

20. A kör és a parabola elemi úton és a koordinátasíkon. Kör és egyenes, parabola és egyenes kölcsönös helyzete. Másodfokú egyenlőtlenségek grafikus megoldása

Vázlat:

- I. Kör definíciója, egyenlete
- II. Parabola definíciója, egyenletei
- III. Kör és egyenes kölcsönös helyzete
- IV. Parabola és egyenes kölcsönös helyzete
- V. Másodfokú egyenlőtlenségek
- VI. Alkalmazások, matematikatörténeti vonatkozások

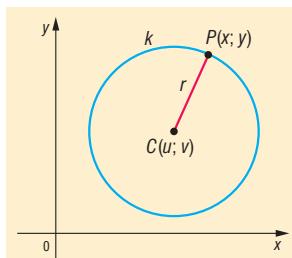
Kidolgozás

I. Kör és egyenlete

DEFINÍCIÓ: A **kör** azon pontok halmaza a síkon, amelyek egy adott ponttól adott távolságra vannak. Az adott pontot a kör **középpontjának**, az adott távolságot a kör **sugarának** nevezik. Tehát a kört a síkon egyértelműen meghatározza a középpontja és sugara.

TÉTEL: A $C(u; v)$ középpontú, r sugarú **kör egyenlete** $(x - u)^2 + (y - v)^2 = r^2$.

BIZONYÍTÁS: A $P(x; y)$ pont akkor és csak akkor van a körön, ha CP távolság éppen r , azaz $CP = r$.



$CP = \sqrt{(x - u)^2 + (y - v)^2} = r \Rightarrow$ mivel minden oldal nemnegatív, négyzetre emeléssel ekvivalens kifejezéshez jutunk: $(x - u)^2 + (y - v)^2 = r^2$, amit a kör pontjai kielégítnek, de más pontok nem.

A kör egyenlete kétismeretlenes másodfokú **egyenlet**, hiszen az egyenlete:

$$x^2 + y^2 - 2ux - 2vy + u^2 + v^2 - r^2 = 0$$

alakra hozható, azaz átalakítható:

$$x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$$

alakúra, ahol A, B, C olyan valós számok, amelyekre $A^2 + B^2 - 4C > 0$.

Ekkor a kör középpontjának koordinátáira:

$$-2u = A \Rightarrow u = -\frac{A}{2}; \quad -2v = B \Rightarrow v = -\frac{B}{2};$$

illetve

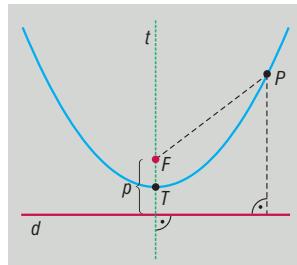
$$u^2 + v^2 - r^2 = C \Rightarrow \frac{A^2}{4} + \frac{B^2}{4} - r^2 = C \Rightarrow r^2 = \frac{A^2 + B^2}{4} - C \Rightarrow r^2 = \frac{A^2 + B^2 - 4C}{4} \Rightarrow r = \sqrt{\frac{A^2 + B^2 - 4C}{4}} = \frac{\sqrt{A^2 + B^2 - 4C}}{2}.$$

Azaz a kör középpontja $C\left(-\frac{A}{2}; -\frac{B}{2}\right)$, sugara $r = \frac{\sqrt{A^2 + B^2 - 4C}}{2}$. Ebből láthatjuk, hogy nem minden $x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$ egyenlet kör egyenlete.

II. Parabola és egyenletei

DEFINÍCIÓ: A **parabola** azon pontok halmaza a síkon, amelyek a sík egy v egyenesétől és az egyenesre nem illeszkedő F ponttól egyenlő távolságra vannak.

Az adott egyenes a parabola **vezéregyenese** (direktrix), az adott pont a parabola **fókuszpontja**.



A vezéregyenes és a fókuszpont távolsága a parabola **paramétere** ($p > 0$).

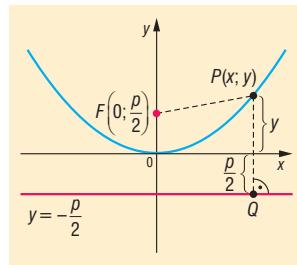
A fókuszontra illeszkedő és a vezéregyenesre merőleges egyenes a parabola szimmetriatengelye, röviden **tengelye** (t).

