemközti oldalainak összege egyenlő.



BIZONYÍTÁS: Az ábrán azonos színnel jelölt szakaszok egyenlők, mert körhöz külső pontból húzott érintőszakaszok egyenlők.

Így $AB + CD = x + y + u + v$, illetve $BC + DA = y + z + u + x$. Mivel az összeadás tagjai felcserélhetők, a két jobb oldalon álló kifejezések egyenlők, ebből viszont következik, hogy a bal oldalak is egyenlők: $AB + CD = BC + DA$. Ezzel bebizonyítottuk az állítást.

TÉTEL: Ha egy konvex négyzet szemközti oldalainak összege egyenlő, akkor az érintőnégyszög.

TÉTEL: **Érintőnégyszög tétele:** Egy konvex négyszög akkor és csak akkor érintőnégyszög, ha szemközti oldalainak összege egyenlő.

TÉTEL: A **nevezetes négyszögek** közül biztosan érintőnégyszög a deltoid, így a rombusz és a négyzet.

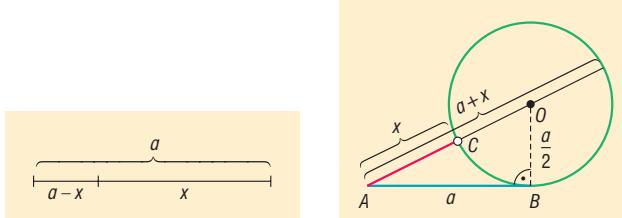
TÉTEL: A paralelogramma akkor és csak akkor érintőnégyszög, ha rombusz.

TÉTEL: **Érintőnégyszög területe** kifejezhető a négyszög kerületével, és a beírt kör sugarával:

$$t = \frac{k \cdot r}{2} = s \cdot r .$$

V. Alkalmazások:

- A körhöz húzott érintő- és szelőszakaszok tételével feloszthatunk egy szakaszt az aranymetszésnek megfelelően (a nagyobb rész és az egésznek az aránya egyenlő a kisebb rész és a nagyobb rész arányával).



- Körrel kapcsolatos ismeretek: körmozgás, forgómozgás, építészet (boltívek, román és gótikus stílusú ablakok tervezése)
- Látószög: háromszög szerkesztésében (pl.: adott a , α , m_a esetén háromszög szerkesztése), terepfeladatokban, csillagászatban, színházi nézőtéren a legjobb ülőhely kiválasztása, labdarúgásban és kézilabdában a legjobb szögből való kapuralövés helyének meghatározása
- A kör területe, kerülete: térgeometriai számítások
- Csonkakúp, illetve csonkagúla beírt gömbjének sugár meghatározása megfelelő síkmetszettel (pl. érintőtrapéz)
- Csonkakúp köré írt gömb sugarának meghatározása

Matematikatörténeti vonatkozások:

- A kör és részei közötti viszonyok feltárását már az ókori gondolkodóknál megtalálhatjuk. Számukra a kör a tökéletességet szimbolizálta, isteni eredetűnek tartották. Ma a matematika számos területe támaszkodik az idők folyamánelfedezett összefüggésekre.
- Eukleidész** Kr. e. 300 körül élt görög matematikus Elemek című művében meghatározta a geometriai alapszakesztesek axiómáit, a kerületi és a középponti szögekkel kapcsolatos tételeket, a hasonlósággal kapcsolatos tételeket. Pl. hasonló körszeletek területei úgy aránylanak egymáshoz, mint húrjaik négyzetei.
- Heron** Kr. e. I. században élt görög matematikus, síkidomok területének és testek térfogatának kiszámításával is foglalkozott. A háromszög területét számító Heron-képlet, amelynek geometriai bizonyítását adta, valószínűleg Arkhimédész felfedezése.
- Leonardo da Vinci** (1452–1519) olasz festő, matematikus számos festményében használta az aranymetszést, pl az egyik leghíresebb festményében, a Mona Lisa-ban több mint száz aranymetszes arány található.