4. A matematikai logika elemei. Logikai műveletek. Állítás és megfordítása, szükséges és elégséges feltételek, bemutatásuk tételek megfogalmazásában és bizonyításában

Vázlat:

I. A matematikai logika fogalma
II. Logikai műveletek: tagadás, „és” (konjunkció), „megengedő vagy” (diszjunkció), „kizáró vagy”, ha *A*, akkor *B* (implikáció), *A* akkor és csak akkor, ha *B* (ekvivalencia)
III. Logikai műveletek (konjunkció és diszjunkció) tulajdonságai
IV. Állítás és megfordítása
Szükséges és elégséges feltétel, bemutatásuk
V. Alkalmazások, matematikatörténeti vonatkozások

Kidolgozás:

I. A matematikai logika fogalma

A matematikai logika a gondolkodás matematikai formában kifejezhető, matematikai eszközökkel vizsgálható összefüggéseinek, törvényeinek feltárásával foglalkozik. Fő feladata a következtetések helyességének vizsgálata.

II. Logikai műveletek

DEFINÍCIÓ: Az **állítás** (vagy kijelentés) olyan kijelentő mondat, amelyről egyértelműen el lehet dönteni, hogy igaz vagy hamis.

DEFINÍCIÓ: Az igaz és a hamis a kijelentés **logikai érték**e.
Ha az *A* állítás igaz, a *B* állítás hamis, akkor úgy is mondhatjuk, hogy az *A* logikai értéke igaz, *B* logikai értéke hamis. Jelekkel: $|A| = i$ és $|B| = h$.
Az igaz értéket szokták 1-gyel, a hamis értéket 0-val jelölni.

DEFINÍCIÓ: A kijelentéseket összekapcsolhatjuk. Azokat a kijelentéseket, amelyeket más kijelentésekből lehet előállítani, **összetett kijelentés**eknek nevezzük.

DEFINÍCIÓ: Ha az összetett kijelentések logikai értéke csak az őt alkotó állítások logikai értékétől és az előállítás módjától függ, akkor **logikai művelet**ekről beszélünk.
A logikai műveleteket **igazságtábla** segítségével végezhetjük el.

DEFINÍCIÓ: Az állítás **tagadás**a egyváltozós művelet. Egy *A* kijelentés negációja (tagadása) az a kijelentés, amely akkor igaz, ha *A* hamis, és akkor hamis, ha *A* igaz.
Jele: $\overline{A}$ vagy $\neg A$.

TÉTEL: Egy állítás tagadásának tagadása maga az állítás (kettős tagadás törvénye). Jele: $\overline{\overline{A}} = A$.

TÉTEL: Egy állítás és tagadása nem lehet egyszerre igaz (ellentmondásmentesség elve).

TÉTEL: Egy állítás és tagadása nem lehet egyszerre hamis (a harmadik kizárásának elve).

DEFINÍCIÓ: Két, *A*-tól és *B*-től függő állítás akkor egyenlő, ha *A* és *B* minden lehetséges logikai értékére a két állítás igazságértéke egyenlő.
A logikai műveletek eredménye csak a tagok logikai értékétől függ.

Kétváltozós logikai műveletek:

DEFINÍCIÓ: Állítások **konjunkció**ja: logikai **„és”**: Két kijelentés konjunkciója pontosan akkor igaz, ha mindkét kijelentés igaz, különben hamis.
Jele: $A \wedge B$.

DEFINÍCIÓ: Állítások **diszjunkció**ja: logikai **„megengedő vagy”**: Két kijelentés diszjunkciója pontosan akkor igaz, ha legalább az egyik kijelentés igaz, különben hamis.
Jele: $A \vee B$.

DEFINÍCIÓ: Logikai **„kizáró vagy”** akkor igaz, ha a pontosan az egyik állítás igaz, a másik ha-mis, akkor hamis, ha a két állítás logikai értéke megegyezik.
Jele: $A \oplus B$.

