18. Vektorok, vektorműveletek. Vektorfelbontási tétel. Vektorok koordinátái. Skaláris szorzat

Vázlat:

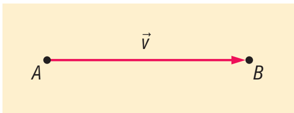
I. Vektor, vektor hossza, vektorok egyenlősége, párhuzamossága
II. Vektorműveletek, tulajdonságaik
III. Vektorok felbontása
IV. Vektorok koordinátái
V. Skaláris szorzat
VI. Alkalmazások, matematikatörténeti vonatkozások

Kidolgozás:

I. Vektor

Az eltolás, mint egybevágósági transzformáció megadható az eltolás irányával és nagyságával, vagyis egy vektorral.

Az irányított szakaszt **vektor**nak nevezzük. Jel: $\overrightarrow{AB}=\underline{v}$, A: kezdőpont, B: végpont (ez szemléletes megoldás, a vektor alapfogalom, nem definiáljuk).

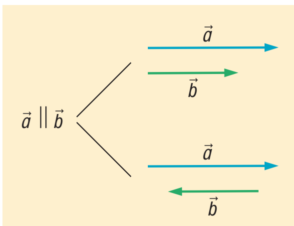


DEFINÍCIÓ: A **vektor abszolút értéke** a vektort meghatározó irányított szakasz hossza. Jele: $\left|\overrightarrow{AB}\right|$.

DEFINÍCIÓ: Az a vektor, amelynek abszolút értéke nulla, a **nullvektor**. Jele: $\underline{0}$. A nullvektor iránya tetszőleges, tehát minden vektorra merőleges, és minden vektorral párhuzamos.

DEFINÍCIÓ: Két vektor **egyirányú**, ha a két vektor párhuzamos, és azonos irányba mutat.

DEFINÍCIÓ: Két vektor **ellentétes irányú,** ha a két vektor párhuzamos, de ellentétes irányba mutat.



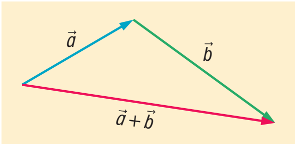
DEFINÍCIÓ: Két vektor egyenlő, ha egyirányúak és abszolút értékük egyenlő.

DEFINÍCIÓ: Két vektor egymás **ellentett**je, ha ellentétes irányúak és abszolút értékük egyenlő.

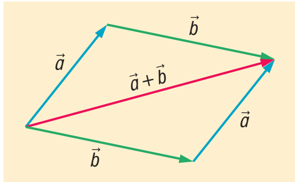
II. Vektorműveletek

DEFINÍCIÓ: Az $\underline{a}$ és $\underline{b}$ **vektorok összege** annak az eltolásnak a vektora, amellyel helyettesíthető az $\underline{a}$ vektorral és a $\underline{b}$ vektorral történő eltolások egymásutánja. Jele: $\underline{a}+\underline{b}$.

háromszög-szabály



paralelogramma-szabály

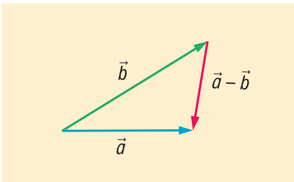


Ellentett vektorok összege a nullvektor: $\underline{a}+(-\underline{a})=\underline{0}$.

A vektorösszeadás tulajdonságai:

1. **kommutatív**: $\underline{a}+\underline{b}=\underline{b}+\underline{a}$ (összeg nem függ az összeadandók sorrendjétől).
2. **asszociatív**: $(\underline{a}+\underline{b})+\underline{c}=\underline{a}+(\underline{b}+\underline{c})$ (az összeg független az összeadandók csoportosításától).

DEFINÍCIÓ: Az $\underline{a}-\underline{b}$ **különbségvektor** az a vektor, amelyhez a $\underline{b}$ vektort adva az $\underline{a}$ vektort kapjuk. Jele: $\underline{a}-\underline{b}$.



Az $\underline{a}-\underline{b}$ és a $\underline{b}-\underline{a}$ egymás ellentettjei.

DEFINÍCIÓ: Egy nullvektortól különböző $\underline{a}$ vektor tetszőleges λ valós számmal (**skalárral**) **vett szorzata** egy olyan vektor, amelynek abszolút értéke $|\lambda|\cdot|\underline{a}|$ és $\lambda>0$ esetén $\underline{a}$-val egyirányú, $\lambda<0$ esetén $\underline{a}$-val ellentétes irányú.
A nullvektort bármilyen valós számmal szorozva nullvektort kapunk.

