# 19. Szakaszok és egyenesek a koordinátasíkon. Párhuzamos és merőleges egyenesek. Elsőfokú egyenlőtlenségek, egyenletrendszerek grafikus megoldása

## Vázlat:

I. Szakaszok a koordinátasíkon: szakasz hossza, osztópontok
II. Az egyenest meghatározó adatok
III. Az egyenes egyenletei
IV. Egyenesek párhuzamosságának és merőlegességének feltételei
V. A lineáris függvény grafikonjának és az egyenesnek kapcsolata
VI. Elsőfokú egyenlőtlenségek grafikus megoldása
VII. Elsőfokú egyenletrendszerek grafikus megoldása
VIII. Alkalmazások, matematikatörténeti vonatkozások

## Kidolgozás:

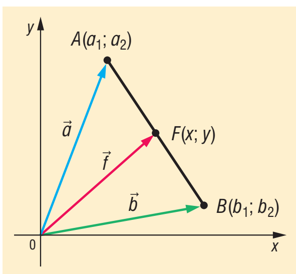
### I. Szakaszok a koordinátasíkon: szakasz hossza, osztópontok

**TÉTEL:** A síkbeli derékszögű **koordináta-rendszer**ben az $A(a_1, a_2)$ és $B(b_1, b_2)$ végpontokkal meghatározott szakasz hossza az $\overrightarrow{AB}$ hossza: $\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2}$, ami egyben az $A$ és $B$ pontok távolsága.

**Szakasz osztópontjainak koordinátái**, ahol $A(a_1, a_2)$ és $B(b_1, b_2)$:
A bizonyításokat helyvektorokkal végezzük: az $A$ pontba mutató helyvektor $\underline{a}(a_1; a_2)$, a $B$ pontba mutató helyvektor $\underline{b}(b_1; b_2)$, ...

**TÉTEL: Szakasz felezőpontjának koordinátái** $F\left(\frac{a_1 + b_1}{2}; \frac{a_2 + b_2}{2}\right)$.

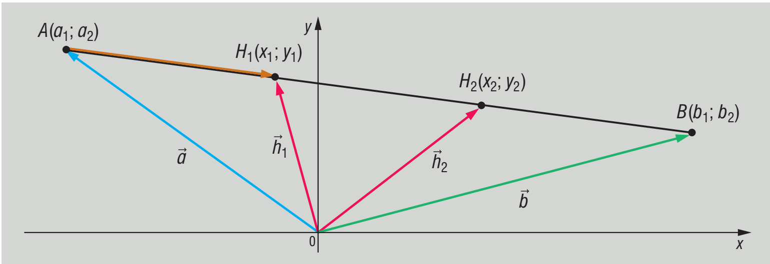
**BIZONYÍTÁS:** $\overrightarrow{AF} = \frac{\underline{b} - \underline{a}}{2} \Rightarrow \underline{f} = \underline{a} + \frac{\underline{b} - \underline{a}}{2} = \frac{\underline{a} + \underline{b}}{2}$.



**TÉTEL: Szakasz harmadolópontjainak koordinátái** $\begin{cases} H\left(\dfrac{2a_1+b_1}{3};\dfrac{2a_2+b_2}{3}\right) \\ G\left(\dfrac{a_1+2b_1}{3};\dfrac{a_2+2b_2}{3}\right) \end{cases}$.

**BIZONYÍTÁS:**

$$\left.\begin{aligned} \underline{h} &= \underline{a}+\overrightarrow{AH} = \underline{a}+\frac{\overrightarrow{AB}}{3} = \underline{a}+\frac{\underline{b}-\underline{a}}{3} = \frac{2\underline{a}+\underline{b}}{3} \\ \underline{g} &= \underline{a}+\overrightarrow{AG} = \underline{a}+\frac{2\overrightarrow{AB}}{3} = \underline{a}+\frac{2(\underline{b}-\underline{a})}{3} = \frac{\underline{a}+2\underline{b}}{3} \end{aligned}\right\}.$$




