

12. Derékszögű háromszögekre vonatkozó tételek. A hegyesszögek szögfüggvényei. Összefüggések a hegyesszögek szögfüggvényei között. A szögfüggvények általánosítása

Vázlat:

- I. Derékszögű háromszögek definíciója
- II. Pitagorasz-tétel és megfordítása
 - A Thalész-tétel és megfordítása
 - Magasságtétel, befogótétel
 - Beírt kör sugarára vonatkozó tétel
- III. Hegyesszögek szögfüggvényeinek definíciója
- IV. Összefüggések a hegyesszögek szögfüggvényei között
- V. A szögfüggvények általános definíciója
- VI. Kapcsolatok egyazon szög szögfüggvényei közt
- VII. Alkalmazások, matematikatörténeti vonatkozások

Kidolgozás:

I. Derékszögű háromszögek

DEFINÍCIÓ: Azokat a háromszögeket, amelyeknek valamely szöge 90° , azaz derékszög, **derékszögű háromszögeknek** nevezzük.

A derékszöget bezáró két oldalt befogónak, a derékszöggel szemközti, egyben a leghosszabb oldalt átfogónak nevezzük.

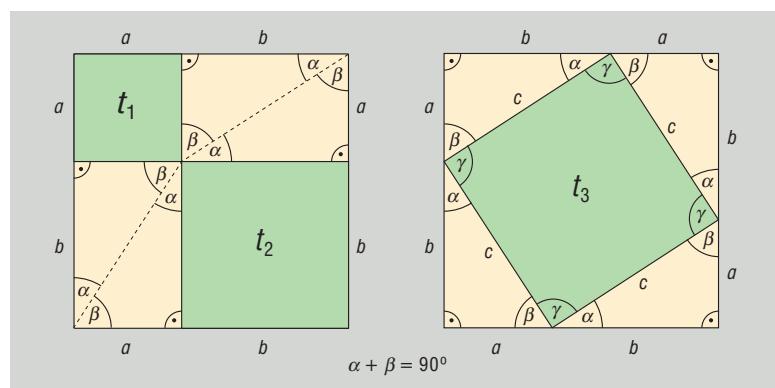
II. Derékszögű háromszögekre vonatkozó tételek

A derékszögű háromszögekre vonatkozó tételek közül a Pitagorasz-tétel teremt kapcsolatot a háromszög oldalai között.

TÉTEL: Pitagorasz-tétel: Ha egy háromszög derékszögű, akkor befogónak négyzetösszege egyenlő az átfogó négyzetével.

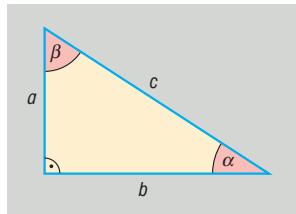
BIZONYÍTÁS I.: Bizonyítani kell: $a^2 + b^2 = c^2$.

Vegyük fel két $a + b$ oldalú négyzetet. A két négyzet területe egyenlő.



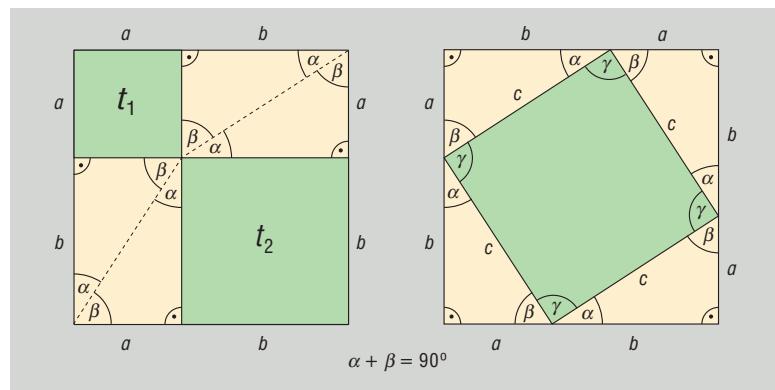
Az első négyzet felosztható egy $t_1 = a^2$ és egy $t_2 = b^2$ területű négyzetre (a felosztásából eredő párhuzamosság miatt), továbbá 4 olyan derékszögű háromszögre, amelynek befogói a , illetve b . Ez a 4 háromszög egybevágó egymással és az eredeti háromszöggel, tehát területük egyenlő.

A második négyzetben elhelyezkedő négyszög négyzet, mivel oldalai egyenlő hosszúak (egybevágó derékszögű háromszögek átfogói), szögei pedig 90° -osak (egybevágó derékszögű háromszögekben $\alpha + \beta = 90^\circ$). Ha a derékszögű háromszögek átfogója c , akkor területe $t_3 = c^2$.



