6. A logaritmus fogalma és azonosságai. Az exponenciális és a logaritmusfüggvény. Az inverzfüggvény

Vázlat:

I. A logaritmus definíciója
II. A logaritmus azonosságai
III. Exponenciális függvény, tulajdonságai
IV. Logaritmusfüggvény, tulajdonságai
V. Inverzfüggvény
VI. Alkalmazások, matematikatörténeti vonatkozások

Kidolgozás:

I. Logaritmus definíciója

Az $a^x = b$ ($a > 0$, $b > 0$, $a \neq 1$) egyenlet megoldásakor az x kitevőt keressük. Ennek az egyenletnek az egyetlen megoldása $x = \log_a b$.

DEFINÍCIÓ: A logaritmus a hatványozás egyik fordított művelete: $\log_a b$ (**a alapú logaritmus b**) az az egyetlen valós kitevő, melyre a-t emelve b-t kapunk: $a^{\log_a b} = b$, ($a > 0$, $b > 0$, $a \neq 1$), vagyis $\log_a b = c$ egyenértékű azzal, hogy $a^c = b$. (A kitevőt fejezzük ki a hatványalap és a hatványérték ismeretében.)
Elnevezések: a = **logaritmus alapja**, b = **hatványérték**.
A logaritmus alapját azért választjuk pozitív számnak, mert
- negatív alap esetén a törtkitevős hatvány nem értelmezhető.
- ha az alap 0 lenne, akkor a hatványérték bármilyen (0-tól különböző) kitevőre 0, így a kitevőkeresés nem egyértelmű.
- ha az alap 1 lenne, a hatványérték a kitevő bármely értékére 1, így sem egyértelmű a kitevőkeresés.

Ha a logaritmus alapja 10, akkor a jelölés: $\log_{10} x = \lg x$. Ha a logaritmus alapja e, akkor természetes alapú logaritmusról beszélünk, így a jelölés: $\log_e x = \ln x$.

II. Logaritmus azonosságai

TÉTEL: Szorzat logaritmusa egyenlő a tényezők logaritmusának összegével:

$$\log_a(x \cdot y) = \log_a x + \log_a y, \text{ ahol } x, y > 0, a > 0, a \neq 1.$$

BIZONYÍTÁS: A logaritmus definíciója alapján:

$$x = a^{\log_a x} \text{ és } y = a^{\log_a y}, \text{ illetve } x \cdot y = a^{\log_a (x \cdot y)}$$

Nézzük az állítás bal oldalát:

$$\log_a(x \cdot y) = \log_a(a^{\log_a x} \cdot a^{\log_a y}) = \log_a a^{\log_a x + \log_a y} = \log_a x + \log_a y,$$

az azonos alapú hatványok szorzása és a logaritmus definíciója miatt.
Így a bizonyítandó állítás igaz.

TÉTEL: Tört logaritmusa megegyezik a számláló és a nevező logaritmusának különbségével:

$$\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y, \text{ ahol } x, y > 0, a > 0, a \neq 1.$$

BIZONYÍTÁS: A logaritmus definíciója alapján:

$$x = a^{\log_a x} \quad \text{és} \quad y = a^{\log_a y}, \text{ illetve } \frac{x}{y} = a^{\log_a\left(\frac{x}{y}\right)}.$$

Nézzük az állítás bal oldalát:

$$\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a \frac{a^{\log_a x}}{a^{\log_a y}} = \log_a a^{\log_a x - \log_a y} = \log_a x - \log_a y,$$

az azonos alapú hatványok osztása és a logaritmus definíciója miatt.
Így a bizonyítandó állítás igaz.

TÉTEL: Hatvány logaritmusa az alap logaritmusának és a kitevőnek a szorzata:

$$\log_a x^k = k \cdot \log_a x, \text{ ahol } x > 0,\ a > 0,\ a \neq 1,\ k \in \mathbb{R}.$$

BIZONYÍTÁS: A logaritmus definíciója alapján:

$$x = a^{\log_a x}, \text{ illetve } x^k = a^{\log_a x^k}.$$

Nézzük az állítás bal oldalát:

$$\log_a x^k = \log_a \left(a^{\log_a x}\right)^k = \log_a a^{k \cdot \log_a x} = k \cdot \log_a x,$$

a hatvány hatványozása és a logaritmus definíciója miatt.
Így a bizonyítandó állítás igaz.

