

25. Bizonyítási módszerek és bemutatásuk tételek bizonyításában

Vázlat:

- I. Bizonyítások a matematikában
- II. Direkt bizonyítás
- III. Indirekt bizonyítás
- IV. Teljes indukció
- V. Skatulyaelv
- VI. Alkalmazások

Kidolgozás

I. Bizonyítások a matematikában

A matematika különböző ágai hasonlóan épülnek fel. Meghatározunk **alfogalmakat**, majd ezek segítségével további **fogalmakat** definiálunk. Kimondunk **alaptételeket** (axiómákat), amelyek igazságtartalmát bizonyítás nélkül, a szemlélet alapján elfogadjuk. Az axiómákból elindulva a matematikai logika eszközeivel, helyes következtetéseken keresztül további **tételeket** bizonyítunk be. A bizonyítás olyan eljárási mód egy állítás helyességének indoklására, amely során a matematikai logika műveleteit használjuk fel. A matematikai tételek általában implikációk vagy ekvivalenciák. Az implikációk bizonyítása során a feltételből helyes matematikai következtetésekkel kell eljutni a következményhez. Bizonyítás közben a definíciókat, axiómákat, és a már bizonyított tételeket használhatjuk fel. Így belátjuk, hogy a feltétel valóban elégséges feltétele a következménynek. Ekvivalenciák bizonyítása során két implikációt bizonyítunk be: be kell látni, hogy mindkét állításból következik a másik.

II. Direkt bizonyítás

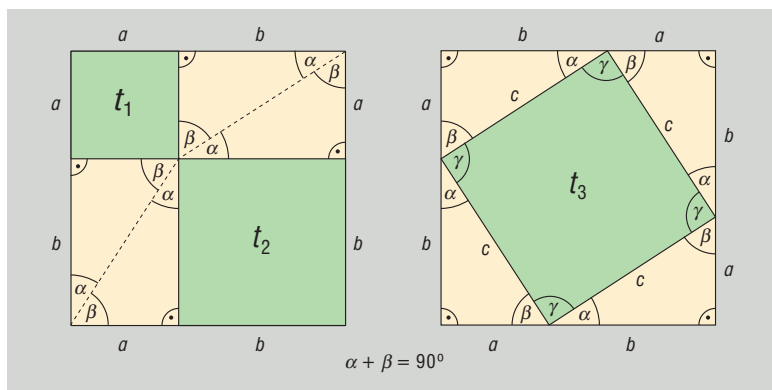
DEFINÍCIÓ: A direkt bizonyítás során igaz állításokból (a feltételekből) kiindulva matematikailag helyes következtetésekkel jutunk el a bizonyítandó állításhoz. A legtöbb matematikai tétel (geometriai, algebrai) bizonyítása direkt úton történik.

TÉTEL: Pitagorasz-tétel: derékszögű háromszögben a befogók négyzetének összege egyenlő az átfogó négyzetével.

BIZONYÍTÁS: (részletesen lásd a 12. tételben)

$$a^2 + b^2 + 4t = c^2 + 4t$$

$$a^2 + b^2 = c^2.$$



III. Indirekt bizonyítás

DEFINÍCIÓ: Az indirekt bizonyítás olyan eljárás, melynek során feltesszük, hogy a bizonyítandó állítás nem igaz, és ebből kiindulva helyes következtetésekkel lehetetlen következményekhez jutunk el. Így a kiinduló feltevés volt téves, vagyis a bizonyítandó állítás valóban igaz.

Ha egy állítás ellenkezőjéről (tagadásáról) helyes gondolatmenettel belátjuk, hogy hamis (ellentmondásra vezet), akkor a kijelentés ellentétének ellentéte, azaz maga az állítás igaz.

Az indirekt módszer két logikai törvényen alapul:

- Minden kijelentés igaz, vagy hamis.
- Egy igaz állítás tagadása hamis, és fordítva, hamis kijelentés tagadása igaz.

Indirekt bizonyítási módot akkor érdemes választani, ha az állítás tagadása könnyebben kezelhető, mint maga az állítás.

TÉTEL: Pitagorasz-tétel megfordítása: ha egy háromszög két oldalhosszának négyzetének összege egyenlő a harmadik oldal négyzetével, akkor a háromszög derékszögű.

BIZONYÍTÁS: (részletesen lásd a 12. tételben)

Tudjuk, hogy $a^2 + b^2 = c^2$.

Tegyünk fel, hogy a háromszög nem derékszögű. Ekkor tudunk szerkeszteni olyan derékszögű háromszöget, amelynek a befogói a és b , átfogója legyen c' . Mivel ez derékszögű háromszög, a Pitagorasz-tétel miatt: $a^2 + b^2 = (c')^2$. Az eredeti feltétellel összevetve $c^2 = (c')^2$, amiből pozitív mennyiségekről lévén szó, következik, hogy $c = c'$.

