1. Halmazok, halmazműveletek. Nevezetes ponthalmazok a síkban és a térben

Vázlat:

I. Halmazok, részhalmazok
n elemű halmaz részhalmazainak száma
II. Halmazműveletek (komplementer, unió, metszet, különbség), műveletek tulajdonságai
III. Nevezetes ponthalmazok: kör (gömb), párhuzamos egyenespár (hengerfelület), szakaszfelező merőleges egyenes (sík), középpárhuzamos, szögfelező, parabola
IV. Egyéb ponthalmazok: 3 ponttól, illetve 3 egyenestől egyenlő távolágra lévő pontok, látókörív
V. Alkalmazások, matematikatörténeti vonatkozások

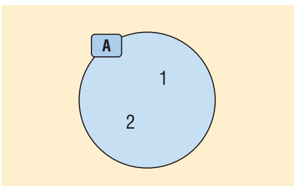
Kidolgozás:

I. Halmazok, részhalmazok

A halmaz és a halmaz eleme alapfogalom, ezeket a kifejezéseket nem definiáljuk. De a halmaz megadásának szigorú követelménye van: egy halmazt úgy kell megadnunk, hogy minden szóba jöhető dologról egyértelműen eldönthető legyen, hogy az adott halmazhoz tartozik vagy sem.
A halmazokat nyomtatott nagybetűvel, a halmaz elemeit kisbetűvel jelöljük a következő módon: $A = \{a; b; c\}$, ebben az esetben $a \in A$, $x \notin A$.

Halmaz megadási módjai:

- Elemeinek felsorolásával: $A = \{0; 2; 4; 6\}$
- Az elemeit egyértelműen meghatározó utasítással: $B = \{$egyjegyű páratlan számok$\}$
- Szimbólumokkal: $A = \{x \mid x^2 - x - 6 = 0\}$, $B = \{x \mid x^2 > 9\}$
- Venn-diagrammal:



DEFINÍCIÓ: Két halmaz egyenlő, ha ugyanazokat az elemeket tartalmazzák.

DEFINÍCIÓ: Az elem nélküli halmazt **üres halmaz**nak nevezzük.
Jele: { } vagy $\emptyset$.

DEFINÍCIÓ: Az A halmaz **részhalmaz**a a B halmaznak, ha A minden eleme a B halmaznak is eleme.
Jele: $A \subseteq B$.

DEFINÍCIÓ: Az A halmaz **valódi részhalmaz**a a B halmaznak, ha A részhalmaza a B-nek, de nem egyenlő vele.
Jele: $A \subset B$.

Tulajdonságok:

- Az üres halmaz minden halmaznak részhalmaza: $\emptyset \subseteq A$.
- Minden halmaz önmaga részhalmaza: $A \subseteq A$.

- Ha $A \subseteq B$ és $B \subseteq A$, akkor $A = B$.
- Ha $A \subseteq B$ és $B \subseteq C$, akkor $A \subseteq C$.

TÉTEL: Az n elemű halmaz összes részhalmazainak száma: 2^n ($n \in \mathbb{N}$).

BIZONYÍTÁS I.: A bizonyítást teljes indukcióval végezzük, amelynek lényege, hogy először belátjuk egy konkrét n esetére az állítást, majd azt mutatjuk meg, ha az állítás igaz egy tetszőleges n-re, akkor igaz az őt követő $(n + 1)$-re is, azaz bizonyítjuk az állítás öröklődését.
Az üres halmaznak egyetlen részhalmaza van: önmaga ($2^0 = 1$).
Egy egyelemű halmaznak 2 részhalmaza van: az üres halmaz és önmaga ($2^1 = 2$).
Egy kételemű halmaznak 4 részhalmaza van: az üres halmaz, 2 egyelemű halmaz és önmaga ($2^2 = 4$).
Tegyük fel, hogy egy k elemű halmaznak 2^k db részhalmaza van. Bizonyítani kell, hogy ez öröklődik, vagyis egy $(k + 1)$ elemű halmaznak 2^{k+1} db részhalmaza van.
Tekintsük az előbbi k elemű halmazt. Ekkor ha az eddigi elemek mellé egy $(k + 1)$-edik elemet teszünk a halmazba, akkor ezzel megkétszerezzük a lehetséges részhalmazok számát, hiszen az új elemet vagy kiválasztjuk az eddigi részhalmazokba, vagy nem. Vagyis a $(k + 1)$ elemű halmaz részhalmazainak száma $2 \cdot 2^k = 2^{k+1}$, amit bizonyítani kívántunk.