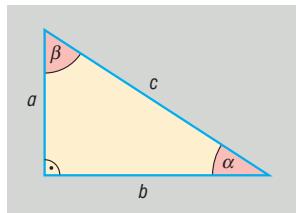
Mindkét nagy négyzet területéből kivonva a 4-4 egybevágó háromszög területét, a fennmaradó területek egyenlők lesznek.

BIZONYÍTÁS II.: Vegyük fel egy derékszögű háromszöget, amelynek befogói a és b , és egy $a + b$ oldalú négyzetet. A négyzetben helyezzük el a háromszögeket:



$ABCD$ négyzög négyzet, mert oldalai egyenlők (c), és szögei 90° -osak ($\gamma = 180^\circ - (\alpha + \beta) = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ$), így az $a + b$ oldalú négyzet területe kétféleképpen: $t = (a + b)^2$, illetve $t = 4 \cdot \frac{a \cdot b}{2} + c^2$, azaz

$$(a + b)^2 = 4 \cdot \frac{a \cdot b}{2} + c^2 \Rightarrow a^2 + 2ab + b^2 = 2ab + c^2 \Rightarrow a^2 + b^2 = c^2.$$

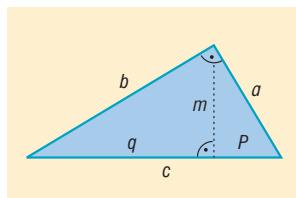


BIZONYÍTÁS III.: Befogótétellel

Befogótétel miatt:

$$a = \sqrt{p \cdot c}, \text{ illetve } b = \sqrt{q \cdot c} = \sqrt{(c - p) \cdot c}.$$

Ebből $a^2 = p \cdot c$, illetve $b^2 = (c - p) \cdot c = c^2 - p \cdot c$.



Összeadva az utolsó két egyenlőséget:

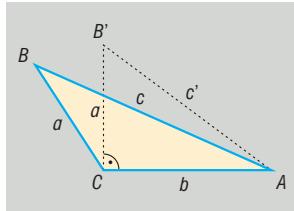
$$a^2 + b^2 = p \cdot c + c^2 - p \cdot c = c^2 \Rightarrow a^2 + b^2 = c^2.$$

BIZONYÍTÁS IV.: Koszinusz-tétellel

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \underbrace{\cos 90^\circ}_0 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot 0 = a^2 + b^2 \Rightarrow c^2 = a^2 + b^2.$$

TÉTEL: A Pitagorasz-tétel megfordítása: ha egy háromszög két oldalhosszának négyzetösszege egyenlő a harmadik oldal hosszának négyzetével, akkor a háromszög derékszögű.

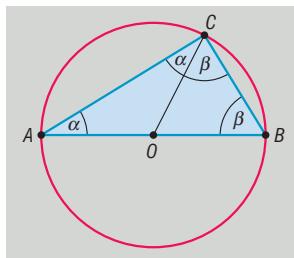
BIZONYÍTÁS:



Tudjuk, hogy az ABC háromszög oldalaire igaz: $a^2 + b^2 = c^2$. Az a, b befogókkal rajzolunk egy $AB'C$ derékszögű háromszöget, amelyre Pitagorasz tétele miatt $a^2 + b^2 = (c')^2 \Rightarrow c^2 = (c')^2 \Rightarrow c = c'$. Ekkor az ABC ill. $AB'C$ háromszög oldalai páronként megegyeznek \Rightarrow a két háromszög egybevágó \Rightarrow megfelelő szögeik páronként egyenlők \Rightarrow C -nél ABC háromszögben derékszög van.

TÉTEL: Thalész-tétel: ha egy kör átmérőjének két végpontját összekötjük a kör bármely más pontjával, akkor derékszögű háromszöget kapunk.

BIZONYÍTÁS: O középpontú kör, AB átmérő, C tetszőleges pont a körvonalon.



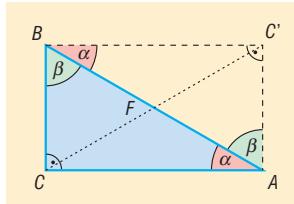
$OA = OC = r \Rightarrow$ Az OAC háromszög egyenlő szárú $\Rightarrow OAC\hat{=} = OCA\hat{=} = \alpha$.

$OC = OB = r \Rightarrow$ Az OCB háromszög egyenlő szárú $\Rightarrow OBC\hat{=} = BCO\hat{=} = \beta$.

