10. Mértani sorozat, az első *n* tag összege, végtelen mértani sor. Kamatszámítás, gyűjtőjáradék, törlesztőrészlet. Exponenciális folyamatok a társadalomban és a természetben

Vázlat:

I. Mértani sorozat, a sorozat általános tagja, az első *n* tag összege
II. Végtelen mértani sor
III. Kamatszámítás
IV. Gyűjtőjáradék
V. Törlesztőjáradék
VI. Exponenciális folyamatok a társadalomban és a természetben
VII. Alkalmazások, matematikatörténeti vonatkozások

Kidolgozás:

I. Mértani sorozat, a sorozat általános tagja, az első *n* tag összege

DEFINÍCIÓ: A **számsorozat** olyan függvény, amelynek értelmezési tartománya a pozitív egész számok halmaza, értékkészlete pedig valamilyen számhalmaz.
Az a_1, a_2, …, a_n tagokból álló sorozatot $\{a_n\}$-nel vagy (a_n)-nel jelöljük. A sorozat n-edik tagja: a_n.

DEFINÍCIÓ: Azt a számsorozatot, amelyben a második tagtól kezdve bármely tag és a közvetlenül előtte álló tag hányadosa állandó, **mértani sorozat**nak nevezzük. Ez a hányados a **kvóciens**, jele q.
A definíció kizárja, hogy a sorozat bármely eleme 0 legyen, továbbá a hányados sem lehet 0.

TÉTEL: Ha egy **mértani sorozat** első tagja a_1, hányadosa q, akkor ***n*-edik tagja** $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$.

BIZONYÍTÁS: teljes indukcióval a számtani sorozat n-edik tagjához hasonlóan.

TÉTEL: A mértani sorozat első n tagjának összege:

- ha $q = 1$, akkor $S_n = n \cdot a_1$
- ha $q \neq 1$, akkor $S_n = a_1 \cdot \dfrac{q^n - 1}{q - 1}$.

BIZONYÍTÁS:

- ha $q = 1$, akkor a sorozat minden tagja a_1, így $S_n = \overbrace{a_1 + a_1 + \ldots + a_1}^{n} = n \cdot a_1$.
- ha $q \neq 1$, akkor az összeget írjuk fel a_1-gyel, és q-val:

$$S_n = a_1 + a_1q + a_1q^2 + \ldots + a_1q^{n-2} + a_1q^{n-1}.$$

Szorozzuk meg mindkét oldalt q-val:

$$S_n q = a_1 q + a_1 q^2 + a_1 q^3 + \dots + a_1 q^{n-1} + a_1 q^n.$$

Vonjuk ki a két egyenletet egymásból:

$$S_n q - S_n = a_1 q^n - a_1.$$

$$S_n(q-1) = a_1(q^n - 1).$$

Osszuk mindkét oldalt $(q-1) \neq 0$-val:

$$S_n = a_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1},$$

így állításunkat beláttuk.

TÉTEL: Bármely elem négyzete egyenlő a tőle szimmetrikusan elhelyezkedő tagok szorzatával: $a_n^2 = a_{n-k} \cdot a_{n+k}$.

TÉTEL: Pozitív tagú sorozatnál bármely elem a tőle szimmetrikusan elhelyezkedő elemek mértani közepe: $a_n = \sqrt{a_{n-k} \cdot a_{n+k}}$.

Mértani sorozat konvergenciája:

- $a_n \to a_1$, ha $q = 1$.
- $a_n \to 0$, ha $|q| < 1$.
- $\{a_n\}$ divergens, ha $q = -1$, vagy $|q| > 1$.

II. Végtelen mértani sor

DEFINÍCIÓ: Legyen adott egy $\{a_n\}$ számsorozat. Az $a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{n-2} + a_{n-1} + a_n + \dots$ végtelen sok tagú összeget **végtelen sor**nak (vagy röviden sornak) nevezzük.

Jelölés: $a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{n-2} + a_{n-1} + a_n + \dots = \sum_{i=1}^{\infty} a_i$.

DEFINÍCIÓ: Ha az $a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{n-2} + a_{n-1} + a_n + \dots$ végtelen sorban az $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{n-2}, a_{n-1}, a_n, \dots$ tagok egy mértani sorozat tagjai, akkor a sort **mértani sor**nak nevezzük.

Felmerül a kérdés, hogy mit értsünk végtelen sok szám összegén, hiszen a véges sok szám esetén megszokott módszerek nem alkalmazhatók.

DEFINÍCIÓ: A **sor összegé**n az

$$\begin{aligned} S_1 &= a_1 \\ S_2 &= a_1 + a_2 \\ &\vdots \\ S_n &= a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n \end{aligned}$$

úgynevezett részletösszegek sorozatának határértékét értjük, amennyiben ez a határérték létezik. Tehát a sor összegét egy olyan sorozat határértékével definiáljuk, amely sorozat első tagja a_1, n-edik tagja az eredeti sorozat első n tagjának összege.

