9. Függvénytani alapismeretek, függvények tulajdonságai, határérték, folytonosság. Számsorozatok. A számtani sorozat, az első *n* tag összege

Vázlat:

I. Függvény fogalma, értelmezési tartomány leszűkítés, értékkészlet
II. Függvénytulajdonságok:
- Lokális függvénytulajdonságok: zérushely, monotonitás, lokális (helyi) szélsőérték, görbület, inflexió, folytonosság
- Globális függvénytulajdonságok: értelmezési tartomány, értékkészlet, globális (abszolút) szélsőérték, paritás, periodikusság, folytonosság, korlátosság

III. Számsorozat definíciója, megadási módjai
IV. Tulajdonságai: monotonitás, korlátosság, konvergencia; kapcsolatuk
V. Számtani sorozat
VI. Alkalmazások, matematikatörténeti vonatkozások

Kidolgozás:

I. Függvény fogalma, értelmezési tartomány, értékkészlet

DEFINÍCIÓ: Legyen A és B két nem üres halmaz. Azt mondjuk, hogy megadunk egy A halmazon értelmezett B-beli értéket felvevő **függvény**t, ha A minden eleméhez hozzárendeljük a B egy és csakis egy elemét. Jele: $f\colon A \to B$.

DEFINÍCIÓ: **Értelmezési tartomány**nak nevezzük az A halmazt. Jele D_f.
Ha az értelmezési tartomány egy valódi részhalmazán vizsgáljuk a függvényt, akkor a függvény **leszűkítés**éről beszélünk.
Ha olyan halmazon vizsgáljuk a függvényt, amelynek valódi részhalmaza az A halmaz, de a hozzárendelés képezhető, akkor a függvény **kiterjesztés**éről beszélünk.

DEFINÍCIÓ: **Értékkészlet** a B halmaz azon elemeiből álló halmaz, amelyek a hozzárendelésnél fellépnek (vagyis az $f(x)$ értékek). Jele az R_f.

DEFINÍCIÓ: Ha $c \in D_f$, akkor a c helyen felvett függvényértéket $f(c)$-vel jelöljük, ez a helyettesítési vagy **függvényérték**.

DEFINÍCIÓ: Ha az értelmezési tartomány és az értékkészlet is számhalmaz, akkor a függvényt grafikonon tudjuk szemléltetni. A **grafikon** az $(x; f(x))$ pontok halmaza.

II. Függvénytulajdonságok

Lokális függvénytulajdonságok: zérushely, monotonitás, lokális (helyi) szélsőérték, görbület, inflexió, pontbeli folytonosság.

DEFINÍCIÓ: **zérushely**: Az értelmezési tartomány azon x_0 eleme, ahol a függvény értéke 0, azaz $f(x_0) = 0$.

DEFINÍCIÓ: **monotonitás**: Az f függvény az értelmezési tartományának egy intervallumában monoton **nő**, ha az intervallum minden olyan x_1, x_2 helyén, amelyre $x_1 < x_2$, akkor $f(x_1) \le f(x_2)$ teljesül.

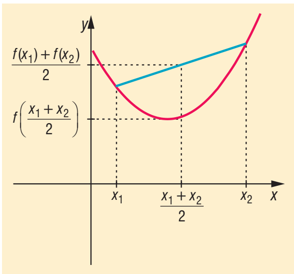
Az f függvény az értelmezési tartományának egy intervallumában monoton **csökken**, ha az intervallum minden olyan x_1, x_2 helyén, amelyre $x_1 < x_2$, akkor $f(x_1) \geq f(x_2)$ teljesül.
Ha az egyenlőtlenségben az egyenlőség nincs megengedve, akkor **szigorú monotonitás**ról beszélünk.

DEFINÍCIÓ: lokális (helyi) szélsőérték: Az f függvénynek az $x_0 \in D_f$ helyen **lokális maximum**a van, ha az x_0-nak van olyan I környezete, amelynek minden $x \in D_f$ pontjában $f(x) \leq f(x_0)$. Az x_0 helyet lokális (helyi) maximumhelynek nevezzük.

Az f függvénynek az $x_0 \in D_f$ helyen **lokális minimum**a van, ha az x_0-nak van olyan I környezete, amelynek minden $x \in D_f$ pontjában $f(x) \geq f(x_0)$. Az x_0 helyet lokális (helyi) minimumhelynek nevezzük.
A monotonitás és a szélsőérték definíciójából következik, hogy ahol a függvény monotonitást vált, ott lokális szélsőértéke van.

DEFINÍCIÓ: görbület: A függvényt egy intervallumban **konvex**nek nevezzük, ha az intervallum bármely két x_1, x_2 pontjára teljesül az $f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) \leq \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$ egyenlőtlenség.

