2. Racionális és irracionális számok. Műveletek a racionális és irracionális számok halmazán. Közönséges és tizedes törtek. Halmazok számossága

Vázlat:

I. Számhalmazok: természetes, egész, racionális, irracionális, valós számok, ezek zártsága
II. Műveletek a racionális számok halmazán
III. Műveletek az irracionális számok halmazán
IV. Műveleti tulajdonságok: kommutativitás, asszociativitás, disztributivitás
V. Közönséges és tizedes törtek
VI. Halmazok számossága: véges, végtelen (megszámlálhatóan, illetve nem megszámlálhatóan végtelen) halmazok
VIII. Alkalmazások, matematikatörténeti vonatkozások

Kidolgozás:

I. Számhalmazok

DEFINÍCIÓ: A **természetes számok** halmaza ($\mathbb{N}$) a pozitív egész számokból és a 0-ból áll.
A természetes számok halmaza zárt az összeadásra és a szorzásra nézve, azaz bármely két természetes szám összege és szorzata természetes szám. Ugyanakkor a kivonás és az osztás már nem végezhető el ezen a halmazon belül, ezek a műveletek „kimutatnak” a halmazból. Pl. $3 - x = 5$ egyenlet megoldása.

DEFINÍCIÓ: Az **egész számok** halmaza ($\mathbb{Z}$) a természetes számokból és azok ellentettjeiből áll.
Az egész számok halmaza az összeadáson és a szorzáson kívül a kivonásra nézve is zárt, ugyanakkor az osztás kimutathat a halmazból. Pl. $2x + 3 = 4$ egyenlet megoldása.

DEFINÍCIÓ: A **racionális számok** halmaza ($\mathbb{Q}$) azokból a számokból áll, amelyek felírhatók két egész szám hányadosaként, azaz $\frac{a}{b}$ alakban, ahol $a, b \in \mathbb{Z}$, $b \neq 0$.
A racionális számok halmaza mind a 4 alapműveletre zárt (osztásra, ha az osztó nem 0), de itt is találunk olyan egyenletet, amelynek nincs megoldása ezen a halmazon. Pl.: $2x^2 - 3 = 0$.

DEFINÍCIÓ: Azokat a számokat, amelyek nem írhatók fel két egész szám hányadosaként, **irracionális számok**nak ($\mathbb{Q}^*$) nevezzük.

TÉTEL: $\sqrt{2}$ irracionális szám.

BIZONYÍTÁS: A bizonyítást indirekt módon végezzük, lényege, hogy a bizonyítandó állítás tagadásáról bebizonyítjuk, hogy az hamis. Ez azt jelenti, hogy a bizonyítandó állítás igaz.
Tegyük fel hogy $\sqrt{2}$ racionális szám, azaz felírható $\frac{a}{b}$ alakban, ahol $a, b \in \mathbb{Z}$, $b \neq 0$.

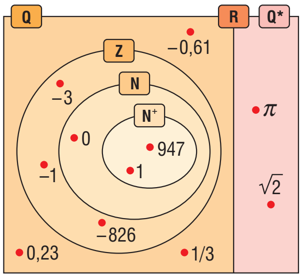
Ekkor $\sqrt{2} = \frac{a}{b} \Rightarrow 2 = \frac{a^2}{b^2} \Rightarrow 2 \cdot b^2 = a^2$.

Az egyenlet jobb oldalán szereplő (a^2) szám prímtényezős felbontásában a 2 mindenféleképpen páros kitevőn (akár a nulladikon) szerepel, míg a bal oldalon levő szám ($2 \cdot b^2$) prímtényezős felbontásában a 2 kitevője páratlan (legkevesebb 1).
Ez azonban lehetetlen, hiszen a számelmélet alaptétele szerint egy pozitív egész számnak nincs két lényegesen különböző felbontása.
Tehát nem igaz az indirekt feltevésünk, vagyis igaz az eredeti állítás: $\sqrt{2}$ irracionális.

Tulajdonságok:

- Az irracionális számok halmaza nem zárt a 4 alapműveletre $\left(\sqrt{2}+\left(-\sqrt{2}\right)\right)=0\notin\mathbb{Q}^*$, $\sqrt{2}-\sqrt{2}=0\notin\mathbb{Q}^*$, $\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}=2\notin\mathbb{Q}^*$, $\sqrt{2}:\sqrt{2}=1\notin\mathbb{Q}^*$. Tehát két irracionális szám összege, különbsége, szorzata, hányadosa lehet racionális szám.
- Az irracionális számok tizedes tört alakja végtelen nem szakaszos tizedes tört.