Igazságtáblával:

A	B	$A \wedge B$
i	i	i
i	h	h
h	i	h
h	h	h

A	B	$A \vee B$
i	i	i
i	h	i
h	i	i
h	h	h

A	B	$A \oplus B$
i	i	h
i	h	i
h	i	i
h	h	h

DEFINÍCIÓ: Állítások implikációja: A „ha A, akkor B” kapcsolatnak megfelelő logikai műveletet implikációnak nevezzük. Az implikáció logikai értéke pontosan akkor hamis, ha A igaz és B hamis, különben az implikáció igaz. Az A állítást feltételnek, B-t következménynek nevezzük.
A következtetés csak akkor hamis, ha a feltétel igaz, de a következmény hamis. Hamis állításból bármi következhet.
Jele: $A \rightarrow B$.

DEFINÍCIÓ: Állítások ekvivalenciája: Az „A akkor és csak akkor B” kapcsolatnak megfelelő logikai műveletet ekvivalenciának nevezzük. Az ekvivalencia logikai értéke pontosan akkor igaz, ha A és B logikai értéke azonos, különben hamis.
Ha az $A \leftrightarrow B$ igaz, akkor azt mondjuk, hogy A és B állítások ekvivalensek egymással.
Jele: $A \leftrightarrow B$.
Igazságtáblával:

A	B	$A \rightarrow B$
i	i	i
i	h	h
h	i	i
h	h	i

A	B	$A \leftrightarrow B$
i	i	i
i	h	h
h	i	h
h	h	i

TÉTEL: Tetszőleges A és B kijelentésekre $A \rightarrow B = \overline{A} \vee B$.

BIZONYÍTÁS: Igazságtáblával:

A	B	$\overline{A}$	$\overline{A} \vee B$	$A \rightarrow B$
i	i	h	i	i
i	h	h	h	h
h	i	i	i	i
h	h	i	i	i

A negyedik oszlop igazságértékei megegyeznek az implikáció igazságértékeivel, tehát az egyenlőség A és B minden lehetséges logikai értékére fennáll, azaz azonosság.

TÉTEL: Tetszőleges A és B kijelentésekre $A \leftrightarrow B = (A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)$

BIZONYÍTÁS: Igazságtáblával:

A	B	$A \rightarrow B$	$B \rightarrow A$	$(A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)$	$A \leftrightarrow B$
i	*i*	*i*	*i*	*i*	*i*
i	*h*	*h*	*i*	*h*	*h*
h	*i*	*i*	*h*	*h*	*h*
h	*h*	*i*	*i*	*i*	*i*

Az ötödik oszlop igazságértékei megegyeznek az ekvivalencia igazságértékeivel, tehát az egyenlőség A és B minden lehetséges logikai értékére fennáll, azaz azonosság.

III. Logikai műveletek (konjunkció és diszjunkció) tulajdonságai

Tulajdonság	Diszjunkció	Konjunkció
Kommutatív (felcserélhető)	$A \vee B = B \vee A$	$A \wedge B = B \wedge A$
Asszociatív (csoportosítható)	$(A \vee B) \vee C = A \vee (B \vee C)$	$(A \wedge B) \wedge C = A \wedge (B \wedge C)$
Disztributív (széttagolható)	$A \vee (B \wedge C) = (A \vee B) \wedge (A \vee C)$	$A \wedge (B \vee C) = (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$
De-Morgan azonosságok	$\overline{A \vee B} = \overline{A} \wedge \overline{B}$ és $\overline{A \wedge B} = \overline{A} \vee \overline{B}$	
További azonosságok	$A \vee A = A$ $A \vee \overline{A} = i$ $\overline{\overline{A}} = A$	$A \wedge A = A$ $A \wedge \overline{A} = h$

III. Állítás és megfordítása, szükséges és elégséges feltétel

Az állításokat gyakran „Ha A igaz, akkor B igaz” ($A \Rightarrow B$) formában fogalmazzuk meg. Tehát egy A állítás igazságából következik egy B állítás igazsága (vagyis, ha az $A \rightarrow B$ implikáció igaz), azt mondjuk, hogy az A állításból következik B állítás, vagy azt, hogy A állítás a B állításnak **elégséges feltétele** (hiszen a B állítás igazságának bizonyításához elég az A állítás igazságát bizonyítani).
Ilyenkor a B állítás az A állításnak **szükséges feltétele** (hiszen az A állítás nem lehet igaz, ha a B állítás nem igaz). Ha ilyen esetben az A állítás igazságából a B állítás igazságára következtetünk, az **helyes következtetés**.
Ha azt akarjuk kimutatni, hogy az A állításból **nem** következik a B állítás, elég egyetlen példát mutatni olyan esetre, amikor A igaz és B hamis. Ha ilyen esetben A állításból a B állításra következtetünk, az nem helyes, vagyis **helytelen következtetés**.
Ha az A állításból következik B állítás, és fordítva is: a B állításból következik az A állítás, akkor azt mondjuk, hogy az A állításnak a B állítás **szükséges és elégséges feltétele**. Jele: $A \Leftrightarrow B$ (A akkor és csak akkor igaz, amikor B).
Ez azt jelenti, hogy A és B egyszerre igaz, vagyis **ekvivalensek** (egyenértékűek).

