24. Permutációk, variációk. A binomiális eloszlás. A valószínűség kiszámításának geometriai modellje

Vázlat:

I. Permutációk
II. Variációk
III. A valószínűség-számítás alapjai
IV. A binomiális eloszlás
V. A valószínűség kiszámításának geometriai modellje
VI. Alkalmazások, matematikatörténeti vonatkozások

Kidolgozás:

A **kombinatorika**, a valószínűség-számítás és a matematikai statisztika a véletlen tömegjelenségek törvényszerűségével foglalkozik. A kombinatorika tárgyát képezik a sorba rendezési és a részhalmaz kiválasztási problémák, a kombinatorika rendszerint dolgok megszámlálásával foglalkozik.

I. Permutációk

DEFINÍCIÓ: Egy adott n elemű halmaz elemeinek egy **ismétlés nélküli permutáció**ján az n különböző elem egy sorba rendezését (sorrendjét) értjük.

TÉTEL: Egy ***n* elem**ű halmaz **ismétlés nélküli összes permutációinak száma**:

$$n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1 = n!.$$

DEFINÍCIÓ: Ha az n elem között van $k_1, k_2, \ldots, k_m$ egymással megegyező, akkor az elemek egy sorba rendezését **ismétléses permutáció**nak nevezzük.

TÉTEL: Ha n elem között $k_1, k_2, \ldots, k_m$ db megegyező van, és $k + k_2 + \ldots + k_m = n$, akkor ezeket az elemeket $\frac{n!}{k_1! \cdot k_2! \cdot \ldots \cdot k_m!}$ különböző módon lehet sorba rendezni, ez az **ismétléses permutációk száma**.

II. Variációk

DEFINÍCIÓ: Legyen n db egymástól különböző elemünk. Ha ezekből k ($k \le n$) db-ot kiválasztunk minden lehetséges módon úgy, hogy a kiválasztott elemek sorrendje is számít, akkor az n elem k-ad osztályú **ismétlés nélküli variáció**ját kapjuk.

TÉTEL: Az *n* elem *k*-ad osztályú ismétlés nélküli variációk száma: $\frac{n!}{(n-k)!}$.

BIZONYÍTÁS: Vegyünk egy k rekeszes dobozt. Ebben helyezzünk el az n elem közül k db elemet minden lehetséges módon.
Az első rekeszbe az n elem bármelyike tehető. A második rekeszbe már csak $(n-1)$ elem közül választhatunk. Ez $(n-1)$-féle kitöltést ad a 2. rekesz számára. Az első két rekeszbe $n(n-1)$-féleképpen tehetők az elemek. Minden rekeszbe 1-gyel kevesebb elem közül vá-

laszthatunk, mint az előzőbe. A k-adik rekeszbe $n-(k-1)=n-k+1$ elem közül választhatunk.
A doboz teljes kitöltésére összesen $n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)$ lehetőség adódik. Ha az eredményt $(n-k)!$-ral bővítjük, akkor

$$n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)=\frac{n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)\cdot(n-k)\cdot(n-k-1)\cdot\ldots\cdot2\cdot1}{(n-k)!}=\frac{n!}{(n-k)!}$$

DEFINÍCIÓ: Legyen n db egymástól különböző elemünk. Ha ezekből kiválasztunk k db-ot minden lehetséges módon úgy, hogy a kiválasztott elemek sorrendje is számít és ugyanazt az elemet többször is választhatjuk, akkor az n elem k-ad osztályú **ismétléses variáció**ját kapjuk.

TÉTEL: Az n elem k-ad osztályú ismétléses variációk száma: n^k.

III. A valószínűségszámítás alapjai

A valószínűségszámítás a véletlen tömegjelenségek bekövetkezésének esélyének vizsgálatával foglalkozik.

DEFINÍCIÓ: **Véletlen jelenség**nek nevezzük azokat a jelenségeket, amelyeket a leírható körülmények nem határoznak meg egyértelműen.
Pl. egy dobókocka feldobása.

DEFINÍCIÓ: **Kísérlet**nek nevezzük a véletlen jelenség megfigyelését.

DEFINÍCIÓ: **Elemi esemény**nek nevezzük a kísérlet során bekövetkező lehetséges kimeneteleket.
Pl. a kocka dobásánál azt, hogy hányas számot dobunk.

DEFINÍCIÓ: Az **eseménytér** az elemi események halmaza.
Pl. a kocka dobásánál $\{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$.

DEFINÍCIÓ: Az elemi események egy halmazát, azaz az eseménytér egy részhalmazát **esemény**nek nevezzük.
Pl. esemény kockadobásnál páros szám dobása.
Az eseményeket nagybetűvel jelöljük. Pl. $A=\{2; 4; 6\}$

DEFINÍCIÓ: Az eseménytérhez tartozó azon esemény, amely biztosan bekövetkezik, a **biztos esemény**, amely semmiképpen sem következhet be, a **lehetetlen esemény**.
A biztos esemény jele: H, a lehetetlen esemény jele: $\varnothing$.
Pl. a kockadobásnál biztos esemény: 7-nél kisebb számot dobunk, lehetetlen esemény: 8-nál nagyobbat dobunk.