A parabola tengelyen lévő pontja a parabola **tengelypontja** (T). A tengelypont felezi a fókuszt és a vezéregyenes távolságát.

TÉTEL: Az $F\left(0; \frac{p}{2}\right)$ fókuszpontú $y = -\frac{p}{2}$ vezéregyenesű **parabola egyenlete**: $y = \frac{1}{2p}x^2$.

Ez azt is jelenti, hogy a parabola tengelypontja $T(0; 0)$, paramétere p (és a fókusza a tengelypont felett van, azaz a parabola „pozitív” állású), ekkor a parabola egyenlete $y = \frac{1}{2p}x^2$.

BIZONYÍTÁS:



A vezéregyenes egyenlete: $y = -\frac{p}{2}$. Egy síkbeli P pont akkor és csak akkor illeszkedik a parabolára, ha a parabola fókusztól és vezéregyenesétől egyenlő távolságra van. A P pont és a vezéregyenes távolsága egyenlő a PQ távolsággal, ahol Q a P pont merőleges vetülete a v vezéregyenesen, ezért $Q\left(x; -\frac{p}{2}\right)$.

$$\left. \begin{aligned} PQ &= \sqrt{(x-x)^2 + \left(y + \frac{p}{2}\right)^2} = \sqrt{\left(y + \frac{p}{2}\right)^2} \\ PF &= \sqrt{(x-0)^2 + \left(y - \frac{p}{2}\right)^2} = \sqrt{x^2 + \left(y - \frac{p}{2}\right)^2} \end{aligned} \right\} PQ = PF,$$

azaz

$$\sqrt{\left(y + \frac{p}{2}\right)^2} = \sqrt{x^2 + \left(y - \frac{p}{2}\right)^2}.$$

Mivel minden két oldal nemnegatív, a négyzetre emelés ekvivalens egyenletet ad:

$$\begin{aligned} \left(y + \frac{p}{2}\right)^2 &= x^2 + \left(y - \frac{p}{2}\right)^2 \\ y^2 + py + \frac{p^2}{4} &= x^2 + y^2 - py + \frac{p^2}{4} \end{aligned}$$

$2py = x^2 \Rightarrow$ (mivel $p > 0$): $y = \frac{1}{2p}x^2$ (origó tengelypontú $F\left(0; \frac{p}{2}\right)$ fókuszpontú parabola tengelyponti egyenlete).

TÉTEL: A p paraméterű $T(u, v)$ tengelypontú, y tengellyel párhuzamos szimmetria tengelyű parabolák tengelyponti egyenlete és jellemzőik:

$$y = \frac{1}{2p}(x-u)^2 + v$$

$$y = -\frac{1}{2p}(x-u)^2 + v$$



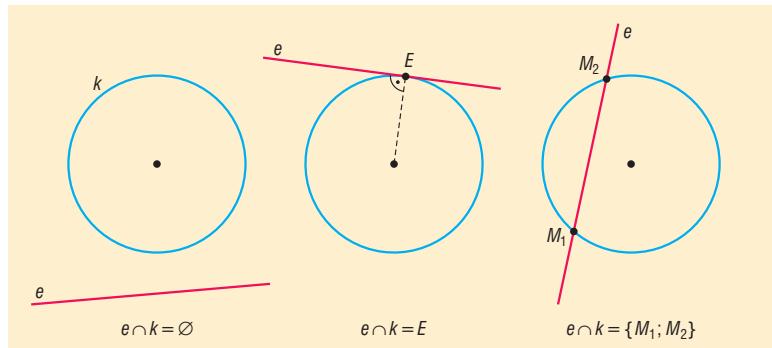
Minden másodfokú függvény grafikonja az y tengellyel párhuzamos tengelyű parabola, és minden y tengellyel párhuzamos tengelyű parabola valamelyik másodfokú függvény grafikonja.

$\Rightarrow f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c = y$ teljes négyzetté alakítva átalakítható $y = \pm \frac{1}{2p}(x-u)^2 + v$ alakba.

\Leftarrow minden $y = \pm \frac{1}{2p}(x-u)^2 + v$ parabola esetén zárójelfelbontás, összevonás után megkapható az $y = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$ alak.