Az ABC háromszög belső szögeinek összege $180^\circ \Rightarrow 2\alpha + 2\beta = 180^\circ \Rightarrow \alpha + \beta = 90^\circ \Rightarrow ACB\hat{=} = 90^\circ$.

TÉTEL: A Thalész-tétel megfordítása: ha egy háromszög derékszögű, akkor köré írható körének középpontja az átfogó felezőpontja.

BIZONYÍTÁS: Az ABC derékszögű háromszöget tükrözük az átfogó F felezőpontjára. A tükrözés tulajdonságai miatt $BC = AC'$ és $CA = BC'$ és $AC' = BC'$ szögei 90° -osak. A téglalap átlói egyenlők és felezik egymást $\Rightarrow FA = FB = FC \Rightarrow F$ az ABC háromszög köré írt kör középpontjával egyenlő.

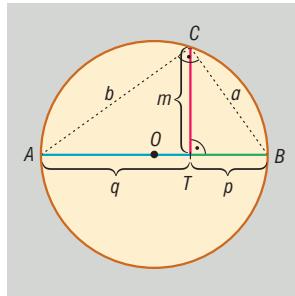


TÉTEL: Thalész-tétel és megfordítása összefoglalva: a sík azon pontjainak halmaza, amelyekből egy megadott szakasz derékszögben látszik, a szakaszhoz, mint átmérőhöz tartozó kör, elhagyva belőle a szakasz végpontjait.

TÉTEL: Magasságátétel: Derékszögű háromszögben az átfogóhoz tartozó magasság hossza mértani közepe azon két szakasz hosszának, amelyekre a magasság az átfogót osztja.

BIZONYÍTÁS: A tétel bizonyításánál a TBC és TAC háromszögek hasonlóságát használjuk.

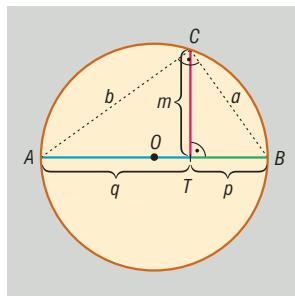
$$\frac{m}{p} = \frac{q}{m} \Rightarrow m^2 = p \cdot q \Rightarrow m = \sqrt{p \cdot q}$$



TÉTEL: Befogótétel: Derékszögű háromszög befogójának hossza mértani közepe az átfogó és a befogó átfogóra eső merőleges vetülete hosszának.

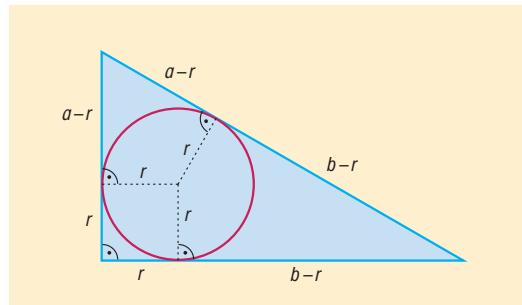
BIZONYÍTÁS: A tétel bizonyításánál a TBC és az ABC háromszögek hasonlóságát használjuk.

$$\frac{a}{p} = \frac{c}{a} \Rightarrow a^2 = p \cdot c \Rightarrow a = \sqrt{p \cdot c}$$



TÉTEL: Beírt kör sugarára vonatkozó téTEL: Derékszögű háromszög átfogója a két befogó összegével és a beírt kör sugarával kifejezve: $c = a + b - 2r$.

BIZONYÍTÁS: Körhöz húzott érintőszakaszok egyenlősége miatt $c = a - r + b - r = a + b - 2r$.



A Thalész-tétel miatt $c = 2R$, ahol R a háromszög köré írt kör sugara. Ebből és az előző tételeből következik: $2R = a + b - 2r \Rightarrow R + r = \frac{a+b}{2}$.

III. Hegyesszögek szögfüggvényeinek definíciója

A hegycsövek szögfüggvényeit derékszögű háromszögekkel is bevezethetjük. Kihasználjuk, hogy a két derékszögű háromszög hasonló, ha valamely hegycsövek megegyezik. A hasonlóság következtében egy derékszögű háromszög oldalainak arányát a háromszög egyik hegycsöve egyértelműen meghatározza. Erre a függvényeket vezetjük be a szögfüggvényeket:

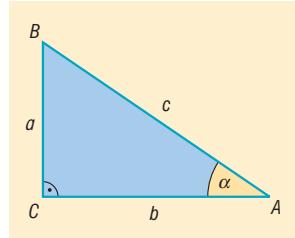
DEFINÍCIÓ: Az α hegycsövet tartalmazó tetszőleges derékszögű háromszögben

