13. Háromszögek nevezetes vonalai, pontjai és körei

Vázlat:

I. Oldalfelező merőlegesek, a háromszög köré írt kör középpontja
II. Szögfelezők, háromszögbe, illetve háromszöghöz írt kör középpontja
III. Magasságvonalak, a háromszög magasságpontja
IV. Súlyvonalak, a háromszög súlypontja
V. Középvonalak
VI. Euler-egyenes, Feuerbach-kör
VII. Alkalmazások, matematikatörténeti vonatkozások

Kidolgozás:

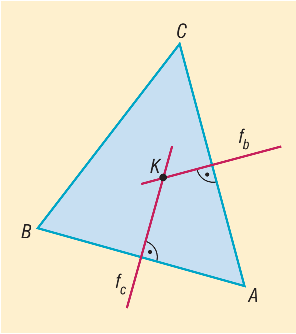
I. Oldalfelező merőlegesek, a háromszög köré írt kör középpontja

DEFINÍCIÓ: A síkon egy **szakasz felezőmerőlegese** az az egyenes, amely a szakasz felezőpontjára illeszkedik és merőleges a szakaszra.

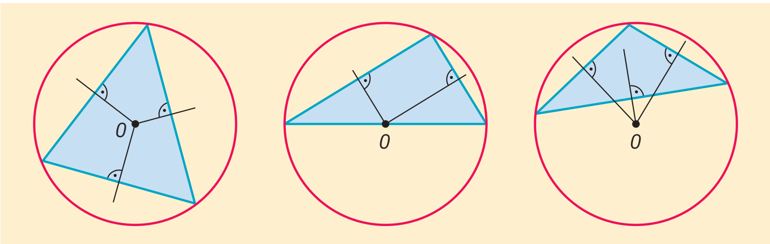
TÉTEL: A szakasz felezőmerőlegese a szakasz két végpontjától egyenlő távol lévő pontok halmaza.

TÉTEL: A háromszög három oldalfelező merőlegese egy pontban metszi egymást. Ez a pont a **háromszög köré írt kör középpont**ja.

BIZONYÍTÁS: ABC háromszögben AB és AC oldalfelező merőlegeseit tekintsük. Ezek az egyenesek metszik egymást, mert a háromszög oldalai nem párhuzamosak egymással. Legyen a két oldalfelező merőleges metszéspontja K. Ekkor K egyenlő távolságra van A-tól és B-től (mert K illeszkedik f_c-re), illetve A-tól és C-től (mert K illeszkedik f_b-re) is. Következésképpen egyenlő távol van B-től és C-től is, azaz K illeszkedik BC szakaszfelező merőlegesére. $\Rightarrow$ $KA = KB = KC$, azaz A, B és C egyenlő távolságra vannak K-tól $\Rightarrow$ mindhárom pont illeszkedik egy K középpontú $KA = KB = KC = r$ sugarú körre.



K hegyesszögű háromszög esetén a háromszögön belül, derékszögű háromszögnél az átfogó felezőpontjába (Thalész tétele), tompaszögű háromszögnél a háromszögön kívül esik.



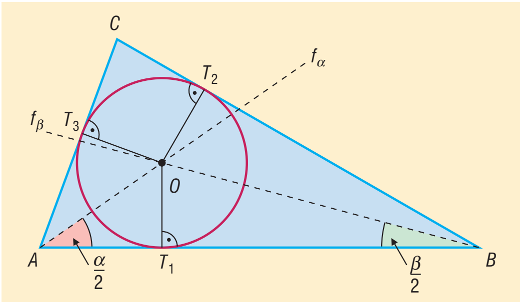
II. Szögfelezők, háromszögbe, illetve háromszöghöz írt kör középpontja

DEFINÍCIÓ: Egy konvex szög **szögfelező**je a szög csúcsából kiinduló, a szögtartományban haladó azon félegyenes, amely a szöget két egyenlő nagyságú szögre bontja.

TÉTEL: Egy konvex szögtartományban a száraktól egyenlő távolságra lévő pontok halmaza a szögfelező.

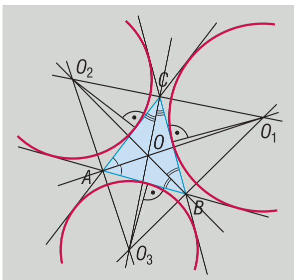
TÉTEL: A háromszög három belső szögfelezője egy pontban metszi egymást. Ez a pont a **háromszögbe írt kör középpontja**.

BIZONYÍTÁS:



Két belső szögfelező metszéspontjáról belátjuk, hogy rajta van a harmadikon. Vegyük fel az α és β szögfelezőjét: f_α és f_β. Ez a két félegyenes metszi egymást, mert $0° < \frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2} < 180°$. Így f_α és f_β metszéspontja az O pont. A szögfelező a szög száraitól egyenlő távol lévő pontok halmaza a szögtartományban, így mivel O illeszkedik f_α-ra $\Rightarrow OT_1 = OT_3$, illetve O illeszkedik f_β-ra $\Rightarrow OT_1 = OT_2$, tehát $OT_2 = OT_3$, vagyis O egyenlő távol van az AC és a CB szögszáraktól, így O illeszkedik f_γ-ra, azaz O az f_α, f_β és f_γ egyetlen közös pontja.
A bizonyítás során kiderült, hogy O egyenlő távol van a háromszög oldalaitól, ezért köréje egy olyan kör írható, amely a háromszög oldalait érinti.

