

5. Hatványozás, hatványfogalom kiterjesztése, a hatványozás azonosságai. Az n -edik gyök fogalma. A négyzetgyök azonosságai. Hatványfüggvények és a négyzetgyökfüggvény

Vázlat:

- I. Pozitív egész kitevőjű hatványok, hatványozás azonosságai
- II. Permanenciaelv
- III. Negatív egész, törtkitevős, irracionális kitevőjű hatvány
- IV. Az n -edik gyök fogalma ($n \in \mathbb{N}^+$, $n \neq 1$)
- V. A négyzetgyök azonosságai
- VI. Hatványfüggvények és azok tulajdonságai
- VII. Négyzetgyökfüggvény és tulajdonságai
- VIII. Alkalmazások, matematikatörténeti vonatkozások

Kidolgozás:

I. Pozitív egész kitevőjű hatványok

A hatványozást ugyanaz az igény hívta létre, mint a szorzást. A szorzás az ismételt összeadást jelenti, a hatványozást azonos számok szorzására vezették be, később kiterjesztették az értelmezését.

DEFINÍCIÓ: Ha a tetszőleges valós szám és n 1-nél nagyobb természetes szám, akkor a^n **hatvány** azt az n tényezős szorzatot jelenti, amelynek minden tényezője a .

Ha $n = 1$, akkor $a^1 = a$.

Az a számot a hatvány alapjának, az n számot a hatvány kitevőjének nevezzük, ez utóbbi megmutatja, hogy a hatványalapot hányszor kell szorozótényezőül venni.

A hatványozás azonosságai pozitív egész kitevő esetén: ($a, b \in \mathbb{R}$, $m, n \in \mathbb{N}^+$)

TÉTEL: Azonos alapú hatványok szorzása: Azonos alapú hatványokat úgy is szorozhatunk, hogy a közös alapot a kitevők összegére emeljük:

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

BIZONYÍTÁS:

$$a^m \cdot a^n \underset{\text{hatv. def.}}{=} \underbrace{(a \cdot a \cdot \dots \cdot a)}_{m \text{ db}} \cdot \underbrace{(a \cdot a \cdot \dots \cdot a)}_{n \text{ db}} \underset{\substack{\text{szorzás} \\ \text{asszoc.}}}{=} \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{m+n \text{ db}} \underset{\text{hatv. def.}}{=} a^{m+n}.$$

TÉTEL: Azonos alapú hatványok osztása: Azonos alapú hatványokat úgy is oszthatunk, hogy a közös alapot a kitevők különbségére emeljük:

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}, \text{ ha } a \neq 0, m > n.$$

BIZONYÍTÁS:

$$\frac{a^m}{a^n} \underset{\text{hatv. def.}}{=} \frac{\overbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}^{m \text{ db}}}{\underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n \text{ db}}} \underset{\substack{\text{egysze-} \\ \text{rűsítés}}}{=} \frac{\overbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}^{m-n \text{ db}}}{1} \underset{\text{hatv. def.}}{=} a^{m-n}.$$

TÉTEL: Szorzat hatványozása: Szorzatot tényezőként is hatványozhatunk:

$$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$$

Tétel „visszafele” olvasva: Azonos kitevőjű hatványokat úgy is szorozhatunk, hogy az alapok szorzatát a közös kitevőre emeljük.

BIZONYÍTÁS:

$$\begin{aligned} (a \cdot b)^n &= \underbrace{(a \cdot b) \cdot (a \cdot b) \cdot \dots \cdot (a \cdot b)}_{n \text{ db}} \underset{\text{szorzás asszoc.}}{=} a \cdot b \cdot a \cdot b \cdot \dots \cdot a \cdot b \underset{\text{szorzás kommut.}}{=} \\ &= \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n \text{ db}} \underbrace{b \cdot b \cdot \dots \cdot b}_{n \text{ db}} \underset{\text{hatv. def.}}{=} a^n \cdot b^n. \end{aligned}$$

TÉTEL: Tört hatványozása: Törtet úgy is hatványozhatunk, hogy a számlálót és a nevezőt külön-külön hatványozzuk és a kapott hatványoknak a kívánt sorrendben a hányadosát vesszük.