$\sin \alpha$ = az α -val szemközti befogó hosszának és az átfogó hosszának hányadosa;

$\cos \alpha$ = az α melletti befogó hosszának és az átfogó hosszának a hányadosa;

$\tg \alpha$ = az α -val szemközti befogó hosszának és az α melletti befogó hosszának a hányadosa;

$\ctg \alpha$ = az α melletti befogó hosszának és az α -val szemköztes befogó hosszának a hányadosa.



$$\sin \alpha = \frac{a}{c}, \quad \cos \alpha = \frac{b}{c}, \quad \tg \alpha = \frac{a}{b}, \quad \ctg \alpha = \frac{b}{a}$$

IV. Összefüggések a hegycsövek szögfüggvényei között

A definíciók alapján könnyen igazolhatók a következő **azonosságok**, ahol $0^\circ < \alpha < 90^\circ$:

$$\tg \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}, \quad \ctg \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}, \quad \tg \alpha = \frac{1}{\ctg \alpha}$$

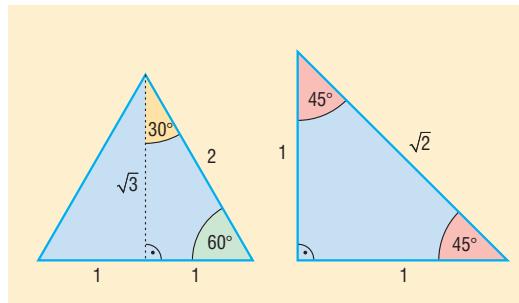
$$\sin \alpha = \cos(90^\circ - \alpha), \quad \cos \alpha = \sin(90^\circ - \alpha)$$

$$\tg \alpha = \ctg(90^\circ - \alpha), \quad \ctg \alpha = \tg(90^\circ - \alpha)$$

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

Nevezetes szövek szögfüggvényei:

	sin	cos	tg	ctg
30°	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$
45°	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	1
60°	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$



V. Szögfüggvények általánosítása

DEFINÍCIÓ: A koordináta-rendszerben az $i(1; 0)$ bázisvektor origó körül α szöggel való elforgatásával keletkező e egységvektor első koordinátája az α szög koszinusa, második koordinátája az α szög szinusa.

$\alpha \in I.$	$\alpha \in II.$	$\alpha \in III.$	$\alpha \in IV.$
$0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$	$\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$
	$\cos \alpha = -\cos(\pi - \alpha)$ $\sin \alpha = \sin(\pi - \alpha)$	$\cos \alpha = -\cos(\alpha - \pi)$ $\sin \alpha = -\sin(\alpha - \pi)$	$\cos \alpha = \cos(2\pi - \alpha)$ $\sin \alpha = -\sin(2\pi - \alpha)$

DEFINÍCIÓ: A $\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$ hányadost, ha $\cos \alpha \neq 0$, vagyis ha $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$), az α szög tangensének nevezzük.

A koordináta-rendszerben az i vektortól α szöggel elforgatott e egységvektor egyenese által az origó középpontú, egységsugarú kör $(1; 0)$ pontjában húzott érintőből kimetszett pont 2. koordinátája az α szög tangense.

$\alpha \in I.$	$\alpha \in II.$	$\alpha \in III.$	$\alpha \in IV.$
$0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$	$\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$
	$\operatorname{tg} \alpha = -\operatorname{tg}(\pi - \alpha)$	$\operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg}(\alpha - \pi)$	$\operatorname{tg} \alpha = -\operatorname{tg}(2\pi - \alpha)$

DEFINÍCIÓ: A $\frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$ hárnyadost, ha $\sin \alpha \neq 0$, vagyis ha $\alpha \neq k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$), az α szög kotangensének nevezzük.

A koordináta-rendszerben az i vektortól α szöggel elforgatott e egységvektor egyenese által az origó középpontú, egységsugarú kör ($0;1$) pontjában húzott érintőből kimetszett pont 1. koordinátája az α szög kotangense.