DEFINÍCIÓ: A racionális és az irracionális számok halmaza diszjunkt halmazok ($\mathbb{Q}\cap\mathbb{Q}^*=\emptyset$), a két halmaz egyesítése a valós számok halmaza: $\mathbb{R}=\mathbb{Q}\cup\mathbb{Q}^*$.
A valós számok halmaza zárt a 4 alapműveletre. A valós számok és részhalmazai:



II. Műveletek a racionális számok halmazán

Egy közönséges tört értéke nem, csak az alakja változik, ha a számlálóját és a nevezőjét ugyanazzal a 0-tól különböző számmal szorozzuk (bővítés), vagy ugyanazzal a 0-tól különböző számmal osztjuk (egyszerűsítés).
Ha a racionális számok közönséges tört alakúak, akkor a következő szabályokkal lehet elvégezni az alapműveleteket:

- **Összeadás és kivonás:**
  Csak azonos nevezőjű törteket lehet összeadni, kivonni, ezért közös nevezőre hozzuk a törteket, vagyis a törteket bővítjük egy közös többszörösű nevezőre (legjobb, ha a legkisebb közös többszörösű nevezőre, mert így tudunk a legkisebb számokkal számolni):
  $$\frac{a}{b}\pm\frac{c}{d}=\frac{a\cdot d}{b\cdot d}\pm\frac{c\cdot b}{d\cdot b}=\frac{a\cdot d\pm c\cdot b}{b\cdot d},\ \text{ahol}\ b,d\neq 0.$$
  Ha a nevezők (b és d) relatív prímek, akkor a legkisebb közös többszörösük a szorzatuk.
- **Szorzás:**
  Törtet törttel úgy szorzunk, hogy a számlálót a számlálóval, nevezőt a nevezővel szorozzuk:
  $$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{a\cdot c}{b\cdot d},\ \text{ahol}\ b,d\neq 0.$$
  Egész számmal úgy szorzunk törtet, hogy törtként írjuk fel a szorzót $\left(c=\frac{c}{1}\right)$, vagyis igazából a számlálót megszorozzuk, a nevezőt változatlanul hagyjuk.
- **Osztás:**
  Törtet törttel úgy osztunk, hogy a változatlan osztandót szorozzuk az osztó reciprokával:
  $$\frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{a}{b}\cdot\frac{d}{c}=\frac{a\cdot d}{b\cdot c},\ \text{ahol}\ b,c,d\neq 0.$$

Egész számmal úgy osztunk, hogy törtként írjuk fel az osztót $\left(c = \frac{c}{1}\right)$, vagyis igazából a nevezőt megszorozzuk, a számlálót változatlanul hagyjuk, vagy (egyszerűsíthető esetben) a számlálót osztjuk, a nevezőt változatlanul hagyjuk.

III. Műveletek az irracionális számok halmazán

Az alapműveletek definiálhatók az irracionális számok körében úgy, hogy az eddigi azonosságok életben maradjanak. Mivel tizedes tört alakjuk végtelen, nem periodikus, így azt csak közelítően tudjuk megadni. Ezért a pontos értékeket pl. hatvány, gyök, logaritmus alakban adjuk meg, ilyenkor viszont a megfelelő műveleti szabályokkal dolgozunk.

IV. Műveleti tulajdonságok: $a, b, c \in \mathbb{R}$ esetén

1. az összeadás és a szorzás kommutatív (felcserélhető)

$$a + b = b + a \quad \text{és} \quad a \cdot b = b \cdot a$$

2. az összeadás és a szorzás asszociatív (csoportosítható)

$$(a + b) + c = a + (b + c) \quad \text{és} \quad (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$$

3. a szorzás az összeadásra nézve disztributív (széttagolható)

$$(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$$

V. Közönséges és tizedes törtek

A közönséges törtek formái lehetnek:

Az $\frac{a}{b}$ közönséges tört, vagyis az $\frac{a}{b}$ hányados a következő alakokban fordulhat elő ($a, b \in \mathbb{Z}$, $b \neq 0$, és a tört végsőkig leegyszerűsített, azaz a és b legnagyobb közös osztója 1):

- egész szám, ha b osztója a-nak,
- véges tizedes tört, ha b prímtényezős felbontásában a 2 és az 5 számokon kívül nincs más prímszám,
- végtelen szakaszos tizedes tört, ha b prímtényezős felbontásában a 2 és az 5 számokon kívül más prímszám is van.

