

21. Térelemek távolsága és szöge. Térbeli alakzatok. Felszín- és térfogatszámítás

Vázlat:

- I. Térelemek, ezek illeszkedése, párhuzamossága, szöge, távolsága
- II. Térbeli alakzatok: testek csoportosítása
- III. Testek felszíne
- IV. Testek térfogata
- V. Testek felszíne, térfogata képletekkel
- VI. Alkalmazások, matematikatörténeti vonatkozások

Kidolgozás:

I. Térelemek

Pont, egyenes, sík – alapfogalmak, nem definiáljuk őket, hanem a szemléletből kialakult jelentésükre hagyatkozunk.

DEFINÍCIÓ: Két térelem **illeszkedő**, ha egyik részhalmaza a másiknak.

DEFINÍCIÓ: Két egyenes **párhuzamos**, ha egy síkban vannak és nem metszik egymást.

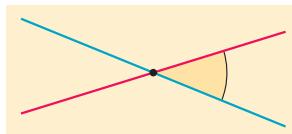
DEFINÍCIÓ: Egyenes és sík, illetve 2 sík párhuzamos, ha nincs közös pontjuk.

DEFINÍCIÓ: Egy egyenest egy rá illeszkedő pont két **félgyenesre** oszt, ez a pont minden két félgyenes kezdőpontja.

DEFINÍCIÓ: Egy síkban két, azonos pontból kiinduló félgyenest és az általuk meghatározott bár-melyik síkrészt **szögnek** nevezünk. A közös kezdőpont a szög csúcspontja, a két félgyenes a szög szárai, a síkrész a szögtartomány.

DEFINÍCIÓ: Illeszkedő vagy párhuzamos **térelemek szöge** 0° .

DEFINÍCIÓ: Két metsző egyenes 4 szöget alkot, ezek közül 2-2 egyenlő. Ha a két egyenes nem merőleges egymásra, akkor a **két egyenes hajlásszöge** a kétfajta szög közül a kisebbik. Ha a két egyenes merőleges egymásra, akkor a hajlásszögük derékszög. Eszerint két metsző egyenes hajlásszöge 90° -nál nem nagyobb.



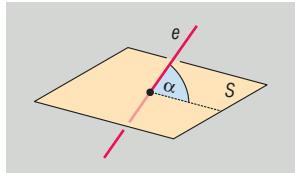
DEFINÍCIÓ: Két egyenes **kitérő**, ha nincsenek egy síkban.

DEFINÍCIÓ: Két **kitérő egyenes hajlásszöge** egyenlő a tér egy tetszőleges pontján átmenő és az adott egyenesekkel párhuzamos egyenesek hajlásszögével. Ez a szög a pont megválasztásától független.

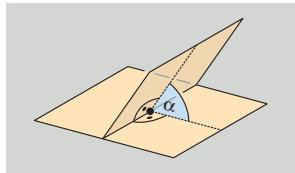
TÉTEL: Egy, a síkot metsző egyenes merőleges a síkra, ha merőleges a sík minden egyenesére (**síkra merőleges egyenes tétele**).

Definíció szerint egy egyenes merőleges a síkra, ha merőleges a sík minden olyan egyenesére, amely átmegy az egyenes és a sík metszéspontján.

DEFINÍCIÓ: Ha az e egyenes nem merőleges a síkra, akkor az egyenes merőleges vetülete a síkon szintén egyenes (e'). Ebben az esetben az **egyenes és a sík hajlásszögének** az egyenes és a vetülete hajlásszögét értjük. Ez a szög a legkisebb az egyenes és a sík egyenesei által bezárt szögek között.



DEFINÍCIÓ: Ha két sík nem párhuzamos egymással, akkor metszésvonaluk egy pontjában minden két síkban merőlegest állítunk a metszésvonalra. A **két sík hajlásszöge** a két egyenes hajlásszögével egyenlő. Ez a szög a pont megválasztásától független.

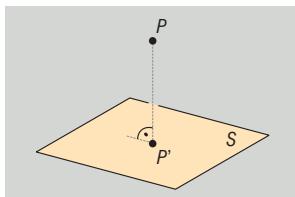


DEFINÍCIÓ: Két illeszkedő vagy metsző **térelém távolsága 0**.