TÉTEL: Áttérés más alapú logaritmusra:

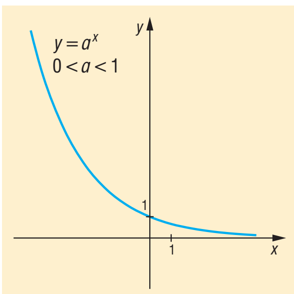
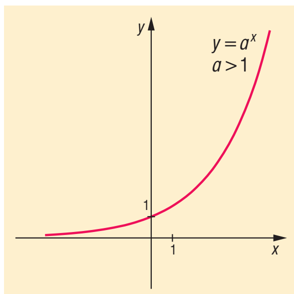
$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}, \text{ ahol } a, b, c > 0,\ a, c \neq 1.$$

BIZONYÍTÁS: A logaritmus definíciója alapján: $b = a^{\log_a b}$.
Írjuk fel: $\log_c b = \log_c a^{\log_a b} = \log_a b \cdot \log_c a$,
a logaritmus definíciója és a hatvány logaritmusa miatt.
Kaptuk: $\log_c b = \log_a b \cdot \log_c a$ $\quad /: \log_c a \neq 0$ a feltételek miatt.
Így: $\log_a b = \dfrac{\log_c b}{\log_c a}$. Ez a bizonyítandó állítás.

III. Exponenciális függvény

DEFINÍCIÓ: Az $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = a^x$ $(a > 0)$ függvényt exponenciális függvénynek nevezzük.
Az $a = 1$ esetén az exponenciális függvény konstans: $f(x) = 1^x = 1$.

Jellemzés:

A függvény	$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = a^x$, $0 < a < 1$ esetben	$g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = a^x$, $1 < a$ esetben
ábrázolása:		

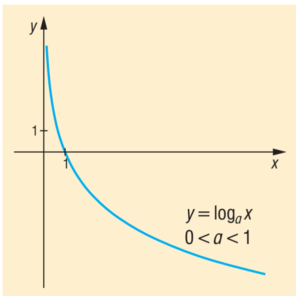
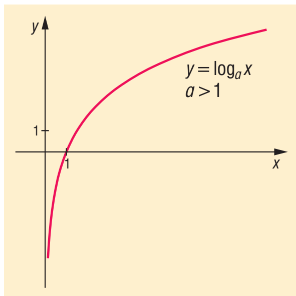
értelmezési tartománya:	valós számok halmaza: $\mathbb{R}$	valós számok halmaza: $\mathbb{R}$
értékkészlete:	pozitív valós számok halmaza: $\mathbb{R}^+$	pozitív valós számok halmaza: $\mathbb{R}^+$
monotonitása:	szigorúan monoton csökken	szigorúan monoton nő
szélsőértéke:	nincs	nincs
görbülete:	alulról konvex	alulról konvex
zérushelye:	nincs	nincs
paritása:	nincs: nem páros, nem páratlan	nincs: nem páros, nem páratlan
korlátosság:	alulról korlátos, felülről nem korlátos	alulról korlátos, felülről nem korlátos
invertálhatóság:	invertálható: inverze az $f^{-1}\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}, f^{-1}(x) = \log_a x$ függvény	invertálható: inverze az $g^{-1}\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}, g^{-1}(x) = \log_a x$ függvény

Az exponenciális függvény folytonos, differenciálható, integrálható.

