16. Konvex sokszögek tulajdonságai. Szabályos sokszögek. Gráfok

Vázlat:

I. Konvex sokszögek tulajdonságai
II. Szabályos sokszögek
III. Gráfok
IV. Alkalmazások, matematikatörténeti vonatkozások

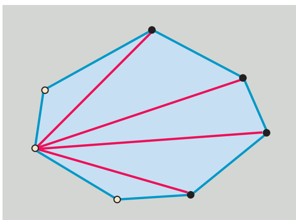
Kidolgozás

I. Konvex sokszögek tulajdonságai

DEFINÍCIÓ: Egy sokszög **konvex,** ha bármely két belső pontját összekötő szakasz minden pontja a sokszög belső pontja.

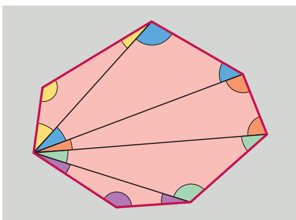
TÉTEL: Egy ***n* oldalú konvex sokszög átlóinak száma**: $\frac{n\cdot(n-3)}{2}$.

BIZONYÍTÁS: Az n oldalú, vagyis n csúcsú konvex sokszög minden csúcsából $n-3$ darab átló húzható (nem húzható átló a két szomszédos csúcsba és saját magába). Így n csúcsból $n\cdot(n-3)$ átló húzható. Ekkor viszont minden átlót kétszer számoltunk, mert figyelembe vettük a kezdőpontjánál és a végpontjánál is. Ezért az összes átló száma $\frac{n\cdot(n-3)}{2}$.



TÉTEL: Egy n oldalú konvex sokszög **belső szögeinek összege** $(n-2)\cdot 180^\circ$.

BIZONYÍTÁS: A konvex sokszög egy csúcsából $n-3$ átló húzható (nem húzható átló a két szomszédos csúcsba és saját magába). Ez az $n-3$ darab átló $n-2$ darab háromszögre bontja a sokszöget. Egy háromszög belső szögeinek összege 180°, így az $n-2$ darab háromszög belső szögeinek összege $(n-2)\cdot 180^\circ$, ami éppen a sokszög belső szögeinek összegét adja.



DEFINÍCIÓ: A konvex sokszög belső szögeinek mellékszögeit a sokszög **külső szög**einek nevezzük.

TÉTEL: Egy n oldalú konvex sokszög **külső szögeinek összege** 360º.

BIZONYÍTÁS: A konvex sokszög egy belső szögének és a hozzá tartozó külső szögnek az összege 180º, mert mellékszögpárt alkotnak. Így az n csúcsnál levő belső szög-külső szög párok összege $n \cdot 180º$. Ebből levonva a belső szögek összegét, megkapjuk a külső szögek összegét: $n \cdot 180º - (n-2) \cdot 180º = (n-(n-2)) \cdot 180º = 2 \cdot 180º = 360º$.

II. Szabályos sokszögek

DEFINÍCIÓ: Egy sokszög **szabályos,** ha minden oldala egyenlő hosszú és minden szöge egyenlő.

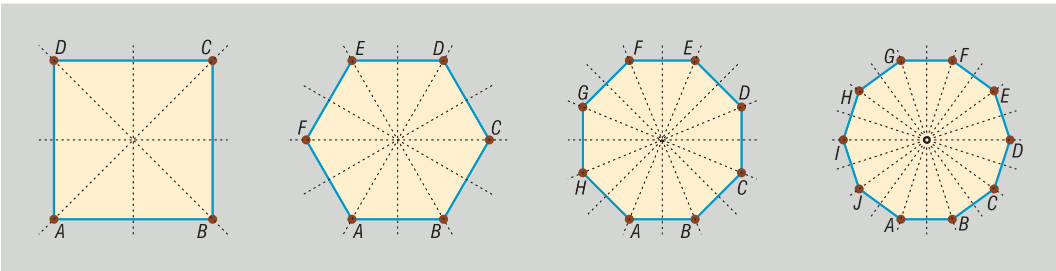
TÉTEL: Egy n oldalú szabályos sokszög **egy belső szöge** $\dfrac{(n-2)\cdot 180º}{n}$.