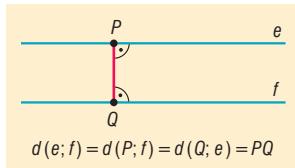
DEFINÍCIÓ: Két pont **távolsága** a pontokat összekötő szakasz hossza.

DEFINÍCIÓ: Pont és egyenes távolsága a pontból az egyenesre bocsátott merőleges szakasz hossza.

DEFINÍCIÓ: Pont és sík távolsága a pontból a síkra bocsátott merőleges szakasz hossza.

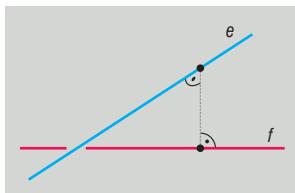


Párhuzamos egyenesek távolsága: bármelyik egyenes egy tetszőleges pontjának távolsága a másik egyenestől, azaz a két egyenest összekötő, minden kettőre merőleges szakasz hossza.

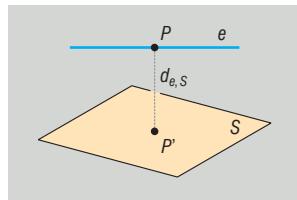


Két kitérő egyenes távolsága az őket összekötő, minden kettőre merőleges szakasz hossza.

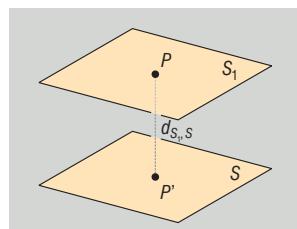
Az egyenest, mely minden létezik és egyértelmű és amely minden két kitérő egyenesre merőleges, a két egyenes normáltranszverzálisának nevezzük. Így két kitérő egyenes távolsága normáltranszverzálisuk közéjük eső részének hossza.



DEFINÍCIÓ: Egyenes és vele párhuzamos sík távolsága az egyenes egy tetszőleges pontjának a síktól való távolságával egyenlő, azaz az egyenes bármely pontjából a síkra bocsátott merőleges szakasz hosszával egyenlő.



DEFINÍCIÓ: Két párhuzamos sík távolsága az egyik sík egy tetszőleges pontjának a másiktól vett távolsága, azaz bármelyik sík egy tetszőleges pontjából a másik síkra bocsátott merőleges szakasz hossza.

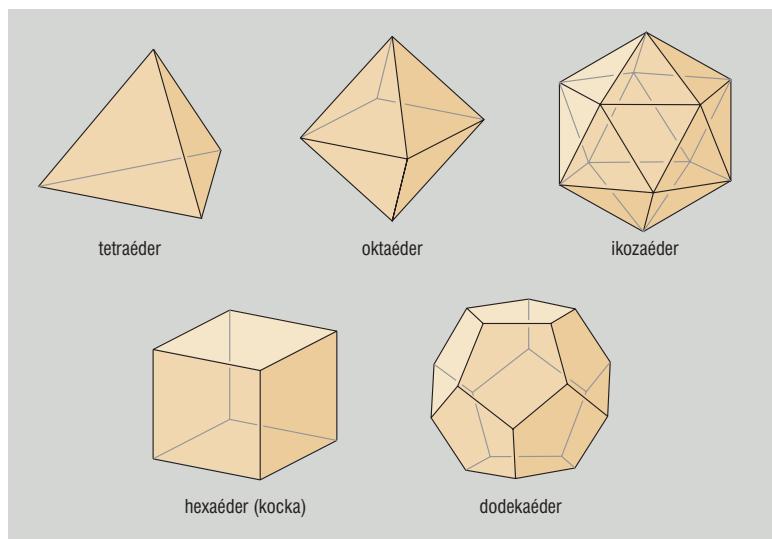


II. Térbeli alakzatok

DEFINÍCIÓ: A térnek véges felületekkel határolt részét **testnek** nevezzük.

DEFINÍCIÓ: A sokszöglapokkal határolt testek a **poliéderek**.

DEFINÍCIÓ: A szabályos testek olyan poliéderek, amelynek lapjai egybevágó szabályos sokszögek, valamennyi lapszögük és élszögük egyenlő.



