7. Másodfokú egyenletek és egyenlőtlenségek. Másodfokúra visszavezethető egyenletek. Egyenletek ekvivalenciája, gyökvesztés, hamis gyök, ellenőrzés

Vázlat:

I. Egyenlet, egyenlet gyökének fogalma
II. Másodfokú egyenletek, megoldásuk
III. Másodfokú egyenlőtlenségek megoldása
IV. Új ismeretlen bevezetésével másodfokúra visszavezető egyenletek
V. Egyenletek ekvivalenciája
VI. Gyökvesztés
VII. Hamis gyök
VIII. Ellenőrzés
IX. Alkalmazások, matematikatörténeti vonatkozások

Kidolgozás:

I. Egyenlet

DEFINÍCIÓ: Az **egyenlet** bármely két egyenlőségjellel összekötött kifejezés. A kifejezésben szereplő változók az **ismeretlen**ek.
Az egyenlet olyan változótól függő állítás (nyitott mondat), amelynek az alaphalmaza számhalmaz.

DEFINÍCIÓ: Az **alaphalmaz** az ismeretlenek azon értékeinek halmaza, ahol az egyenletet vizsgáljuk, ahol a megoldásokat keressük.

DEFINÍCIÓ: Az egyenlet **értelmezési tartománya** az alaphalmaznak az a legbővebb részhalmaza, ahol az egyenletben szereplő kifejezések értelmezhetőek.

DEFINÍCIÓ: Az egyenletet igazzá tevő értékek az **egyenlet megoldásai** vagy **gyökei**.

DEFINÍCIÓ: Az alaphalmaz azon elemeinek halmaza, amelyekre az egyenlet igaz, vagyis az egyenlet megoldásainak (vagy gyökeinek) halmaza az **egyenlet megoldáshalmaza** (vagy igazsághalmaza).

DEFINÍCIÓ: Az **azonosság** olyan egyenlet, amelynek a megoldáshalmaza megegyezik az egyenlet értelmezési tartományával.

II. Másodfokú egyismeretlenes egyenlet

DEFINÍCIÓ: **Másodfokú egyismeretlenes egyenlet** $ax^2 + bx + c = 0$ alakra hozható, ahol $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$.
Megoldása lehetséges a megoldóképlettel, szorzattá alakítással, teljes négyzetté alakítással, Viète-formulával.
Pl. $x^2 + 3x = 0$ vagy $x^2 + 6x + 9 = 0$

TÉTEL: Az $ax^2 + bx + c = 0$ $(a \neq 0)$ egyenlet **megoldóképlete:** $x_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$, ahol $b^2 - 4ac \geq 0$.

BIZONYÍTÁS:

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad / \cdot 4a$$
$$4a^2x^2 + 4abx + 4ac = 0$$

teljes négyzetté alakítással:

$$(2ax + b)^2 - b^2 + 4ac = 0 \quad / + b^2 - 4ac$$
$$(2ax + b)^2 = b^2 - 4ac$$

Mivel a bal oldalon négyzetszám van, ami nem lehet negatív, így $b^2 - 4ac$ sem lehet az. (Ha $b^2 - 4ac < 0$, akkor nincs megoldás). Ha $b^2 - 4ac \geq 0$, akkor vonjunk mindkét oldalból gyököt, figyelve, hogy elkerüljük a gyökvesztést:

$$|2ax + b| = \sqrt{b^2 - 4ac}$$
$$2ax + b = \pm\sqrt{b^2 - 4ac}$$
$$2ax = -b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}$$
$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

DEFINÍCIÓ: Az $ax^2 + bx + c = 0$ $(a \neq 0)$ **másodfokú egyenlet diszkriminánsa** $D = b^2 - 4ac$.

- Ha $D > 0$, akkor az egyenletnek két különböző valós gyöke van: $x_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$.
- Ha $D = 0$, akkor az egyenletnek két egymással egyenlő gyöke, vagyis 1 valódi gyöke van: $x = -\dfrac{b}{2a}$, ezt kétszeres gyöknek is nevezzük, mert $x_1 = x_2$.
- Ha $D < 0$, akkor az egyenletnek nincs valós gyöke.

TÉTEL: A másodfokú egyenlet **gyöktényezős alak**ja:
Ha egy $ax^2 + bx + c = 0$ $(a \neq 0)$ egyenlet megoldható (azaz $D \geq 0$) és két gyöke van x_1 és x_2, akkor az $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$ minden valós x-re igaz.