Ez ellentmond a kiinduló feltételnek, így a háromszög derékszögű.

TÉTEL: $\sqrt{2}$ irracionális

BIZONYÍTÁS: (részletesen lásd a 2. tételben)

Tegyünk fel, hogy $\sqrt{2}$ racionális:

$$\sqrt{2} = \frac{p}{q} \quad (\text{ahol } p, q \in \mathbb{Z}, (p, q) = 1) \quad |()|^2$$

$$2 = \frac{p^2}{q^2} \Rightarrow 2q^2 = p^2$$

A négyzetszámokban minden prímtényező páros sokszor fordul elő, ebből következik, hogy a bal oldalon páratlan sok db 2-es van, a jobb oldalon páros sok db 2-es van. A számelmélet alaptétele miatt ez nem lehet, mert egy szám csak egyféleképpen bontható fel prímszámok szorzatára. Mivel ez ellentmondás, rossz volt a feltevés, vagyis $\sqrt{2}$ irracionális.

IV. Bizonyítás teljes indukcióval

DEFINÍCIÓ: A teljes indukció olyan állítások bizonyítására alkalmas, melyek n pozitív egész számtól függenek. A teljes indukciós eljárás során először bebizonyítjuk az állítást $n = 1$ -re (vagy valamilyen konkrét értékre), majd feltételezzük, hogy az állítás igaz $n = k$ -ra (indukciós feltevés), és ennek felhasználásával bebizonyítjuk, hogy az állítás igaz $n = (k + 1)$ -re. Ezzel az állítást minden n pozitív egész számra belátjuk.

A teljes indukciót gyakran hasonlítják egy olyan végtelen sok dominóból álló sorhoz, amelyben azt tudjuk, hogy ha bármelyik dominó feldől, akkor feldönti a sorban utána következőt is. Ez azt jelenti, hogy ha meglökjük az első dominót, akkor az összes fel fog borulni.

A teljes indukciós bizonyítást egész számokkal kapcsolatos problémák, oszthatósági szabályok megoldására, tételek bizonyítására használhatjuk.

TÉTEL: Az első n pozitív egész szám összege: $\frac{n \cdot (n+1)}{2}$.

BIZONYÍTÁS:

$$n = 1$$

$$\left. \begin{array}{l} 1 \\ \frac{1 \cdot 2}{2} = 1 \end{array} \right\} =$$

$$n = 2$$

$$\left. \begin{array}{l} 1 + 2 = 3 \\ \frac{2 \cdot 3}{2} = 3 \end{array} \right\} =$$

Tegyük fel, hogy $n = k$ -ra igaz, tehát $1 + 2 + \dots + k = \frac{k \cdot (k+1)}{2}$.

Bizonyítani kell: $1 + 2 + \dots + k + (k+1) = \frac{(k+1) \cdot (k+2)}{2}$.

$$1 + 2 + \dots + k + (k+1) = \frac{k \cdot (k+1)}{2} + (k+1) = (k+1) \cdot \left(\frac{k}{2} + 1 \right) = (k+1) \cdot \frac{(k+2)}{2} = \frac{(k+1) \cdot (k+2)}{2}.$$

Vagyis az állítás teljesül.

TÉTEL: Az első n pozitív páratlan szám összege: $1 + 3 + 5 + \dots + (2n-1) = n^2$.

BIZONYÍTÁS:

$$n = 1$$

Ekkor a bal oldalon csak egy tagja van az összeadásnak, az 1, a jobb oldalon pedig $1^2 = 1$ áll, így igaz az állítás.

Tegyük fel, hogy $n = k$ -ra igaz, tehát $1 + 3 + 5 + \dots + (2k-1) = k^2$.

Bizonyítani kell: $1 + 3 + 5 + \dots + (2k-1) + (2k+1) = (k+1)^2$.

$1 + 3 + 5 + \dots + (2k-1) + (2k+1) = k^2 + (2k+1) = (k+1)^2$. Vagyis az állítás teljesül.

TÉTEL: Az első n pozitív egész szám négyzetének összege: $\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

BIZONYÍTÁS:

$$n = 1$$

$$\left. \begin{array}{l} 1^2 = 1 \\ \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{6} = 1 \end{array} \right\} =$$

$$n = 2$$

$$\left. \begin{array}{l} 1^2 + 2^2 = 5 \\ \frac{2 \cdot 3 \cdot 5}{6} = 5 \end{array} \right\} =$$

Tegyük fel, hogy $n = k$ -ra igaz, tehát $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + k^2 = \frac{k \cdot (k+1) \cdot (2k+1)}{6}$.

Be kellene látni, hogy $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + k^2 + (k+1)^2 = \frac{(k+1) \cdot (k+2) \cdot (2k+3)}{6}$.