BIZONYÍTÁS II.: Az n elemű halmaznak $\binom{n}{0}$ db 0 elemű, $\binom{n}{1}$ db 1 elemű, $\binom{n}{2}$ db 2 elemű, … $\binom{n}{n-1}$ db $n-1$ elemű, $\binom{n}{n}$ db n elemű részhalmaza van, mert n elemből k db-ot kiválasztani $\binom{n}{k}$-féleképpen lehet.

Így az összes részhalmazok száma: $\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\ldots+\binom{n}{n-1}+\binom{n}{n}$.

Vizsgáljuk meg 2^n-t:

$2^n=(1+1)^n=\binom{n}{0}\cdot 1^0\cdot 1^n+\binom{n}{1}\cdot 1^1\cdot 1^{n-1}+\binom{n}{2}\cdot 1^2\cdot 1^{n-2}+\ldots+\binom{n}{n-1}\cdot 1^{n-1}\cdot 1^1+\binom{n}{n}\cdot 1^n 1^0$, ami egyenlő $\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\ldots+\binom{n}{n-1}+\binom{n}{n}$-nel a binomiális tétel miatt.

II. Halmazműveletek

DEFINÍCIÓ: Azt a halmazt, amelynek a vizsgált halmazok részhalmazai, **alaphalmaz**nak vagy univerzumnak nevezzük. Jele: U vagy H.

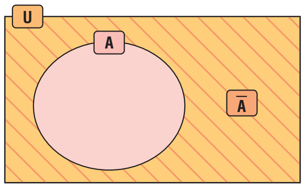
DEFINÍCIÓ: Egy A halmaz **komplementer halmaz**ának az alaphalmaz azon elemeinek halmazát nevezzük, amelyek az A halmaznak nem elemei. Jele: $\overline{A}$. (Fontos tulajdonság: $\overline{\overline{A}} = A$.)

DEFINÍCIÓ: Két vagy több halmaz **unió**ja vagy egyesítése mindazon elemek halmaza, amelyek legalább az egyik halmaznak elemei. Jele: $\cup$.

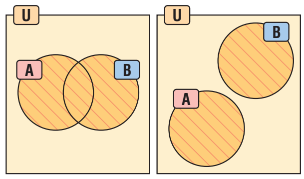
DEFINÍCIÓ: Két vagy több halmaz **metszet**e vagy közös része pontosan azoknak az elemeknek a halmaza, amelyek mindegyik halmaznak elemei. Jele: $\cap$.

DEFINÍCIÓ: Két halmaz **diszjunkt**, ha nincs közös elemük, vagyis a metszetük üres halmaz. $A \cap B = \emptyset$.

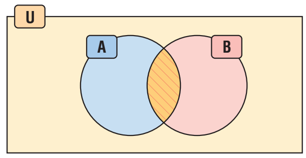
DEFINÍCIÓ: Az A és B halmaz **különbsége** az A halmaz mindazon elemeinek halmaza, amelyek a B halmaznak nem elemei. Jele: $A \setminus B$.



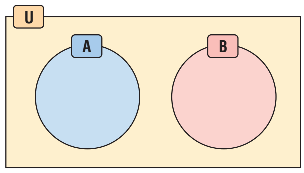
Komplementer halmaz



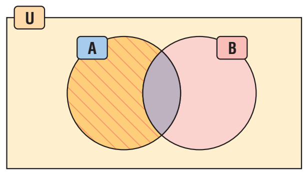
Két halmaz uniója



Két halmaz metszete



Diszjunkt halmazok



A és B halmaz $A \setminus B$ különbsége

Halmazműveletek tulajdonságai

Kommutatív (felcserélhető)	$A \cup B = B \cup A$	$A \cap B = B \cap A$
Asszociatív (csoportosítható)	$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$	$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
Disztributív (széttagolható)	$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$	$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
De-Morgan azonosságok	$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$ és $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$	
További azonosságok	$A \cup \varnothing = A$ $A \cup A = A$ $A \cup \overline{A} = U$ $A \cup U = U$ $\overline{\overline{A}} = A$	$A \cap \varnothing = \varnothing$ $A \cap A = A$ $A \cap \overline{A} = \varnothing$ $A \cap U = A$