TÉTEL: **Viète-formulák:** másodfokú egyenlet gyökei és együtthatói közti összefüggések:
Az $ax^2 + bx + c = 0$ $(a \neq 0)$ alakban felírt $(D \geq 0)$ másodfokú egyenlet gyökeire: $x_1 + x_2 = -\dfrac{b}{a}$ és $x_1 \cdot x_2 = \dfrac{c}{a}$.

BIZONYÍTÁS:

$$x_1 + x_2 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} + \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-b - b}{2a} = \frac{-2b}{2a} = -\frac{b}{a}.$$

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \cdot \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{(-b)^2 - \left(\sqrt{b^2 - 4ac}\right)^2}{(2a)^2} = \frac{b^2 - (b^2 - 4ac)}{4a^2} = \frac{4ac}{4a^2} = \frac{c}{a}.$$

Grafikus megoldás: az $x \mapsto ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$ függvény zérushelyei adják a megoldást. (Sőt $a > 0$ esetre törekszem!)

$$x \mapsto ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x\right) + c = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2}\right] + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a}.$$

Olyan parabola a kép, amelynek tengelypontja $T\left(-\dfrac{b}{2a}, \dfrac{4ac - b^2}{4a}\right)$.

III. Másodfokú egyenlőtlenségek megoldása

DEFINÍCIÓ: Egyenlőtlenségről beszélünk, ha algebrai kifejezéseket a $<$, $>$, $\leq$, $\geq$ jelek valamelyikével kapcsoljuk össze. Ha ezek a kifejezések másodfokúak, akkor **másodfokú egyenlőtlenség**ről beszélünk. A másodfokú egyenlet megoldásához hasonlóan 0-ra rendezünk úgy, hogy a főegyüttható pozitív legyen, tehát $a > 0$. Ekkor $ax^2 + bx + c \geq 0$, $ax^2 + bx + c > 0$, $ax^2 + bx + c \leq 0$, $ax^2 + bx + c < 0$ alakúra rendezhető minden másodfokú egyenlőtlenség.

Az egyenlőtlenségek megoldási módszerei hasonlóak az egyenletek megoldási módszereihez:

1. A **mérlegelv,** alkalmazása nehézkes másodfokú egyenlőtlenségek esetében.
2. **Grafikus megoldás:** A másodfokú egyenlőtlenségek megoldásánál fontos szerepet játszik, hogy az egyenlőtlenségekben szereplő másodfokú kifejezések grafikonja a koordináta-rendszerben az y tengellyel párhuzamos tengelyű parabola. Az egyenlőtlenségben szereplő másodfokú kifejezés zérushelyének megállapítása után vázlatosan ábrázoljuk a kifejezést leíró másodfokú függvényt. Majd a zérushelyek számának függvényében meghatározzuk a megoldáshalmazt. (lásd 20. tétel)

IV. Új ismeretlen bevezetésével másodfokúra visszavezethető egyenletek

Magasabb fokú, illetve bizonyos exponenciális, logaritmikus, abszolút értékes, gyökös, trigonometrikus egyenletek új ismeretlen bevezetésével másodfokú egyenletre vezethetők vissza.

$$\left.\begin{array}{l} x^6-3x^3-4=0 \\ 2^{2x}-3\cdot 2^x-4=0 \\ \lg^2 x-3\lg x-4=0 \\ (x-2)^2-3|x-2|-4=0 \\ x+1-3\sqrt{x+1}-4=0 \\ \sin^2 x-3\sin x-4=0 \end{array}\right\}$$

Ezek az egyenletek mind az $a^2 - 3a - 4 = 0$ másodfokú egyenletre vezethetők vissza új ismeretlen bevezetésével: ahol az új ismeretlen rendre $a = x^3$, $a = 2^x$, $a = \lg x$, $a = |x-2|$, $a = \sqrt{x+1}$, $a = \sin x$. Az a-ra nézve másodfokú egyenlet megoldásai: $a_1 = 4$, $a_2 = -1$. Visszahelyettesítve az eredeti ismeretlent rendre a következőket kapjuk:

$x^3 = 4 \Rightarrow x = \sqrt[3]{4}$, illetve $x^3 = -1 \Rightarrow x = -1$;

$2^x = 4 \Rightarrow x = 2$, illetve $2^x = -1 \Rightarrow$ nincs megoldás;

$\lg x = 4 \Rightarrow x = 10000$, illetve $\lg x = -1 \Rightarrow x = 0{,}1$;

$|x-2| = 4 \Rightarrow x - 2 = \pm 4 \Rightarrow x_1 = 6, x_2 = -2$, illetve $|x-2| = -1 \Rightarrow$ nincs megoldás;

$\sqrt{x+1} = 4 \Rightarrow x = 15$ és $\sqrt{x+1} = -1 \Rightarrow$ nincs megoldás;

$\sin x = 4 \Rightarrow$ nincs megoldás, illetve $\sin x = -1 \Rightarrow x = \dfrac{3\pi}{2} + k\cdot 2\pi$, ahol $k \in \mathbb{Z}$.