BIZONYÍTÁS: A konvex sokszög belső szögeinek összege $(n-2) \cdot 180º$, ami éppen n darab egyenlő szög összege, mert a belső szögek egyenlők. Így egy belső szög nagysága ennek az n-ed része: $\dfrac{(n-2)\cdot 180º}{n}$.

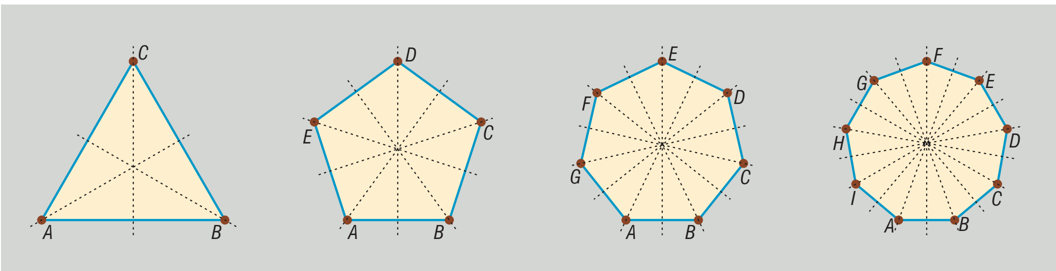
Szimmetriák szabályos sokszögekben:

Tengelyes szimmetria: egy szabályos n-szögnek n darab szimmetriatengelye van. Különbséget kell tennünk a szimmetriatengelyek milyensége között: szimmetriatengely lehet oldalfelező merőleges, illetve szögfelező.

Páros n esetén ezek elkülönülnek: a tengelyek fele, azaz $\dfrac{n}{2}$ darab tengely a szemköztes oldalak oldalfelező merőlegese; a tengelyek másik fele, azaz $\dfrac{n}{2}$ darab tengely a szemközti csúcsok szögfelező egyenese.

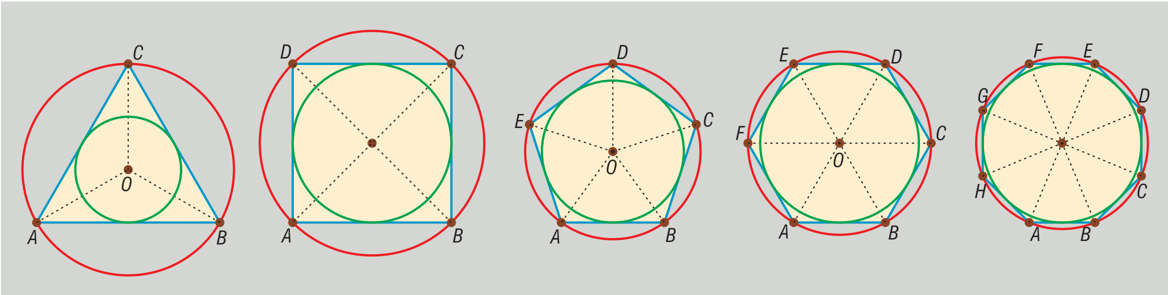


Páratlan n esetén bármely szimmetriatengely az egyik oldal oldalfelező merőlegese és a szemköztes szög szögfelezője is egyben.



A szimmetriatengelyek egy pontban metszik egymást, szabályos sokszögek esetében ez a pont a sokszög köré írható és a sokszögbe írható kör középpontja is. Mindezekből következik, hogy a szabályos sokszögek húrsokszögek és érintősokszögek is egyben. A körök középpontjából a szabályos

n-szög n darab egyenlő szárú háromszögre bontható, amelynek alapja a sokszög oldala, szára a sokszög köré írható kör sugara, alaphoz tartozó magassága a sokszögbe írható kör sugara.



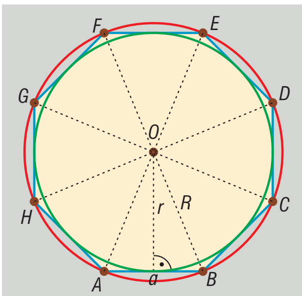
Középpontos szimmetria: a páros oldalszámú szabályos sokszögek középpontosan szimmetrikusak. A szimmetriaközéppont két szimmetriatengely metszéspontja.