Példák feltételekre:

- Állítás: Ha egy szám osztható 4-gyel, akkor osztható 2-vel. Ez igaz állítás.
  Ekkor a 4-gyel való oszthatóság elégséges feltétele a 2-vel való oszthatóságnak, a 2-vel való oszthatóság szükséges feltétele a 4-gyel való oszthatóságnak. Vagyis a 4-gyel való osztható-

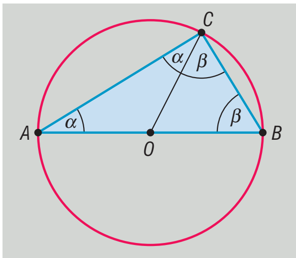
ság elégséges, de nem szükséges feltétele a 2-vel való oszthatóságnak, valamint a 2-vel való oszthatóság szükséges, de nem elégséges feltétele a 4-gyel való oszthatóságnak.

- Állítás: Ha egy szám osztható 2-vel, akkor osztható 4-gyel. Ez hamis állítás.
  Ekkor a 2-vel való oszthatóság nem elégséges feltétele a 4-gyel való oszthatóságnak, a 4-gyel való oszthatóság elégséges feltétele a 2-vel való oszthatóságnak. Vagyis a 2-vel való oszthatóság nem elégséges, de szükséges feltétele a 4-gyel való oszthatóságnak, valamint a 4-gyel való oszthatóság elégséges, de nem szükséges feltétele a 2-vel való oszthatóságnak.

Egy tétel feltételeinek és feltételei következményeinek a felcserélésével kapjuk a **tétel megfordítását**.
Így a fenti tétel megfordítása: „Ha *B* igaz, akkor *A* igaz.” ($B \Rightarrow A$)
Ha a tétel és a megfordítása is igaz, akkor a két tétel ekvivalens. ($A \Leftrightarrow B$)
Erre példa a Thalész-tétel, illetve a Pitagorasz-tétel:

TÉTEL: Thalész-tétel: ha egy kör átmérőjének két végpontját összekötjük a kör bármely más pontjával, akkor derékszögű háromszöget kapunk.

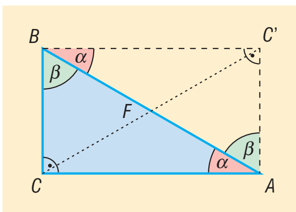
BIZONYÍTÁS: *O* középpontú kör, *AB* átmérő, *C* tetszőleges pont a körvonalon.



$OA = OC = r \Rightarrow OAC$ háromszög egyenlő szárú $\Rightarrow OAC\sphericalangle = OCA\sphericalangle = \alpha$.
$OC = OB = r \Rightarrow OBC$ háromszög egyenlő szárú $\Rightarrow OBC\sphericalangle = BCO\sphericalangle = \beta$.
Az *ABC* háromszög belső szögeinek összege 180º $\Rightarrow 2\alpha + 2\beta = 180° \Rightarrow \alpha + \beta = 90° \Rightarrow ACB\sphericalangle = 90°$.

TÉTEL: Thalész-tétel megfordítása: ha egy háromszög derékszögű, akkor köré írható körének középpontja az átfogó felezőpontja.