V. Egyenletek ekvivalenciája (egyenértékűsége)

DEFINÍCIÓ: Két egyenlet **ekvivalens,** ha alaphalmazuk és megoldáshalmazuk is azonos.

DEFINÍCIÓ: Ekvivalens átalakítás az olyan átalakítás, amit egyenletek megoldása közben végzünk és ezzel az átalakítással az eredetivel ekvivalens egyenletet kapunk.

Ekvivalens átalakítás például az egyenlet mérlegelvvel történő megoldása. Nem ekvivalens átalakítás például változót tartalmazó kifejezéssel osztani az egyenlet mindkét oldalát, vagy négyzetre emelni az egyenlet mindkét oldalát.
Az egyenletek megoldása során nem mindig van lehetőségünk ekvivalens átalakításokat végezni. Ha lehet, ilyen esetekben vagy az értelmezési tartomány, vagy az értékkészlet vizsgálatával próbálunk feltételeket felállítani.
De még így is előfordulhat, hogy olyan átalakítást végzünk, amely során
- az új egyenletnek szűkebb az értelmezési tartománya, mint az eredetinek, ekkor gyökvesztés állhat fenn;
- az új egyenletnek bővebb az értelmezési tartománya, mint az eredetinek, ekkor gyöknyerés állhat fenn.

VI. Gyökvesztés

Gyökvesztés következhet be, ha a változót tartalmazó kifejezéssel osztjuk az egyenlet mindkét oldalát, vagy olyan átalakítást végzünk, amely szűkíti az értelmezési tartományt.

Pl. hibás megoldás:

$$x^3+2x^2+x=0$$
$$\Downarrow \xleftarrow{:x}$$
$$x^2+2x+1=0$$
$$x=-1$$

helyes megoldás:

$$x^3+2x^2+x=0$$
$$x(x^2+2x+1)=0$$
$$x=0$$
vagy
$$x^2+2x+1=0 \Leftrightarrow x=-1$$

Pl. hibás megoldás:

$$\lg(x+2)^2=2\lg5 \leftarrow D_f=R-\{-2\}$$
$$2\lg(x+2)=2\lg5 \leftarrow D_f=]-2,\infty[$$
$$\lg(x+2)=\lg5$$
$$x+2=5$$
$$x=3$$

helyes megoldás:

$$\lg(x+2)^2=2\lg5 \leftarrow D_f=R-\{-2\}$$
$$\lg(x+2)^2=\lg25$$
$$(x+2)^2=25$$
$$x+2=5 \Rightarrow x=3$$
vagy
$$x+2=-5 \Rightarrow x=-7$$

VII. Hamis gyök

Hamis gyököt kaphatunk, ha az egyenlet mindkét oldalát négyzetre emeljük, vagy mindkét oldalt az ismeretlent tartalmazó kifejezéssel szorozzuk, vagy olyan átalakítást végzünk, ami bővíti az értelmezési tartományt.

1. példa: $\sqrt{7-x}=1-x \quad /()^2$.

Eredeti feltétel: $7-x\ge 0 \Rightarrow x\le 7 \Rightarrow D_f=]-\infty, 7]$.

A gyöknyerés kiküszöbölhető közbülső feltétellel: $1-x\ge 0 \Rightarrow x\le 1 \Rightarrow D_{f_{\text{új}}}=]-\infty, 1]$.

$7-x=(1-x)^2 \Rightarrow x^2-x-6=0 \Rightarrow x_1=3\notin D_{f_{\text{új}}},\ x_2=-2\in D_{f_{\text{új}}}$

2. példa: $2x+\dfrac{1}{x-1}=2+\dfrac{1}{x-1} \quad / -\dfrac{1}{x-1} \Rightarrow 2x=2 \Rightarrow x=1$.

A gyöknyerés ekkor is kiküszöbölhető, ha az eredeti egyenletre írunk D_f-et.

3. példa: $\sqrt{x+6}-\sqrt{x+2}=\sqrt{2x+8}$.

Eredeti feltételek: $x+6\ge 0 \Rightarrow x\ge -6$; $x+2\ge 0 \Rightarrow x\ge -2$; $2x+8\ge 0 \Rightarrow x\ge -4$; $\Rightarrow D_f=[-1;\infty[$.