Összefoglalva:

A racionális számok a következő alakúak: közönséges törtek, egészek, véges vagy végtelen szakaszos tizedes törtek.

A tizedes törtek formái lehetnek:

- véges tizedes törtek, ezek felírhatók közönséges tört alakban. Pl. $2{,}3 = \frac{23}{10}$.
- végtelen tizedes törtek:
  - szakaszos tizedes törtek, ezek felírhatók közönséges tört alakban. Pl. végtelen mértani sor összegeként, vagy a következő módszerrel:

$$2{,}354545... = x$$
$$235{,}454545... = 100x.$$

A két egyenletet kivonva egymásból

$$233{,}1 = 99x \Rightarrow x = \frac{233{,}1}{99} = \frac{2331}{990}$$

  - nem szakaszos tizedes törtek **nem** írhatóak át közönséges tört alakba.

Összefoglalva:

A közönséges törtek mind felírhatók tizedes tört alakban (egész, véges, végtelen szakaszos tört alakban).
A nem szakaszos tizedes törtek mind irracionális számok, tehát nem írhatók fel két egész szám hányadosaként, tehát nem közönséges törtek. Ebből következik, hogy nem minden tizedes tört közönséges tört.

VI. Halmazok számossága

DEFINÍCIÓ: Egy A **halmaz számossága** az A halmaz elemeinek számát jelenti. Jele: $|A|$. Egy halmaz számossága lehet véges vagy végtelen.

DEFINÍCIÓ: Egy halmaz **véges halmaz**, ha elemeinek számát egy természetes számmal megadhatjuk. Ellenkező esetben, azaz ha a halmaz elemeinek számát nem adhatjuk meg természetes számmal, akkor **végtelen halmaz**ról beszélünk.

DEFINÍCIÓ: A végtelen halmazok között találhatunk olyat, melynek elemei sorba rendezhetők, tehát megadható az 1., 2., 3., 4., … eleme. A pozitív természetes számokkal megegyező számosságú halmazokat **megszámlálhatóan végtelen halmaz**oknak nevezzük.
A megszámlálhatóság és a sorba rendezhetőség egy végtelen halmaznál ugyanazt jelenti.
Minden olyan halmaz megszámlálhatóan végtelen számosságú, amelynek elemei és a természetes számok között kölcsönösen egyértelmű megfeleltetés létesíthető.
Megszámlálhatóan végtelen számosságúak: Pl. egész számok, páros számok, négyzetszámok, racionális számok.

TÉTEL: Az egész számok halmaza megszámlálhatóan végtelen halmaz.

BIZONYÍTÁS: Írjuk fel az egész számokat rendezett sorrendben a következő módon: 0, +1, −1, +2, −2, +3, −3, ... Ezzel a rendezéssel minden egész számot felsoroltunk, egyértelműen meg tudjuk határozni a sorba rendezés n-edik elemét, így az egész számok halmazának számossága megegyezik a természetes számokéval, vagyis megszámlálhatóan végtelenhalmaz.

TÉTEL: A racionális számok halmaza megszámlálhatóan végtelen halmaz.

BIZONYÍTÁS: A racionális számok $\frac{a}{b}$ alakúak, ahol $a, b \in \mathbb{Z}$, $b \neq 0$. Képezzük a következő táblázat szerint az a számlálóból és a b nevezőből álló racionális számokat:

