14. Összefüggések az általános háromszögek oldalai között, szögei között, oldalai és szögei között

Vázlat:

I. Háromszögek csoportosítása szögeik és oldalaik szerint
II. Összefüggések a háromszög oldalai között (háromszög-egyenlőtlenségek, Pitagorasz-tétel)
III. Összefüggések a háromszög szögei között (belső, külső szögek)
IV. Összefüggések a háromszög szögei és oldalai között (koszinusztétel, szinusztétel, szögfüggvények)
V. Alkalmazások, matematikatörténeti vonatkozások

Kidolgozás:

I. Háromszögek csoportosítása szögeik és oldalaik szerint

DEFINÍCIÓ: **Háromszög** az a zárt szögvonal, amelyeknek 3 oldala és 3 csúcsa van.

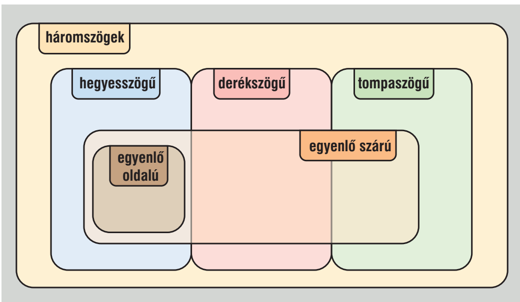
DEFINÍCIÓ: Egy háromszög **hegyesszögű**, ha minden szöge hegyesszög.

DEFINÍCIÓ: Egy háromszög **derékszögű**, ha van egy 90º-os szöge.

DEFINÍCIÓ: Egy háromszög **tompaszögű**, ha van egy tompaszöge.

DEFINÍCIÓ: Egy háromszög **szabályos** (vagy egyenlő oldalú), ha három oldala egyenlő hosszú.

DEFINÍCIÓ: Egy háromszög **egyenlő szárú** (vagy szimmetrikus), ha van két egyenlő oldala.



II. Összefüggések a háromszög oldalai közt

TÉTEL: Háromszög-egyenlőtlenségek: a háromszög bármely két oldalának összege nagyobb a harmadiknál: $a + b > c$, $a + c > b$, $b + c > a$.

TÉTEL: Egy háromszögben bármely két oldal különbségének abszolút értéke kisebb a harmadiknál: $|a - c| < b$, $|a - b| < c$, $|b - c| < a$.

TÉTEL: Pitagorasz-tétel: Bármely derékszögű háromszögben a két befogó négyzetének összege egyenlő az átfogó négyzetével.

III. Összefüggések a háromszög szögei közt

TÉTEL: A háromszög belső szögeinek összege 180º.

TÉTEL: A háromszög külső szögeinek összege 360º.

TÉTEL: A háromszög egy külső szöge egyenlő a nem mellette fekvő két belső szög összegével.

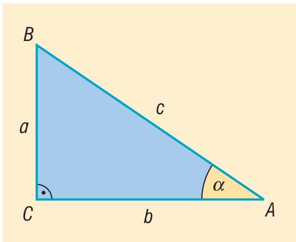
IV. Összefüggések a háromszög oldalai és szögei között

TÉTEL: Egy háromszögben egyenlő hosszúságú oldalakkal szemben egyenlő nagyságú szögek vannak, egyenlő nagyságú szögekkel szemben egyenlő hosszúságú oldalak vannak.

TÉTEL: Bármely háromszögben két oldal közül a hosszabbikkal szemben nagyobb belső szög van, mint a rövidebbikkel szemben, illetve két szög közül a nagyobbikkal szemben hosszabb oldal van, mint a kisebbikkel szemben.