Forgásszimmetria: minden szabályos sokszög forgásszimmetrikus. A forgatás középpontja a sokszög középpontja (a szimmetria tengelyek metszéspontja, páros oldalszám esetén a középpontos szimmetria középpontja is), a forgatás szöge pedig lehet $k \cdot \frac{360°}{n}$, ahol $k \in \mathbb{Z}$.

TÉTEL: Egy n oldalú szabályos sokszög **területe:** $T = n \cdot \frac{R^2 \cdot \sin\left(\frac{360°}{n}\right)}{2}$, ahol R a sokszög köré írt kör sugara.

TÉTEL: Egy n oldalú szabályos sokszög **kerülete:** $K = 2 \cdot n \cdot R \cdot \sin\left(\frac{180°}{n}\right)$, ahol R a sokszög köré írt kör sugara.

TÉTEL: Egy n oldalú szabályos sokszög **területe:** $T = \frac{r \cdot K}{2}$, ahol r a sokszögbe írt kör sugara, K a kerülete, ebből $T = \frac{r \cdot n \cdot a}{2}$, ahol r a sokszögbe írt kör sugara, a pedig az oldalhossza.



III. Gráfok

A gráfok nagyon jól szemléltetik egy halmaz elemei közti kapcsolatokat. Gráfokkal szemléltethetők pl. egy társaság ismeretségi viszonyai, vagy bármilyen hálózat kapcsolódási viszonyai.

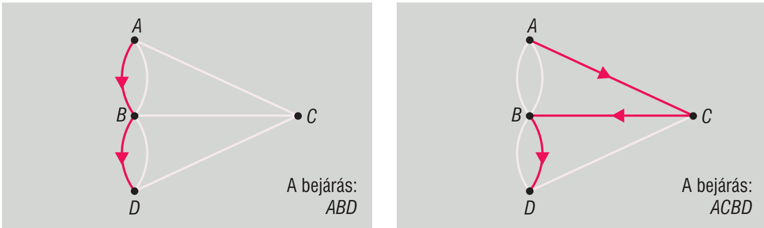
DEFINÍCIÓ: A **gráf** pontokból és vonalakból áll. Minden vonal két (nem feltétlenül különböző) pontot köt össze. A pontok a **gráf pontjai**, a vonalak a **gráf élei**.

DEFINÍCIÓ: A gráfokban előfordulhat olyan él is, melynek mindkét végpontja ugyanaz a pont, az ilyen él neve **hurokél**.

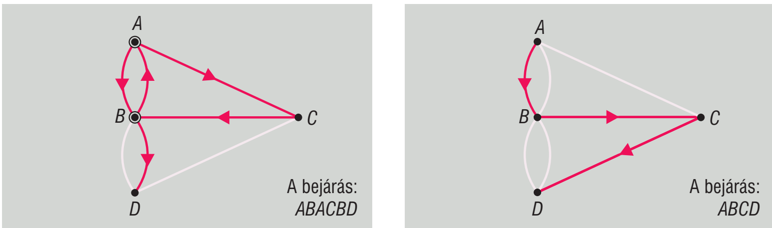
DEFINÍCIÓ: A gráf olyan pontját, amelyből nem vezet él**, izolált pont**nak nevezzük.

DEFINÍCIÓ: Két csúcs között több élt is húzhatunk, ezek a **többszörös él**ek.

DEFINÍCIÓ: Az **út** az élek olyan egymáshoz kapcsolódó sora, amely egyetlen ponton sem halad át egynél többször.

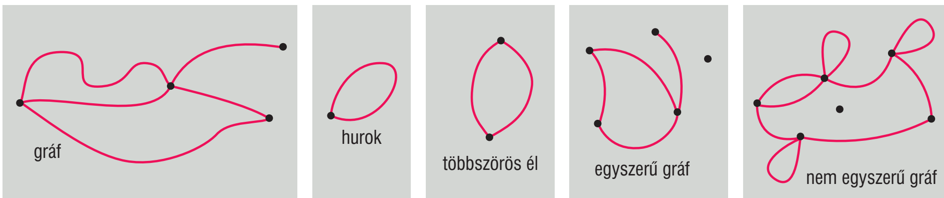


DEFINÍCIÓ: A **séta** (vonal) a gráf csúcsainak és éleinek az a sora, amelyben az élek ezeket a pontokat kötik össze és az élek nem ismétlődnek, egy csúcs többször is előfordulhat. A vonal zárt, ha kezdő és végpontja megegyezik, egyébként nyílt.



