15. Egybevágósági transzformációk, alakzatok egybevágósága. Szimmetria. Hasonlósági transzformációk. Hasonló síkidomok kerülete, területe, hasonló testek felszíne, térfogata. A hasonlóság alkalmazásai síkgeometriai tételek bizonyításában

Vázlat:

I. Egybevágósági transzformációk
Eltolás, tengelyes tükrözés, pontra vonatkozó tükrözés, pont körüli elforgatás
II. Alakzatok egybevágósága (háromszögek, sokszögek)
III. Szimmetria
IV. Hasonlósági transzformáció:
Középpontos hasonlósági transzformáció
V. Alakzatok hasonlósága (háromszögek, sokszögek)
VI. Transzformációk tulajdonságai
VII. Hasonló síkidomok kerülete, területe, hasonló testek felszíne, térfogata
VIII. Hasonlóság alkalmazása síkgeometriai tételek bizonyításában: háromszögekre vonatkozó tételekben
a) középvonalra vonatkozó tétel
b) súlyvonalakra vonatkozó tétel
c) szögfelezőtétel
d) magasságtétel
e) befogótétel
IX. Alkalmazások, matematikatörténeti vonatkozások

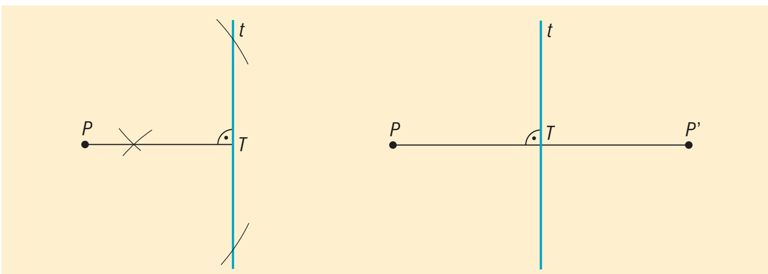
Kidolgozás:

I. Transzformációk

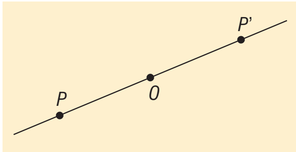
DEFINÍCIÓ: Geometriai transzformációk azok a függvények, amelyek egy ponthalmazt ponthalmazra képeznek le. ($D_f = R_f =$ ponthalmaz)

DEFINÍCIÓ: A geometriai transzformációk közül a távolságtartó transzformációkat **egybevágósági transzformációk**nak nevezzük.
Távolságtartó leképezés: bármely két pont távolsága egyenlő képeik távolságával.
Síkbeli egybevágósági transzformációk: tengelyes tükrözés, pontra vonatkozó (középpontos) tükrözés, pont körüli elforgatás, eltolás, és ezek egymás utáni alkalmazása.

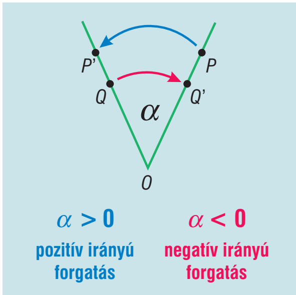
DEFINÍCIÓ: Tengelyes tükrözés: adott a sík egy *t* egyenese, ez a tengelyes tükrözés tengelye. A *t* tengelyre vonatkozó tengelyes tükrözés a sík tetszőleges *t*-re nem illeszkedő *P* pontjához azt a *P'* pontot rendeli, amelyre fennáll, hogy a *PP'* szakasz felezőmerőlegese a *t* tengely. A *t* egyenesen lévő minden pont képe önmaga.



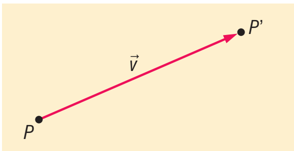
DEFINÍCIÓ: Középpontos tükrözés: adott a sík egy O pontja, a középpontos tükrözés középpontja. Az O pontra vonatkozó középpontos tükrözés a sík egy tetszőleges O-tól különböző P pontjához azt a P' pontot rendeli, amelyre az O pont a PP' szakasz felezőpontja. Az O pont képe önmaga.



DEFINÍCIÓ: Pont körüli forgatás: adott a sík egy O pontja és egy α irányított szög. Az O pont körüli α szögű, adott irányú forgatás a sík egy tetszőleges O-tól különböző P pontjához azt a P' pontot rendeli, amelyre teljesül, hogy POP' szög irány és nagyság szerint megegyezik α-val és $OP = OP'$. O pont képe önmaga.



DEFINÍCIÓ: Eltolás: adott egy $\underline{v}$ vektor. A $\underline{v}$ vektorral való eltolás a sík (tér) tetszőleges P pontjához azt a P' pontot rendeli, amelyre $\overrightarrow{PP'} = \underline{v}$.