DEFINÍCIÓ: Hengerszerű testek: egy síkidom kerületén levő pontokon keresztül párhuzamosokat húzunk egy, a síkidom síkjával nem párhuzamos egyenesssel. Az így kapott palástfelületet az eredeti síkidom síkjával és egy vele párhuzamos síkkal elmetszünk. A kapott véges test a hengerszerű test. Ha a test alaplapja sokszög, akkor **hasábnak**, ha kör, **hengernek** nevezzük.

Ha a párhuzamos egyenesek merőlegesek az alaplap síkjára, akkor a testet **egyenes hengerszerű testnek**, különben **ferde hengerszerű testnek** nevezzük.

DEFINÍCIÓ: Kúpszerű testek: egy síkidom kerületén levő pontokon keresztül egyeneseket húzunk egy, a síkidom síkjára nem illeszkedő ponton keresztül. A kapott véges test a kúpszerű test. Ha a test alaplapja sokszög, akkor **gúlának**, ha kör, **kúpnak** nevezzük.

Ha a kúp minden alkotója (az egyeneseknek az adott pont és a síkidom közti szakasza) egyenlő hosszú, akkor egyenes kúpszerű testnek, különben ferde kúpszerű testnek nevezzük.

Csonkakúpszerű testek: ha egy kúpszerű testet az alaplapjával párhuzamos síkkal elmeteszünk, akkor a két párhuzamos sík közti testet csonkakúpszerű testnek nevezzük. Ha a test alaplapja sokszög, akkor **csonkagúlának**, ha kör, **csonkakúpnak** nevezzük.

DEFINÍCIÓ: Gömbfelület: egy adott ponttól egyenlő távolságra levő pontok halmaza a térben. Gömböt kapunk, ha egy kört valamelyik átmérője mentén megforgatunk.

III. Testek felszíne

A felszín jele: A .

Poliéderek felszíne a poliéder határoló véges számú sokszöglap területének az összege.

Poliéderektől különböző testek felszíne:

- Ha a test felülete síkba kiteríthető, akkor ennek a kiterített felületnek a területe adja a test felszínét (pl. henger, kúp).
- Bármely nem poliéder felszíne a test által tartalmazott, illetve a testet tartalmazó poliéder felszíneivel határozható meg a kétoldali közelítés módszerével. Ha egyetlen olyan pozitív valós szám van, amely az adott testet tartalmazó poliéder felszíneinél nem nagyobb, valamint az adott test által tartalmazott poliéder felszíneinél nem kisebb, akkor azt a test felszínének tekintjük.

Forgátestek felszíne:

TÉTEL: Ha $f(x)$ függvény az $[a; b]$ intervallumon folytonos és $f(x) \geq 0$, akkor az $f(x)$ függvény grafikonjának az x tengely körüli megforgatásával keletkezett forgátest palástjának felszíne:

$$A = 2\pi \int_a^b f(x) \cdot \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx .$$

Ha a forgátest teljes felszínét akarjuk meghatározni, akkor a kapott palásthöz hozzá kell adni az alaplap és a fedőlap területét is.

TÉTEL: Hasonló testek felszínének aránya megegyezik a hasonlóság arányának négyzetével.

IV. Testek térfogata

A térfogat jele: V .

Poliéder térfogata poliéderre jellemző pozitív szám, amely rendelkezik a következő tulajdonságokkal:

- Az egységkocka térfogata 1.
- Az egybevágó poliéder térfogata egyenlő.
- Ha egy poliéder részpoliéderekre vágunk szét, akkor a részek térfogatának összege egyenlő az egész poliéder térfogatával.

Poliéderektől különböző testek térfogata:

A test által tartalmazott, illetve a testet tartalmazó poliéder térfogataival a kétoldali közelítés módszerével határozható meg. Ha egyetlen olyan pozitív valós szám van, amely az adott testet tartalmazó poliéder térfogatainál nem nagyobb, valamint az adott test által tartalmazott poliéder térfogatánál nem kisebb, akkor azt a test térfogatának tekintjük.

Forgátestek térfogata:

TÉTEL: Ha $f(x)$ függvény az $[a; b]$ intervallumon folytonos és $f(x) \geq 0$, akkor az $f(x)$ függvény grafikonjának az x tengely körül megforgatásával keletkezett forgátest térfogata:

$$V = \pi \int_a^b f^2(x) dx.$$

TÉTEL: Az r sugarú gömb térfogata: $V = \frac{4}{3}r^3\pi$.