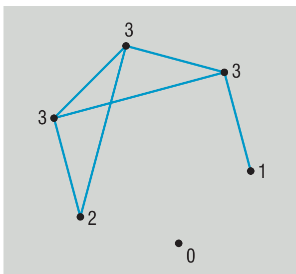
DEFINÍCIÓ: A **kör** (vagy körséta) olyan séta, amelynek kezdő és végpontja megegyezik és a pontok nem ismétlődnek.

DEFINÍCIÓ: Egy gráfot **egyszerű gráf**nak nevezünk, ha nincs benne sem hurokél, sem többszörös él.



DEFINÍCIÓ: Egy gráf egy pontjához illeszkedő élvégek számát a pont **fokszám**ának (fokának) nevezzük.

TÉTEL: A legalább 2 csúcsú egyszerű gráfban van 2 azonos fokú csúcs.



BIZONYÍTÁS: Az n csúcsú gráf minden pontjának fokszáma legfeljebb $n-1$. Így az n darab fokszám között a skatulya elv miatt biztosan van kettő egyenlő.

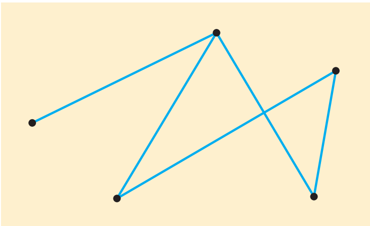
TÉTEL: A pontok **fokszámösszege** az élek számának kétszerese.

TÉTEL: Minden gráfban a pontok fokszámának összege páros szám.

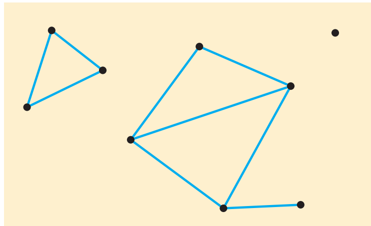
TÉTEL: A páratlan fokszámú pontok halmaza páros (hiszen a páros fokszámú pontok fokszámának az összege páros, és ehhez hozzáadva a páratlan fokszámú pontok összegét, páros számot kell kapnunk).

DEFINÍCIÓ: Egy gráf **összefüggő gráf**, ha bármely pontjából bármely másik pontjába élek mentén el lehet jutni.

összefüggő gráf



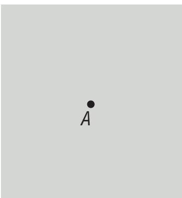
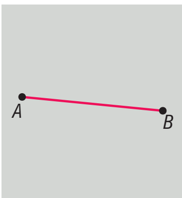
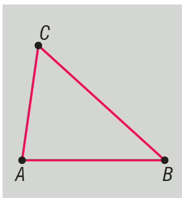
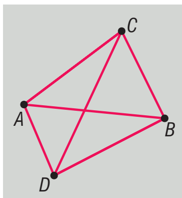
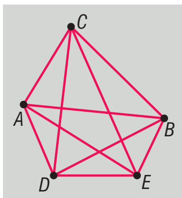
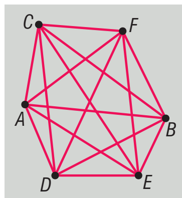
nem összefüggő gráf



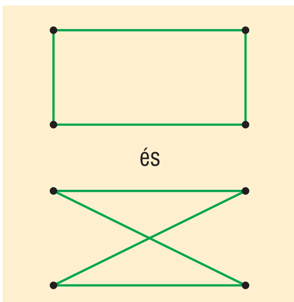
DEFINÍCIÓ: Ha egy gráfnak n pontja van ($n \in \mathbb{Z}^+$) és mindegyik pontból pontosan egy él vezet a többi ponthoz, akkor a gráfot n pontú **teljes gráf**nak nevezzük.

TÉTEL: n pontú teljes gráf éleinek a száma: $\frac{n \cdot (n-1)}{2}$.

TÉTEL: n pontú teljes gráfban a fokszámok összege: $n \cdot (n-1)$.