**TÉTEL:** Az $A(a_1;\, a_2)$, $B(b_1;\, b_2)$, $C(c_1;\, c_2)$ **háromszög súlypontjának koordinátái**:

$$S\left(\frac{a_1+b_1+c_1}{3};\frac{a_2+b_2+c_2}{3}\right)$$

**BIZONYÍTÁS:** A háromszög súlypontja a $C$ csúcsból kiinduló súlyvonal $C$-től távolabbi harmadolópontja, vagyis a $CF$ szakasz $C$-től távolabbi harmadolópontja.

$$\underline{s} = \frac{2\underline{f}+\underline{c}}{3} = \frac{2\cdot\frac{\underline{a}+\underline{b}}{2}+\underline{c}}{3} = \frac{\underline{a}+\underline{b}+\underline{c}}{3}$$

## II. Egyenest meghatározó adatok

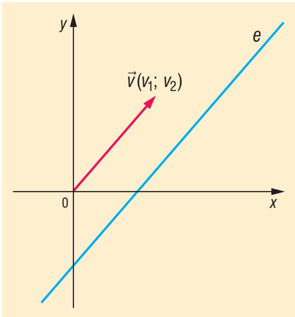
Egy egyenest a síkban egyértelműen meghatározhatunk 2 pontja, vagy egy pontja és egy, az állását jellemző adata segítségével. Ilyen, az egyenes állását jellemző adat: az egyenes irányvektora, normálvektora, irányszöge, iránytangense.

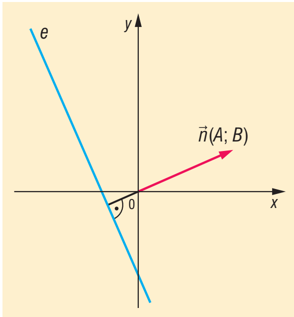
**DEFINÍCIÓ:** Az **egyenes irányvektora** bármely, az egyenessel párhuzamos, nullvektortól különböző vektor. Jele: $\underline{v}(v_1;v_2)$.

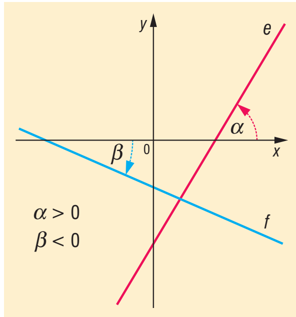
**DEFINÍCIÓ:** Az **egyenes normálvektora** bármely, az egyenesre merőleges, nullvektortól különböző vektor. Jele: $\underline{n}(A;B)$.

**DEFINÍCIÓ:** Az **egyenes irányszögé**nek nevezzük azt a $-\frac{\pi}{2}<\alpha\le\frac{\pi}{2}$ szöget, amelyet az egyenes az $x$ tengely pozitív irányával bezár.

**DEFINÍCIÓ:** Az egyenes irányszögének tangensét (amennyiben létezik) az **egyenes iránytangensé**nek (**iránytényezőjé**nek vagy **meredekségé**nek) nevezzük. Jele: $m = \operatorname{tg}\alpha$. Az $\alpha = \frac{\pi}{2} = 90°$ irányszögű, vagyis az $y$ tengellyel párhuzamos egyenesnek nincs iránytangense.