DEFINÍCIÓ: Ha elvégzünk n-szer egy kísérletet, és ebből az A esemény k-szor következik be, akkor **az A esemény relatív gyakorisága** a $\frac{k}{n}$ hányados.

DEFINÍCIÓ: Ha sokszor elvégzünk egy kísérletet, akkor megfigyelhetjük, hogy egy A esemény relatív gyakorisága egy szám körül ingadozik. Ezt a számot nevezzük **az A esemény valószínűségé**nek. Jele: $P(A)$.

DEFINÍCIÓ: A valószínűség kiszámításának klasszikus modelljét akkor alkalmazhatjuk, ha egy kísérletnek véges sok kimenetele van és ezek valószínűsége egyenlő. Ekkor az A esemény valószínűsége: $P(A)=\frac{\text{kedvező elemi események száma}}{\text{összes elemi esemény száma}}$.

A valószínűség-számítás axiómái:

- Tetszőleges A esemény esetén $0 \le P(A) \le 1$.
- Biztos esemény valószínűsége 1, lehetetlen eseményé 0.
- Ha A és B egymást kizáró események, akkor $P(A + B) = P(A) + P(B)$.
- Ha A és B tetszőleges esemény, akkor $P(A + B) = P(A) + P(B) - P(A \cdot B)$.
- $P(A) + P(\overline{A}) = 1$.

DEFINÍCIÓ: Az A esemény B-re vonatkozó **feltételes valószínűség**e: $P(A \mid B) = \dfrac{P(A \cdot B)}{P(B)}$.

Ez annak a valószínűsége, hogy az A esemény bekövetkezik, feltéve, hogy a B esemény bekövetkezik.

DEFINÍCIÓ: Az A és B események **egymástól függetlenek**, ha $P(A \mid B) = P(A)$.
Ekkor $P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B)$.

IV. Diszkrét eloszlások

A kísérletek kimenetelei általában számokkal jellemezhetők. Ezekre a mennyiségekre jellemző, hogy értékük a véletlentől függ, és mindegyikük egy-egy eseményhez van hozzárendelve.

DEFINÍCIÓ: A **valószínűségi változó** az eseménytéren értelmezett valós értékű függvény. Jele: ξ.

DEFINÍCIÓ: Ha a valószínűségi változó lehetséges értékeinek száma véges vagy megszámlálhatóan végtelen, akkor **diszkrét valószínűségi változó**ról beszélünk.

DEFINÍCIÓ: A **binomiális eloszlás** olyan kísérletnél fordul elő, amelynek csak két kimenetele lehetséges: az A esemény p valószínűséggel bekövetkezik, vagy $1 - p$ valószínűséggel nem következik be.

TÉTEL: Binomiális eloszlásnál ha a kísérletet n-szer ismételjük, akkor annak valószínűsége, hogy az A esemény k-szor következik be, éppen

$$P(\xi = k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}, \text{ ahol } k \le n.$$

(Binomiális eloszlásra vezetnek a visszatevéses mintavétel esetei, ahol n elem közül p valószínűséggel választunk valamilyen tulajdonsággal rendelkezőt oly módon, hogy a kivett elemet az újabb húzás előtt visszatesszük.)

BIZONYÍTÁS: Tegyük fel, hogy a visszatevéses mintavételeknél N db elem közül választunk ki n db-ot. Legyen M db elem A tulajdonságú, $N - M$ db elem $\overline{A}$ tulajdonságú.
A visszatevéses mintavétel azt jelenti, hogy minden egyes húzás után visszatesszük a kihúzott elemet, így a húzások egymástól függetlenek lesznek. A kérdés az, hogy mennyi a valószínűsége annak, hogy a kihúzott n db elem között k db A tulajdonságú elem van.
A kombinatorikában tanultak szerint a kedvező esetek száma $\binom{n}{k} \cdot M^k \cdot (N-M)^{n-k}$, mert k-szor kell M db golyóból választanunk, $n - k$-szor kell $N - M$ db golyó közül, és ez $\binom{n}{k}$-féleképpen fordulhat elő aszerint, hogy hányadik húzás az A tulajdonságú.
Az összes esetek száma N^n, mert n-szer húzunk N elemből.
Így

$$P = \frac{\binom{n}{k} \cdot M^k \cdot (N-M)^{n-k}}{N^n} = \binom{n}{k} \cdot \frac{M^k}{N^k} \cdot \frac{(N-M)^{n-k}}{N^{n-k}} = \binom{n}{k} \cdot \left(\frac{M}{N}\right)^k \cdot \left(\frac{N-M}{N}\right)^{n-k}.$$

Tudjuk, hogy annak az esélye, hogy A tulajdonságút húzunk: $P(A)=\frac{M}{N}=p$, hogy nem A tulajdonságút húzunk: $P(\overline{A})=1-p=1-\frac{M}{N}=\frac{N-M}{N}$.