1 pontú teljes gráf	**2 pontú teljes gráf**	**3 pontú teljes gráf**	**4 pontú teljes gráf**	**5 pontú teljes gráf**	**6 pontú teljes gráf**
					

DEFINÍCIÓ: Két gráfot **izomorf**nak nevezünk, ha pontjaik és éleik kölcsönösen egyértelműen és illeszkedéstartóan megfeleltethetőek egymásnak.



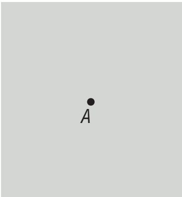
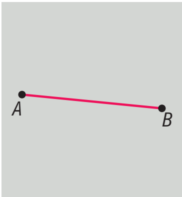
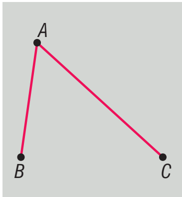
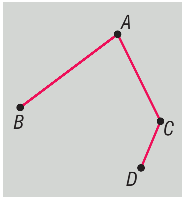
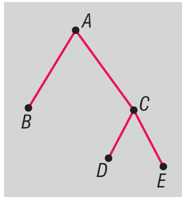
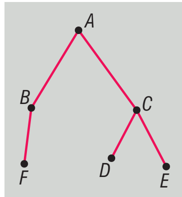
DEFINÍCIÓ: A **fagráf** olyan összefüggő gráf, amely nem tartalmaz kört.

TÉTEL: A fagráf maximális körmentes gráf (bármely két pontját összekötjük, amelyek között nem volt él, akkor a gráf már tartalmaz kört).

TÉTEL: A fagráf minimális összefüggő gráf (bármely élet elhagyjuk, akkor a gráf már nem összefüggő).

TÉTEL: A fagráf bármely két csúcsát egyetlen út köti össze

TÉTEL: Az n csúcsú fagráfnak $n-1$ éle van.

1 pontú fagráf	**2 pontú fagráf**	**3 pontú fagráf**	**4 pontú fagráf**	**5 pontú fagráf**	**6 pontú fagráf**
					

TÉTEL: Minden egynél több csúcsú fagráfnak van legalább 2 elsőfokú csúcsa.

IV. Alkalmazások

Sokszögek:
- Görbült felületekkel határolt testek számítógépes ábrázolásakor a test felületét sokszöglapokból álló felületekkel közelítik meg.
- A kör kerületének és területének meghatározását végezhetjük a körbe, illetve a kör köré írt szabályos sokszögek kerületének, illetve területének segítségével. Ez egyben a π értékének közelítése.
- A kristályszerkezetekben jellemzően előfordulnak szabályos sokszögek (grafitban szabályos hatszög).
- Az aranymetszés aránya egyenlő a szabályos ötszög átlóinak osztásarányával.
- Az építészetben a szimmetriákat, a szabályos sokszögeket gyakran alkalmazzák statisztikai és esztétikai szempontból.

Gráfok:
- Minimális költségű hálózatok (elektromos hálózatok, közlekedési útvonalak) tervezése
- Szerencsejátékok nyerési esélyeinek meghatározása
- Gráfokat jól lehet alkalmazni szociológiai, pszichológiai vizsgálatokban a kapcsolati rendszerek ábrázolásához
- Informatikában algoritmusok tervezése

Matematikatörténeti vonatkozások:
- Az ókorban már ismerték a szabályos háromszög és a szabályos négyszög (négyzet) szerkesztési módszerét. **Hippaszosz** (Kr. e. V. században) kidolgozta a szabályos ötszög szerkesztési módját.
- **Gauss** 19 évesen (1796-ban) kidolgozta a szabályos sokszögek szerkesztési algoritmusát, a szabályos 17-szög szerkesztési eljárását meg is mutatta.
- A gráfokkal először **Euler** foglalkozott 1736-ban a Königsbergi hidak néven ismertté vált feladatában (a gráf minden élén pontosan egyszer megyünk végig).
- 1835-ben **Hamilton** ír matematikus értekezést írt a gráfokról (Hamilton kör néven vált ismertté: a gráf minden csúcsát pontosan egyszer érintjük).
- **Kőnig Dénes** magyar matematikus írta le először tudományos alapokra helyezve a gráfelméletet 1936-ban (A véges és a végtelen gráfok elmélete című művében).