DEFINÍCIÓ: Derékszögű háromszögben bevezetjük a **szögfüggvények** fogalmát a hasonló háromszögek tulajdonságait kihasználva:
- $\sin\alpha$ az α szöggel szemközti befogó és az átfogó hányadosa,
- $\cos\alpha$ az α szög melletti befogó és az átfogó hányadosa,
- $\mathrm{tg}\,\alpha$ az α szöggel szemközti befogó és az α szög melletti befogó hányadosa,
- $\mathrm{ctg}\,\alpha$ az α szög melletti befogó és az α szöggel szemközti befogó hányadosa.

$$\sin\alpha = \frac{a}{c},\quad \cos\alpha = \frac{b}{c},\quad \mathrm{tg}\,\alpha = \frac{a}{b},\quad \mathrm{ctg}\,\alpha = \frac{b}{a}$$



TÉTEL: Szinusztétel: Egy háromszögben két oldal hosszának aránya egyenlő a velük szemközti szögek szinuszának arányával:

$$\frac{a}{b} = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta}$$

A szinusztétel a háromszög három oldalára is felírható, ekkor $a : b : c = \sin\alpha : \sin\beta : \sin\gamma$.

BIZONYÍTÁS: A háromszög oldalainak és szögeinek szokásos jelölését alkalmazva írjuk fel a háromszög területét kétféleképpen:

$$T = \frac{b \cdot c \cdot \sin\alpha}{2} = \frac{a \cdot c \cdot \sin\beta}{2}$$

Az utóbbi egyenloség mindkét oldalát szorozzuk meg 2-vel és osszuk el c-vel:

$$b \cdot \sin\alpha = a \cdot \sin\beta$$

Ezt keresztbeosztással rendezzük:

$$\frac{a}{b} = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta}$$

Ezzel bebizonyítottuk az állítást.

Szinusztétel alkalmazása:

- Ha adott a háromszög egy oldala és két szöge, akkor bármely oldal kiszámolható (mert ekkor kiszámolható a belső szögösszegből a harmadik szög).
- Ha adott a háromszög két oldala és nem az általuk közbezárt szög ismert, akkor két eset lehetségséges:
  - Ha a két oldal közül a nagyobbikkal szemköztes szög ismert, akkor kiszámolható a kisebbik oldallal szemköztes szög. Ebben az esetben a háromszög egyértelműen meghatározott.
  - Ha a háromszög két oldalát és a rövidebbel szemköztes szöget ismerjük, akkor kiszámolható a nagyobbik oldallal szemköztes szög, amire háromféle megoldás is lehet:
    1. ha a szög szinuszára pozitív, de 1-nél kisebb értéket kapunk, akkor két megoldás van, a szög lehet hegyesszög és tompaszög is. Ekkor a háromszög nem egyértelműen meghatározott, két ilyen háromszög létezik.
    2. ha a szög szinuszára 1-et kapunk, akkor egy megoldás van, a szög 90º, ez egy derékszögű háromszög.
    3. ha a szög szinuszára 1-nél nagyobb számot kapunk, akkor nincs ilyen szög, azaz nincs az adatoknak megfelelő háromszög.

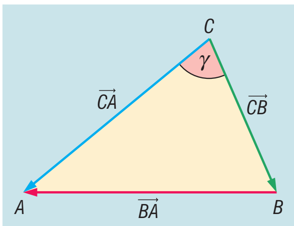
    Ebben az esetben inkább a koszinusztételt alkalmazzuk, ekkor másodfokú egyenletet kapunk a harmadik oldalra, így viszont egyértelműen eldönthető az oldal hossza (a másodfokú egyenletnek 0, 1, 2 megoldása van, illetve feltétel, hogy az oldal hossza pozitív, vagy a háromszög-egyenlőtlenség is segíthet abban, hogy eldöntsük, hogy melyik eredmény megoldása a feladatnak).

TÉTEL: Koszinusztétel: egy háromszög egyik oldalhosszának négyzetét megkapjuk, ha a másik két oldal négyzetösszegéből kivonjuk a két oldal hosszának és a közbezárt szög koszinuszának kétszeres szorzatát: $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$.

