11. A differenciálhányados fogalma, deriválási szabályok. A differenciálszámítás alkalmazásai (érintő, függvényvizsgálat, szélsőértékfeladatok)

Vázlat:

I. Függvény fogalma, értelmezési tartomány, értékkészlet
II. Differenciálhányados
III. Deriválási szabályok
IV. A differenciálszámítás alkalmazásai:
Függvény érintője
Függvényvizsgálat
Szélsőérték-feladatok
V. Alkalmazások, matematikatörténeti vonatkozások

Kidolgozás:

I. Függvény fogalma, értelmezési tartomány, értékkészlet

DEFINÍCIÓ: Legyen A és B két nem üres halmaz. Azt mondjuk, hogy megadunk egy A halmazon értelmezett B-beli értéket felvevő **függvény**t, ha A minden eleméhez hozzárendeljük a B egy és csakis egy elemét. Jele: $f\colon A \to B$.

DEFINÍCIÓ: **Értelmezési tartomány**nak nevezzük az A halmazt. Jele D_f.

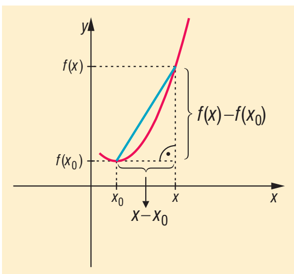
DEFINÍCIÓ: **Értékkészlet** a B halmaz azon elemeiből álló halmaz, amelyek a hozzárendelésnél fellépnek (vagyis az $f(x)$ értékek). Jele az R_f.

DEFINÍCIÓ: Ha $c \in D_f$, akkor a c helyen felvett függvényértéket $f(c)$-vel jelöljük, ez a helyettesítési vagy **függvényérték**.

DEFINÍCIÓ: Ha az értelmezési tartomány és az értékkészlet is számhalmaz, akkor a függvényt grafikonon tudjuk szemléltetni. A **grafikon** az $(x; f(x))$ pontok halmaza.

II. Differenciálhányados

DEFINÍCIÓ: Legyen f egy $]a, b[$ intervallumon értelmezett függvény és x_0 az értelmezési tartomány egy pontja. Ekkor a $g(x) = \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ függvényt az f függvény x_0 ponthoz tartozó különbségi hányados (**differenciahányados**) függvényének nevezzük.



DEFINÍCIÓ: Az f függvény x_0 ponthoz tartozó különbségi hányadosának az x_0 helyen vett határértékét (ha ez a határérték létezik és véges) az f függvény x_0 pontbeli **differenciálhányados**ának vagy deriváltjának nevezzük.

Jel: $f'(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$.

DEFINÍCIÓ: Ha egy függvénynek egy pontban van deriváltja, akkor azt mondjuk, hogy a függvény ebben a pontban **differenciálható** (deriválható).

Az x_0 pontbeli differenciálhányados egy ábrázolható függvény esetében a függvény grafikonjának $(x_0, f(x_0))$ pontjához húzott érintő meredeksége.

Pl.: $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x^2 - 4x + 5$.

Differenciahányados $x_0 = 1$ pontban:

$$g(x) = \frac{(x^2 - 4x + 5) - (1^2 - 4 \cdot 1 + 5)}{x - 1} = \frac{x^2 - 4x + 3}{x - 1} = \frac{(x-3)(x-1)}{x-1} = x - 3, \text{ ha } x \neq 1.$$

g nincs értelmezve az $x = 1$ helyen, de $\lim\limits_{x \to 1}(x - 3) = -2$ létezik és véges $\Rightarrow f'(x) = -2$. Tehát a parabola érintőjének meredeksége $x = 1$ helyen -2.

