22. Területszámítás elemi úton és az integrálszámítás felhasználásával

Vázlat:

I. Területszámítás
II. Síkidomok területe: téglalap, paralelogramma, háromszög, trapéz, deltoid, négyszögek, sokszögek, kör
III. Határozott integrál
IV. Görbe alatti terület
V. Alkalmazások, matematikatörténeti vonatkozások

Kidolgozás

I. Területszámítás

A **mérés** egy egységnyinek tekintett értékkel való összehasonlítást jelent. Ahhoz, hogy mérni tudjunk, rögzíteni kell a mérés szabályait.

DEFINÍCIÓ: A **terület** mérése azt jelenti, hogy minden síkidomhoz hozzárendelünk egy pozitív valós számot, amelyet a síkidom területének nevezünk. Ez a hozzárendelés az alábbi tulajdonságokkal rendelkezik:
- Az egységnyi oldalhosszúságú négyzet területe egységnyi.
- Egybevágó sokszögek területe egyenlő.
- Ha egy sokszöget véges számú sokszögre darabolunk, akkor az egyes részek területének összege egyenlő az eredeti sokszög területével.

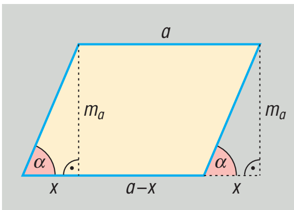
II. Síkidomok területe

Bebizonyítható, hogy ilyen területértelmezés mellett igazak a következő állítások:

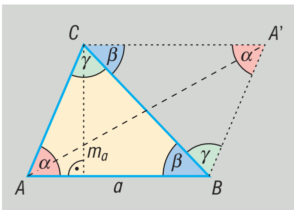
TÉTEL: A **téglalap területe** két szomszédos oldalának szorzatával egyenlő. $t = a \cdot b$.

Minden paralelogramma átdarabolható téglalappá, így

TÉTEL: a **paralelogramma területe**: $t = a \cdot m_a$.



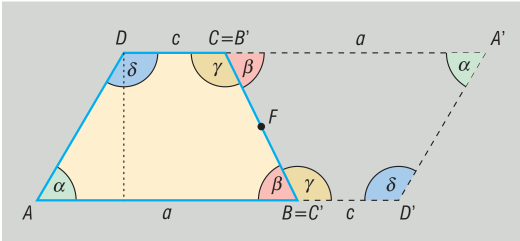
Minden háromszöget valamely oldalának felezőpontjára tükrözve az eredeti háromszög és (az eredetivel egybevágó) képe együtt egy paralelogrammát alkot, így a paralelogramma területének a fele



TÉTEL: a **háromszög területe**: $t = \dfrac{a \cdot m_a}{2}$.

Tükrözve bármely trapézt az egyik szárának felezőpontjára olyan paralelogrammát kapunk, amelynek területe kétszerese a trapéz területének.

TÉTEL: A **trapéz területe** az alapok számtani közepének és a trapéz magasságának szorzata: $t = \dfrac{a+c}{2} \cdot m$.

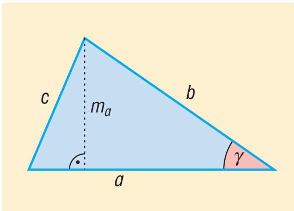


Minden sokszög véges számú háromszögre darabolható, így

TÉTEL: a **sokszög területe** egyenlő ezeknek a háromszögeknek a területösszegével.

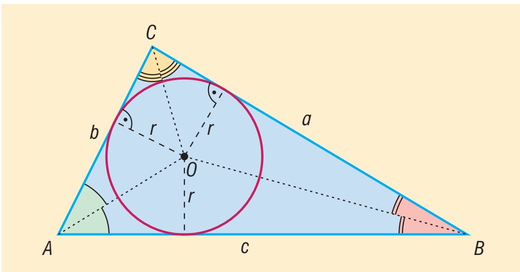
TÉTEL: Háromszög területei: $t = \dfrac{a \cdot m_a}{2} = \dfrac{a \cdot b \cdot \sin\gamma}{2} = r \cdot s = \dfrac{a \cdot b \cdot c}{4R} = \sqrt{s \cdot (s-a) \cdot (s-b) \cdot (s-c)}$

ahol r a beírt kör sugara, R a körülírt kör sugara, s a félkerület.



TÉTEL: $t = r \cdot s$.

BIZONYÍTÁS: A háromszög beírt körének középpontja a szögfelezők metszéspontja.