TÉTEL: Ha egy mértani sorban $|q| < 1$, akkor a mértani sor konvergens, és összege $S = \frac{a_1}{1-q}$, ha $|q| \geq 1$, akkor nem konvergens.

III. Kamatszámítás

Pénzügyi folyamatokban **kamat** a kölcsönadott, illetve a letétbe helyezett pénzösszeg, vagyis a **tőke** használatáért járó díj egy adott időszakra. A kamat nagyságát a tőke százalékában fejezzük ki, ez a kamatláb ($p\%$). De számolhatunk kamattényezővel (q) is, ami a kamatláb 100-ad részével tér el az 1-től: értéknövekedés esetén $q = 1 + \frac{p}{100}$, értékcsökkenés esetén $q = 1 - \frac{p}{100}$.

Kamatos kamatról akkor beszélünk, ha a kamatozási időszak végén a kamatot hozzáadják a tőkéhez, és utána ez a megnövekedett érték kamatozik.
A kamatos kamat számítása a mértani sorozat alkalmazásának olyan speciális esete, amikor a sorozatnak van nulladik tagja, amit a pénzügyi számításokban a-val (annuitás rövidítése) jelölünk.

Kamatoskamat-számítás: ha egy a összeg $p\%$-kal kamatozik évente, akkor az n-edik év végére az összeg $a_n = a \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n$. Ha $q = 1 + \frac{p}{100}$ kamattényező, akkor $a_n = a \cdot q^n$. Ez olyan mértani sorozat n-edik eleme, amelynek első eleme aq, hányadosa q.
Az a_n összefüggésében négy mennyiség szerepel, közülük bármely hármat ismerve a negyedik kiszámolható.
A kamatozás üteme nemcsak éves, hanem havi, napi stb. is lehet. Ekkor figyelni kell arra, hogy a kamattényező és az időszak hossza azonos nagyságú időszakra vonatkozzon.

Ha az éves kamatláb $p\%$, az éves kamattényező q, akkor a havi kamattényező $\sqrt[12]{1 + \frac{p}{100}} = \sqrt[12]{q}$, hasonlóan a napi kamattényező $\sqrt[365]{1 + \frac{p}{100}} = \sqrt[365]{q}$.

IV. Gyűjtőjáradék

Gyűjtőjáradékról akkor beszélünk, ha egy alapösszeget egyenlő időközönként ugyanakkora összeggel növelünk, vagyis egyenlő időközönként azonos összeget elhelyezünk a bankban ugyanazon a számlán, vagyis gyűjtjük a pénzt, és minden betett összegünk kamatos kamattal kamatozik.

Gyűjtőjáradék számítása: minden év elején egy a összeget teszünk a bankba, és ez $p\%$-kal kamatozik évente úgy, hogy a következő év elején a megnövekedett összeghez tesszük hozzá az újabbat. Ha a kamattényező $q = 1 + \frac{p}{100}$, akkor az n-edik év végén a rendelkezésre álló összeg egy olyan mértani sorozat első n elemének összege, ahol $a_1 = aq$. Ekkor az n-edik év végére $S_n = aq \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}$ összeget gyűjtünk.

V. Törlesztőrészlet

Törlesztőrészletről akkor beszélünk, ha egy hitelt egyenlő időközönként ugyanakkora összeggel fizetünk vissza, azaz egyenlő időközönként azonos összeggel csökkentjük a tartozásunkat, vagyis törlesztjük a hitelt, minden befizetett összeg után csak a fennálló tartozásra fizetünk kamatos kamatot.
Törlesztőrészlet számítása: felveszünk n évre S_n nagyságú hitelt évi $p\%$-os kamatra, és minden évben a összeget törlesztünk. Az n-edik év végére a befizetéseknek kamatokkal megnövelt értékének egyenlő kell lennie a kölcsön n év alatt $p\%$-os kamatozással megnőtt értékével. Ha $q = 1 + \frac{p}{100}$ a kamattényező, akkor a hitelre fennálló összefüggés: $S_n \cdot q^n = a \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}$.

VI. Exponenciális folyamatok a társadalomban és a természetben

A társadalomban és a természetben lejátszódó exponenciális folyamatok fő típusai az időben, illetve a térben lejátszódó exponenciálisan növekedő, illetve csökkenő folyamatok.

Az időben lezajló exponenciális növekedést a $N_t = N_0 \cdot e^{\lambda t}$, a csökkenést a $N_t = N_0 \cdot e^{-\lambda t}$ képlet írja le, ahol N_0 a kezdeti mennyiség és N_t a t időpontbeli mennyiség. Az exponenciális folyamatra jellemző a λ paraméter, amit rendszerint pozitívnak választanak csökkenés esetén is.

Az exponenciálisan növekedő mennyiségek minél nagyobbak, annál gyorsabban növekszenek. A növekedés mértéke arányos a mennyiség nagyságával. Az exponenciálisan növekvő mennyiségek változását exponenciális függvény írja le.