III. Nevezetes ponthalmazok a síkban és a térben

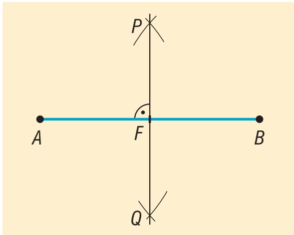
DEFINÍCIÓ: Azoknak a pontoknak a halmaza a síkon, amelyek a sík egy adott O pontjától adott r távolságra vannak, egy O középpontú, r sugarú **kör.**

DEFINÍCIÓ: Azoknak a pontoknak a halmaza a térben, amelyek a tér adott O pontjától adott r távolságra vannak, egy O középpontú, r sugarú **gömb.**

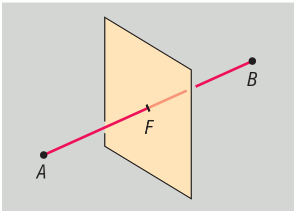
DEFINÍCIÓ: Adott egyenestől adott távolságra lévő pontok halmaza a síkon az egyenessel **párhuzamos egyenespár.**

DEFINÍCIÓ: Adott egyenestől adott távolságra lévő pontok halmaza a térben olyan **hengerfelület**, amelynek tengelye az adott egyenes.

DEFINÍCIÓ: Két ponttól egyenlő távolságra lévő pontok halmaza a síkban a **szakasz felezőmerőleges egyenese.**

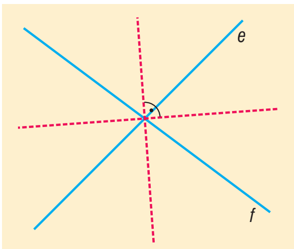


DEFINÍCIÓ: Két ponttól egyenlő távolságra lévő pontok halmaza a térben a **szakasz felezőmerőleges síkja.**



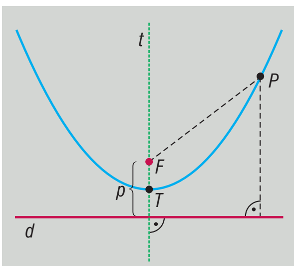
DEFINÍCIÓ: Két párhuzamos egyenestől egyenlő távolságra lévő pontok halmaza a síkban olyan egyenes, amely a két adott egyenessel párhuzamos és távolságukat felezi **(középpárhuzamos).**

DEFINÍCIÓ: Két metsző egyenestől egyenlő távolságra lévő pontok halmaza az általuk bezárt szögek **szögfelező egyenesei**. Két ilyen egyenes van, ezek merőlegesek egymásra.



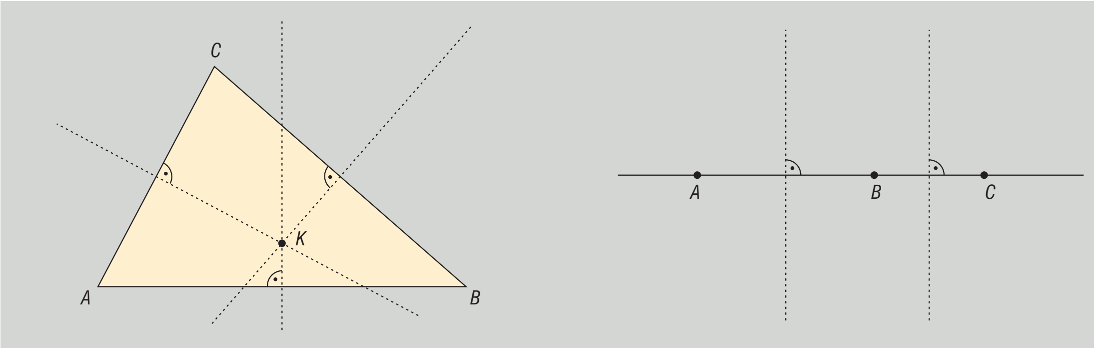
DEFINÍCIÓ: Egy egyenestől és egy rajta kívül lévő ponttól egyenlő távolságra lévő pontok halmaza a síkon: a **parabola.**

Az adott pont a parabola fókuszpontja, az adott egyenes a parabola vezéregyenese (direktrixe), a pont és az egyenes távolsága a parabola paramétere.



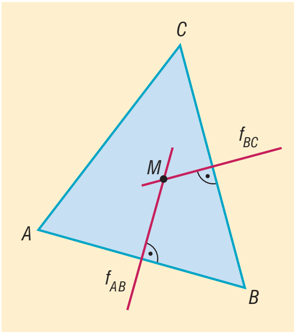
IV. Egyéb ponthalmazok

TÉTEL: Három adott ponttól egyenlő távolságra lévő pontok halmaza a síkon egy pont (ha a 3 pont nem esik egy egyenesre), vagy üres halmaz (ha a 3 pont egy egyenesre esik).