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}, \text{ ha } b \neq 0.$$

Tétel „visszafele” olvasva: Azonos kitevőjű hatványokat úgy is oszthatunk, hogy az alapok hányadosát a közös kitevőre emeljük.

BIZONYÍTÁS:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n \underset{\text{hatv. def.}}{=} \underbrace{\left(\frac{a}{b}\right) \cdot \left(\frac{a}{b}\right) \cdot \dots \cdot \left(\frac{a}{b}\right)}_{n \text{ db}} \underset{\text{szorzása}}{=} \frac{\overbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}^{n \text{ db}}}{\underbrace{b \cdot b \cdot \dots \cdot b}_{n \text{ db}}} \underset{\text{hatv. def.}}{=} \frac{a^n}{b^n}.$$

TÉTEL: Hatvány hatványozása: Hatványt úgy is hatványozhatunk, hogy az alapot a kitevők szorzatára emeljük:

$$(a^n)^m = a^{n \cdot m}.$$

BIZONYÍTÁS:

$$\begin{aligned} (a^n)^m &= \underbrace{(a^n) \cdot (a^n) \cdot \dots \cdot (a^n)}_{m \text{ db}} \underset{n. \text{ hatv. def.}}{=} \underbrace{\left(\underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n \text{ db}}\right) \cdot \left(\underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n \text{ db}}\right) \cdot \dots \cdot \left(\underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n \text{ db}}\right)}_{m \text{ db}} \underset{\text{szorzás asszoc.}}{=} \\ &= \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a \cdot a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{m \cdot n \text{ db}} \underset{\text{hatv. def.}}{=} a^{m \cdot n}. \end{aligned}$$

II. Permanenciaelv

A hatványozás fogalmát kiterjesztjük minden egész kitevőre, majd egész kitevőről racionális kitevőre, majd racionálisról irracionális kitevőre úgy, hogy az előbbi, pozitív egész kitevőre teljesülő azonosságok továbbra is teljesüljenek. A fogalom értelmezésének kiterjesztése esetén ezt az igényt nevezzük **permanenciaelvnek**.

III. A hatványozás kiterjesztése

A 2. azonosság segítségével a hatványozás fogalma kibővíthető az **egész számokra** a következő módon:

DEFINÍCIÓ: Tetszőleges $a \neq 0$ valós számra $a^0 = 1$. Minden nullától különböző valós számnak a **nulladik hatványa** 1.

0^0 -t nem értelmezzük (nem lehet úgy értelmezni, hogy összhangban legyen a hatványozás értelmezéseivel:

- $0^0 = 0$ kellene, hogy legyen, mert 0 minden pozitív egész kitevő hatványa 0.
- $0^0 = 1$ kellene, hogy legyen, mert minden egyéb szám nulladik hatványa 1.)

Bizonyítható, hogy ezzel az értelmezéssel a hatványozás azonosságai érvényben maradnak.

Pl.

$$\left. \begin{aligned} a^0 \cdot a^n &= a^{0+n} = a^n \\ a^0 \cdot a^n &= 1 \cdot a^n = a^n \end{aligned} \right\}$$

DEFINÍCIÓ: Tetszőleges $a \neq 0$ valós szám és n pozitív egész szám esetén $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$. Minden 0-tól

különböző valós szám **negatív egész kitevőjű hatványa** a szám megfelelő pozitív kitevőjű hatványának a reciproka (vagy a szám reciprokának a megfelelő pozitív kitevőjű hatványa).

Bizonyítható, hogy ezzel az értelmezéssel a hatványozás azonosságai érvényben maradnak.