II. Alakzatok egybevágósága (háromszögek, sokszögek)

DEFINÍCIÓ: Két alakzat egybevágó, ha van olyan egybevágósági transzformáció, amely az egyik alakzatot a másikba viszi. Jele: $A \cong B$.

TÉTEL: Két háromszög akkor és csak akkor egybevágó, ha:
- megfelelő oldalaik hossza páronként egyenlő,
- két-két oldaluk hossza páronként egyenlő és az ezek által közbezárt szögek nagysága egyenlő,
- két-két oldaluk hossza páronként egyenlő és e két-két oldal közül a hosszabbikkal szemközti szögük nagysága egyenlő,
- egy-egy oldaluk hossza páronként egyenlő és két-két szögük páronként egyenlő.

TÉTEL: Két sokszög akkor és csak akkor egybevágó, ha a következő feltételek egyike teljesül:
- megfelelő oldalaik hossza és a megfelelő átlóik hossza páronként egyenlő,
- megfelelő oldalaik hossza páronként egyenlő és megfelelő szögeik páronként egyenlők.

III. Szimmetria

DEFINÍCIÓ: Ha egy ponthalmazhoz található olyan t egyenes, amelyre vonatkozó tükörképe önmaga, akkor ez a ponthalmaz **tengelyesen szimmetrikus,** amelynek t a szimmetriatengelye.

Tengelyesen szimmetrikus síkidomok: egyenlő szárú háromszög, egyenlő oldalú háromszög, deltoid, húrtrapéz, rombusz, téglalap, négyzet, szabályos sokszögek, kör.

DEFINÍCIÓ: Ha egy ponthalmazhoz található olyan *O* pont, amelyre vonatkozó képe önmaga, akkor ez a ponthalmaz **középpontosan szimmetrikus,** amelynek *O* a szimmetria középpontja. Középpontosan szimmetrikus síkidomok: paralelogramma, rombusz, téglalap, négyzet, páros oldalszámú szabályos sokszögek, kör, ellipszis. Középpontosan szimmetrikus háromszög nincs.

DEFINÍCIÓ: Ha egy ponthalmazhoz található egy olyan *O* pont és egy α szög úgy, hogy az alakzat *O* pont körüli α szögű elforgatása önmaga, akkor ez a ponthalmaz **forgásszimmetrikus.** Forgásszimmetrikus síkidomok: a középpontosan szimmetrikus síkidomok ($\alpha = 180^\circ$), szabályos sokszögek $\left(\alpha = k \cdot \frac{360^\circ}{n}\right)$, kör.

IV. Hasonlósági transzformáció: középpontos hasonlóság

DEFINÍCIÓ: Középpontos hasonlósági transzformáció: adott egy *O* pont és egy λ 0-tól különböző valós szám. A tér minden *P* pontjához rendeljünk hozzá egy *P'* pontot a következőképpen:

1. ha $P = O$, akkor $P' = P$.
2. ha $P \neq O$, akkor *P'* az *OP* egyenes azon pontja, amelyre $OP' = |\lambda| \cdot OP$ és ha $\lambda > 0$, akkor *P'* az *OP* félegyenes pontja, ha $\lambda < 0$, akkor *O* elválasztja egymástól *P*-t és *P'*-t.

Az *O* pont a középpontos **hasonlósági transzformáció középpontja**, λ a középpontos **hasonlóság aránya**.
Ha $|\lambda| > 1$, akkor középpontos **nagyítás**ról, ha $|\lambda| < 1$, akkor **kicsinyítés**ről beszélünk, ha pedig $|\lambda| = 1$, akkor a transzformáció egybevágóság.

DEFINÍCIÓ: Véges sok középpontos hasonlósági transzformáció és véges sok egybevágósági transzformáció egymás utáni végrehajtásával kapott transzformációkat **hasonlósági transzformáció**nak nevezzük.

V. Alakzatok hasonlósága (háromszögek, sokszögek)

DEFINÍCIÓ: **Két alakzat hasonló**, ha van olyan hasonlósági transzformáció, amely az egyik alakzatot a másikba viszi. Jele: $A \sim B$.

TÉTEL: **Két háromszög akkor és csak akkor hasonló**, ha:

1. megfelelő oldalaik hosszának aránya páronként egyenlő, azaz $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} = \lambda$,
2. két-két oldalhosszuk aránya és az ezek által közbezárt szögek nagysága egyenlő, pl.: $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \lambda$ és $\gamma = \gamma'$,
3. két-két oldalhosszuk aránya egyenlő, és e két-két oldal közül a hosszabbikkal szemközti szögük nagysága egyenlő, pl.: $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \lambda$ és $\alpha = \alpha'$ (ha $a > b$),
4. két-két szögük páronként egyenlő, pl.: $\alpha = \alpha'$ és $\beta = \beta'$.