Ha az egyenlőtlenség fordított irányú, akkor a függvény **konkáv** az adott intervallumon.
Szemléletesen a konvex (illetve konkáv) görbékre jellemző, hogy a görbe bármely két pontját összekötő szakasz a görbe felett (illetve alatt) halad.



DEFINÍCIÓ: inflexió: A függvénygörbének azt a pontját, ahol a görbe konvexből konkávba, vagy konkávból konvexbe megy át, **inflexiós pont**nak nevezzük.

DEFINÍCIÓ: pontbeli folytonosság: Az f függvény az értelmezési tartománynak egy x_0 pontjában **folytonos,** ha létezik az x_0 pontban határértéke és az megegyezik a helyettesítési értékkel, vagyis $f(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} f(x)$.

Globális függvénytulajdonságok: értelmezési tartomány, értékkészlet, globális (abszolút) szélsőérték, paritás, periodikusság, intervallumbeli folytonosság, korlátosság.

DEFINÍCIÓ: globális (abszolút) szélsőérték: Az f függvénynek az $x_0 \in D_f$ helyen **globális maximum**a van, ha minden $x \in D_f$ pontjában $f(x) < f(x_0)$. Az x_0 helyet globális maximumhelynek nevezzük.

Az f függvénynek az $x_0 \in D_f$ helyen **globális minimum**a van, ha minden $x \in D_f$ pontjában $f(x) > f(x_0)$. Az x_0 helyet globális minimumhelynek nevezzük.
Tehát a szélsőérték abszolút (globális) szélsőérték x_0-ban, ha az értelmezési tartomány minden pontjára igazak az egyenlőtlenségek.

DEFINÍCIÓ: paritás: Az f függvény **páros**, ha értelmezési tartományának minden x elemére $-x$ is eleme az értelmezési tartománynak, továbbá az értelmezési tartomány minden x elemére $f(x) = f(-x)$.

Az f függvény **páratlan**, ha értelmezési tartományának minden x elemére $-x$ is eleme az értelmezési tartománynak, továbbá az értelmezési tartomány minden x elemére $f(x) = -f(-x)$.

A páros függvénynek a grafikonja tengelyesen szimmetrikus az y tengelyre. (pl. $x \mapsto x^{2n}$, $x \mapsto |x|$, $x \mapsto \cos x$).

A páratlan függvények grafikonja középpontosan szimmetrikus az origóra. (pl. $x \mapsto x^{2n+1}$, $x \mapsto \frac{1}{x}$, $x \mapsto \sin x$, $x \mapsto \mathrm{tg} x$).

DEFINÍCIÓ: periodikusság: Az f függvény **periodikus**, ha létezik olyan $p \neq 0$ valós szám, hogy a függvény értelmezési tartományának minden x elemére $x + p$ is eleme az értelmezési tartománynak, továbbá az értelmezési tartomány minden x elemére $f(x + p) = f(x)$, a legkisebb ilyen p a függvény periódusa (pl. trigonometrikus függvények, törtrész függvény).

DEFINÍCIÓ: intervallumbeli folytonosság: Az f függvény egy nyílt intervallumban **folytonos**, ha az intervallum minden pontjában folytonos
(pl.: folytonos: $x \mapsto x^n$, $x \mapsto \log_a x$, $x \mapsto a^x$, $x \mapsto \sin x$, $x \mapsto \cos x$; nem folytonos: egészrész, $x \mapsto \frac{1}{x}$, $x \mapsto \mathrm{tg} x$, $x \mapsto \mathrm{ctg} x$).

DEFINÍCIÓ: korlátosság: Az f függvény **felülről korlátos** az értelmezési tartományának egy intervallumában, ha létezik olyan K szám, hogy az intervallum minden x pontjában $f(x) \leq K$. Egy függvény felső korlátai közül a legkisebbet a függvény **felső határ**ának (szuprémumának) nevezzük.

Az f függvény **alulról korlátos** az értelmezési tartományának egy intervallumában, ha létezik olyan k szám, hogy az intervallum minden x pontjában $f(x) \geq k$. Egy függvény alsó korlátai közül a legnagyobbat a függvény **alsó határ**ának (infimumának) nevezzük.

Korlátos egy függvény, ha alulról és felülről is korlátos.

III. Számsorozat

DEFINÍCIÓ: A **számsorozat** olyan függvény, amelynek értelmezési tartománya a pozitív egész számok halmaza, értékkészlete pedig valamilyen számhalmaz.

Az a_1, a_2, …, a_n tagokból álló sorozatot $\{a_n\}$-nel vagy (a_n)-nel jelöljük. A sorozat n-edik tagja: a_n.