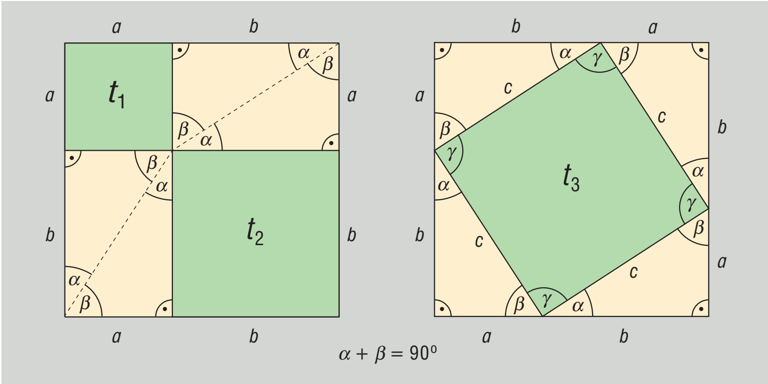
BIZONYÍTÁS: *ABC* derékszögű háromszöget tükrözzük az átfogó *F* felezőpontjára. A tükrözés tulajdonságai miatt $BC = AC'$ és $CA = BC'$ és $AC' = BC'$ szögei 90º-osak. A téglalap átlói egyenlők és felezik egymást $\Rightarrow FA = FB = FC \Rightarrow F$ az *ABC* háromszög köré írt kör középpontjával egyenlő.



TÉTEL: Thalész-tétel és megfordítása összefoglalva: a sík azon pontjainak halmaza, amelyekből egy megadott szakasz derékszögben látszik, a szakaszhoz, mint átmérőhöz tartozó kör, elhagyva belőle a szakasz végpontjait.

TÉTEL: Pitagorasz-tétel: ha egy háromszög derékszögű, akkor a befogók négyzetének összege egyenlő az átfogó négyzetével.

BIZONYÍTÁS: (14. tétel)



$$a^2 + b^2 + 4t = c^2 + 4t$$
$$a^2 + b^2 = c^2$$

TÉTEL: Pitagorasz-tétel megfordítása: ha egy háromszög két oldalhosszának négyzetének összege egyenlő a harmadik oldal négyzetével, akkor a háromszög derékszögű.

BIZONYÍTÁS: (14. tétel)

Tudjuk, hogy $a^2 + b^2 = c^2$.

Tegyük fel, hogy a háromszög nem derékszögű. Ekkor tudunk szerkeszteni olyan derékszögű háromszöget, aminek a befogói a és b, átfogója legyen c'. Mivel ez derékszögű háromszög, a Pitagorasz-tétel miatt: $a^2 + b^2 = (c')^2$. Az eredeti feltétellel összevetve $c^2 = (c')^2$, amiből pozitív mennyiségekről lévén szó, következik, hogy $c = c'$.

Ez ellentmond a kiinduló feltételnek, így a háromszög derékszögű.

IV. Alkalmazások:

- Matematikai definíciók, tételek pontos kimondása, tételek bizonyítása
- Tétel megfordításának kimondása
- Bizonyítási módszerek kidolgozása (direkt, indirekt, skatulyaelv, teljes indukció)
- Kombinatorika, valószínűségszámítás használja a logikai műveleteket és azok tulajdonságait
- Automaták tervezése problémák részekre bontásával
- A logikai műveletek és halmazműveletek párhuzamba állíthatók
- Egyenletek, egyenlőtlenségek megoldása során sokszor végzünk logikai műveleteket (ekvivalens átalakítások).

Matematikatörténeti vonatkozások:

- Az ókori filozófia vetette fel azokat a kérdéseket, amelyek vizsgálata a logika kialakulásához vezetett. A görög „logosz” szó jelentése gondolat, igazság, a görög „logiké” szó érvelést, következtetést jelent. A logika segíti a definíciók, állítások pontos megfogalmazását, fontos szerepe van a problémák megfogalmazásában, a tudományos, alkotó kommunikációban.
- **Boole** (1815–1864) angol matematikus vezette be a kijelentések szerkezetének szimbólumokkal és műveletekkel való leírását. Az általa létrehozott algebra célja az volt, hogy összekösse a logikát a matematikával, ez a Boole-algebra. Az 1930-as években **Shannon** (1916–2001) amerikai matematikus a Boole-algebrát felhasználva az elektromos kapcsolók tulajdonságait használta a logikai műveletekhez, ez lett az elméleti alapja a digitális korszaknak, az információelméletnek.
- **de Morgan** (1806–1871) angol matematikus bevezette a ma De Morgan azonosságként ismert szabályokat. Ezzel nagyban hozzájárult a matematikai logika megreformálásához, jelölésrendszerének egyszerűbbé tételéhez.