$b \backslash a$	0	+1	−1	+2	−2	+3	−3	+4	−4	…
+1	$\frac{0}{+1}=0$	$\frac{+1}{+1}=+1$	$\frac{-1}{+1}=-1$	$\frac{+2}{+1}=+2$	$\frac{-2}{+1}=-2$	$\frac{+3}{+1}=+3$	$\frac{-3}{+1}=-3$	$\frac{+4}{+1}=+4$	$\frac{-4}{+1}=-4$	…
−1	$\frac{0}{-1}=0$	$\frac{+1}{-1}=-1$	$\frac{-1}{-1}=+1$	$\frac{+2}{-1}=-2$	$\frac{-2}{-1}=+2$	$\frac{+3}{-1}=-3$	$\frac{-3}{-1}=+3$	$\frac{+4}{-1}=-4$	$\frac{-4}{-1}=+4$	…
+2	$\frac{0}{+2}=0$	$\frac{+1}{+2}=+\frac{1}{2}$	$\frac{-1}{+2}=-\frac{1}{2}$	$\frac{+2}{+2}=+1$	$\frac{-2}{+2}=-1$	$\frac{+3}{+2}=+\frac{3}{2}$	$\frac{-3}{+2}=-\frac{3}{2}$	$\frac{+4}{+2}=+2$	$\frac{-4}{+2}=-2$	…
−2	$\frac{0}{-2}=0$	$\frac{+1}{-2}=-\frac{1}{2}$	$\frac{-1}{-2}=+\frac{1}{2}$	$\frac{+2}{-2}=-1$	$\frac{-2}{-2}=+1$	$\frac{+3}{-2}=-\frac{3}{2}$	$\frac{-3}{-2}=+\frac{3}{2}$	$\frac{+4}{-2}=-2$	$\frac{-4}{-2}=+2$	…
+3	$\frac{0}{+3}=0$	$\frac{+1}{+3}=+\frac{1}{3}$	$\frac{-1}{+3}=-\frac{1}{3}$	$\frac{+2}{+3}=+\frac{2}{3}$	$\frac{-2}{+3}=-\frac{2}{3}$	$\frac{+3}{+3}=+1$	$\frac{-3}{+3}=-1$	$\frac{+4}{+3}=+\frac{4}{3}$	$\frac{-4}{+3}=-\frac{4}{3}$	…
−3	$\frac{0}{-3}=0$	$\frac{+1}{-3}=-\frac{1}{3}$	$\frac{-1}{-3}=+\frac{1}{3}$	$\frac{+2}{-3}=-\frac{2}{3}$	$\frac{-2}{-3}=+\frac{2}{3}$	$\frac{+3}{-3}=-1$	$\frac{-3}{-3}=+1$	$\frac{+4}{-3}=-\frac{4}{3}$	$\frac{-4}{-3}=+\frac{4}{3}$	…
+4	$\frac{0}{+4}=0$	$\frac{+1}{+4}=+\frac{1}{4}$	$\frac{-1}{+4}=-\frac{1}{4}$	$\frac{+2}{+4}=+\frac{2}{4}$	$\frac{-2}{+4}=-\frac{2}{4}$	$\frac{+3}{+4}=+\frac{3}{4}$	$\frac{-3}{+4}=-\frac{3}{4}$	$\frac{+4}{+4}=+1$	$\frac{-4}{+4}=-1$	…
−4	$\frac{0}{-4}=0$	$\frac{+1}{-4}=-\frac{1}{4}$	$\frac{-1}{-4}=+\frac{1}{4}$	$\frac{+2}{-4}=-\frac{2}{4}$	$\frac{-2}{-4}=+\frac{2}{4}$	$\frac{+3}{-4}=-\frac{3}{4}$	$\frac{-3}{-4}=+\frac{3}{4}$	$\frac{+4}{-4}=-1$	$\frac{-4}{-4}=+1$	…
		⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	

A képzés módszere szerint minden racionális számot felsoroltunk, némelyeket többször is. A piros vonal mentén sorba rendezzük a kapott számokat. A képzés módszere és a felfűzés sorrendje miatt minden racionális számot figyelembe vettünk és sorba tudtuk rendezni őket. Így a racionális számok halmazának számossága egyenlő a természetes számok hal- mazának számosságával, vagyis megszámlálhatóan végtelen halmaz.

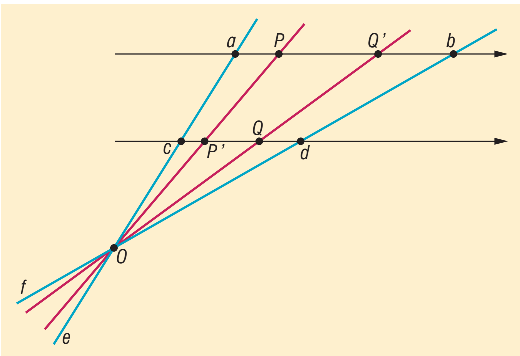
DEFINÍCIÓ: A valós számok számosságával megegyező számosságú halmazokat **nem megszámlálhatóan végtelen** vagy kontinuum számosságú halmazoknak nevezzük. Pl.: irracionális számok halmaza, számegyenes pontjainak halmaza, intervallum pontjainak halmaza.