$\alpha \in I.$	$\alpha \in II.$	$\alpha \in III.$	$\alpha \in IV.$
$0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$	$\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$
	$\operatorname{ctg} \alpha = -\operatorname{ctg}(\pi - \alpha)$	$\operatorname{ctg} \alpha = \operatorname{ctg}(\alpha - \pi)$	$\operatorname{ctg} \alpha = -\operatorname{ctg}(2\pi - \alpha)$

VI. Kapcsolatok egyazon szög szögfüggvényei között

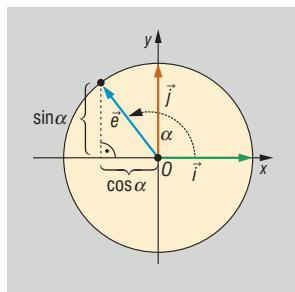
TÉTEL: $\operatorname{ctg} \alpha = \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha}$, ha $\alpha \neq k\frac{\pi}{2}$ ($k \in \mathbb{Z}$)

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{\operatorname{ctg} \alpha}, \text{ ha } \alpha \neq k\frac{\pi}{2} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$$\Rightarrow \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \alpha = 1 \quad \left(\alpha \neq k\frac{\pi}{2} \right)$$

TÉTEL: $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ minden valós α -ra (Pitagoraszi összefüggés).

BIZONYÍTÁS: A szögfüggvények definíciója szerint az α irányszögű e egységvektor koordinátái: $(\cos \alpha; \sin \alpha)$.



Egyrészt az egységvektor hossza 1: ($|e| = 1$), másrészt az e vektor hossza: $|e| = \sqrt{e_1^2 + e_2^2} = \sqrt{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha}$.

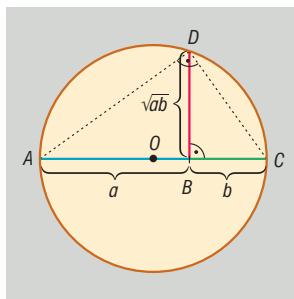
Ebből $1 = \sqrt{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha}$. Mivel nemnegatív számok állnak a két oldalon, négyzetre emeléssel: $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$.

KÖVETKEZMÉNY: tetszőleges α szög esetén:

$$|\sin \alpha| = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha}, \text{ illetve } |\cos \alpha| = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha}$$

VII. Alkalmazások:

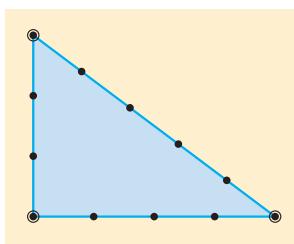
- Pitagorasz-tétel:
 - síkgeometria: háromszög, trapéz magasságának számolása
 - koordinátageometria: két pont távolsága, vektor hossza
- Thalész-tétel:
 - síkgeometria: körhöz külső pontból húzott érintők szerkesztése
 - koordinátageometria: érintők egyenlete
- Magasságtétel:
 - mértani közép szerkesztése



- Forgásszögek szögfüggvényei:
 - Háromszög trigonometrikus területképlete
 - Szinusztétel, koszinusz-tétel
 - Négyszög területe: $t = \frac{e \cdot f \cdot \sin \alpha}{2}$ (e, f átlók, α = átlók szöge)
 - Rezgőmozgás kitérés-idő, sebesség-idő, gyorsulás-idő függvénye trigonometrikus függvény

Matematikatörténeti vonatkozások:

- A derékszögű háromszögekről fennmaradt első írásos emlékek a **Rhind-papíruszon** kb. Kr. e. 1750-ből találhatók: ismerték a 3, 4, 5 oldalú derékszögű háromszöget.
- Kr. e. 2000 körül az **egyiptomi papok** derékszögszerkesztésre csomózott kötelet használtak, amihez ismerniük kellett a Pitagorasz-tételt: terepen a derékszög kitűzését 12 csomós kötél és 3 karó segítségével: végezték.



- **Kínában** Kr. e. 1200 és 1100 közötti naptárban olyan rajz látható, amely azt mutatja, hogy ismerték a Pitagorasz-tételt legalább a 3, 4, 5 oldalú derékszögű háromszög esetében. Ezen a rajzon egy 3+4 egység oldalú négyzet kerületén van a belső 5 egység hosszúságú négyzet csúcspontjai (a Pitagorasz-tétel I. bizonyításában szereplő ábrához hasonlóan).
- **Pitagorasz** a Kr. e. VI. században az ókori Görögországban élt, tételét viszont már a babilóniaiak 4000 évvel ezelőtt is ismerték, Pitagoraszhoz csak azért fűződik a tételes, mert rájött egy új bizonyításra.
- **Thalész** szintén a Kr. e. VI. században élt az ókori Görögországban, az első olyan matematikus volt, akinek bizonyítási igénye volt. Neki tulajdonítják a szög fogalmának kialakítását.

- **Ptolemaiosz** görög csillagász a Kr. u. II. században 30 percenkénti beosztással készített „húrtáblázatokat”, ami a később kialakult trigonometrikus függvények elődei voltak.
- A trigonometrikus függvények közti összefüggések és azonosságok felfedésében nagy érde mei vannak **Viète** (1540–1603) francia matematikusnak.