A skalárral vett szorzás tulajdonságai:

1. **disztributív:** $\begin{cases}\alpha\cdot\underline{a}+\beta\cdot\underline{a}=(\alpha+\beta)\cdot\underline{a}\\ \alpha\cdot\underline{a}+\alpha\cdot\underline{b}=\alpha\cdot(\underline{a}+\underline{b})\end{cases}$
2. **asszociatív:** $\alpha\cdot(\beta\cdot\underline{a})=(\alpha\cdot\beta)\cdot\underline{a}$

III. Vektorok felbontása

DEFINÍCIÓ: Tetszőleges $\underline{a}$, $\underline{b}$ vektorokkal és α, β valós számokkal képzett $\underline{v}=\alpha\cdot\underline{a}+\beta\cdot\underline{b}$ vektort az $\underline{a}$ és $\underline{b}$ vektorok **lineáris kombinációjának** nevezzük.

TÉTEL: Ha $\underline{a}$ és $\underline{b}$ nullvektortól különböző párhuzamos vektorok, akkor pontosan egy olyan α valós szám létezik, amelyre $\underline{b}=\alpha\cdot\underline{a}$.

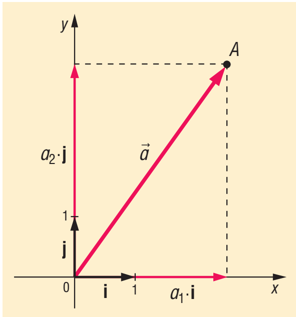
TÉTEL: Ha $\underline{a}$ és $\underline{b}$ nullvektortól különböző, nem párhuzamos vektorok, akkor a velük egy síkban levő minden $\underline{c}$ vektor egyértelműen előáll $\underline{a}$ és $\underline{b}$ vektorok lineáris kombinációjaként, azaz $\underline{c}=\alpha\cdot\underline{a}+\beta\cdot\underline{b}$ alakban, ahol α és β egyértelműen meghatározott valós számok. Ez azt jelenti, hogy $\underline{c}$ egyértelműen felbontható $\underline{a}$**-val és** $\underline{b}$ **-vel párhuzamos összetevőkre**.

DEFINÍCIÓ: A lineáris kombinációban szereplő $\underline{a}$ és $\underline{b}$ vektorokat **bázisvektoroknak** nevezzük.

IV. Vektorok koordinátái

DEFINÍCIÓ: A síkbeli derékszögű (x; y) koordináta-rendszer **bázisvektorai** az origóból az (1; 0) pontba mutató $\underline{i}$ és a (0; 1) pontba mutató $\underline{j}$ **egységvektorok**.

DEFINÍCIÓ: A derékszögű koordináta-rendszerben az $A(a_1, a_2)$ pont **helyvektor**a az origóból az A pontba mutató vektor.



DEFINÍCIÓ: A derékszögű koordináta-rendszerben egy **vektor koordinátái**nak nevezzük az origó kezdőpontú, vele egyenlő helyvektor végpontjának koordinátáit. Jele: $\underline{a}(a_1, a_2)$.

TÉTEL: (Az előbbiek alapján) a koordinátasík összes $\underline{v}$ vektora egyértelműen előáll $\underline{i}$ és $\underline{j}$ vektorok lineáris kombinációjaként $\underline{v} = v_1 \cdot \underline{i} + v_2 \cdot \underline{j}$ alakban. Az így meghatározott (v_1, v_2) rendezett számpárt a $\underline{v}$ **vektor koordinátái**nak nevezzük. Jele: $\underline{v}(v_1, v_2)$.

TÉTEL: Vektor koordinátáinak kiszámítása kezdő- és végpontjának segítségével: $A(a_1, a_2)$, $B(b_1, b_2) \Rightarrow \overrightarrow{AB}(b_1 - a_1, b_2 - a_2)$.

TÉTEL: Ha a $\underline{v}$ vektor koordinátái $\underline{v}(v_1, v_2)$, akkor a **vektor hossza** $|\underline{v}| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2}$.

Vektorműveletek koordinátákkal:

Legyenek $\underline{a}(a_1, a_2)$ és $\underline{b}(b_1, b_2)$ adott vektorok.

TÉTEL: Két vektor összegének a koordinátái az egyes vektorok megfelelő koordinátáinak összegével egyenlők: $\underline{a} + \underline{b}(a_1 + b_1, a_2 + b_2)$.

TÉTEL: Két vektor különbségének koordinátái az egyes vektorok megfelelő koordinátáinak különbségével egyenlő: $\underline{a} - \underline{b}(a_1 - b_1, a_2 - b_2)$.

TÉTEL: Vektor számszorosának koordinátái: $\lambda\underline{a}(\lambda a_1, \lambda a_2)$.

TÉTEL: Vektor ellentettjének koordinátái: $-\underline{a}(-a_1, -a_2)$.