Pl.

$$\left. \begin{aligned} a^{-n} \cdot a^n &= a^{-n+n} = a^0 = 1 \\ a^{-n} \cdot a^n &= \frac{1}{a^n} \cdot a^n = \frac{a^n}{a^n} = 1 \end{aligned} \right\}$$

Ezzel a két definícióval a 2. azonosság igaz minden $n, m \in \mathbb{Z}$ -re:

Ha $n = m$, akkor $\frac{a^m}{a^n} = \frac{a^m}{a^m} = 1$.

Ha $m < n$, akkor m darab a -val egyszerűsítünk, a számlálóban 1, a nevezőben pedig $n - m$ darab a szorzótényező marad, ami a hatvány definíciója miatt $\frac{1}{a^{n-m}}$. Alkalmazva a negatív egész kitevőjű hatvány definícióját $\frac{1}{a^{n-m}} = \frac{1}{a^{-(m-n)}} = a^{m-n}$.

A hatványozás fogalmát ezután **racionális kitevőre** terjesztjük ki:

DEFINÍCIÓ: Az a pozitív valós szám $\frac{p}{q}$ -adik hatványa az a pozitív valós szám, amelynek q -adik

hatványa a^p , azaz $\left(a^{\frac{p}{q}}\right)^q = a^p$.

A definícióból következik: $a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p}$.

Az alap csak pozitív szám lehet, mert például

$$(-2)^{\frac{2}{4}} = \left[(-2)^2\right]^{\frac{1}{4}} = 4^{\frac{1}{4}} = 2^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2} \text{ értelmes,}$$

$(-2)^{\frac{2}{4}} = (-2)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{-2}$ nem értelmezhető, pedig a két hatvány értékének (azonos alap, azonos kitevő) meg kell egyeznie.

Bizonyítható, hogy ezzel az értelmezéssel a hatványozás azonosságai érvényben maradnak.

Pl.

$$\left. \begin{aligned} \left(a^{\frac{k}{n}}\right)^n &= a^{\frac{k}{n} \cdot n} = a^k \\ \left(a^{\frac{k}{n}}\right)^n &= \left(\sqrt[n]{a^k}\right)^n = a^k \end{aligned} \right\}$$

A hatványozást kiterjeszthetjük tetszőleges **valós kitevőre**. Ehhez az **irracionális kitevőt** kell értelmeznünk.

Az értelmezés azon alapul, hogy bármely irracionális szám tetszőlegesen közelíthető két oldalról racionális számokkal. Így ha pl.: $2^{\sqrt{2}}$ hatványt szeretnénk meghatározni, akkor ehhez a $\sqrt{2}$ értékét közelítjük nála kisebb, illetve nála nagyobb racionális számokkal, majd a közelítő értékekre, mint kitevőre emeljük a 2-t. Bizonyítható, hogy $2^{\sqrt{2}}$ értéke létezik, és ily módon tetszőlegesen közelíthető (rendőrelv).

DEFINÍCIÓ: Az a pozitív valós szám α irracionális kitevőjű hatványa, azaz a^α jelentse az a^r sorozat határértékét, ahol r egy racionális számsorozat tagjait jelöli és $r \rightarrow \alpha$. Képlettel:

$$\lim_{r \rightarrow \alpha} a^r = a^\alpha.$$

IV. Az n -edik gyök fogalma

A gyökvonás művelete a hatványkitevő és a hatvány ismeretében az alap kiszámolását teszi lehetővé. A gyökvonás a hatványozás egyik fordított művelete: az a valós szám n -edik gyöke ($n \in \mathbb{Z}^+$, $n \neq 1$) az $x^n = a$ egyenlet megoldása.

Az a szám n -edik gyökének jelölése: $\sqrt[n]{a}$, ha $n \in \mathbb{N}^+$.

A gyökvonás értelmezésénél különbséget kell tenni a páros és páratlan gyökkitevő között (hiszen páros n -re és negatív a -ra az $x^n = a$ egyenletnek nincs megoldása, mivel a valós számok páros kitevőjű hatványa nem lehet negatív. Tehát páros n -re és negatív a -ra az a szám n -edik gyöke nem értelmezhető.)