**Összefüggések az egyenes állását meghatározó adatok között:**

- ha az egyenes egy **irányvektor**a $\underline{v}(v_1; v_2)$, akkor normálvektora lehet $\underline{n}(-v_2; v_1)$ vagy $\underline{n}(v_2; -v_1)$, illetve meredeksége $m = \frac{v_2}{v_1} = \operatorname{tg}\alpha$, ebből felírható az $\alpha$ irányszög is.
- ha az egyenes egy **normálvektor**a $\underline{n}(A; B)$, akkor irányvektora lehet $\underline{v}(-B; A)$ vagy $\underline{v}(B; -A)$; illetve meredeksége $m = -\frac{A}{B}$ $(B \neq 0) = \operatorname{tg}\alpha$, ebből felírható az $\alpha$ irányszög is.
- ha az egyenes **meredekség**e $m$, akkor ebből irányszöge $\alpha = \operatorname{arctg} m$, irányvektora lehet: $\underline{v}(1; m)$, normálvektora $\underline{n}(-m; 1)$ vagy $\underline{n}(m; -1)$.
- ha az egyenes **irányszög**e $\alpha$, akkor meredeksége $m = \operatorname{tg}\alpha$. Ebből irányvektor és normálvektor is meghatározható. Ha $\alpha = 90°$, akkor $m$ nem létezik, de $\underline{v}(0; 1)$, illetve $\underline{n}(1; 0)$.

**Összefüggés az egyenes két adott pontja és az egyenes állását meghatározó adatok között:**

Ha az egyenes két különböző pontja $A(a_1; a_2)$ és $B(b_1; b_2)$, akkor $\overrightarrow{AB}$ lehet az egyenes egy irányvektora: $\underline{v}(b_1 - a_1; b_2 - a_2)$ egy normálvektora $\underline{n}(a_2 - b_2; b_1 - a_1)$ vagy $\underline{n}(b_2 - a_2; a_1 - b_1)$, meredeksége $m = \frac{b_2 - a_2}{b_1 - a_1}$; ebből felírható irányszöge is: $\alpha = \operatorname{arctg} m$.

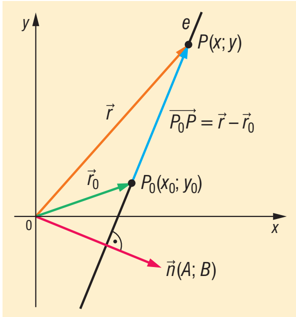
## III. Az egyenes egyenletei

**DEFINÍCIÓ:** Egy **alakzat egyenleté**n a síkbeli $xy$ koordináta-rendszerben olyan egyenletet értünk, melyet az alakzat pontjainak koordinátái kielégítenek, de más síkbeli pontok nem.

**TÉTEL:** Ha egy egyenesnek adott a $P_0(x_0; y_0)$ pontja és egy $\underline{n}(A; B)$ normálvektora, akkor az egyenes **normálvektoros egyenlete**: $Ax + By = Ax_0 + By_0$.

**BIZONYÍTÁS:** Egy $P(x; y)$ pont akkor és csak akkor van rajta az $e$ egyenesen, ha a $\overrightarrow{P_0P}$ vektor merőleges az egyenes $\underline{n}(A; B)$ normálvektorára.

Ha $P_0$ pont helyvektorát $\underline{r}_0$, a $P$ pont helyvektorát a $\underline{r}$ jelöli, akkor $\overrightarrow{P_0P} = \underline{r} - \underline{r}_0$, koordinátákkal $\overrightarrow{P_0P} = (x - x_0; y - y_0)$.




$\overrightarrow{P_0P}$ akkor és csak akkor merőleges az egyenes normálvektorára, ha skaláris szorzatuk 0, azaz $\overrightarrow{P_0P} \cdot \underline{n} = 0$, vagyis $(x - x_0) \cdot A + (y - y_0) \cdot B = 0$, rendezve $Ax + By = Ax_0 + By_0$.

**TÉTEL:** Ha egy egyenesnek adott a $P_0(x_0; y_0)$ pontja és egy $\underline{v}(v_1; v_2)$ irányvektora, akkor az egyenes **irányvektoros egyenlet**e: $v_2x - v_1y = v_2x_0 - v_1y_0$.

**BIZONYÍTÁS:** Ha $\underline{v}(v_1; v_2)$ irányvektor, akkor $\underline{n}(v_2; -v_1)$ egy normálvektor. Ezt helyettesítve $(A = v_2;\ B = -v_1)$ a normálvektoros egyenletbe, kész a bizonyítás.