TÉTEL: Az $[a; b]$ és a $[c; d]$ intervallumok számossága megegyezik.

BIZONYÍTÁS: Bizonyítás: Ha $b - a = d - c$, akkor a két intervallum „hossza” egyenlő, így számosságuk is.

Ha $b - a \neq d - c$, akkor vegyünk fel párhuzamosan két azonos beosztású számegyenest, ábrázoljuk az egyiken az egyik, a másikon a másik intervallumot. Húzzuk meg az a-t és c-t, valamint a b-t és d-t összekötő e és f egyeneseket. E két egyenes metszi egymást az O pontban. Az O pontból középpontos hasonlósági transzformációval $[a; b]$ intervallum képe $[c; d]$ intervallum.

Ha az $[a; b]$ intervallum egy pontja P, akkor P-t O-val összekötő egyenes P' pontban metszi a $[c; d]$ intervallumot. Ha a $[c; d]$ intervallum egy pontja Q, akkor Q-t O-val összekötő egyenes Q' pontban metszi az $[a; b]$ intervallumot. Így az $[a; b]$ és a $[c; d]$ intervallum minden pontja kölcsönösen megfeleltethető egymásnak, tehát ugyanannyi pontból állnak, azaz számosságuk egyenlő.



TÉTEL: Számosság és halmazműveletek kapcsolata (**logikai szita**): A, B és C véges halmazok számosságára érvényesek a következők:

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

$$|\overline{A \cup B}| = |U| - |A \cup B|$$

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$$

VII. Alkalmazások

- Racionális számok: arányok, arányosság, hasonlóság
- Irracionális számok: szabályos háromszög magassága $\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)$, négyzet átlója $\left(a\sqrt{2}\right)$, kör kerülete $(2r\pi)$, területe $(r^2\pi)$
- Kifejezések legbővebb értelmezési tartományának meghatározása, pl. $\sqrt{x+2} + \frac{1}{\sqrt{2-x}}$
- Függvény értékkészletének megállapítása

Matematikatörténeti vonatkozások:

- Az első **számírások** nem a mai írásjelekkel, hanem szimbólumokkal, jelekkel (pl. ékírás, római számok) történtek. A mai számírást a XI. században az arab **al-Hvárizmi** matematikus írta le először. Európába **Fibonacci** olasz matematikus a XII. században hozta be, de csak a XV-XVI. században terjedt el. Fibonacci nem csak a 10 számjegyet, hanem a helyi értékes számírást is elhozta Európába. *„Van tíz hindu jel: 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1, 0. Ezen jelek segítségével bármilyen számot fel lehet írni, amit csak akarunk."*
- A zérust jelentő szó először 100 körül jelent meg a hinduknál.
- Az irracionális számokat már **Pitagorasz** (Kr. e. 450 körül) is ismerte, ekkor a hinduk már ismerték a négyzet oldalának és átlójának viszonyát.
- A negatív számok viszonylag későn jelentek meg: az egyenletek megoldásakor kaptak olyan számokat, amiket először nem tudtak értelmezni. **Cardano** (1501–1576) olasz matematikus fiktív számoknak nevezte őket, **Viète** (1540–1603) francia matematikus elvetette létezésüket.
- **Descartes** francia matematikus 1637-ben már minden előítélet nélkül használta az általa hamis számoknak nevezett negatív számokat.
- **Gauss** (1777–1855) német matematikus részletesen tárgyalta a komplex számok algebráját és aritmetikáját, ahol $\sqrt{-1} = i$.
- A halmazelmélet megteremtése **Cantor** (1845–1918) német matematikushoz fűződik. Kortársai többsége nem értette meg a végtelen halmazok számosságával kapcsolatos gondolatait: a természetes számok halmaza valódi részhalmaza a racionális számok halmazának, számosságuk mégis egyenlő. Meghatározása szerint két halmaz egyenlő számosságú, ha elemeik között kölcsönösen egyértelmű hozzárendelés létesíthető. Hozzá fűződik a megszámlálható halmazok fogalma. A róla elnevezett Cantor-féle. átlós eljárással bizonyította, hogy a valós számok nem megszámlálhatóak.