DEFINÍCIÓ: Egy a valós szám $(2k+1)$ -edik ($k \in \mathbb{N}^+$) gyökén azt a valós számot értjük, amelynek $(2k+1)$ -edik hatványa a .

Képlettel: $(\sqrt[2k+1]{a})^{2k+1} = a$, ahol $k \in \mathbb{Z}^+$.

DEFINÍCIÓ: Egy nemnegatív valós a szám $2k$ -adik ($k \in \mathbb{N}^+$) gyökén azt a nemnegatív valós számot értjük, amelynek $2k$ -adik hatványa a .

Képlettel: $(\sqrt[2k]{a})^{2k} = a$, ahol $a \geq 0$, $\sqrt[2k]{a} \geq 0$, $k \in \mathbb{Z}^+$.

DEFINÍCIÓ: Egy nemnegatív valós a szám négyzetgyökén azt a nemnegatív valós számot értjük, amelynek négyzete a .

Képlettel: $(\sqrt{a})^2 = a$, ahol $a \geq 0$, $\sqrt{a} \geq 0$.

A páros és páratlan gyökkitevőre vonatkozó definíciók közötti különbségből adódóan:

$(\sqrt[2k]{a})^{2k} = |a|$ és $(\sqrt[2k+1]{a})^{2k+1} = a$, pl. $\sqrt[6]{(-5)^6} = 5$, de $\sqrt[5]{(-5)^5} = -5$.

V. A négyzetgyök azonosságai

TÉTEL: $\sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$, ha a, b nemnegatív valós számok.

Szorzat négyzetgyöke egyenlő a tényezők négyzetgyökének szorzatával. Tehát szorzatból tényezőnként vonhatunk gyököt.

BIZONYÍTÁS: Vizsgáljuk mindkét oldal négyzetét:

$$(\sqrt{a \cdot b})^2 = a \cdot b,$$

a négyzetgyök definíciója miatt.

$$(\sqrt{a} \cdot \sqrt{b})^2 = (\sqrt{a})^2 \cdot (\sqrt{b})^2 = a \cdot b,$$

a szorzat hatványának azonossága és a négyzetgyök definíciója miatt.

A két oldal négyzete egyenlő.

Ha mindkét oldal értelmes, vagyis nemnegatív, akkor a hatványozás azonosságából következik a két oldal egyenlősége.

TÉTEL: $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$, ha a, b nemnegatív valós számok, $b \neq 0$.

Tört négyzetgyöke egyenlő a számláló és a nevező négyzetgyökének hányadosával.

TÉTEL: $\sqrt[k]{a^k} = (\sqrt[k]{a})^k$, ha k egész, $a > 0$ valós szám.

A hatványozás és a gyökvonás sorrendje felcserélhető egymással pozitív alap esetén.

Figyelnünk kell arra, hogy a négyzetre emelés és a négyzetgyökvonás sorrendje nem cserélhető fel, ha az alap negatív. Így általánosan: $\sqrt{a^2} = |a|$.

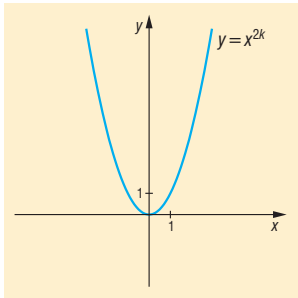
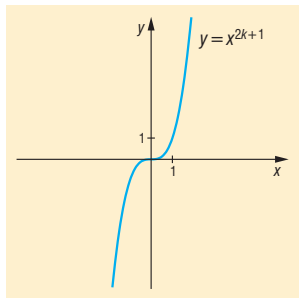
VI. Hatványfüggvények és azok tulajdonságai

DEFINÍCIÓ: Az $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^n$ függvényt, ahol $n \in \mathbb{N}^+$, hatványfüggvénynek nevezzük.