**TÉTEL:** Ha adott az $y$ tengellyel nem párhuzamos egyenes egy $P_0(x_0; y_0)$ pontja és $m$ iránytangense, akkor **iránytényezős egyenlet**e $y - y_0 = m \cdot (x - x_0)$.

**BIZONYÍTÁS:** Ha $m$ iránytényező, akkor $\underline{v}(1; m)$ irányvektor, vagyis $\underline{n}(m; -1)$ normálvektor. Ezt behelyettesítve $(A = m;\ B = -1)$ a normálvektoros egyenletbe $mx - y = mx_0 - y_0 \Leftrightarrow y - y_0 = mx - mx_0 \Leftrightarrow y - y_0 = m \cdot (x - x_0)$.

**TÉTEL:** Az $y$ tengellyel párhuzamos, $P_0(x_0; y_0)$ ponton átmenő egyenes egyenlete: $x = x_0$.

**DEFINÍCIÓ: Két egyenes metszéspontja** (ha létezik) egy olyan pont, amely illeszkedik mindkét egyenesre.
A metszéspont koordinátái a két egyenes egyenletéből álló egyenletrendszer megoldásai.

**DEFINÍCIÓ: Két egyenes hajlásszöge** visszavezethető irányvektoraik vagy normálvektoraik szögére.

Két vektor szögét skaláris szorzattal számolhatjuk ki: $\cos\varphi = \frac{\underline{n}_e \cdot \underline{n}_f}{|\underline{n}_e| \cdot |\underline{n}_f|}$, vagy

$$\cos\varphi = \frac{\underline{v}_e \cdot \underline{v}_f}{|\underline{v}_e| \cdot |\underline{v}_f|}.$$

## IV. Egyenesek párhuzamosságának és merőlegességének feltételei

Legyen két egyenes $e$ és $f$, irányvektoraik $\underline{v}_e$ és $\underline{v}_f$, normálvektoraik: $\underline{n}_e$ és $\underline{n}_f$, irányszögeik $\alpha_e$ és $\alpha_f$, iránytangenseik $m_e$ és $m_f$ (ha léteznek)

- $e \parallel f \Leftrightarrow$ $\underline{v}_e \parallel \underline{v}_f$, azaz van olyan $\lambda\ (\neq 0)$ valós szám, hogy $\underline{v}_e = \lambda \cdot \underline{v}_f$, vagy
  $\underline{n}_e \parallel \underline{n}_f$, azaz van olyan $\lambda\ (\neq 0)$ valós szám, hogy $\underline{n}_e = \lambda \cdot \underline{n}_f$, vagy
  $\alpha_e = \alpha_f$, vagy
  $m_e = m_f$.

- $e \perp f \Leftrightarrow$ $\underline{v}_e \perp \underline{v}_f$, azaz $\underline{v}_e \cdot \underline{v}_f = 0$, vagy
  $\underline{n}_e \perp \underline{n}_f$, azaz $\underline{n}_e \cdot \underline{n}_f = 0$, vagy
  $\underline{n}_e = \lambda \cdot \underline{v}_f$ $(\lambda \neq 0)$, vagy
  $\underline{v}_e = \lambda \cdot \underline{n}_f$ $(\lambda \neq 0)$, vagy
  $m_e \cdot m_f = -1$.