BIZONYÍTÁS: A gömb származtatható egy félkör átmérő körül megforgatásával, ezért térfogata

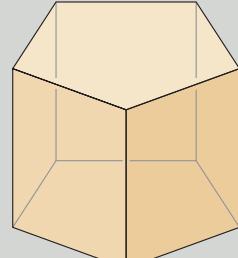
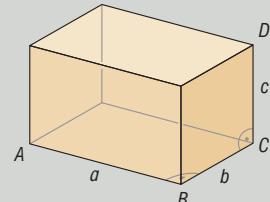
$$\text{a } V = \pi \int_a^b f^2(x) dx \text{ összefüggéssel meghatározható.}$$

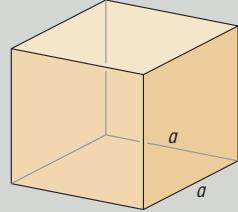
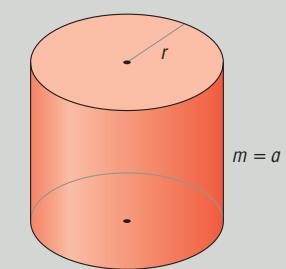
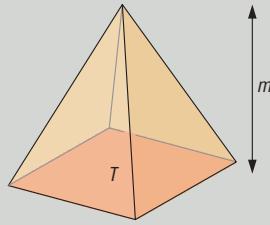
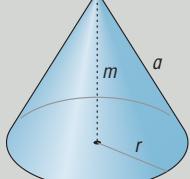
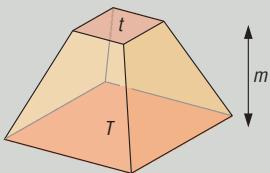
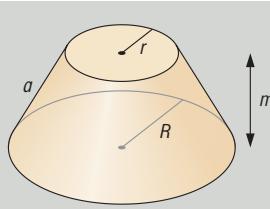
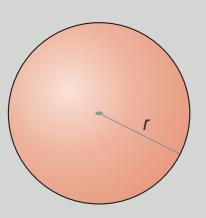
Az origó középpontú, r sugarú kör egyenlete $x^2 + y^2 = r^2$, ebből a $[-r; r]$ intervallumon értelmezett $f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$ függvény grafikonja egy félkör, melynek x tengely körül megforgatásával származtatható az r sugarú gömb. Így a gömb térfogata:

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_{-r}^r f^2(x) dx = \pi \int_{-r}^r (r^2 - x^2) dx = \pi \left[r^2 \cdot x - \frac{x^3}{3} \right]_{-r}^r dx = \\ &= \pi \left[\left(r^2 \cdot r - \frac{r^3}{3} \right) - \left(r^2 \cdot (-r) - \frac{(-r)^3}{3} \right) \right] = \pi \left[\frac{2}{3} \cdot r^3 - \left(-\frac{2}{3} \cdot r^3 \right) \right] = \pi \cdot \frac{4}{3} \cdot r^3 \end{aligned}$$

TÉTEL: Hasonló testek térfogatának aránya megegyezik a hasonlóság arányának köbével.

V. Testek felszíne és térfogata

Test	Felszín	Térfogat
Hasáb		$A = 2T_{\text{alap}} + T_{\text{palást}}$
Téglatest		$A = 2(ab + bc + ca)$

Test	Felszín	Térfogat	
Kocka		$A = 6a^2$	$V = a^3$
Henger		$A = 2r\pi(r + a)$	$V = r^2\pi m$
Gúla		$A = T_{\text{alap}} + T_{\text{palást}}$	$V = \frac{T_{\text{alap}} \cdot m}{3}$
Kúp		$A = r\pi(r + a)$	$V = \frac{r^2\pi m}{3}$
Csonka gúla		$A = T + t + T_{\text{palást}}$	$V = \frac{m}{3} \cdot (T + \sqrt{T \cdot t} + t)$
Csonka kúp		$A = \pi(R^2 + r^2 + (R + r)a)$	$V = \frac{m\pi}{3} \cdot (R^2 + Rr + r^2)$
Gömb		$A = 4r^2\pi$	$V = \frac{4r^3\pi}{3}$

TÉTEL: A csonkakúp térfogata $V = \frac{m \cdot \pi}{3} \cdot (R^2 + R \cdot r + r^2)$.