A hatványfüggvények értelmezhetőek $n = 0$ esetre is, de ettől most eltekintünk.

A hatványfüggvény vizsgálatát két részre kell bontanunk aszerint, hogy n páros-e vagy páratlan.

Jellemzés:

A függvény	$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^{2k}$	$g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = x^{2k+1}$
ábrázolása:		
értelmezési tartománya:	valós számok halmaza: \mathbb{R}	valós számok halmaza: \mathbb{R}
értékkészlete:	nemnegatív valós számok halmaza: \mathbb{R}_0^+	valós számok halmaza: \mathbb{R}
monotonitása:	ha $x < 0$, akkor szigorúan monoton csökken, ha $x > 0$, akkor szigorúan monoton nő	szigorúan monoton nő
szélsőértéke:	abszolút minimuma van az $x = 0$ helyen, a minimum értéke $f(x) = 0$.	nincs
görbülete:	alulról konvex	ha $x < 0$, akkor alulról konkáv, ha $x > 0$, akkor alulról konvex
zérushelye:	$x = 0$	$x = 0$
paritása:	páros: $f(-x) = f(x)$	páratlan, vagyis $g(-x) = -g(x)$
korlátosság:	alulról korlátos, felülről nem korlátos.	nem korlátos
invertálhatóság:	invertálható, ha $x \geq 0$: inverze az $f^{-1}: \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R}, f^{-1}(x) = \sqrt[2k]{x}$ függvény	invertálható: inverze az $g^{-1}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, g^{-1}(x) = \sqrt[2k+1]{x}$ függvény

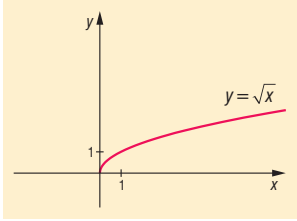
Görbület szempontjából külön kell venni az $n = 1$ esetet: ekkor a függvény se nem konvex, se nem konkáv.

A hatványfüggvények folytonosak, minden pontban deriválhatóak, minden korlátos intervallumon integrálhatóak.

VII. Négyzetgyökfüggvény és tulajdonságai

DEFINÍCIÓ: Az $f: \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \sqrt{x}$ függvényeket négyzetgyökfüggvényeknek nevezzük.

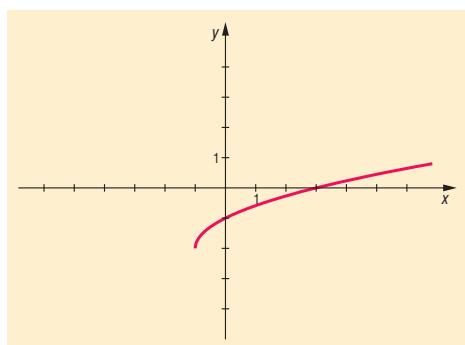
Jellemzés:

A függvény	$f: \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \sqrt{x}$
ábrázolása:	
értelmezési tartománya:	nemnegatív valós számok halmaza: \mathbb{R}_0^+
értékkészlete:	nemnegatív valós számok halmaza: \mathbb{R}_0^+
monotonitása:	szigorúan monoton nő
szélsőértéke:	abszolút minimuma van az $x = 0$ helyen, a minimum értéke $f(x) = 0$.
görbülete:	alulról konkáv
zérushelye:	$x = 0$
paritása:	nincs: nem páros, nem páratlan
korlátosság:	alulról korlátos, felülről nem korlátos
invertálhatóság:	invertálható: inverze az $f^{-1}: \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R}, f^{-1}(x) = x^2$ függvény

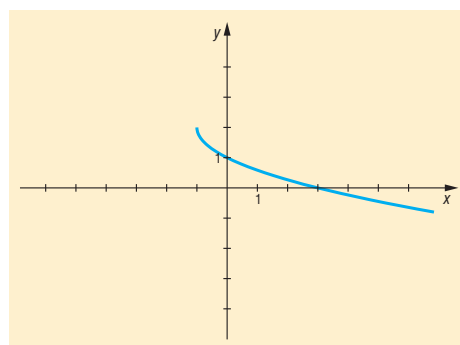
A gyökfüggvények folytonosak, differenciálhatóak, integrálhatóak.