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + k^2 + (k+1)^2 = \frac{k \cdot (k+1) \cdot (2k+1)}{6} + (k+1)^2 =$$

$$\begin{aligned}
 &= (k+1) \cdot \frac{k \cdot (2k+1) + 6 \cdot (k+1)}{6} = (k+1) \cdot \frac{2k^2 + k + 6k + 6}{6} = \frac{(k+1) \cdot (2k^2 + 7k + 6)}{6} = \\
 &= \frac{(k+1) \cdot (2k+3) \cdot (k+2)}{6}.
 \end{aligned}$$

Vagyis az állítás teljesül.

V. Bizonyítás skatulyaelvvel

TÉTEL: Skatulyaelv: a skatulyaelv értelmében ha n skatulyába kell n -nél több elemet szétosztani, akkor a skatulyák valamelyikébe szükségképpen legalább 2 elem kerül. Ha n skatulyába $k \cdot n$ -nél több elemet kell szétosztani, akkor a skatulyák valamelyikébe legalább $k + 1$ elem kerül ($n, k \in \mathbb{Z}^+$).

BIZONYÍTÁS: Indirekt módon: ha az elv nem igaz, akkor minden skatulyába legfeljebb 1 elem kerül. Ekkor legfeljebb annyi elem van, ahány skatulya. ez ellentmondás, mert az elemek száma a skatulyák számánál több.

Az elv végtelen halmazokra is alkalmazható, csak ilyenkor elemszám helyett számosságot kell használni.

Skatulyaelvvel általában oszthatósági problémákat, csoportosítással kapcsolatos feladatokat oldhatunk meg.

TÉTEL: Ha adott $n + 1$ darab pozitív egész szám, akkor ezek között biztosan van kettő olyan, amelyek különbsége osztható n -nel.

BIZONYÍTÁS: Készítsünk n db skatulyát, felcímkézve őket $0, 1, \dots, (n - 1)$ -ig. A számokat aszerint helyezzük el az n db skatulyában, hogy mennyi maradékot adnak n -nel osztva. Ekkor biztosan van olyan skatulya, amelybe legalább 2 szám kerül, hiszen $n + 1$ számot kell n skatulyába szétosztani. Ennek a két számnak a különbsége biztosan osztható lesz n -nel.

Speciálisan: bizonyítsuk be, hogy öt pozitív egész szám között biztosan van kettő, amelyek különbsége osztható négygyel.

FELADAT: Bizonyítsuk be, hogy egy 37 fős társaságban biztosan van 4 olyan ember, akik ugyanabban a csillagjegyben születtek.

BIZONYÍTÁS: 36 főnél előfordulhat az, hogy minden csillagjegyre csak 3 ember tartozik, de a 37-edik ember biztosan valamelyik csillagjegynél a negyedik lesz.

VI. Alkalmazások

Direkt bizonyítás:

- $a \mid b$ és $a \mid c \Rightarrow a \mid b \pm c$
- $9 \mid a \Leftrightarrow$ számjegyek összege osztható 9-cel

Indirekt bizonyítás:

- Végtelen sok prímszám van

Skatulyaelv:

- 25 fős társaságban biztosan van 3 fő, akik azonos csillagjegyben születtek
- 5 pozitív egész szám között van 2, melyek különbsége osztható 4-gyel

Teljes indukció:

$$\bullet \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{n \cdot (n+1)} = \frac{n}{n+1}$$

Matematikatörténeti vonatkozások:

- Az ókori Egyiptomban, Mezopotámiában, Kínában, Indiában a matematika gyakorlati jellegű volt: lehetővé tette a pontos idő- és helymeghatározást, az adószedéssel és a közmunkákkal kapcsolatos számításokat. Nem jegyezték fel, hogyan jöttek rá a matematikai igazságokra, módszerekre, csak rögzítették a módszereket, eljárásokat.
- A Kr. e. VII–VI. században keletkezett a matematika, mint tudomány: ekkor már igény volt az okok kutatására.
- A legkorábbi görög matematikai mű **Hippokratész** Kr. e. 450 körül született félholdacskákkal foglalkozó munkája. Ez a mű megmutatja, hogy a görögöknél olyan fejlett volt a geometria, hogy egy állítást már bizonyított tényekkel kellett igazolni. A tételeket logikai úton, más tételekből vezették le. Ez a módszer alapigazságokra, axiómákra épült, ezeket a természetből absztrahálták.
- Kr. e. 300 körül **Euklidész** megalkotta a geometria axiómarendszerét, bevezette a deduktív (levezető) bizonyításmódot. Tőle származik a $\sqrt{2}$ irracionális tétel előbb ismertetett indirekt bizonyítása.
- A teljes indukció első írásos emléke 1575-ből származik: Ekkor bizonyította be a fenti módon **Maurolico** olasz matematikus az első n páratlan szám összegére vonatkozó tételt.
- A skatulyaelvet **Dirichlet** (1805–1859) francia matematikus bizonyította be a fenti módon.