Differenciahányados x_0-ban:

$$\left.\begin{aligned} g(x) &= \frac{(x^2 - 4x + 5) - (x_0^2 - 4x_0 + 5)}{x - x_0} = \frac{x^2 - x_0^2 - 4x + 4x_0}{x - x_0} = \\ &= \frac{(x + x_0)(x - x_0) - 4(x - x_0)}{x - x_0} = \frac{(x - x_0)(x + x_0 - 4)}{x - x_0} = x + x_0 - 4 \end{aligned}\right\} \text{ ha } x \neq x_0$$

$f'(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0}(x + x_0 - 4) = 2x_0 - 4 \Rightarrow$ tetszőleges x pontban: $f'(x) = 2x - 4$.

DEFINÍCIÓ: Ha f függvénynél az értelmezési tartomány minden olyan pontjához, ahol f differenciálható hozzárendeljük a differenciahányados értékét, akkor az f függvény **differenciálhányados (derivált) függvény**ét kapjuk. Jelölés: $f'(x)$.

III. Deriválási szabályok

TÉTEL: Az f és g függvények deriválhatóak az x helyen, és deriváltjuk itt $f'(x)$, illetve $g'(x)$:

1. $f(x) = c$, $c =$ állandó $\Rightarrow f'(x) = 0$
2. $(c \cdot f(x))' = c \cdot f'(x)$, $c \in \mathbb{R}$
3. $(f(x) \pm g(x))' = f'(x) \pm g'(x)$
4. $(f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$
5. $\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)' = \dfrac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g^2(x)}$
6. $(f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$

TÉTEL: Elemi függvények deriváltjai:

1. $(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$, ha $x > 0$, $n \in \mathbb{N}^+$.
2. $(a^x)' = a^x \cdot \ln a$, ha $a > 0$, $a \neq 1$.
   $(e^x)' = e^x$.
3. $(\log_a x)' = \dfrac{1}{x \cdot \ln a}$, ha $a > 0$, $a \neq 1$, $x > 0$.
4. $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$, ha $x > 0$.

5. $(\sin x)' = \cos x$.
6. $(\cos x)' = -\sin x$.

TÉTEL: Hatványfüggvény deriváltfüggvénye: $(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$, ha $x > 0$, $n \in \mathbb{N}^+$.

BIZONYÍTÁS: teljes indukcióval

$n = 1$-re igaz: $f(x) = x^1$ esetében

$$\left.\begin{array}{l} \text{bal oldal: } f'(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{x - x_0}{x - x_0} = \lim\limits_{x - x_0} 1 = 1 \Rightarrow (x^1)' = 1 \\ \text{jobb oldal: } 1 \cdot x^{1-1} = 1 \cdot x^0 = 1 \cdot 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \text{igaz}.$$

Tegyük fel, hogy $n = k$-ra igaz: $(x^k)' = k \cdot x^{k-1}$.

Bizonyítjuk az öröklődést: $(x^{k+1})' = (k+1) \cdot x^k$.

Bal oldal:

$$(x^{k+1})' \underset{\substack{\text{hatványozás} \\ \text{azonossága}}}{=} (x \cdot x^k)' \underset{\substack{\text{szorzat} \\ \text{deriváltja}}}{=} x' \cdot x^k + x \cdot (x^k)' = 1 \cdot x^k + x \cdot k \cdot x^{k-1} = x^k + k \cdot x^k = (k+1) \cdot x^k$$

Ez pedig pontosan a jobb oldal, ezzel állításunkat bebizonyítottuk.

IV. A differenciálszámítás alkalmazásai

Függvény adott pontbeli érintője:

Ha az $f(x)$ függvény az x_0 pontban differenciálható, akkor grafikonjának az $(x_0; f(x_0))$ pontban van érintője és $f'(x_0)$ ebben a pontban az érintő meredeksége. Ekkor a függvény x_0-beli érintőjének egyenlete: $y = f'(x_0) \cdot (x - x_0) + f(x_0)$.