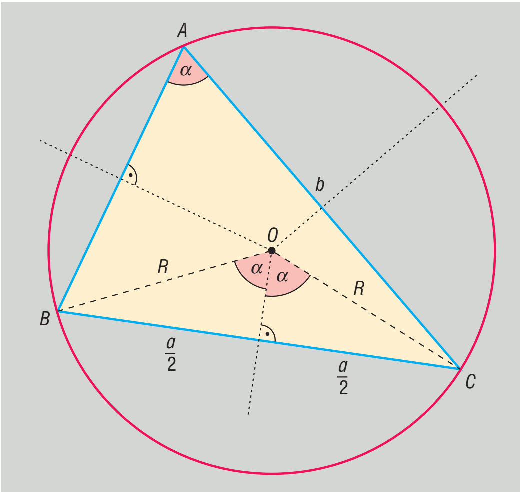


Berajzoljuk a szögfelezőket, így ABC háromszöget felbontjuk három háromszögre: az ABO, BCO és CAO háromszögekre, mindhárom háromszögben az egyik oldalhoz tartozó magasság r. Így felírható az eredeti háromszög területe a részháromszögek területének összegével.

$$t_{ABC\triangle} = t_{ABO\triangle} + t_{BCO\triangle} + t_{CAO\triangle} = \frac{c \cdot r}{2} + \frac{a \cdot r}{2} + \frac{b \cdot r}{2} = r \cdot \frac{a+b+c}{2} = r \cdot s .$$

TÉTEL: $t = \dfrac{a \cdot b \cdot c}{4R}$.

BIZONYÍTÁS: A háromszög körülírt körének középpontja az oldalfelező merőlegesek metszéspontja.



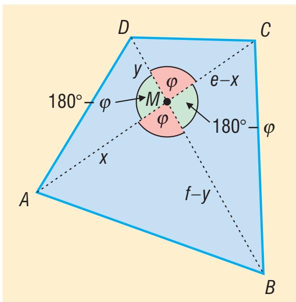
Ha CAB kerületi szög α, akkor COB középponti szög 2α (ugyanahhoz az ívhez tartoznak).

COB egyenlő szárú háromszög $\Rightarrow \sin\alpha = \dfrac{\frac{a}{2}}{R} = \dfrac{a}{2R}$.

$$t = \frac{b \cdot c \cdot \sin\alpha}{2} = \frac{b \cdot c \cdot \frac{a}{2R}}{2} = \frac{a \cdot b \cdot c}{4R}.$$

TÉTEL: Négyszög területe: az átlói hossza és az átlók által bezárt szög szinuszának a szorzatának fele: $t = \dfrac{e \cdot f \cdot \sin\varphi}{2}$.

BIZONYÍTÁS: Az $ABCD$ konvex négyszög, átlóinak metszéspontja M. M az átlókat x, $e-x$, illetve y, $f-y$ részekre osztja. A két átló 4 db háromszögre osztja a négyszöget, így a négyszög területe egyenlő a négy háromszög területének összegével:



$$t_{ABCD} = t_{ABM\triangle} + t_{BCM\triangle} + t_{CDM\triangle} + t_{DAM\triangle}$$

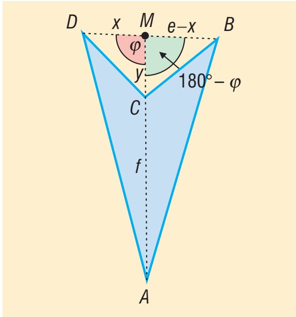
$$t = \frac{x \cdot (f-y) \cdot \sin\varphi}{2} + \frac{(e-x) \cdot (f-y) \cdot \sin(180^\circ - \varphi)}{2} + \frac{(e-x) \cdot y \cdot \sin\varphi}{2} + \frac{y \cdot x \cdot \sin(180^\circ - \varphi)}{2}$$

$\sin(180^\circ - \varphi) = \sin\varphi$, mert $0^\circ < \varphi < 180^\circ$, ekkor $\dfrac{\sin\varphi}{2}$-t kiemelve:

$$t = \frac{\sin\varphi}{2} \cdot \left[x \cdot (f-y) + (e-x) \cdot (f-y) + (e-x) \cdot y + y \cdot x\right] = \frac{\sin\varphi}{2} \cdot \left[(f-y) \cdot e + y \cdot e\right] =$$

$$= \frac{\sin\varphi}{2} \cdot [f - y + y] \cdot e = \frac{\sin\varphi}{2} \cdot f \cdot e = \frac{e \cdot f \cdot \sin\varphi}{2}.$$

ABCD konkáv négyszög, átlóinak metszéspontja M a virtuális átlót x, $e-x$ részekre osztja, míg a valódi átló: $CA = AM - CM$.