Sorozatok megadása történhet:

- Függvényszerűen: $f: \mathbb{N}^+ \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2$, tagjai 1, 4, 9, 16, …
- Az n-edik általános tagot előállító formulával: $a_n = 3 \cdot 2^n$.
- Az elemeit egyértelműen meghatározó utasítással: $\{a_n\} = \{2^n$ utolsó számjegye$\}$.
- A sorozat tagjaival: 3, 6, 9, 12, 15, 18, …
- Rekurzív módon: megadjuk a sorozat első néhány tagját, valamint a képzési szabályt, amellyel a sorozat következő tagjai a megelőzőkből megkaphatók.
  Pl.: *Fibonacci sorozat:* $a_1 = 1$, $a_2 = 1$, $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$, ha $n \geq 3$. A tagok: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21… .

IV. Sorozatok tulajdonságai

DEFINÍCIÓ: Az $\{a_n\}$ sorozat **szigorúan monoton** növő, ha minden pozitív egész n-re teljesül: $a_n < a_{n+1}$.

DEFINÍCIÓ: Az $\{a_n\}$ sorozat **szigorúan monoton** csökkenő, ha minden pozitív egész n-re teljesül: $a_n > a_{n+1}$.

Ha nem a szigorú monotonitást, csak a monotonitást kérjük, akkor megengedett az egyenlőség is.

Ha egy sorozat monotonitását keressük, akkor általában nem az $a_n \lesseqgtr a_{n+1}$ kapcsolatot vizsgáljuk, hanem vagy $a_{n+1} - a_n \lesseqgtr 0$, vagy $\frac{a_{n+1}}{a_n} \lesseqgtr 1$. Ha a sorozat szigorúan monoton növő, akkor $a_{n+1} - a_n > 0$, illetve $\frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$, ha a sorozat szigorúan monoton csökkenő, akkor $a_{n+1} - a_n < 0$, illetve $\frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$. Ha bármelyik esetben a reláció mellett az egyenlőség is teljesül, akkor a sorozat csak monoton. Többnyire a feladat típusa dönti el, hogy melyik módszerrel vizsgáljuk a sorozat monotonitását. Magasabb kitevőjű vagy faktoriálist tartalmazó összefüggések esetén célszerű a hányadossal való vizsgálat, gyakrabban használjuk a különbséggel való számolást.

DEFINÍCIÓ: Egy $\{a_n\}$ sorozatnak K felső korlátja, ha $a_n \le K$ minden pozitív egész n-re teljesül. Ilyenkor a sorozatot **felülről korlátos**nak nevezzük.

DEFINÍCIÓ: Egy $\{a_n\}$ sorozatnak k alsó korlátja, ha $a_n \ge k$ minden pozitív egész n-re teljesül. Ilyenkor a sorozatot **alulról korlátos**nak nevezzük.

DEFINÍCIÓ: Egy sorozat **korlátos**, ha alulról és felülről is korlátos.

DEFINÍCIÓ: A felülről korlátos sorozat legkisebb felső korlátját a sorozat **felső határ**ának, alulról korlátos sorozat legnagyobb alsó korlátját a sorozat **alsó határ**ának nevezzük.

TÉTEL: Felülről korlátos sorozatnak van felső határa, alulról korlátos sorozatnak van alsó határa.

TÉTEL: Végtelen sok egymásba skatulyázott, zárt intervallumnak van közös pontja. Ha az intervallumok hossza minden pozitív számnál kisebbé válik, akkor pontosan egy közös pont van.

DEFINÍCIÓ: Az $\{a_n\}$ sorozat **konvergens** és **határértéke** az A szám, ha minden pozitív ε számhoz létezik olyan N pozitív egész, hogy a sorozat a_N utáni tagjai mind az A szám ε sugarú környezetébe esnek, vagyis minden pozitív ε számhoz létezik olyan N pozitív egész, hogy minden $n > N$ esetén $|a_n - A| < \varepsilon$. Jelölése: $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = A$, vagy $a_n \to A$.

Ez szemléletesen azt jelenti, hogy bármilyen kis pozitív ε-ra a sorozatnak csak véges sok tagja esik az $]A - \varepsilon, A + \varepsilon[$ intervallumon kívülre.

DEFINÍCIÓ: Az olyan sorozatokat, amelyeknek nincs határértéke, **divergens** sorozatoknak nevezzük.

TÉTEL: A konvergens sorozatok tulajdonságai:
- Konvergens sorozatnak csak egy határértéke van.
- Ha egy sorozat konvergens, akkor korlátos.
- Ha egy sorozat monoton és korlátos, akkor konvergens. A sorozat határértéke monoton növekedés esetében a sorozat felső, monoton csökkenés esetében a sorozat alsó határa.
- Ha minden $n \in \mathbb{N}^+$-ra $a_n \le b_n \le c_n$ és $a_n \to A$, $c_n \to A$, akkor $b_n \to A$. Ez a rendőrelv.

V. Számtani sorozat

DEFINÍCIÓ: Azt a számsorozatot, amelyben a második tagtól kezdve bármely tag és a közvetlenül előtte álló tag különbsége állandó, **számtani sorozat**nak nevezzük. Ez a különbség a **differencia**, jele d.