III. Kör és egyenes kölcsönös helyzete

Egy síkban egy körnek és egy egyenesnek háromféle helyzete lehet: **nincs közös pontjuk**, egy közös pontjuk van (az egyenes **érinti** a kört), két közös pontjuk van (az egyenes **metszi** a kört).



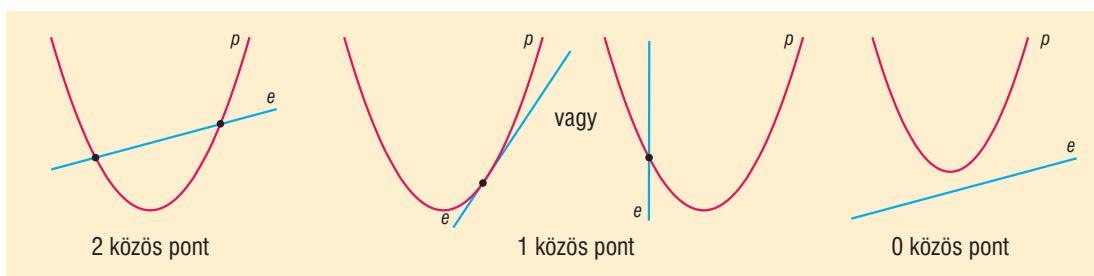
Egy kör és egy egyenes közös pontjainak a meghatározása az egyenleteikből álló egyenletrendszer megoldásával történik a következő módon:

Az egyenes egyenletéből kifejezzük az egyik ismeretlenet, és azt a kör egyenletébe behelyettesítjük. Így egy másodfokú egyismeretlenes egyenletet kapunk.

Az egyenlet diszkriminánsa határozza meg a közös pontok számát. Ha $D > 0$, akkor az egyenletnek 2 megoldása van, vagyis az egyenes metszi a kört. Ha $D = 0$, akkor az egyenletnek egy megoldása van, vagyis az egyenes érinti a kört. Ha $D < 0$, akkor az egyenletnek nincs megoldása, vagyis az egyenesnek és a körnek nincs közös pontja.

IV. Parabola és egyenes kölcsönös helyzete

Parabola és egyenes közös pontjainak száma lehet 2, 1, 0.



Az a tény, hogy a parabolának és az egyenesnek egy közös pontja van, nem jelenti azt, hogy az egyenes érintője a parabolának, mert az is lehetséges, hogy az egyenes párhuzamos a parabola tengelyével.

DEFINÍCIÓ: A **parabola érintője** olyan egyenes, melynek egy közös pontja van a parabolával és nem párhuzamos a parabola tengelyével.

Parabola és érintőjének meghatározása kétféle módon:

- Az egyenes egyenletét egy paraméterrel felírva (célszerű paramétereket az m meredekséget választani), ilyenkor is figyelni kell, hogy m ne a tengellyel párhuzamos egyenesre utaljon. Olyan m értéket keresünk, amely az egyenesre felírt elsőfokú, paraméteres, kétismeretlenes egyenletnek, vagyis egyenletrendszernek pontosan egy megoldáspárját adja.
A megoldás módja pl. a parabola egyenletéből behelyettesítünk az egyenes egyenletébe (vagy fordítva), ekkor egy paraméteres, egyismeretlenes, másodfokú egyenletet kapunk.
Az egyenes akkor és csak akkor érinti a parabolát, ha az egyenlet diszkriminánsa 0. Az így kapott (általában m -re nézve másodfokú) egyenlet valós megoldásai (ha léteznek) adják a kérdéses érintők meredekségét, amiből egyenletük már felírható.

- Az y tengellyel párhuzamos tengelyű parabola érintőjének meredeksége a parabola egyenletéből kapható másodfokú függvény deriváltjából határozható meg (ez jóval gyorsabb és egyszerűbb az előző módszernél).

Az y tengellyel nem párhuzamos tengelyű, vagyis az x tengellyel párhuzamos tengelyű parabola érintőjének meredeksége a parabola egyenletéből kapható gyökfüggvény (figyelni kell, hogy melyik ágát nézzük) deriváltjából határozható meg (ez bonyolultabb, nagyobb odafigyelést kíván az előző módszernél).