BIZONYÍTÁS: Egészítsük ki a csonkakúpot egy x magasságú, r alapsugarú kiskúppal. Így a kapott nagy kúp magassága $m + x$, alapkörének sugara R , térfogata $V_{\text{nagy}} = \frac{m+x}{3} \cdot R^2 \cdot \pi$, a kis kúp térfogata $V_{\text{kicsi}} = \frac{x}{3} \cdot r^2 \cdot \pi$.

A csonkakúp térfogata a két kúp térfogatának különbsége: $V_{\text{csonka}} = \frac{m+x}{3} \cdot R^2 \cdot \pi - \frac{x}{3} \cdot r^2 \cdot \pi$.

A kis kúp hasonló a nagy kúphoz, a hasonlóság aránya $\lambda = \frac{x}{x+m} = \frac{r}{R}$, ebből $x+m = x \cdot \frac{R}{r} \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow m = \left(\frac{R}{r} - 1\right) \cdot x \Leftrightarrow x = \frac{m}{\frac{R}{r} - 1} = \frac{m \cdot r}{R - r}$.

Ezt behelyettesítjük a csonkakúp térfogatába:

$$\begin{aligned} V_{\text{csonka}} &= \frac{m+x}{3} \cdot R^2 \cdot \pi - \frac{x}{3} \cdot r^2 \cdot \pi = \frac{m}{3} \cdot R^2 \cdot \pi + x \cdot \frac{R^2 \cdot \pi - r^2 \cdot \pi}{3} = \\ &= \frac{m}{3} \cdot R^2 \cdot \pi + \frac{m \cdot r}{R-r} \cdot \frac{R^2 \cdot \pi - r^2 \cdot \pi}{3} = \frac{m \cdot \pi}{3} \cdot \left(R^2 + \frac{r}{R-r} \cdot (R^2 - r^2) \right) = \\ &= \frac{m \cdot \pi}{3} \cdot \left(R^2 + \frac{r}{R-r} \cdot (R+r) \cdot (R-r) \right) = \frac{m \cdot \pi}{3} \cdot (R^2 + r \cdot (R+r)) = \frac{m \cdot \pi}{3} \cdot (R^2 + R \cdot r + r^2) \end{aligned}$$

TÉTEL: A csonkagúla térfogata $V = \frac{m}{3} \cdot (T + \sqrt{T \cdot t} + t)$.

BIZONYÍTÁS: Egészítsük ki a csonkagúlát egy x magasságú, t alapterületű kisgúlával. Így a kapott nagy gúla magassága $m + x$, alapterülete T , térfogata $V_{\text{nagy}} = \frac{m+x}{3} \cdot T$, a kis gúla térfogata $V_{\text{kicsi}} = \frac{x}{3} \cdot t$.

A csonkagúla térfogata a két gúla térfogatának különbsége: $V_{\text{csonka}} = \frac{m+x}{3} \cdot T - \frac{x}{3} \cdot t$.

A kis gúla hasonló a nagy gúlához, a hasonlóság aránya $\lambda = \frac{x}{x+m} = \sqrt{\frac{t}{T}}$, ebből $x+m = x \cdot \sqrt{\frac{T}{t}} \Leftrightarrow m = \left(\sqrt{\frac{T}{t}} - 1\right) \cdot x \Leftrightarrow x = \frac{m}{\sqrt{\frac{T}{t}} - 1} = \frac{m \cdot \sqrt{t}}{\sqrt{T} - \sqrt{t}}$.

Ezt behelyettesítjük a csonkagúla térfogatába:

$$\begin{aligned} V_{\text{csonka}} &= \frac{m+x}{3} \cdot T - \frac{x}{3} \cdot t = \frac{m}{3} \cdot T + x \cdot \frac{T-t}{3} = \frac{m}{3} \cdot T + \frac{m \cdot \sqrt{t}}{\sqrt{T} - \sqrt{t}} \cdot \frac{T-t}{3} = \\ &= \frac{m}{3} \cdot \left(T + \frac{\sqrt{t}}{\sqrt{T} - \sqrt{t}} \cdot (T-t) \right) = \frac{m}{3} \cdot \left(T + \frac{\sqrt{t}}{\sqrt{T} - \sqrt{t}} \cdot (\sqrt{T} + \sqrt{t}) \cdot (\sqrt{T} - \sqrt{t}) \right) = \\ &= \frac{m}{3} \cdot (T + \sqrt{t} \cdot (\sqrt{T} + \sqrt{t})) = \frac{m}{3} \cdot (T + \sqrt{T \cdot t} + t) \end{aligned}$$

TÉTEL: Egy r sugarú, a alkotójú kúp felszíne $A = r\pi(r+a)$.