Függvényvizsgálat:

TÉTEL: Az f függvény az $]a, b[$ intervallum minden pontjában differenciálható. Ha az intervallum minden x pontjában

- $f'(x) > 0$, akkor f az $]a; b[$-n **szigorúan monoton nő**.
- $f'(x) < 0$, akkor f az $]a; b[$-n **szigorúan monoton csökken**.
- $f'(x) \geq 0$, akkor f az $]a; b[$-n **monoton nő**.
- $f'(x) \leq 0$, akkor f az $]a; b[$-n **monoton csökken**.

TÉTEL: Legyen az f függvény az $]a, b[$ minden pontjában differenciálható. Ha az intervallum egy x_0 pontjában a deriváltja 0 és ott a derivált függvény előjelet vált, akkor x_0-ban az f függvénynek lokális szélsőértéke van. Ha negatívból pozitívba vált a deriváltfüggvény előjele (az f szigorúan monoton csökkenőből vált szigorúan monoton növőre), akkor **lokális minimuma**, ha pozitívból negatívba vált, akkor **lokális maximuma** van.

TÉTEL: Legyen az f függvény az $]a, b[$ minden pontjában kétszer differenciálható. Ha az intervallum egy x_0 pontjában az első derivált 0 és a második derivált nem nulla, akkor x_0-ban az f függvénynek lokális szélsőértéke van. Ha $f''(x_0) > 0$, akkor **lokális minimuma**, ha $f''(x_0) < 0$, akkor **lokális maximuma** van.

TÉTEL: Legyen az f függvény egy $[a, b]$-n deriválható és legyen az f' függvény is deriválható $[a, b]$-n. Ha az $[a, b]$ minden pontjában $f''(x) \geq 0$, akkor f az $[a, b]$-n **konvex**, ha $f''(x) \leq 0$, akkor **konkáv**.

TÉTEL: Legyen az f függvény egy $[a, b]$-n deriválható és legyen az f' függvény is deriválható $[a, b]$-n. Ha az intervallum egy x_0 pontjában $f''(x) = 0$ és itt az f'' függvény előjelet vált, akkor x_0 pontban az f függvénynek **inflexiós pont**ja van.

Szélsőérték-problémák vizsgálata differenciálszámítással

A szélsőérték-feladat szövegének értelmezése után felírjuk a változók közti összefüggéseket. Ha több változó van, akkor az egyik segítségével kifejezzük a többit és beírjuk abba a kifejezésbe, amelynek szélsőértékét vizsgáljuk. Így kapunk egy **egyváltozós függvényt,** aminek a szélsőértékét kell meghatározni. Ezt a nevezetes közepek közti összefüggésekkel, a függvénytulajdonságok (transzformáció) alapján, valamint deriválással lehet megállapítani:

Lokális szélsőértéke van a differenciálható függvénynek x_0-ban, ha ott az első derivált 0, és a derivált ebben a pontban előjelet vált, azaz a második derivált nem nulla. A derivált zérushelye szükséges, de nem elégséges feltétele a helyi szélsőérték létezésének.
Minimuma van, ha az első derivált negatívból pozitívba vált, illetve ha a második derivált ezen a helyen pozitív; maximuma van, ha az első derivált pozitívból negatívba vált, illetve ha a második derivált negatív ezen a helyen,

Szélsőérték-vizsgálat $f'(x)$ segítségével: az $f(x)$ differenciálható függvényt deriváljuk, kiszámoljuk a deriváltfüggvény zérushelyét, majd a zérushely segítségével megállapítjuk deriváltjának előjelét. Ehhez vagy az alapfüggvények tulajdonságait használjuk, vagy a szorzat, illetve hányados előjelét vizsgáljuk. Utóbbira akkor van szükség, ha az első derivált nem az alapfüggvények közül kerül ki, ekkor a deriváltat a lehető legjobban szorzattá, illetve hányadossá alakítjuk. Az első derivált előjeléből következtetni tudunk a függvény monotonitási viszonyaira is: azon az intervallumon, ahol a függvény első deriváltja pozitív, a függvény nő, ahol negatív, ott a függvény csökken.
Pl.: $f\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}, f(x) = x^3 - 3x \Rightarrow f'(x) = 3x^2 - 3.$
$f'(x)$ zérushelye: $x = \pm 1$
$f'(x)$ előjele:
$f'(x) > 0$, ha $x < -1$, $f'(x) < 0$ ha $-1 < x < 1$, tehát lokális maximuma van az $x = -1$ helyen, értéke $f(-1) = 2$.
$f'(x) < 0$ ha $-1 < x < 1$, $f'(x) > 0$, ha $x > 1$, tehát lokális minimuma van az $x = +1$ helyen, értéke $f(1) = -2$
A függvény szigorúan monoton nő, ahol $f'(x) > 0$, azaz $x \in]-\infty; -1[\cup]1; \infty[$, szigorúan monoton csökken, ahol $f'(x) < 0$, azaz $x \in]-1; 1[$.

