23. Kombinációk. Binomiális tétel, a Pascal-háromszög. A valószínűség kiszámításának kombinatorikus modellje. A hipergeometrikus eloszlás

Vázlat:

I. Kombinációk (ismétlés nélküli, ismétléses)
II. Binomiális tétel, a Pascal-háromszög
III. Események: elemi események, eseménytér, biztos, lehetetlen esemény
IV. Műveletek eseményekkel ($A + B$, $A \cdot B$, $\overline{A}$)
V. Valószínűség definíciója, műveletek valószínűsége, axiómák
VI. Hipergeometrikus eloszlás
VII. Alkalmazások, matematikatörténeti vonatkozások

Kidolgozás

I. Kombinációk (ismétlés nélküli)

A **kombinatorika**, a valószínűség-számítás és a matematikai statisztika a véletlen tömegjelenségek törvényszerűségével foglalkozik. A kombinatorika tárgyát képezik a sorba rendezési és a részhalmaz kiválasztási problémák, a kombinatorika rendszerint dolgok megszámlálásával foglalkozik.

DEFINÍCIÓ: Legyen n egymástól különböző elemünk. Ha ezekből k ($k \le n$) db-ot kiválasztunk minden lehetséges módon úgy, hogy a kiválasztott elemek sorrendjére nem vagyunk tekintettel, azaz n elem k-ad osztályú **ismétlés nélküli kombináció**ját kapjuk.

TÉTEL: Az n elem k-ad osztályú az ismétlés nélküli kombinációinak száma:

$$\frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)}{k\cdot(k-1)\cdot\ldots\cdot 2\cdot 1}=\frac{n!}{k!\cdot(n-k)!}=\binom{n}{k}.$$

BIZONYÍTÁS: A kiválasztást úgy képzelhetjük el, mintha először sorba állítanánk a k db kiválasztott elemet. Az első helyre n db-ból, a második helyre $(n-1)$ db-ból, a k-adik helyre már csak a megmaradt $(n-k+1)$ db-ból választhatunk, ezzel a lehetőségek száma $n \cdot (n-1) \cdot$ $\cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)$. Majd a sorrendek számát a k elem összes sorrendjével, $k!$-ral osztjuk, hiszen a sorrend nem számít.

$$\frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)}{k!}=$$
$$=\frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)\cdot(n-k)\cdot(n-k-1)\cdot\ldots\cdot 2\cdot 1}{k!\cdot(n-k)\cdot(n-k-1)\cdot\ldots\cdot 2\cdot 1}=\frac{n!}{k!\cdot(n-k)!}$$

Erre pedig bevezetjük az $\binom{n}{k}$ szimbólumot.

DEFINÍCIÓ: Ha n különböző elemből kell k elemet kiválasztani úgy, hogy a kiválasztás sorrendje nem számít és a már kiválasztott elemeket újra kiválaszthatjuk, akkor az n elem k-ad osztályú **ismétléses kombináció**ját kapjuk.

TÉTEL: Az n elem k-ad osztályú ismétléses kombinációjának száma: $\binom{n+k-1}{k}$.

II. Binomiális tétel

TÉTEL: $(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n b^0 + \binom{n}{1}a^{n-1}b^1 + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + ... + \binom{n}{n-1}a^1 b^{n-1} + \binom{n}{n}a^0 b^n$.

A tételben szereplő $\binom{n}{k}$ együtthatókat binomiális együtthatóknak nevezzük.

BIZONYÍTÁS: $(a + b)^n = (a + b)(a + b)(a + b)...(a + b)$.

Bontsuk fel a jobb oldalon álló n darab zárójelet: mindegyik összegből ki kell választani az egyik tagot, ezeket a tagokat össze kell szorozni, majd a kapott szorzatokat össze kell adni. Mindegyik kapott szorzat n tényezőből áll, mindegyikben szerepel a és b, mégpedig $a^{n-k} \cdot b^k$ alakban, mert a zárójelből vagy a-t, vagy b-t választunk, a-ból $n-k$ darabot, b-ből k darabot.