Példák négyzetgyökfüggvényre:

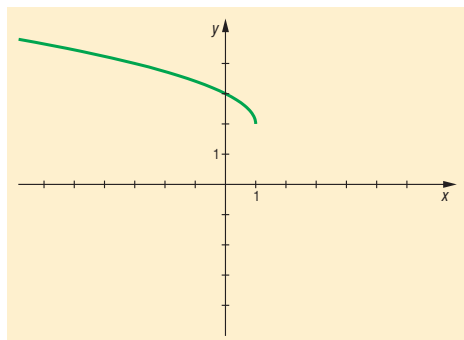
$$f(x) = \sqrt{x+1} - 2$$



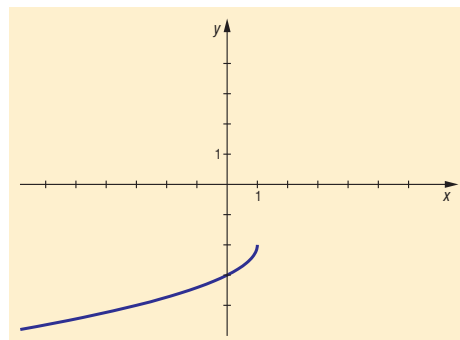
$$f(x) = -\sqrt{x+1} + 2$$



$$f(x) = \sqrt{1-x} + 2 = \sqrt{-(x-1)} + 2$$



$$f(x) = -\sqrt{1-x} - 2 = -\sqrt{-(x-1)} - 2$$



VIII. Alkalmazások:

Hatványozás:

- Prímtényezős felbontásban pozitív egész kitevőjű hatványok, legnagyobb közös osztó, legkisebb közös többszörös, osztók száma
- Normálalakban: egyszerűbb a kicsi és a nagy számokkal való műveletek elvégzése
- A számrendszerek felépítése a hatványozáson alapul
- Mértani sorozat: a_n , S_n kiszámolása
- Ismétléses variációk száma: n^k
- Hasonló testek felszínének aránya λ^2 , térfogatának aránya λ^3
- Kamatos kamat számítása
- Négyzetes úttörvény: $s = \frac{a}{2} \cdot t^2$
- Radioaktív bomlás
- Mértékegységváltás
- Binomiális eloszlás
- Nevezetes azonosságok

Gyökvonás:

- Magasabb fokú egyenletek megoldása
- Pitagorasz-tétel (négyzetre emelés, gyökvonás)
- Mértani közép (gyökvonás)
- Magasság-, illetve befogótétel (négyzetre emelés, gyökvonás)
- Kocka élének, vagy gömb sugarának kiszámolása a térfogatból
- l hosszúságú fonálinga lengésideje: $T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$
- h magasságból szabadon eső test sebessége: $v = \sqrt{2gh}$
- Kamatos kamatnál a kamattényező kiszámítása
- Harmonikus rezgőmozgás körfrekvenciájának kiszámítása

Matematikatörténeti vonatkozások:

- Már időszámításunk kezdetén ismerték kínai matematikusok a négyzetgyök és köbgyök fogalmát, a mai jelölésrendszere a XVI. században alakult ki.
- A XIII. századi kínai matematikusok az egyenletet meg tudták oldani, azaz tetszőleges pozitív számból tudtak gyököt vonni.
- **Oresmicus** (1323–1382) francia matematikus foglalkozott először a törtkitevős hatványokkal.
- **Stifel** (1487–1567) német matematikus írta le a nulladik és a negatív egész kitevőjű hatványokat.