Ha az egyenletet először rendezzük úgy, hogy mindkét oldal nemnegatív legyen, négyzetre emeljük mindkét oldalt, rendezzük úgy, hogy a gyökös kifejezés az egyik oldalra kerüljön, a többi tag a másik oldalra, majd a négyzetre emelés előtt közbülső feltételt írunk, hogy a gyöknyerést kiküszöböljük:

$\sqrt{x+6} = \sqrt{x+2} + \sqrt{2x+8} \rightarrow$ / négyzetre emelés

$x+6 = x+2+2\cdot\sqrt{x+2}\cdot\sqrt{2x+8}+2x+8 \rightarrow$ /rendezés

$-2x-4 = 2\cdot\sqrt{x+2}\cdot\sqrt{2x+8} \rightarrow$ közbülső feltétel írása: a jobb oldal nemnegatív, a bal oldalnak is annak kell lennie, mivel egyenlők, azaz $-2x-4 \ge 0 \Rightarrow x \le -2 \Rightarrow D_{f_{új}} = \{-2\}$. Ebben az esetben nem is kell elvégezni a négyzetre emelést, hiszen csak egy szám felel meg az értelmezésnek, ha van megoldás, akkor csak ez az egy szám lehet. Ennek ellenőrzésével eldönthető, hogy ez valóban megoldás-e.

Akár a gyökvesztés, akár a hamis gyök elkerülhető, ha az egyenlet megoldása során mindig figyelünk az értelmezési tartomány változására, ha lehet, az értékkészletet is vizsgáljuk, mert így szűkíteni lehet az alaphalmazt.

VIII. Ellenőrzés

Egyenletek megoldásánál két szempontból is fontos szerepe van az ellenőrzésnek: ki tudjuk szűrni a megoldás során esetleg elkövetett hibáinkat, illetve ki tudjuk zárni a hamis gyököket. Ez utóbbiak elkerülhetők, ha a megoldás során nem bővítjük az értelmezési tartományt.
A kapott megoldásokat behelyettesítéssel ellenőrizni kell, így el lehet dönteni, hogy az eredeti egyenletnek is megoldásai-e, vagy csak az átalakítottnak.

IX. Alkalmazások:

- Egyenes, kör, parabola adott abszcisszájú vagy ordinátájú pontjának meghatározása
- Magasabb fokú egyenletek megoldása
- Pitagorasz-tétel
- Koszinusztételből oldal kiszámítása
- Mély szakadék mélységének meghatározása: egy ledobott kő dobásától a szakadék alján történő koppanás hangjának meghallásáig eltelt idő mérésével

Matematikatörténeti vonatkozások:

- Az ókori Mezopotámiából Kr. e. 2000-ből származó **ékírásos táblák**on található jelek alapján tudjuk, hogy az akkori írástudók már meg tudtak oldani első és másodfokú egyenleteket és egyenletrendszereket.
- A legrégebbi írásos emléken, a **Rhind-papíruszon** (~Kr. e. 1750.) láthatjuk a nyomait a gyakorlatból eredő algebrai ismereteknek: 85, a hétköznapi élettel összefüggő számolási és geometriai feladatot tartalmaz. Ezek között megtalálhatóak az egyszerű elsőfokú egyismeretlenes egyenletek megoldási módszerei.
- Időszámításuk kezdete körül keletkezett Kínában a **Matematika kilenc fejezetben** című mű. Ennek utolsó fejezetében már megtalálható a másodfokú egyenlet megoldásának szabálya, amely azonos a ma használt megoldóképlettel.
- **Euklidesz** Kr. e. 300 körül élt görög matematikus Elemek című művében geometrikus tárgyalásban vizsgálta a másodfokú egyenlet megoldásait, szakaszok arányával szerkesztette meg az ismeretlen szakaszt.
- **Viète** (1540–1603) francia matematikus használt először betűket az együtthatók jelölésére, ő írta fel először a gyökök és együtthatók közti összefüggéseket.
- **Cardano** (1501–1576) olasz matematikus megalkotta a harmadfokú egyenlet megoldóképletét, a negyedfokú egyenlet megoldását visszavezette harmadfokú egyenlet megoldására.
- **Abel** (1802–1829) norvég matematikus bebizonyította, hogy az általános ötödfokú-, vagy magasabbfokú egyenletekre nem létezik univerzális megoldóképlet (róla nevezték el a matematikai Nobel-díjnak megfelelő Abel-díjat).
- **Galois** (1811–1832) francia matematikus megmutatta, melyek azok az egyenlettípusok, amelyek a négy alapművelettel és gyökvonással megoldhatók.