$\binom{n}{k}$-féleképpen lehet az n darab tényezőből azt a k darabot kiválasztani, amelyikből a b szorzótényezőt vesszük. Tehát az $a^{n-k} \cdot b^k$ tagból $\binom{n}{k}$ darab van, tehát ez a tag együtthatója.

Így a szorzat a tételbeli alakba írható.

A binomiális együtthatók tulajdonságai:

- 0! a definíció szerint 1, ezért $\binom{n}{n} = 1$ és $\binom{n}{0} = 1$.
- Az n elem közül ugyanannyiféleképpen lehet k elemet kiválasztani, mint $n-k$ elemet otthagyni, így $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$.

A binomiális tétel következménye:

Ha az összeg mindkét tagja 1, akkor

$$2^n = (1+1)^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + ... + \binom{n}{n-1} + \binom{n}{n}$$

Pascal-háromszög:

A háromszögben a sorok számozása nullával kezdődik, a páratlan és a páros sorokban a számok el vannak csúsztatva egymáshoz képest. A háromszöget a következő egyszerű módon lehet felírni: A nulladik sorban csak egy darab 1-es van. A következő sorok felírásánál a szabály a következő: az új számot úgy kapjuk meg, ha összeadjuk a felette balra és felette jobbra található két számot. Ha az összeg valamelyik tagja hiányzik (sor széle), akkor nullának kell tekinteni. Például az 1-es sor első száma 0 + 1 = 1, míg a 2-es sor középső száma 1 + 1 = 2.

Ez a meghatározás Pascal képletén alapul, amely szerint az n-edik sor k-adik eleme a következő képlettel számolható: $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$ bármely nem negatív egész n és bármely 0 és n közötti k egész esetében.

A Pascal-háromszög szimmetriája miatt is látható, hogy $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$.

A meghatározásból látszik, hogy az n-edik sorban a kéttagú összeg n-edik hatványának együtthatói, azaz a binomiális együtthatók állnak.

$(a+b)^0 = 1$	1	$\binom{0}{0}$
$(a+b)^1 = 1 \cdot a + 1 \cdot b$	$1 \quad 1$	$\binom{1}{0} \quad \binom{1}{1}$
$(a+b)^2 = 1 \cdot a^2 + 2 \cdot ab + 1 \cdot b^2$	$1 \quad 2 \quad 1$	$\binom{2}{0} \quad \binom{2}{1} \quad \binom{2}{2}$
$(a+b)^3 = 1 \cdot a^3 + 3 \cdot a^2b + 3 \cdot ab^2 + 1 \cdot b^3$	$1 \quad 3 \quad 3 \quad 1$	$\binom{3}{0} \quad \binom{3}{1} \quad \binom{3}{2} \quad \binom{3}{3}$
$(a+b)^4 = 1 \cdot a^4 + 4 \cdot a^3b + 6 \cdot a^2b^2 + 4 \cdot ab^3 + 1 \cdot b^4$	$1 \quad 4 \quad 6 \quad 4 \quad 1$	$\binom{4}{0} \quad \binom{4}{1} \quad \binom{4}{2} \quad \binom{4}{3} \quad \binom{4}{4}$

III. Események

A valószínűség-számítás véletlen tömegjelenségek vizsgálatával foglalkozik.

DEFINÍCIÓ: Véletlen jelenségnek nevezzük azokat a jelenségeket, amelyeket a leírható körülmények nem határozzák meg egyértelműen.
Pl. egy dobókocka feldobása.

DEFINÍCIÓ: Kísérletnek nevezzük a véletlen jelenség megfigyelését.

DEFINÍCIÓ: Elemi eseménynek nevezzük a kísérlet során bekövetkező lehetséges kimeneteleket.
Pl. a kocka dobásánál azt, hogy hányas számot dobunk.