V. Másodfokú egyenlőtlenségek

DEFINÍCIÓ: Egyenlőtlenségről beszélünk, ha algebrai kifejezéseket a $<$, $>$, \leq , \geq jelek valamelyikével kapcsoljuk össze. Ha ezek a kifejezések másodfokúak, akkor **másodfokú egyenlőtlenségről** beszélünk.

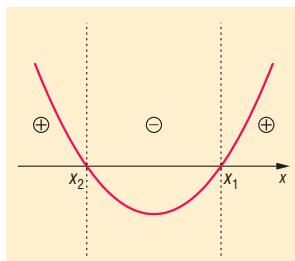
Az **egyenlőtlenségek megoldási módszerei** hasonlóak az egyenletek megoldási módszereihez:

1. **A mérlegelv** alkalmazásánál az egyik eltérés a negatív értékkal való szorzás, illetve osztás, mert ekkor az egyenlőtlenség iránya megváltozik. Ezért el kell kerülni az ismeretlen tartalmazó kifejezéssel történő szorzást, osztást. Ehelyett 0-ra rendezés után előjelvizsgálatot kell végezni, amit célszerű grafikusan megoldani. Másik eltérés a két oldal reciprokának vételekor áll fenn. Mindkét oldal reciprokát véve, ha az egyenlőtlenség minden oldalán azonos előjelű kifejezés áll, akkor a reláció iránya megváltozik, ha különböző előjelű, akkor nem változik a relációs jel. (Pl. $2 < 3$ ekkor $\frac{1}{2} > \frac{1}{3}$, $-3 < -2$ ekkor $-\frac{1}{3} > -\frac{1}{2}$, de ha $-3 < 2$ ekkor $-\frac{1}{3} < \frac{1}{2}$.)

2. **Grafikus megoldás:** A másodfokú egyenlőtlenségek megoldásánál fontos szerepet játszik, hogy az egyenlőtlenségekben szereplő másodfokú kifejezések grafikonja a koordinárendszerben parabola. A másodfokú egyenlet megoldásához hasonlóan 0-ra rendezünk úgy, hogy a főegyüttatható pozitív legyen, tehát $a > 0$. Ekkor $ax^2 + bx + c \geq 0$, $ax^2 + bx + c > 0$, $ax^2 + bx + c \leq 0$ vagy $ax^2 + bx + c < 0$ alakú minden másodfokú egyenlőtlenség.

Ha a bal oldalon álló kifejezés által meghatározott függvényt ($f(x) = ax^2 + bx + c$) ábrázoljuk, akkor, mivel a értéke pozitív, ezért felül nyitott, pozitív állású parabolát kapunk. Az egyenlőtlenség megoldása ekkor egyenértékű az $f(x) \geq 0$, $f(x) \leq 0$, $f(x) > 0$, illetve $f(x) < 0$ vizsgálattal. Ehhez először határozzuk meg az $f(x)$ függvény **zérushelyeit**:

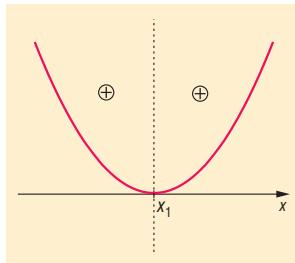
- Ha két zérushely van, x_1 és x_2 (ahol $x_2 < x_1$), akkor lehetőségeink az $f(x)$ függvény előjelére ($f(x_1) = f(x_2) = 0$):



Egyenlőtlenség	Megoldáshalmaz
$ax^2 + bx + c \geq 0$	$x \in]-\infty, x_2] \cup [x_1, \infty[$
$ax^2 + bx + c > 0$	$x \in]-\infty, x_2[\cup]x_1, \infty[$
$ax^2 + bx + c \leq 0$	$x \in [x_2, x_1]$
$ax^2 + bx + c < 0$	$x \in]x_2, x_1[$

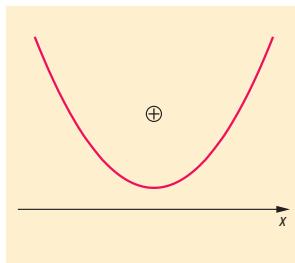
Azaz, ha \geq helyett $>$, \leq helyett $<$ szerepel csak, akkor megoldásunkban a zárt intervallumvégeket nyitottra cseréljük.