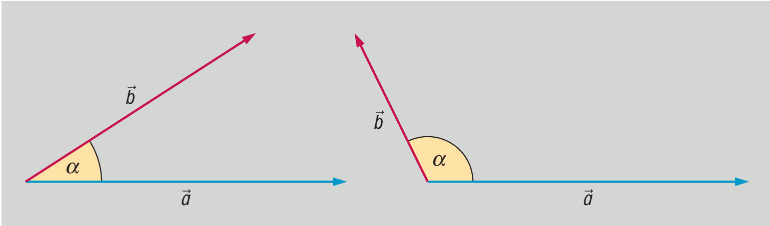
TÉTEL: Ha egy vektort 90º-kal elforgatunk, koordinátái felcserélődnek és az egyik előjelet vált:
Az $\underline{a}(a_1, a_2)$ vektor +90º-os elforgatottjának koordinátái: $\underline{a}'(-a_2, a_1)$.
–90º-os elforgatottjának koordinátái: $\underline{a}''(a_2, -a_1)$.

V. Skaláris szorzat

DEFINÍCIÓ: Két vektor szöge:

- Egyállású vektorok szöge 0º, ha egyirányúak; vagy 180º, ha ellentétes irányúak.

- Nem egyállású vektorok esetén a vektorok hajlásszögén a közös pontból kiinduló vektorok félegyenesei által bezárt konvex szöget értjük.



DEFINÍCIÓ: Tetszőleges két vektor **skaláris szorzata** a két vektor abszolút értékének és hajlásszögük koszinuszának szorzata: $\underline{a}\cdot\underline{b}=|\underline{a}|\cdot|\underline{b}|\cdot\cos\alpha$.

Skaláris szorzat tulajdonságai:

1. kommutatív: $\underline{a}\cdot\underline{b}=\underline{b}\cdot\underline{a}$.
2. disztributív: $\begin{cases}\lambda\cdot(\underline{a}\cdot\underline{b})=(\lambda\cdot\underline{a})\cdot\underline{b}=\underline{a}\cdot(\lambda\cdot\underline{b})\\(\underline{a}+\underline{b})\cdot c=\underline{a}\cdot\underline{c}+\underline{b}\cdot\underline{c}\end{cases}$

TÉTEL: Két vektor skaláris szorzata akkor és csak akkor 0, ha a két vektor merőleges egymásra: $\underline{a}\cdot\underline{b}=0 \iff \underline{a}\perp\underline{b}$.

TÉTEL: Két vektor skaláris szorzata koordinátákkal: $\underline{a}\cdot\underline{b}=a_1b_1+a_2b_2$, azaz a megfelelő koordináták szorzatának összege.

BIZONYÍTÁS:

$$\underline{a}(a_1,a_2) \Rightarrow \underline{a}=a_1\underline{i}+a_2\underline{j}$$

$$\underline{b}(b_1,b_2) \Rightarrow \underline{b}=b_1\underline{i}+b_2\underline{j}$$

$$\left.\begin{array}{l}\underline{a}\cdot\underline{b}=(a_1\underline{i}+a_2\underline{j})\cdot(b_1\underline{i}+b_2\underline{j})=a_1b_1\underline{i}^2+a_1b_2\underline{i}\cdot\underline{j}+a_2b_1\underline{i}\cdot\underline{j}+a_2b_2\underline{j}^2\\ \underline{i}^2=1\cdot1\cdot\cos0°=1\\ \underline{j}^2=1\cdot1\cdot\cos0°=1\\ \underline{i}\cdot\underline{j}=\underline{j}\cdot\underline{i}=1\cdot1\cdot\cos90°=0\end{array}\right\}\Rightarrow \underline{a}\cdot\underline{b}=a_1b_1+a_2b_2$$

VI. Alkalmazások:

- Vektorok bizonyításban: háromszög súlypontja harmadolja a súlyvonalakat; Euler-egyenes: a háromszög köré írható kör középpontja, súlypontja, magasságpontja egy egyenesen van és $\frac{KS}{SM}=\frac{1}{2}$.
- Szögfüggvények tetszőleges forgásszögre történő definiálása egységvektorok segítségével történik.
- Fizikában vektormennyiségek (erő, elmozdulás) összeadásában, felbontásában, a munka egyenlő az erő és az elmozdulás skaláris szorzatával.
- Skaláris szorzat: koszinusztétel bizonyítása
- Koordináta-geometriában az egyenes normálvektora, illetve irányvektora segítségével az egyenes egyenletének felírása

Matematikatörténeti vonatkozások:

- A vektor fogalma absztrakció útján alakult ki, használata a matematikában és a fizikában végigkíséri tanulmányainkat. Először az eltolás, mint geometriai transzformáció kapcsán tanulmányozzuk, ezalatt tapasztaljuk, hogy a vektormodellben való gondolkodás segít a problémamegoldásban, fizikában a jelenségek értelmezésében, pl. elmozdulás, erő, sebesség leírásában, a vektorok skalárszorzata a munka jellemzésében.

- **Descartes** francia matematikus az 1600-as években alkotta meg a derékszögű **koordinátarendszer**t, geometriai problémák megoldásakor sokszor alkalmazott algebrai módszereket. Írt egy Geometria című könyvet, amelyben egy pont helyzetét két koordinátájával adjuk meg.
- **Hamilton** ír matematikus és csillagász használta először a vektor elnevezést az 1800-as években.