DEFINÍCIÓ: Az **eseménytér** az elemi események halmaza.
Pl. a kocka dobásánál $\{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$.

DEFINÍCIÓ: Az elemi események egy halmazát, azaz az eseménytér egy részhalmazát **esemény**nek nevezzük.
Pl. esemény a kockadobásnál páros szám dobása.
Az eseményeket nagybetűvel jelöljük. Pl. $A = \{2; 4; 6\}$

DEFINÍCIÓ: Az eseménytérhez tartozó azon esemény, amely biztosan bekövetkezik, a **biztos esemény**, amely semmiképpen sem következhet be, a **lehetetlen esemény**.
A biztos esemény jele: H, a lehetetlen esemény jele: $\varnothing$.
Pl. a kockadobásnál biztos esemény: 7-nél kisebb számot dobunk, lehetetlen esemény: 8-nál nagyobbat dobunk.

IV. Műveletek eseményekkel

DEFINÍCIÓ: Az A **esemény komplementere** az az esemény, amely akkor következik be, amikor A nem következik be. Jele: $\overline{A}$.

DEFINÍCIÓ: Az A és B **események összege** az az esemény, amely akkor következik be, amikor A vagy B bekövetkezik. Jele: $A + B$.

DEFINÍCIÓ: Az A és B **események szorzata** az az esemény, amely akkor következik be, amikor A és B bekövetkezik. Jele: $A \cdot B$.

DEFINÍCIÓ: Az A és B **események egymást kizárják**, ha egyszerre nem következhetnek be.

Az eseményekkel kapcsolatos műveletek tulajdonságai, azonosságai a halmazműveletekre megismert tételekhez hasonlóan leírhatók, illetve bizonyíthatók.

V. A valószínűség-számítás alapjai

DEFINÍCIÓ: Ha elvégzünk n-szer egy kísérletet, és ebből az A esemény k-szor következik be, akkor **az A esemény relatív gyakorisága** a $\frac{k}{n}$ hányados.

DEFINÍCIÓ: Ha sokszor elvégzünk egy kísérletet, akkor megfigyelhetjük, hogy egy A esemény relatív gyakorisága egy szám körül ingadozik. Ezt a számot nevezzük **az A esemény valószínűségé**nek. Jele: $P(A)$.

DEFINÍCIÓ: A valószínűség kiszámításának klasszikus modelljét akkor alkalmazhatjuk, ha egy kísérletnek véges sok kimenetele van és ezek valószínűsége egyenlő. Ekkor az A esemény valószínűsége: $P(A) = \dfrac{\text{kedvező elemi események száma}}{\text{összes elemi esemény száma}}$.

A valószínűség-számítás axiómái:

- Tetszőleges A esemény esetén $0 \le P(A) \le 1$.
- Biztos esemény valószínűsége 1, lehetetlen eseményé 0.
- Ha A és B egymást kizáró események, akkor $P(A + B) = P(A) + P(B)$.
- Ha A és B tetszőleges esemény, akkor $P(A + B) = P(A) + P(B) - P(A \cdot B)$.
- $P(A) + P(\overline{A}) = 1$.

DEFINÍCIÓ: Az A esemény B-re vonatkozó **feltételes valószínűsége**: $P(A \mid B) = \dfrac{P(A \cdot B)}{P(B)}$.

Ez annak a valószínűsége, hogy az A esemény bekövetkezik, feltéve, hogy a B esemény bekövetkezik.

DEFINÍCIÓ: Az A és B események **egymástól függetlenek**, ha $P(A \mid B) = P(A)$.
Ekkor $P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B)$.

DEFINÍCIÓ: Ha egy esemény előfordulását geometriai alakzat (vonal, síkidom, test) mértékével jellemezzük, és az esemény bekövetkezésének valószínűségét ezek hányadosával fejezzük ki, akkor **geometriai valószínűség**ről beszélünk.