## V. Kapcsolat a lineáris függvények grafikonja és az egyenesek között

**TÉTEL: Nem minden egyenes egy lineáris függvény képe.**

**BIZONYÍTÁS:** A fenti egyenes egyenletekből látható, hogy a koordinátasík minden egyenese $Ax + By + C = 0$ alakba írható, ahol $A$ és $B$ közül legalább az egyik nem 0.
A megfordítás is igaz, azaz minden $Ax + By + C = 0$ egyenlet, ahol $A$ és $B$ közül legalább az egyik nem 0, a koordinátasík valamelyik egyenesének egyenlete.
Ha $B \neq 0$, akkor az egyenletből kifejezhetjük $y$-t: $y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B}$, vagyis $y = ax + b$ alakú, ami a lineáris függvényt leíró képlet.
Ha $B = 0$, akkor az egyenlet $Ax + C = 0$, de ekkor $v_1 = 0$, azaz $e \parallel y \Rightarrow x = -\frac{C}{A}$, képe az $y$ tengellyel párhuzamos egyenes.
Az $y$ tengellyel párhuzamos egyenesek azonban nem lehetnek semmilyen függvénynek a grafikonjai. Az ilyen egyenesek egyenlete $x = c$, azaz konstans, vagyis egyetlen $x$ értékhez több hozzárendelt $y$ érték van, ezért ez nem lehet függvény.
Tehát nem minden egyenes lehet lineáris függvény grafikonja.

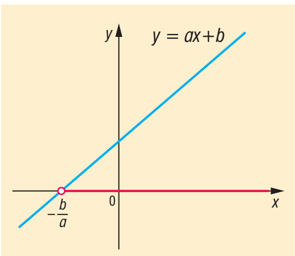
**TÉTEL: Minden lineáris függvény képe egy egyenes.**

**BIZONYÍTÁS:** A lineáris függvények $x \mapsto ax + b$ grafikonjának egyenlete $y = ax + b$. Az előbbiek alapján ez egyenes egyenlete.
Ha $a = 0$, akkor $y = b$, ez az $x$ tengellyel párhuzamos egyenes.
Ha $a \neq 0$, akkor olyan egyenes, amely sem az $x$ tengellyel, sem az $y$ tengellyel nem párhuzamos.

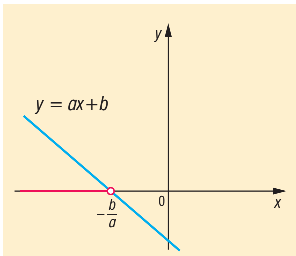
## VI. Elsőfokú egyenlőtlenségek grafikus megoldása

**DEFINÍCIÓ: Elsőfokú egyismeretlenes egyenlőtlenségek** $ax + b > 0$ $(a \neq 0)$ alakba hozhatóak.

Ha $a > 0$, akkor $x > -\frac{b}{a}$




Ha $a < 0$, akkor $x < -\frac{b}{a}$

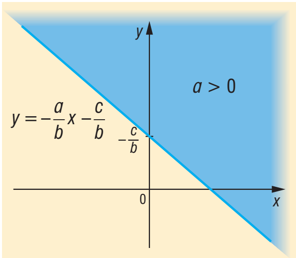



Megengedett az egyenlőség is, így természetesen a megoldásban is.

**DEFINÍCIÓ: Elsőfokú kétismeretlenes egyenlőtlenségek** $ax + by + c > 0$ $(a \neq 0)$ alakba hozhatóak.

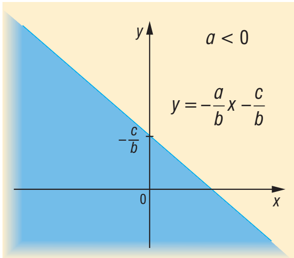
Ha $b > 0$, akkor

$y > -\dfrac{a}{b}x - \dfrac{c}{b}$




Ha $b < 0$, akkor

$y < -\dfrac{a}{b}x - \dfrac{c}{b}$



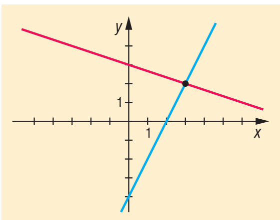

Ha $b = 0$, akkor

$ax + c > 0$. (egyismeretlenes)

## VII. Elsőfokú egyenletrendszerek grafikus megoldása

Az elsőfokú kétismeretlenes egyenletrendszer általános alakja: $\left.\begin{array}{l} ax + by = c \\ dx + ey = f \end{array}\right\}$, ahol $a$, $b$, $c$, $d$, $e$, $f$ valós számok. Mindkét egyenlet egyenes egyenlete, így ezeket az egyeneseket közös koordináta-rendszerben ábrázolva megkapjuk az egyenletrendszer megoldáshalmazát:

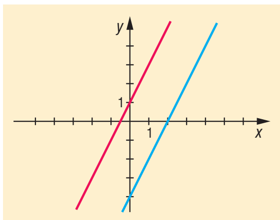
- Ha a két egyenes metszi egymást, akkor a metszéspont két koordinátája az egyenletrendszer megoldáspárja.
- Ha a két egyenes párhuzamos egymással, akkor nincs metszéspontjuk, tehát az egyenletrendszernek nincs megoldása.
- Ha a két egyenes egybeesik, azaz a két egyenlet egymásnak számszorosa, vagyis ekvivalensek, akkor végtelen sok megoldáspár van: minden olyan pont két koordinátája kielégíti az egyenletrendszert, amely illeszkedik az egyenesre.




$2x - y = 4 \iff y = 2x - 4$

$x + 3y = 9 \iff y = -\dfrac{1}{3} + 3$

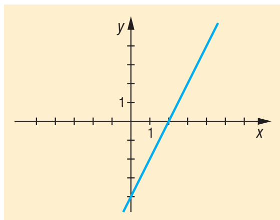
Megoldás: $x = 3$, $y = 2$




$2x - y = 4 \iff y = 2x - 4$

$6x - 3y = 3 \iff y = 2x + 1$

Nincs megoldás




$2x - y = 4 \iff y = 2x - 4$

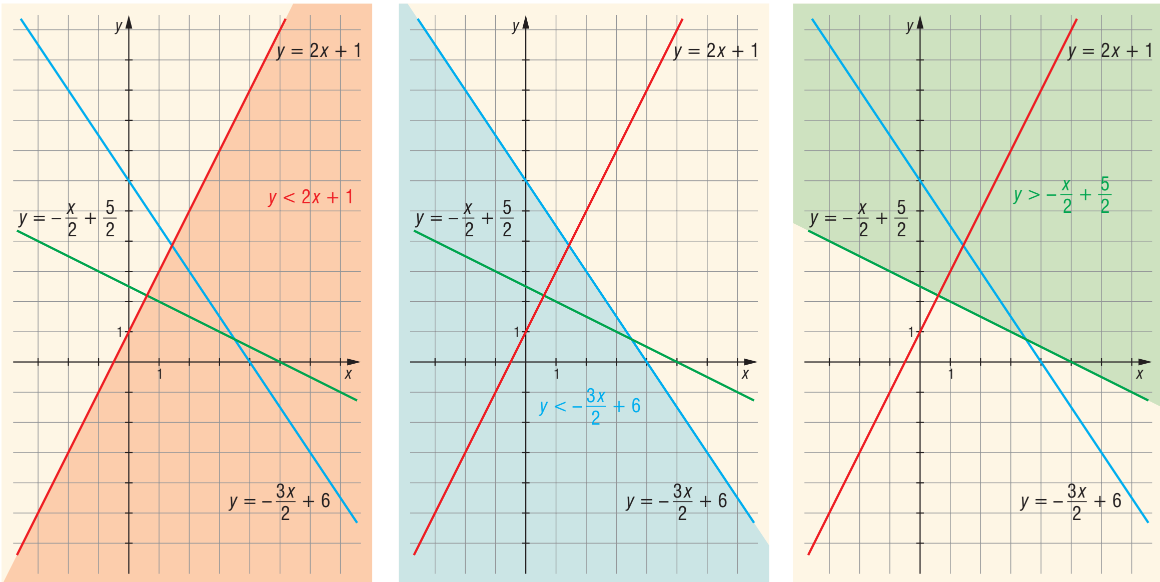
Minden $(x;\, 2x - 4)$ számpár megoldás.