TÉTEL: A háromszög három oldalfelező merőlegese egy pontban metszi egymást.

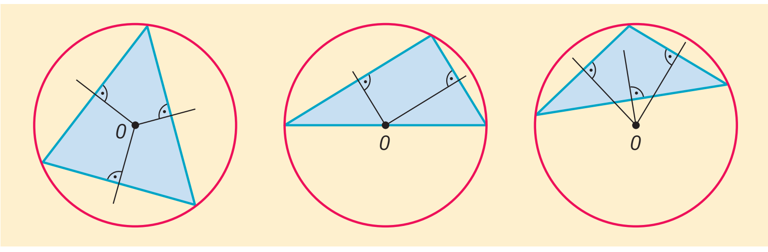
BIZONYÍTÁS: Tekintsük az ABC háromszög AB és BC oldalának oldalfelező merőlegesét. Ezek az egyenesek metszik egymást, mert a háromszög oldalai nem lehetnek párhuzamosak egymással. Jelöljük a két oldalfelező merőleges metszéspontját M-mel. Ekkor M pont egyenlő távolságra van A és B csúcsoktól (mert M illeszkedik AB szakaszfelező merőlegesére), illetve B és C csúcsoktól (mert M illeszkedik BC szakaszfelező merőlegesére). Ebből következik, hogy M egyenlő távolságra van A és C csúcsoktól, tehát M-n áthalad AC oldalfelező merőlegese. Tehát a három oldalfelező merőleges egy pontban metszi egymást.



TÉTEL: A háromszög oldalfelező merőlegeseinek metszéspontja **a háromszög köré írt kör középpontja.**

BIZONYÍTÁS: Az előbbi bizonyítás szerint M egyenlő távolságra van A-tól, B-től és C-től. Legyen ez a távolság $MA = MB = MC = r$. Ekkor A, B és C pontok r távolságra vannak M-től, azaz illeszkednek egy M középpontú, r sugarú körre.

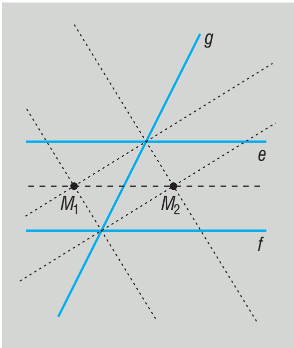
A háromszög köré írt kör középpontja hegyesszögű háromszög esetén a háromszögön belül, derékszögű háromszög esetén az átfogó felezőpontjába, tompaszögű háromszög esetén a háromszögön kívülre esik.



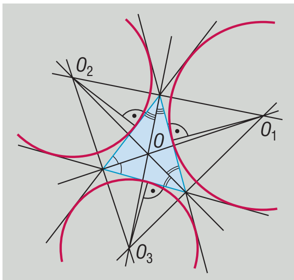
TÉTEL: Három adott ponttól egyenlő távolságra lévő pontok halmaza a térben egy olyan egyenes, amely áthalad a három pont, mint háromszög köré írható kör középpontján, és merőleges a 3 pont síkjára (ha a 3 pont nem esik egy egyenesbe), vagy üres halmaz (ha a 3 pont egy egyenesbe esik).

TÉTEL: Három egyenestől egyenlő távolságra lévő pontok halmaza a síkon:

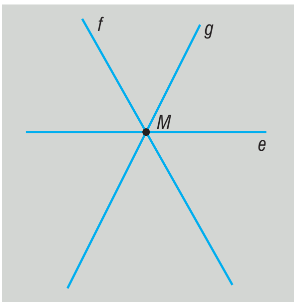
- Ha a 3 egyenes párhuzamos, akkor üres halmaz.
- Ha 2 egyenes párhuzamos ($e \parallel f$), egy pedig metszi őket (g), akkor a 2 párhuzamos egyenes középpárhuzamosán két olyan pont, amelyek illeszkednek két metsző egyenes (pl. e és g) szögfelezőire.