BIZONYÍTÁS: Vektorok skaláris szorzatának felhasználásával fogjuk bizonyítani, ezért a háromszög oldalait irányítjuk:

$$\overrightarrow{CB} = \underline{a}, \quad \overrightarrow{CA} = \underline{b}, \quad \overrightarrow{BA} = \underline{c}.$$

Jelölje $|\underline{a}| = a$, $|\underline{b}| = b$ és $|\underline{c}| = c$.



Ekkor $\underline{c} = \underline{a} - \underline{b}$. Az egyenlet mindkét oldalát önmagával skalárisan szorozva:

$$\underline{c}^2 = (\underline{a} - \underline{b})^2 \;\Rightarrow\; \underline{c}^2 = \underline{a}^2 - 2\underline{a}\underline{b} + \underline{b}^2.$$

$$\underline{c}^2 = |\underline{c}| \cdot |\underline{c}| \cdot \cos 0^\circ = c \cdot c \cdot 1 = c^2.$$

Hasonlóan $\underline{a}^2 = a^2$ és $\underline{b}^2 = b^2$.

$$\underline{a} \cdot \underline{b} = |\underline{a}| \cdot |\underline{b}| \cdot \cos\gamma = a \cdot b \cdot \cos\gamma.$$

Ezeket beírva a $\underline{c}^2 = \underline{a}^2 - 2\underline{a}\underline{b} + \underline{b}^2$ egyenletbe kapjuk: $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$.

Következmények:

- ha $\gamma = 90°$, vagyis a háromszög derékszögű, akkor $c^2 = a^2 + b^2$, ami a Pitagorasz-tétel.
- ha $\gamma < 90°$, akkor bármely két oldalának négyzetösszege nagyobb a harmadik oldal négyzeténél.
- ha $\gamma > 90°$, akkor a két rövidebb oldal négyzetösszege kisebb a harmadik oldal négyzeténél.

Koszinusztétel alkalmazása:

- Ha adott a háromszög két oldala és az általuk közbezárt szög, akkor kiszámítható a szöggel szembeni oldal.
- Ha adott a háromszög három oldala, akkor kiszámolható a háromszög bármely szöge.
  Ha keressük a háromszög szögeit, akkor ebben az esetben a háromszög legnagyobb szögét érdemes kiszámolni koszinusztétellel, ami a leghosszabb oldallal szemben van, mert az hegyes-, derék- és tompaszögre is egyértelmű megoldást ad.

V. Alkalmazások:

- Háromszögek szerkesztése, háromszög ismeretlen adatainak kiszámítása
- Sokszögekben oldalak, átlók, szögek kiszámolása háromszögekre bontással
- Földmérésben, térképészetben, csillagászatban mért adatokból távolságok és szögek kiszámolása
- Terepfeladatok megoldásánál: pl.: megközelíthetetlen pontok helyének meghatározása
- Modern helymeghatározás: GPS

Matematikatörténeti vonatkozások:

- **Thalész** a Kr. e. VI. században élt az ókori Görögországban, az első olyan matematikus volt, akinek bizonyítási igénye volt. Ő mondta ki, hogy a háromszög belső szögeinek összege 180°, megállapította, hogy egyenlő szárú háromszögben az egyenlő hosszúságú oldalakkal szemben egyenlő szögek vannak.
- A szinusztétel felfedezője **Abu Nasr** (1000 körül) arab matematikus.
- **Regiomontanus** (1436–1476) német matematikus részletes trigonometriai bevezetést írt a háromszögekről. Készített szinusztáblázatot is. A nagy humanista Vitéz János barátjaként éveket töltött Esztergomban, majd Mátyás király udvarában a Corvina könyvtár rendezésével foglalatoskodott.
- A legrégibb térképeket több, mint 4000 évvel ezelőtt készítették. **Snellius** holland mérnök a XVII. században kidolgozott olyan, a háromszögek adatainak meghatározására épülő (trigonometriai) módszert, amelynek alkalmazásával a térképek pontosabbá váltak.