BIZONYÍTÁS: A kúp palástja kiteríthető síkba, alakja olyan körcikk, amelynek sugara a kúp alkotója, ívhossza az alapkör kerülete. Így a palást területe:

$$T_{\text{palást}} = \frac{\text{sugár} \cdot \text{ív}}{2} = \frac{a \cdot 2r\pi}{2} = ar\pi$$

Így a forgáskúp teljes felszíne $A = r^2\pi + ar\pi = r\pi(r + a)$.

VI. Alkalmazások

- Térképszerben, földmérésben: távolságmérés, szögmérés
- Építészmérnöki munkában: távolságmérés, szögmérés, felszín-, térfogatszámítás
- Fizikában sűrűségszámításkor: térfogatszámítás
- Geometriai valószínűség számolásakor: ha az esemény bekövetkezésének valószínűsége arányos az eseményt szemléltető geometriai alakzat mértékével, akkor az esemény bekövetkezésének valószínűségét megkapjuk, ha az eseményt és az eseményteret szemléltető alakzatok mértékeit elosztjuk egymással (felszín, térfogat).

Matematikatörténeti vonatkozások:

- A legkorábbi írásos emlékek a hengerszerű testekről Kr. e. 2000 körül keletkeztek. Ezek szerint Egyiptomban henger alakú gabonatartályok térfogatát meg tudták határozni.
- Kr. e. 325 körül **Eukleidész** megírta Elemek című művét, amiben a geometriát axiomatikusan építette fel, azaz a szemléletre hagyatkozva alapfogalmakat (axiómákat) határozott meg, és ezek segítségével bizonyított állításokat. A hasábok, gúlák, gömb térfogatának vizsgálatára a kimerítés módszerét (beírt és körülírt hasábok térfogatával való közelítést) használta. Vizsgálta az öt szabályos testet, meghatározta térfogatukat, bebizonyította, hogy csak öt szabályos test létezik.
- **Arkhimédész** (Kr.e III.sz.) bebizonyította, hogy a gömb felszíne megegyezik a köré írt hengerpalást területével, és a térfogata a köré írt henger térfogatának $2/3$ része. Egy másik nevezetes tétele szerint az egyenlő oldalú henger, a bele írható gömb és a hengerbe írható kúp térfogatainak aránya $3:2:1$.
- **Heron** Kr. e. I. században élt görög matematikus síkidomok területének és testek térfogatának kiszámításával is foglalkozott.
- **Janus Pannonius** (1434–1472) magyar költő szépen körülírta a térelemeket, amelyeket a matematikában nem definiálunk.

Janus Pannonius: A geometriai idomokról

„Pont az, melynek részét felfogni sem tudnád, megnyújtod, s karcsú egyenes fut bármely irányban. Sík felület születik, ha meg is duplázza futását: szélén terjed, nem nyílik meg soha mélye. Két-két sík a szilárd testet jellemzi, kiadja hosszúságát és szélességét, meg a mélyét. Kockának, köbnek hívják s négyzetlapú testnek, bárhogy esik, midig jól látni a részeit ennek; hat síkot foglal magába, a szöglete épp nyolc” (Kurcz Ágnes fordítása)

- **Császár Ákos** 1949-ben készített egy olyan testet, amelynek bármely két csúcspontja szomszédos. A Császár-poliédernek 7 csúcsa, 14 háromszöglapja és 21 éle van (ez nem egyszerű poliéder)
- **Szilassi Lajos** szegedi matematikus 1977-ben olyan testet készített, amelynek hét lapja van, és bármely két lapja szomszédos. A Szilassi-féle poliéderet elkészítették rozsdamentes acélból és Fermat francia matematikus szülőházában, születésének 400. évfordulóján avatták fel.