Szélsőérték-vizsgálat $f''(x)$ segítségével: az $f(x)$ kétszer differenciálható függvényt kétszer deriváljuk, kiszámoljuk az első derivált zérushelyét, majd a zérushelyeket behelyettesítjük a második deriváltba, megállapítjuk második deriváltjának előjelét. A második derivált előjeléből következtetni tudunk a függvény görbületi viszonyaira is: azon az intervallumon, ahol a második deriváltja pozitív, a függvény konvex, ahol negatív, ott a függvény konkáv, ahol a második derivált előjelet vált és a függvény folytonos ebben a pontban, inflexiós pontja van a függvénynek.
Pl.: $f\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}, f(x) = x^3 - 3x \Rightarrow f'(x) = 3x^2 - 3 \Rightarrow f''(x) = 6x.$
$f'(x)$ zérushelye: $x = \pm 1$
$f''(x)$ előjele:
$f''(-1) = -6$, tehát lokális maximuma van az $x = -1$ helyen, értéke $f(-1) = 2$.
$f''(1) = 6$, tehát lokális minimuma van az $x = +1$ helyen, értéke $f(1) = -2$.
$f''(x) = 0$, ha $x = 0$, és ebben a pontban előjelet vált, negatívból pozitívba megy át, azaz a függvény konkávból konvexbe vált, vagyis inflexiós pontja van az $x = 0$ pontban.

V. Alkalmazások:

- *gazdasági problémák megoldása:*
  - Ha egy áru iránti kereslet függ a termék árától, akkor milyen ár esetén érhető el maximális összbevétel?
  - Ha egy termék előállítási költsége függ a termék reklámozására fordított összegtől, akkor mekkora reklámköltség esetén érhető el egy termék minimális előállítási költsége?

- *matematikai problémák megoldása:*
  - Adott térfogatú folyadéknak milyen méretekkel rendelkező hengeres dobozt tervezzünk, hogy a felhasznált csomagolóanyag mennyisége minimális legyen?
  - Adott sugarú gömbbe írt hengerek közül melyiknek a térfogata maximális?
  - Adott alapkörsugarú és magasságú forgáskúpba olyan forgáshengert írunk, amelynek alapköre a kúp alapkörének része, fedőköre pedig illeszkedik a kúp palástjára. Milyen esetben lesz a henger térfogata maximális?

Matematikatörténeti vonatkozások:

- A XVII. században **Descartes** (1596–1650) francia matematikus foglalkozott először a függvényekkel: bevezette a változó fogalmát, a függvényt megfeleltetésnek tekintette. Ezután elkezdték vizsgálni a matematikusok a függvénygörbék és érintők kapcsolatát. Az érintőket vizsgálva eljutottak a differenciálhányados fogalmához, módszert dolgoztak ki a függvények menetének vizsgálatára, szélsőértékeinek megállapítására.
- Az analízis alapvető fogalmait (pl, sorozat, konvergencia, határérték) **Cauchy** (1789–1857) francia matematikus definiálta. Ő az, aki pontosan leírta a differenciál- és integrálszámítást, előtte azonban pontosította a határérték fogalmát.