Az *ABD* háromszög területe egyenlő az *ABCD* négyszög területének és a *BCD* háromszög területének összegével, így

$$t_{ABCD} = t_{ABD\triangle} - t_{BCD\triangle} = t_{ABM\triangle} + t_{AMD\triangle} - t_{CBM\triangle} - t_{CMD\triangle}.$$

TÉTEL: A deltoid területe az átlói szorzatának a fele.

TÉTEL: Szabályos sokszög területét úgy kapjuk, hogy középpontjukat összekötjük a csúcsokkal és így n db egyenlő szárú háromszögre bontjuk a sokszöget:

$$t = n \cdot \frac{a \cdot r}{2} = n \cdot \frac{R^2 \cdot \sin\frac{360^\circ}{n}}{2},$$

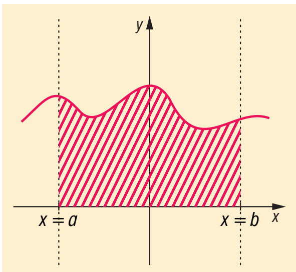
ahol r: a beírt kör sugara, R: a körülírt kör sugara.

TÉTEL: Az r sugarú kör területe: $r^2\pi$ (sorozatok határértékével)

III. Határozott integrál

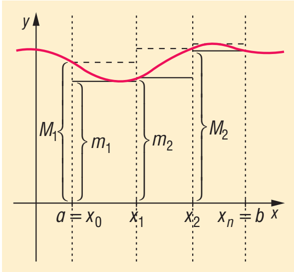
A határozott integrál segítségével függvénygörbe vonalával határolt síkidomok területét is meg tudjuk határozni. Ehhez először a **görbe alatti terület**et kell vizsgálnunk.

DEFINÍCIÓ: Görbe alatti területnek nevezzük egy $[a; b]$ intervallumon folytonos, korlátos, pozitív értékű f függvény görbéjének az intervallumhoz tartozó íve, az $x = a$, az $x = b$ egyenesek és az x tengely által határolt területet.



DEFINÍCIÓ: A görbe alatti területet téglalapok egyesítésével létrejött sokszögekkel közelítjük. Ehhez az $[a; b]$ intervallumot az $a = x_0, x_1, x_2, \dots x_n = b$ pontokkal n részre osztjuk. Ezt az intervallum egy **felosztás**ának nevezzük.

Tekintsük ennek a felosztásnak egy intervallumát: $[x_{i-1}; x_i]$. Jelölje m_i az f függvénynek ebben az intervallumban felvett értékeinek **alsó határ**át (az alsó korlátok közt a legnagyobb), M_i pedig a **felső határ**át (a felső korlátok közt a legkisebb). Bizonyítható, hogy korlátos függvényeknél ezek az értékek léteznek.



Az $[x_{i-1}; x_i]$ intervallum fölé szerkesszünk olyan téglalapokat, amelyeknek másik oldala m_i, illetve M_i. Végezzük el a szerkesztést a felosztás minden intervallumában és egyesítsük a kisebb téglalapokat és a nagyobb téglalapokat külön két sokszögbe. Ekkor a vizsgált tartomány egy **beírt**, illetve egy **körülírt sokszög**ét kapjuk. Ezeknek a sokszögeknek a területét vizsgáljuk.
A beírt sokszög területe az **alsó közelítő összeg**:

$$s_n = m_1(x_1 - x_0) + m_2(x_2 - x_1) + \ldots + m_n(x_n - x_{n-1}).$$

A körülírt sokszög területe a **felső közelítő összeg**:

$$S_n = M_1(x_1 - x_0) + M_2(x_2 - x_1) + \ldots + M_n(x_n - x_{n-1}).$$

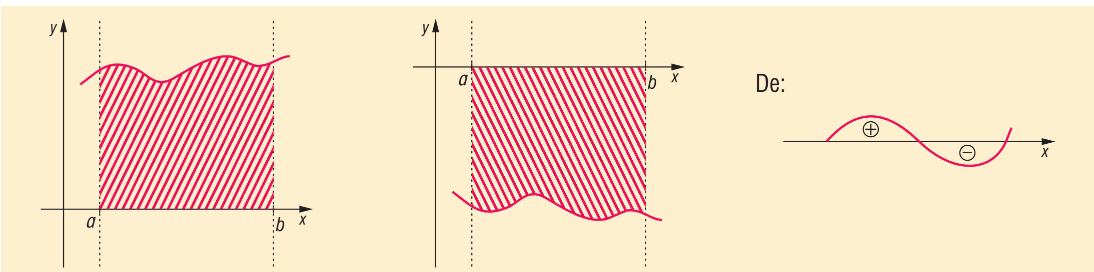
További osztópontokat véve a meglévőkhöz a felosztást finomítjuk, akkor s_n általában nő, S_n általában csökken, és ekkor a leghosszabb részintervallumok hossza is 0-hoz tart.
Így végtelen sok alsó és felső összeg keletkezik. Belátható, hogy bármely alsó összeg nem lehet nagyobb bármely felső összegnél.

DEFINÍCIÓ: Az $[a; b]$ intervallumon korlátos, f függvény integrálható, ha bármely, minden határon túl finomodó felosztássorozatához tartozó alsó és felső összegei sorozatának közös határértéke van, azaz $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = \lim\limits_{n\to\infty} S_n$. Ezt a közös határértéket nevezzük az f függvény $[a; b]$ intervallumon vett **határozott integrál**jának. Jelölés: $\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

IV. Görbe alatti terület

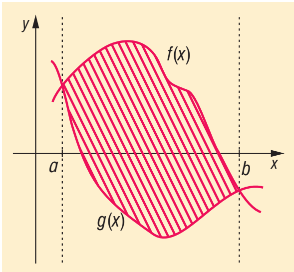
Így tehát nemnegatív, integrálható függvények határozott integrálja megadja a **függvény alatti terület**et.
Az integrál területszámítási alkalmazásánál figyelembe kell venni, hogy az x tengely alatti terület negatív előjellel adódik.

TÉTEL: Ha az $[a; b]$-on folytonos f függvény nem vált előjelet, akkor $x = a$, $x = b$, és **az x tengely és a függvény grafikonja által közrezárt síkidom területe**: $t = \left|\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right|$.



TÉTEL: Két függvény által közrezárt síkidom területe:

$$t = \int_a^b (f(x) - g(x))\,\mathrm{d}x \quad (\text{ha } f(x) > g(x))$$



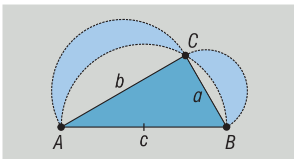
Ilyenkor általában a két függvény metszéspontját kell először meghatározni. Majd a két függvény különbségét kell integrálni, a legvégén pedig a Newton-Leibniz formulával kiszámolni a határozott integrál értékét.

V. Alkalmazások:

- Pitagorasz-tétel bizonyítása terület-összerakással
- Geometriai valószínűségek kiszámításakor szükség van geometriai alakzatok területének meghatározására
- Kör területe
- Síkidomokkal, illetve síkba kiteríthető felületekkel határolt testek felszínének meghatározása (hasáb, henger, kúp, gúla, csonka kúp, csonka gúla)

Matematikatörténeti vonatkozások:

- Síkidomok területével már az ókorban is foglalkoztak: **Hippokratész** Kr. e. 450 körül egy rendszerező matematikai művet írt, melyben sokat foglalkozott különböző egyenesek és körívek által meghatározott területek kiszámításával.
- **Hippokratész** „holdacskái”: A derékszögű háromszög oldalai fölé rajzoljunk félköröket. Ekkor a két „holdacska” területének összege egyenlő a háromszög területével.



- Kb. 150 évvel később **Arkhimédész** műveiben is találunk a területszámításról említést: ő is a kimerítés módszerét használta (körülírt és beírt téglalapok területével való közelítés).
- **Riemann** (1826–1866) német matematikus fejlesztette ki a róla elnevezett integrálást. A határozott integrál definíciója pontosítva: Riemann szerint integrálható…
- **Leibniz** (1646–1716) német és **Newton** (1642–1727) angol matematikusok egymástól függetlenül felfedezték a differenciál- és integrálszámítást. A mai jelölések többnyire Leibniztől származnak: a differenciálhányados $\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)$ és az integrál $\left(\int \mathrm{d}x\right)$ jele. Ő használta először a függvény, a differenciálszámítás, az integrálszámítás elnevezéseket. Newton Leibniz előtt dolgozta ki mindkét számítást, de nem tette közzé, jelölésrendszere is bonyolultabb volt, mint Leibnizé, így az utókor a Leibniz-féle elveket fogadta el. A határozott integrál kiszámításának képletét mindkettejük munkásságának elismeréseként nevezzük Newton-Leibniz formulának.