VI. Diszkrét eloszlások

A kísérletek kimenetelei általában számokkal jellemezhetők. Ezekre a mennyiségekre jellemző, hogy értékük a véletlentől függ, és mindegyikük egy-egy eseményhez van hozzárendelve.

DEFINÍCIÓ: A **valószínűségi változó** az eseménytéren értelmezett valós értékű függvény. Jele: ξ.

DEFINÍCIÓ: Ha a valószínűségi változó lehetséges értékeinek száma véges vagy megszámlálhatóan végtelen, akkor **diszkrét valószínűségi változó**ról beszélünk.

DEFINÍCIÓ: A visszatevés nélküli mintavétel eloszlását **hipergeometrikus eloszlás**nak nevezzük.

TÉTEL: Hipergeometrikus eloszlásnál legyen N db elemünk, amelyből M db elem rendelkezik egy adott A tulajdonsággal, $N - M$ db pedig nem. Kiválasztunk véletlenszerűen visszatevés nélkül n db-ot. Annak a valószínűsége, hogy a kihúzott n db elem közül k db rendelkezik az A tulajdonsággal:

$$P(\xi = k) = \frac{\binom{M}{k} \cdot \binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}}, \text{ ahol } k \le n.$$

BIZONYÍTÁS: A kérdés az, hogy mennyi a valószínűsége annak, hogy a kihúzott n db elem között k db A tulajdonságú elem van.

A kombinatorikában tanultak szerint a kedvező esetek száma $\binom{M}{k}\cdot\binom{N-M}{n-k}$, mert M db-ból kell k db-ot kiválasztani, amit $\binom{M}{k}$-féleképpen tehetünk meg, és a maradék $N-M$ db-ból $n-k$ db-ot kell kiválasztanunk, amit $\binom{N-M}{n-k}$-féleképpen tehetünk meg.

Az összes esetek száma: $\binom{N}{n}$, mert N db-ból kell n db-ot választani.

Ezt felhasználva kapjuk: $P(\xi=k)=\dfrac{\binom{M}{k}\cdot\binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}}$.

TÉTEL: A hipergeometrikus eloszlásnál az A tulajdonságú elemek számának várható értéke:

$$M(\xi)=n\cdot p=n\cdot\frac{M}{N}$$

VII. Alkalmazások

Kiválasztási problémák:
- Hányféleképpen lehet kitölteni egy lottószelvényt?
- Egy n elemű halmaznak hány darab k elemű részhalmaza van?

Binomiális együtthatók, Pascal-háromszög:
- A **Galton**-deszka egy olyan egyenlő szárú háromszög alakú szerkezet, amelyben úgy vannak elhelyezve akadályok és útvonalak, hogy minden akadálynál egyenlő eséllyel (0,5) térhet el jobba, illetve balra a lefele guruló golyó. A golyó a Galton-deszka egyes rekeszeibe a Pascal-háromszögben szereplő binomiális együtthatók alapján érkezik.

Klasszikus valószínűségi modell:
- Szerencsejátékoknál nyerési esély megállapítása
- Mekkora a valószínűsége annak, hogy az ötös lottón, a hatos lottón telitalálatos szelvényünk lesz?

Matematikatörténeti vonatkozások:
- A Pascal-háromszöghöz hasonló háromszöget alkotott **Csu Si-csie** a XII. századi Kínában, hasonló háromszögeket készítettek indiai, perzsa, itáliai matematikusok.
- **Pascal** (1623–1662) francia matematikus a binomiális együtthatókat tanulmányozva módszert adott a kiszámításukra és megalkotta Pascal-háromszöget.
- Először **Leibniz** (1646–1716) német matematikus rendszerezte a kombinatorikai ismereteket.
- **Bernoulli** (1654–1705) svájci matematikus alkalmazta először a kombinatorikai ismereteket valószínűség kiszámítására, jelentősen hozzájárult a valószínűség-elmélet kifejlesztéséhez.