- Ha egy zérushely van, x_1 , akkor lehetőségeink az $f(x)$ függvény előjelére ($f(x_1) = 0$):



Egyenlőtlenség	Megoldáshalmaz
$ax^2 + bx + c \geq 0$	$x \in \mathbb{R}$
$ax^2 + bx + c > 0$	$x \in \mathbb{R} \setminus \{x_1\}$
$ax^2 + bx + c \leq 0$	$x = x_1$
$ax^2 + bx + c < 0$	$x \in \{ \}$

- Ha 0 zérushely van, akkor $f(x)$ mindenütt pozitív:

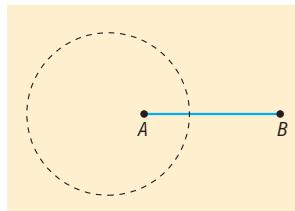


Egyenlőtlenség	Megoldáshalmaz
$ax^2 + bx + c \geq 0$	$x \in \mathbb{R}$
$ax^2 + bx + c > 0$	$x \in \mathbb{R}$
$ax^2 + bx + c \leq 0$	$x \in \{ \}$
$ax^2 + bx + c < 0$	$x \in \{ \}$

VI. Alkalmazások:

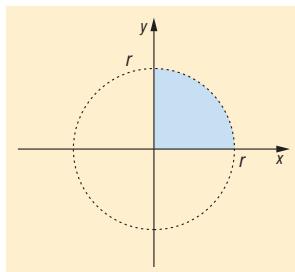
Koordináta-geometria segítségével elemi geometriai feladatok algebrai úton oldhatók meg:

- Adott tulajdonságú ponthalmaz keresése: Mi azon P pontok halmaza, amelyekre adott A, B esetén $\frac{PA}{PB} = \frac{1}{3}$?
- (Apollóniosz-kör)

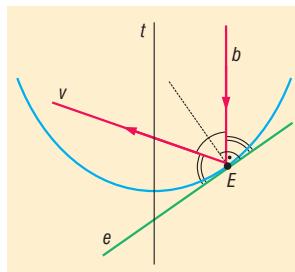


- Kör területének meghatározása integrálással (kell hozzá az integrálandó függvény)

$$x^2 + y^2 = r^2 \Rightarrow y = \sqrt{r^2 - x^2} \Rightarrow T = \int_0^r \sqrt{r^2 - x^2} dx = \frac{r^2\pi}{4}$$



- A parabolaantenna működésének lényege a parabola és fókuszának tulajdonságával magyarázható: a tengellyel párhuzamosan beeső jel a fókuszon keresztül verődik vissza



- Mesterséges égitestek pályája az úgynevezett szökési sebesség esetén parabola
- Szélsőérték-feladatok megoldása

Matematikatörténeti vonatkozások:

- Már a Kr. e. III. században élt nagy görög matematikus, **Apollóniusz** is foglalkozott a kúpszeletekkel: a körrel, az ellipszessel, a parabolával és a hiperbolával. 8 kötetes művének óriási hatása volt a későbbi korok matematikusaira (**Arkhimédészre**, Descartes-ra, Fermat-ra). Az ő munkásságától függetlenül először Euler írt a kúpszeletekről 1748-ban.
- Fermat** (1601–1665) francia matematikus Descartes előtt megalkotta a koordináták módszereit, megkereste az egyenes és a kúpszeletek egyenletét. Viszont kutatása nem volt hatással az analitikus geometria fejlődésére, ugyanis gondolatait csak levelezőpartnereivel osztotta meg.
- Descartes** 1637-ben megjelent Geometria c. könyvét tekintjük az első koordináta-geometriai műnek, ebben már következetesen használja az újkori matematikai jelöléseket. Ebben a könyvében aritmetizálta az **euklideszi** geometriát: Descartes középpontba állítja az origót, a centrumot, és a belőle sugárzó alapirányokat, azaz a vertikális és a horizontális tengelyt. A descartes-i **koordináta-rendszernek** köszönhetően a görbék leírhatók egyenlettel.
- Euler** (1707–1783) svájci származású matematikus a kúpszeletekről végzett kutatásaiban elsőként haladta meg Apollóniusz által megállapítottakat. Az analitikus geometria keretében szinte egymaga alkotta meg a ma használatos trigonometriát.