# VIII. Alkalmazások:

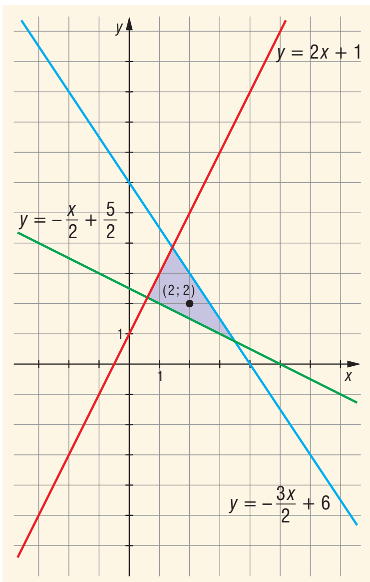
- Adott tulajdonságú ponthalmazok keresése, ha elemi módszerrel nem boldogulunk
- Kétismeretlenes egyenlőtlenségrendszer megoldása

  Pl.:

$$\left.\begin{aligned} -2x+y&<1 \\ 3x+2y&<12 \\ x+2y&>5 \end{aligned}\right\} x,y\in\mathbb{Z} \quad\Rightarrow\quad \left.\begin{aligned} y&<2x+1 \\ y&<-\frac{3}{2}x+6 \\ y&>-\frac{x}{2}+\frac{5}{2} \end{aligned}\right\} x,y\in\mathbb{Z}$$

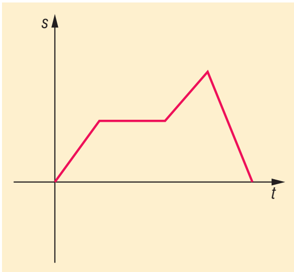



A három terület metszete:




$P(2; 2)$ az egyetlen megfelelő pont $\Rightarrow x = 2,\ y = 2$

- A lineáris programozás (egyes folyamatok leggazdaságosabb megszervezésének módszere) bizonyos lineáris egyenlőtlenség-rendszerek megoldásával és ennek feltételeivel foglalkozik
- Elemi geometriai problémák egyszerűbb megoldása. Pl.: a háromszög magasságvonalai egy pontban metszik egymást. Eddig ezt geometriai módon bizonyítottuk, koordináta-geometriai ismeretekkel beláthatjuk algebrai módszerekkel. Célszerű $A(a; 0)$, $B(b; 0)$ $C(c_1; c_2)$ helyzetbe illeszteni a háromszöget, azaz az $x$ tengelyre felvenni a háromszög két csúcspontját
- Egyenletes mozgások út-idő grafikonja mindig egyenes (szakasz); a mozgások vizsgálatakor a mozgás pályájának ismeretében információkat kaphatunk a mozgásról:




**Matematikatörténeti vonatkozások:**

- A koordináta-geometria (analitikus geometria) alapvető jellemzője, hogy geometriai problémákat, feladatokat algebrai módszerekkel, a koordináta-rendszer segítségével tárgyalja és oldja meg. A geometriának ez a megközelítése először **Apollóniusz** kúpszeletekről írt könyvében jelenik meg a Kr. e. III. században.
- **Ptolemaiosz** (Kr. e. kb. 150.) a Föld egy pontjának helyét a mai földrajzi szélességnek és hosszúságnak megfelelő adatokkal határozta meg, tehát gömbi koordinátákat használt.
- **Descartes** 1637-ben megjelent Geometria c. könyvét tekintjük az első koordináta-geometriai műnek, ebben már következetesen használja az újkori matematikai jelöléseket. Ebben a könyvében aritmetizálta az euklideszi geometriát: Descartes középpontba állítja az origót, a centrumot és a belőle sugárzó alapirányokat, azaz a vertikális és a horizontális tengelyt. A descartes-i **koordináta-rendszer**nek köszönhetően a görbék leírhatók egyenlettel.
- A koordináta szó az 1700-as évek elejétől **Leibniz** német matematikustól származik.