Ha egy számtani sorozatnál
- $d > 0$, akkor a sorozat szigorúan monoton növő, és alulról korlátos.
- $d = 0$, akkor a sorozat konstans.
- $d < 0$, akkor a sorozat szigorúan monoton csökkenő, és felülről korlátos.

TÉTEL: Ha egy **számtani sorozat** első tagja a_1, differenciája d, akkor ***n*-edik tagja** $a_n = a_1 + (n-1)d$.

BIZONYÍTÁS: teljes indukcióval.

Definíció szerint $a_2 - a_1 = d \Leftrightarrow a_2 = a_1 + d$.

Tegyük fel, hogy a k-adik elemre igaz az állítás, azaz $a_k = a_1 + (k-1)d$.

Bizonyítani kell, hogy a $(k+1)$-edik elemre öröklődik, azaz $a_{k+1} = a_1 + ((k+1)-1)d = a_1 + kd$.

A definíció szerint $a_{k+1} - a_k = d \Leftrightarrow a_{k+1} = a_k + d = a_1 + (k-1)d + d = a_1 + kd$. Így bebizonyítottuk az öröklődést, tehát igaz az állítás.

TÉTEL: A **számtani sorozat első *n* tagjának összege** (S_n) az első és az n-edik tag számtani közepének n-szeresével egyenlő: $S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$.

BIZONYÍTÁS: az összeget felírjuk az 1., aztán az n-edik tagtól kiindulva:

$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{n-2} + a_{n-1} + a_n$

$S_n = a_n + a_{n-1} + a_{n-2} + \ldots + a_3 + a_2 + a_1$

$S_n = a_1 + (a_1 + d) + (a_1 + 2d) + \ldots + (a_1 + (n-3)d) + (a_1 + (n-2)d) + (a_1 + (n-1)d)$

$S_n = a_n + (a_n - d) + (a_n - 2d) + \ldots + (a_n - (n-3)d) + (a_n - (n-2)d) + (a_n - (n-1)d)$

Összeadva: $2S_n = \underbrace{(a_1 + a_n) + (a_1 + a_n) + \ldots + (a_1 + a_n)}_{n}$.

$$2S_n = (a_1 + a_n) \cdot n$$

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$$

Ezzel a tételt bizonyítottuk.

TÉTEL: S_n másik alakja: $S_n = \frac{2a_1 + (n-1)d}{2} \cdot n$.

TÉTEL: Tetszőleges elem a tőle szimmetrikusan elhelyezkedőknek a számtani közepe: $a_n = \frac{a_{n-k} + a_{n+k}}{2}$.

Számtani sorozat konvergenciája: Csak $d = 0$ esetén konvergens a számtani sorozat.

VI. Alkalmazások:

- A Fibonacci-sorozat elemeivel sok helyen találkozhatunk a természetben. Például a fenyőtoboz, az ananász pikkelyei, a napraforgó magjai Fibonacci-spirálban helyezkednek el.
- Speciális sorozatok határértéke:

– $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$

– $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$, ami a természetes alapú logaritmus alapszáma (Euler típusú sorozat).

– Következmény: $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \frac{\alpha}{n}\right)^n = e^\alpha$

– $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = \begin{cases} 0, & \text{ha } |q| < 1 \\ \infty, & \text{ha } q > 1 \\ \text{nem létezik}, & \text{ha } q \le -1 \\ 1, & \text{ha } q = 1 \end{cases}$. Ez a mértani sorozat.

- Analízis: függvény határértékénél, folytonosságánál
- Irracionális kitevőjű hatvány fogalma sorozat határértékével

Matematikatörténeti vonatkozások:

- **Babilóniában** a Kr. e. VI–III. század között már ismerték a számtani haladvány összegképletének megfelelő eljárást. Utasítást adtak az első n négyzetszám összegének a kiszámítására.
- A **pitagoreusok** (Pitagorasz tanítványai) Kr. e. 5–600 körül tudták a számtani sorozat tagjait összegezni, ismerték az első n páratlan szám összegét (24. tétel).
- A számtani sorozat összegképletére a hinduk az V–XII., a kínaiak pedig a VI–IX. század között jöttek rá.
- **Euler** (1717–1783) német matematikus vezette be a róla elnevezett sorozat határértékét e-nek.
- **Cauchy** (1789–1837) francia matematikus fektette szilárd alapokra a matematika alapvető fogalmait (mint például konvergencia, sorozat, határérték), ő definiálta ezeket a matematikában megkövetelt szabatossággal.
- A XVII. században **Descartes** (1596–1650) francia matematikus foglalkozott először a függvényekkel: bevezette a változó fogalmát, a függvényt megfeleltetésnek tekintette.