TÉTEL: **Két sokszög akkor és csak akkor hasonló**, ha megfelelő oldalhosszaik aránya és megfelelő szögeik nagysága páronként egyenlő nagyságú.

VI. Transzformációk főbb tulajdonságai

	Egybevágósági transzformációk				Hasonlóság: középpontos hasonlósági transzformáció
	tengelyes tükrözés	**középpontos tükrözés**	**pont körüli elforgatás**	**eltolás**	
fixpont (képe önmaga)	a t egyenes minden pontja	egyetlen fixpont: O pont	egyetlen fixpont: O pont (ha $\alpha \neq 0°$)	nincs fixpontja (ha $\underline{v} \neq \underline{0}$)	egyetlen fixpont: O pont (ha $\lambda \neq 1$)
fixegyenes (minden pontja fixpont)	a t egyenes	nincs fixegyenes	nincs fix egyenes (ha $\alpha \neq 0°$)	nincs fixegyenes	nincs fixegyenes (ha $\lambda \neq 1$)
invariáns egyenes (képe önmaga, de pontonként nem fix)	a t-re merőleges egyenesek	minden O-ra illeszkedő egyenes invariáns	nincs invariáns egyenes (ha $\alpha \neq 0°$, $\alpha \neq 180°$)	az adott vektorral párhuzamos egyenesek	minden O-ra illeszkedő egyenes invariáns (ha $\lambda \neq 1$)

VII. Hasonló síkidomok kerülete, területe, hasonló testek felszíne, térfogata

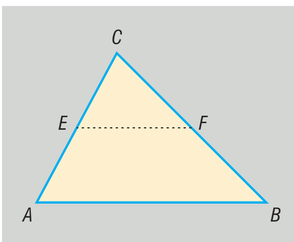
TÉTEL: Hasonló síkidomok kerületének aránya megegyezik a hasonlóság arányával, területének aránya a hasonlóság arányának négyzetével: $\frac{k_1}{k_2} = \lambda$ és $\frac{t_1}{t_2} = \lambda^2$.

TÉTEL: Hasonló testek felszínének aránya megegyezik a hasonlóság arányának négyzetével, térfogatának aránya a hasonlóság arányának köbével: $\frac{A_1}{A_2} = \lambda^2$ és $\frac{V_1}{V_2} = \lambda^3$.

VIII. Hasonlóság alkalmazása síkgeometriai tételek bizonyításában: háromszögekre vonatkozó tételekben

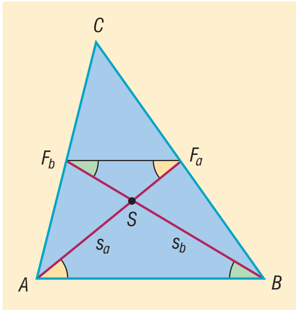
TÉTEL: A háromszög középvonalaira vonatkozó tétel: A háromszög középvonala párhuzamos a felezőpontokat nem tartalmazó oldalakkal, és fele olyan hosszú, mint a nem felezett oldal.

BIZONYÍTÁS: A tétel bizonyításánál az *ABC* és *EFC* háromszögek hasonlóságát használjuk.



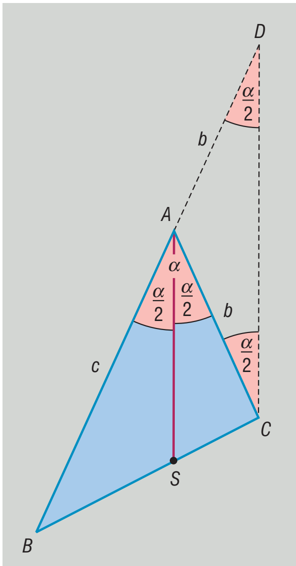
TÉTEL: A háromszög súlyvonalaira vonatkozó tétel: A háromszög súlyvonalai egy pontban metszik egymást. Ez a pont mindhárom súlyvonalnak a csúcstól távolabbi harmadolópontja.

BIZONYÍTÁS: A tétel bizonyításánál az ASB és SF_aF_b háromszögek hasonlóságát használjuk.



TÉTEL: Szögfelezőtétel: Egy háromszög belső szögfelezője a szemközti oldalt a szomszédos oldalak arányában osztja.

BIZONYÍTÁS: Az ABC háromszög A csúcsából induló belső szögfelező BC oldalt az S pontban metszi.