Az exponenciális változás lehet folytonos (pl. populáció növekedése), illetve diszkrét (pl. kamatos kamat).

Az egyik legjellemzőbb probléma a Föld túlnépesedése. Egy matematikai modell szerint a népesség 1837 óta (akkor a lakosság kb 1 milliárd volt) az előző évinek 1,1%-ával növekedett. Ez azt jelenti, hogy1837 óta a Föld lakosságát leíró képlet: $N_t = 1 \cdot 1{,}011^t$. A modell szerint Föld lakossága kb 63 évente megduplázódik ($1{,}011^{63} \approx 2$). Mai ismereteink szerint a 2026-ra adott 8 milliárd lakos becslés közel áll a valósághoz. Az exponenciális népességnövekedés ezek szerint azt is jelenti, hogy ugyanannyi időközönként egyre nagyobb számmal növekszik a népesség. A rendelkezésre álló erőforrások – például energia, nyersanyag, élelem – azonban nem tudnak lépést tartani ezzel a növekedéssel. Így vagy az életfeltételek romlanak drámaian, vagy a népesség növekedési ütemének kell drasztikusan csökkennie.

A természetben a populációk növekedési folyamata kezdetben exponenciális függvénnyel írható le (ideális körülmények között: táplálékbőség, ragadozók hiánya). Előbb-utóbb azonban eljön a telítődés ideje, amikor is a növekedés különböző okok miatt erősen lelassul; a természetben ilyen okok a terület eltartóképessége és a fajtársak vetélkedése.

A diszkrét exponenciális növekedés leggyakoribb felhasználási területe a kamatos kamat számítása, ekkor a kamatot évente egyszer és nem a kamat keletkezésének időpontjában tőkésítik, vagyis veszik hozzá a tőkéhez.

A diszkrét exponenciális csökkenés elsősorban a tárgyak (pl. autó, számítógép) értékcsökkenésének számolása, ekkor a csökkenés mértéke az előző időszak százalékában adott. Évi p%-os értékcsökkenés esetén n év múlva a tárgy értéke: $a_n = a \cdot \left(1 - \frac{p}{100}\right)^n$. Pl. ha évente 11%-kal csökken a tárgy értéke, akkor kb 6 év alatt a tárgy értéke a felére csökken, a 6 év ebben az esetben a tárgy értékének felezési ideje.

Térben exponenciális folyamat pl az egyes sugárzások elnyelődése homogén közegben. Ezek hasonló képletekkel írhatók fel, mint az időben exponenciális folyamatok, de idő helyett a távolság a változó.

Az exponenciális folyamatok lényege tehát az, hogy egyenlő időközök alatt mindig ugyanannyiszorosára változik a vizsgált mennyiség.

VII. Alkalmazások:

- Végtelen szakaszos tizedes törtek közönséges tört alakra hozásakor a konvergens mértani sor tulajdonságait használjuk
- $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = \begin{cases} 0, & \text{ha } |q|<1 \\ \infty, & \text{ha } q>1 \\ \text{nem létezik}, & \text{ha } q\le -1 \\ 1, & \text{ha } q=1 \end{cases}$. Ez a mértani sorozat
- Az $N = N_0 \cdot e^{-\lambda(t-t_0)}$ bomlási törvényben, ahol N a még el nem bontott részecskék száma, N_0 a kezdeti részecskeszám, λ az anyagra jellemző bomlási állandó. A felezési idő alatt a radioaktív atomok száma a kezdeti érték felére csökken, akármelyik pillanat az idő mérésének kezdete
- Exponenciális függvénnyel írható le, azaz mértani sorozat szerint változó folyamatok pl a radioaktív izotópok bomlási egyenletei, vagy az oldódás folyamata, a kondenzátor feltöltődésének és kisülésének folyamata, baktériumok számának változása

Matematikatörténeti vonatkozások:

- A legrégebbi írásos emléken, a **Rhind-papíruszon** (~Kr. e. 1750 körül) található egy mértani sorozatos feladat: 7 ház mindegyikében 7 macska él, mindegyik macska 7 egeret őriz. Hány egér volt összesen? Valószínűleg az egyiptomiak ismerték a mértani sorozat összegképletének kiszámítási módját (nem magát a képletet, hanem a módszert).
- A mértani sorozat összegképletét az 1300-as években **Beldomandi** olasz matematikus találta ki.
- **Koch** (1870–1924) svéd matematikus megalkotta a **Koch-görbét**: egy szabályos háromszög oldalait harmadoljuk, a középső harmad fölé írjunk kifele egy újabb szabályos háromszöget, majd ezen a háromszögön hajtsuk végre az oldal harmadolását, a középső harmad fölé írjunk kifele egy újabb szabályos háromszöget, majd ezt az eljárást folytassuk a végtelenségig. Mekkora a kialakult alakzat kerülete, területe? Megoldás végtelen mértani sorral.