TÉTEL: A háromszög egy belső, és a másik két csúcshoz tartozó külső szögfelezője egy pontban metszi egymást, ez a pont **a háromszög hozzáírt körének középpontja**. A háromszögnek 3 hozzáírt köre van.



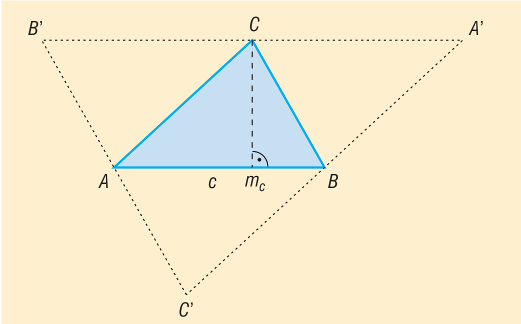
TÉTEL: A háromszög ugyanazon szögének külső és belső szögfelezője merőleges egymásra.

III. Magasságvonalak, a háromszög magasságpontja

DEFINÍCIÓ: A háromszög **magasság**a az egyik csúcsból a szemközti oldal egyenesére bocsátott merőleges szakasz. A háromszög magasságának egyenese a háromszög **magasságvonal**a.

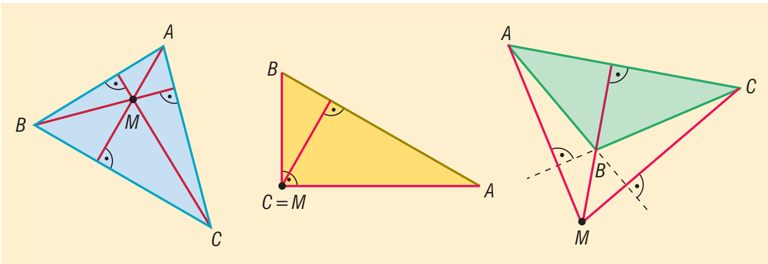
TÉTEL: A háromszög magasságvonalai egy pontban metszik egymást. Ez a pont a háromszög **magasságpontja**.

BIZONYÍTÁS: Visszavezetjük a háromszög oldalfelező merőlegeseire vonatkozó tételre.



Vegyük fel az ABC háromszöget, és mindhárom csúcsán keresztül húzzunk párhuzamos egyenest a szemközti oldallal. $\Rightarrow$ $A'B'C'$ háromszög.
Belátjuk, hogy m_c az $A'B'$ oldalfelező merőlegese: m_c merőleges AB-re és $A'B'$ párhuzamos AB-vel $\Rightarrow$ m_c merőleges $A'B'$-re. AB párhuzamos $A'B'$-vel és BC párhuzamos $B'C'$-vel $\Rightarrow$ $ABCB'$ paralelogramma $\Rightarrow$ $CB' = AB$, hasonlóan $ABA'C$ paralelogramma $\Rightarrow$ $A'C = AB$, ebből $B'C = CA'$ $\Rightarrow$ C felezőpontja $A'B'$-nek $\Rightarrow$ m_c oldalfelező merőlegese $A'B'$-nek.
Hasonlóan belátható, hogy m_a és m_b is az $A'B'C'$ háromszög oldalfelező merőlegesei. Az oldalfelező merőlegesekre vonatkozó tétel alapján tudjuk, hogy ezek egy pontban metszik egymást, tehát beláttuk, hogy az ABC háromszög magasságvonalai is egy pontban metszik egymást.

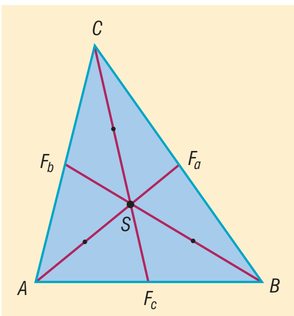
A magasságpont hegyesszögű háromszög esetén a háromszög belsejében, derékszögű háromszögnél a derékszögű csúcsban, tompaszögű háromszögnél a háromszögön kívül helyezkedik el.



IV. Súlyvonalak, a háromszög súlypontja

DEFINÍCIÓ: A háromszög csúcsát a szemközti oldal felezőpontjával összekötő szakasz a **háromszög súlyvonala**.

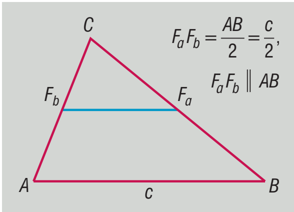
TÉTEL: A háromszög súlyvonalai egy pontban metszik egymást, ezt a pontot a háromszög **súlypont**jának nevezzük. A súlypont harmadolja a súlyvonalakat úgy, hogy a csúcs felé eső szakasz úgy aránylik az oldal felé eső szakaszhoz, mint 2 : 1.