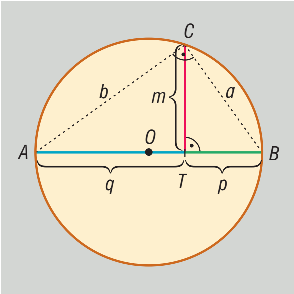
A BA szakaszt hosszabbítsuk meg A-n túl és legyen $AD = b$. Ekkor $AD = AC = b$, ebből következik, hogy az ACD háromszög egyenlő szárú, a C-nél és a D-nél levő belső szögek egyenlők, az A-nál levő külső szög α.
Tudjuk, hogy a háromszög külső szöge egyenlő a vele nem szomszédos belső szögek összegével, tehát $ACD\sphericalangle = ADC\sphericalangle = \dfrac{\alpha}{2}$.

Ekkor viszont $BAS\sphericalangle = ADC\sphericalangle = \dfrac{\alpha}{2}$. Ebből következik, hogy az $AS \parallel CD$. A B csúcsnál levő szögre alkalmazva a párhuzamos szelők tételét kapjuk: $\dfrac{CS}{SB} = \dfrac{DA}{AB} = \dfrac{AC}{AB}$.

TÉTEL: Magasságtétel: Derékszögű háromszögben az átfogóhoz tartozó magasság hossza mértani közepe azon két szakasz hosszának, amelyekre a magasság az átfogót osztja.

BIZONYÍTÁS: A tétel bizonyításánál a *TBC* és *TAC* háromszögek hasonlóságát használjuk.

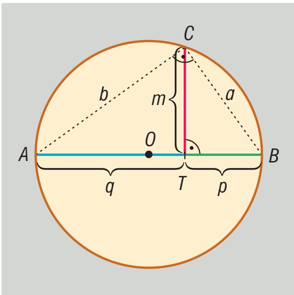
$$\frac{m}{p}=\frac{q}{m} \Rightarrow m^2=p\cdot q \Rightarrow m=\sqrt{p\cdot q}$$



TÉTEL: Befogótétel: Derékszögű háromszög befogójának hossza mértani közepe az átfogó és a befogó átfogóra eső merőleges vetülete hosszának.

BIZONYÍTÁS: A tétel bizonyításánál a *TBC* és az *ABC* háromszögek hasonlóságát használjuk.

$$\frac{a}{p}=\frac{c}{a} \Rightarrow a^2=p\cdot c \Rightarrow a=\sqrt{p\cdot c}$$



VII. Alkalmazások:

- A kör kerületének és területének meghatározását végezhetjük a körbe, illetve a kör köré írt szabályos sokszögek kerületének, illetve területének segítségével. Ez egyben π értékének közelítése.
- Aranymetszés aránya = szabályos ötszög átlóinak osztásaránya
- Hegyesszögek szögfüggvényeinek értelmezése derékszögű háromszögek hasonlóságán alapul
- Hasonlóságot használnak a térképészetben, az építészetben (tervek, makettek), az optikai lencsék alkalmazásakor
- Szakasz egyenlő részekre osztása párhuzamos szelők tételének segítségével történik.

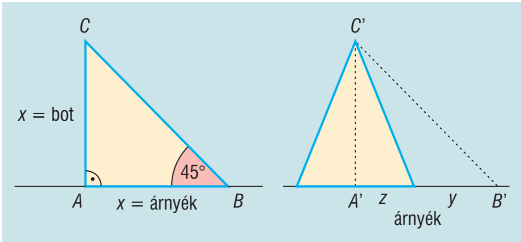
Matematikatörténeti vonatkozások:

- **Eukleidész** Kr. e. 300 körül élt görög matematikus Elemek című művében meghatározta a geometriai alapszekesztések axiómáit, egybevágósággal és hasonlósággal kapcsolatos tételeket. Pl. hasonló körszeletek területei úgy aránylanak egymáshoz, mint húrjaik négyzetei.
- **Thalész** Kr. e. VI. században élt az ókori Görögországban, kiszámolta az egyiptomi piramisok magasságát a hasonlóság segítségével:
  Egy földbe szúrt bot segítségével mérte a piramisok magasságát: amikor a bot és az árnyéka egyenlő hosszú, akkor a piramis árnyéka is egyenlő a piramis magasságával, így elegendő

csak a piramis árnyékát és alapját megmérni, mert ezekből már számolható a piramis magassága:

$$\frac{AC}{A'C'} = \frac{AB}{A'B'} \Rightarrow \frac{AC}{AB} = \frac{A'C'}{A'B'} = 1$$

$$A'B' = A'C' = y + z$$



- Az egybevágóság jelét (≅) **Leibniz** (1646–1716) német matematikus vezette be.