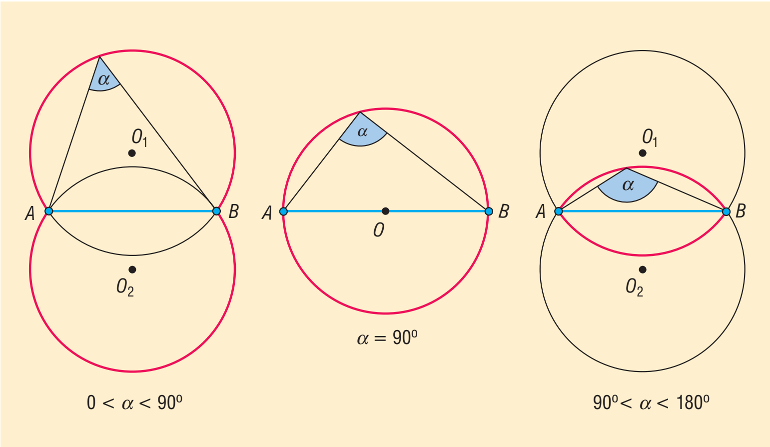
- Ha a 3 egyenes 3 különböző pontban metszi egymást, akkor szögfelező egyeneseik metszéspontjai. 4 ilyen pont van, az egyik **a háromszög beírt köré**nek, 3 pedig **a háromszög hozzáírt körei**nek középpontja.



- Ha a 3 egyenes egy pontban metszi egymást, akkor egyetlen pont, a 3 egyenes metszéspontja.

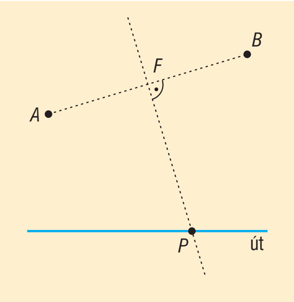


DEFINÍCIÓ: Azoknak a pontoknak a halmaza a síkon, amelyekből egy adott szakasz adott α szögben ($0^\circ < \alpha < 180^\circ$) látszik két, a szakasz egyenesére szimmetrikusan elhelyezkedő körív **(látókörívek).**



V. Alkalmazások

- Biológiában a rendszertan, kémiában a periódusos rendszerbeli csoportosítás is halmazelméleti fogalmak. Műveletek: melyik csoport melyiknek részhalmaza?
- Vércsoport szerint az emberek különböző halmazokba sorolhatók. Műveletek: ki kinek adhat vért?
- Európa országai hivatalos nyelvük alapján halmazokba sorolhatók. Műveletek: melyik országban hivatalos nyelv az angol vagy a német?
- Az érettségin a nem kötelező tárgyak választása szerint is halmazokba sorolhatók a vizsgázók. Műveletek: ki vizsgázik kémiából és biológiából is?
- A függvényekkel kapcsolatban is használjuk a halmazokat (értelmezési tartomány, értékkészlet).
- Egyenletek értelmezési tartományának vizsgálatakor számhalmazok metszetét képezzük.
- Koordináta-geometriában a kör, a parabola egyenletének felírásakor az adott görbe definícióját használjuk fel.
- Látókörívek: egy téglalap egyik oldala a szomszédos oldal mely pontjából látszik a legnagyobb szögben (színház, sportpálya).
- Szerkesztési feladatokban: háromszög szerkesztése egy oldal, a vele szemközti szög és az oldalhoz tartozó magasság ismeretében, vagy adott. egy pont és egy egyenes, szerkesszük meg az egyenest érintő, a ponton áthaladó, adott sugarú köröket.
- Parabolaantennák.
- Két tanya közös postaládát kap az országút mentén. Hova helyezzék, hogy mindkét tanyától egyenlő távolságra legyen?



Matematikatörténeti vonatkozások:

- A halmazok szemléltetésére először **Euler** (1707–1783) német matematikus használt köröket. Az ő jelölésrendszerét finomította később **Venn** (1834–1923) angol matematikus, ez a jelölés terjedt el, amit Venn-diagramnak nevezünk.
- A halmazelmélet megteremtése **Cantor** (1845–1918) német matematikushoz fűződik. Kortársai többsége nem értette meg a végtelen halmazok számosságával kapcsolatos gondolatait: a természetes számok halmaza valódi részhalmaza a racionális számok halmazának, számosságuk mégis egyenlő. Meghatározása szerint két halmaz egyenlő számosságú, ha elemeik között kölcsönösen egyértelmű hozzárendelés létesíthető. Hozzá fűződik a megszámlálható halmazok fogalma. A róla elnevezett Cantor-féle átlós eljárással bizonyította, hogy a valós számok nem megszámlálhatóak.