V. Középvonalak

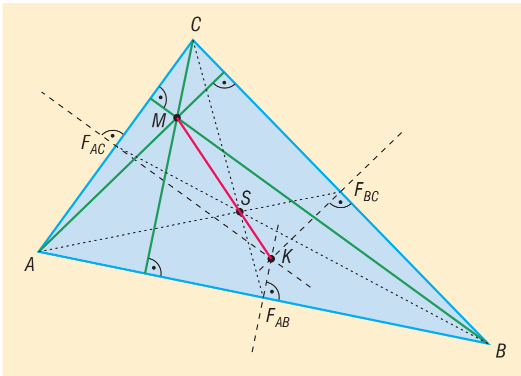
DEFINÍCIÓ: A háromszög két oldalfelező pontját összekötő szakaszt a **háromszög középvonalá**-nak nevezzük.
Minden háromszögnek 3 középvonala van.

TÉTEL: A háromszög középvonala párhuzamos a felezőpontokat nem tartalmazó oldallal, és fele olyan hosszú.

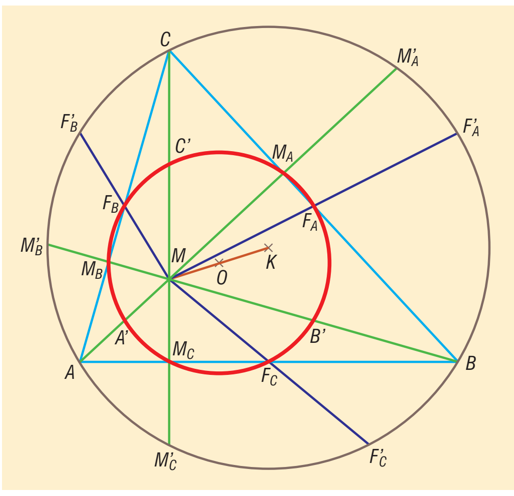


VI. Euler-egyenes, Feuerbach-kör

TÉTEL: A háromszög magasságpontja, súlypontja és a körülírt kör középpontja egy egyenesen van (**Euler-féle egyenes**). A súlypont a másik kettő távolságát harmadolja és a körülírt kör középpontjához van közelebb.



TÉTEL: Egy háromszög oldalainak felezőpontjai, magasságainak talppontjai és a magasságpontot a csúcsokkal összekötő szakaszok felezőpontjai egy körön vannak **(Feuerbach-kör)**.
A Feuerbach-kör középpontja (O) felezi a magasságpontot (M) és a köré írható kör középpontját (K) összekötő szakaszt, sugara a háromszög köré írható kör sugarának a fele. Vagyis az M pontból a köré írt kör $\lambda = \frac{1}{2}$ -es arányú kicsinyített képe a Feuerbach-kör.



VII. Alkalmazások:

- Háromszögszerkesztési feladatok
- Koordináta-geometria: 3 ponton átmenő kör egyenlete, háromszög súlypontjának kiszámítása
- Súlyvonal, súlypont (homogén anyageloszlású háromszög esetén) fizikában: súlyvonal mentén, illetve súlypontban alátámasztva a háromszög egyensúlyban van
- Kör középpontjának szerkesztése
- Területszámítási feladatok a nevezetes körök sugarainak felhasználásával

$$R = \frac{abc}{4t}, \quad r = \frac{t}{s}, \text{ ahol } \quad s = \frac{k}{2}$$

Matematikatörténeti vonatkozások:

- A geometria görög szó, eredeti jelentése földmérés. A geometria az ókori görög matematikusok tevékenysége által vált tudománnyá. **Thalész**en, a matematika atyján kívül a legnagyobb görög geométernek tartott **Apollóniusz** (Kr. e. III. századi görög matematikus) is sokat foglalkozott a háromszögekkel és a velük kapcsolatos összefüggésekkel. A tételben szereplő ismeretek nagy részét már ők is tudták.
- **Thalész** a Kr. e. VI. században élt az ókori Görögországban, az első olyan matematikus volt, akinek bizonyítási igénye volt, foglalkozott állításai megfordításával is: így jutott el a derékszögű háromszög köré írt kör középpontjához.
- **Eukleidész** Kr. e. 300 körül élt görög matematikus Elemek című művében meghatározta a geometriai alapszekesztések axiómáit, szögletes síkidomok tulajdonságait, A Pitagorasz-tételt, a kör és vele kapcsolatos tételeket, a kerületi és középponti szögeket, a szabályos sokszögek szerkesztését.
- **Euler** (1707–1783) svájci matematikus a háromszög nevezetes vonalait, pontjait is vizsgálta, ismerte a Feuerbach-kört, de ez a tétel feledésbe merült.
- **Feuerbach** (1800–1834) német matematikus újra felfedezte az Euler által már megtalált kört, amit ezután Feuerbachról neveztek el.