Ezt felhasználva kapjuk: $P(\xi=k)=\binom{n}{k}\cdot p^k\cdot(1-p)^{n-k}$.

TÉTEL: A binomiális eloszlásnál az A tulajdonságú elemek számának várható értéke:

$$M(\xi)=n\cdot p=n\cdot\frac{M}{N}$$

V. A valószínűség kiszámításának geometriai modellje

Adott egy pontok alkotta geometriai alakzat. Elemi eseménynek ekkor az adott ponthalmazból az egyik pont kiválasztása, azaz ekkor az elemi eseménynek pontokat feleltetünk meg. Egy esemény azt jelenti, hogy a kiválasztott pont beletartozik egy bizonyos kijelölt részponthalmazba, résztartományba, vagyis az események ponthalmazok, tartományok. Ekkor az eseménytér egy geometriai alakzat, az esemény ezen pontok egy bizonyos tulajdonsággal rendelkező részhalmaza, az elemi esemény a geometriai alakzat egy pontja.

DEFINÍCIÓ: Ha az esemény bekövetkezésének valószínűsége arányos a részhalmaz mértékszámával, akkor geometriai valószínűségéről beszélünk.

Ekkor az A esemény valószínűsége:

$$P(A)=\frac{\text{az } A \text{ eseménynek megfelelő részalakzat mértéke}}{\text{a kísérlettel kapcsolatos teljes alakzat mértéke}}=\frac{m}{M}.$$

Ekkor a mérték lehet pl. hosszúság, terület, térfogat.

Példák:

- egy adott méretű darts táblán egy bizonyos részbe eső találat valószínűsége
- két ember találkozásának valószínűsége egy bizonyos órában, ha egyikük sem vár 15 percnél többet
- meteor szárazföldre való becsapódásának valószínűsége

VI. Alkalmazások

Sorbarendezési problémák:

- Hányféleképpen lehet kitölteni egy totószelvényt?
- Sorsolások, versenyek eredményeinek sorrendjeinek lehetőségei

Binomiális eloszlás:

- Meteorológiai előrejelzés
- Szerencsejátékoknál nyerési esély megállapítása: mekkora a valószínűsége annak, hogy a totón telitalálatos szelvényünk lesz?
- Mintavételek a minőség-ellenőrzés során: a gyártósorokon elkészült termékek közül a selejtek számának közelítő meghatározása várható érték segítségével
- A Galton-deszka egy függőleges, egyenlő szárú háromszög alakú szerkezet, amelyben úgy vannak elhelyezve akadályok és útvonalak, hogy a lefelé guruló golyó minden akadálynál egyenlő eséllyel ($\frac{1}{2}$ valószínűséggel) vagy balra, vagy jobbra térhet ki. A továbbgördülő golyó a következő szinten újabb akadályba ütközik, ahol szintén balra vagy jobbra térhet ki, és így tovább, egészen addig, amíg az utolsó akadály utáni legalsó sorban meg nem áll.

  Ha a Galton-deszka n sorban tartalmaz akadályokat, az első sorban 1, a második sorban 2, …, az n-edik sorban n db akadályt tartalmaz. Így az utolsó sorba $n + 1$ lehetséges helyre érkezhet a golyó. Annak a valószínűsége, hogy az utolsó sorban a balról számított k-adik ($k = 0, 1, 2, ..., n$) rekeszben áll meg a golyó: $P = \binom{n}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^k \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-k} = \binom{n}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^n$.

Geometriai eloszlás:

- Kvantumfizikában a részecske helyének meghatározása: azt lehet megmondani a részecske sebességétől függően, hogy hol tartózkodik legnagyobb valószínűséggel a részecske.

Matematikatörténeti vonatkozások:

- Az első ismert valószínűségszámítási feladat az 1400-as évekből Itáliából származik.
- **Pascal** (1623–1662) francia matematikus a binomiális együtthatókat tanulmányozva módszert adott a kiszámításukra, a valószínűségszámítás egyik megalapozója volt.
- Először **Leibniz** (1646–1716) német matematikus rendszerezte a kombinatorikai ismereteket, sokat foglalkozott az elemek sorbarendezésével, szimbólumokkal írta le a folyamatokat.
- **Bernoulli** (1654–1705) svájci matematikus alkalmazta először a kombinatorikai ismereteket valószínűség kiszámítására, jelentősen hozzájárult a valószínűségelmélet kifejlesztéséhez. Kidolgozta a valószínűségszámítás kombinatorikus modelljét. Két testvére és édesapja is matematikus volt.
- **Buffon** (1707–1788) francia természettudós tűproblémájával bevezette a geometriai valószínűség fogalmát.
- A valószínűségszámítással a XIX. század végén több orosz matematikus is foglalkozott: többek között **Csebisev** (1821–1894), **Markov** (1856–1922), **Kolmogorov** (1903–1987).
- A valószínűségszámítás legfiatalabb ága, amely a számítógépek területén kapott alkalmazást, az információelmélet, melynek megalapozója **Shannon** (1916–2001) amerikai matematikus.