IV. Logaritmusfüggvény

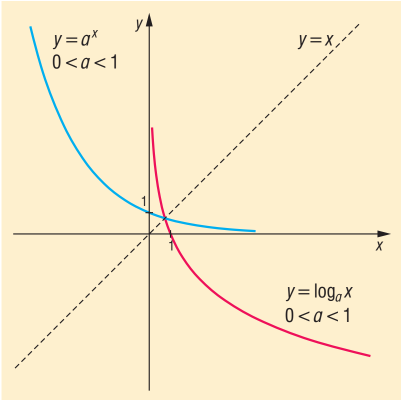
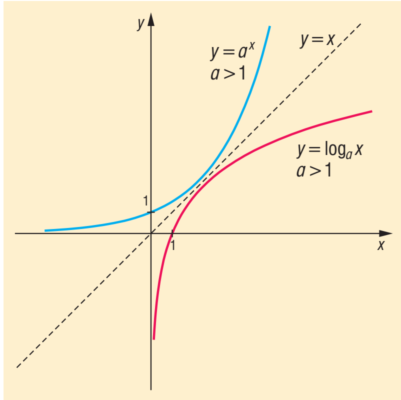
DEFINÍCIÓ: Az $f\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}, f(x) = \log_a x$, $(a > 0,\ a \neq 1)$ függvényt logaritmusfüggvénynek nevezzük.

Jellemzés:

A függvény	$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \log_a x$, $0 < a < 1$ esetben	$g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, g(x) = \log_a x$, $1 < a$ esetben
ábrázolása:		
értelmezési tartománya:	pozitív valós számok halmaza: $\mathbb{R}^+$	pozitív valós számok halmaza: $\mathbb{R}^+$
értékkészlete:	valós számok halmaza: $\mathbb{R}$	valós számok halmaza: $\mathbb{R}$
monotonitása:	szigorúan monoton csökken	szigorúan monoton nő
szélsőértéke:	nincs	nincs
görbülete:	alulról konvex	alulról konkáv
zérushelye:	$x = 1$	$x = 1$
paritása:	nincs: nem páros, nem páratlan	nincs: nem páros, nem páratlan
korlátosság:	nem korlátos	nem korlátos
invertálhatóság:	invertálható: inverze az $f^{-1}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f^{-1}(x) = a^x\ (0 < a < 1)$ függvény	invertálható: inverze az $g^{-1}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, g^{-1}(x) = a^x\ (1 < a)$ függvény

A logaritmusfüggvény folytonos, differenciálható, integrálható.

Kapcsolat az exponenciális és a logaritmusfüggvények között:

0 < *a* < 1	**1 < *a***
	

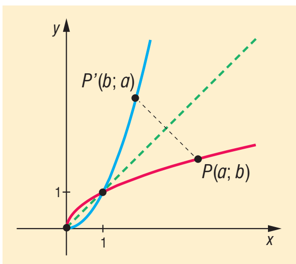
Az exponenciális függvény $a \neq 1$ esetén invertálható, inverze az f^{-1}: $\mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, $f^{-1}(x) = \log_a x$; $a > 0$, $a \neq 1$ logaritmusfüggvény.
A logaritmusfüggvény invertálható, inverze az f^{-1}: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f^{-1}(x) = a^x$; $a > 0$, $a \neq 1$ exponenciális függvény.

V. Inverzfüggvény

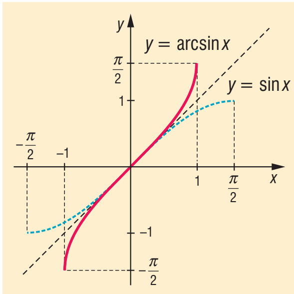
DEFINÍCIÓ: Az f függvény **inverze** a g függvény, ha az f értelmezési tartományának minden x elemére igaz, hogy $f(x)$ eleme a g értelmezési tartományának és $g(f(x)) = x$. Az inverz függvény jelölése: $g = f^{-1}$.
Ha az f és a g függvények egymásnak inverzei, akkor az f értelmezési tartománya a g értékkészlete, az f értékkészlete a g értelmezési tartománya.
Ha két függvény egymásnak inverzei, akkor grafikonjaik egymásnak tükörképei az $y = x$ egyenletű egyenesre.

A definícióból következik, hogy csak a kölcsönösen egyértelmű függvényeknek van inverze, azaz egy függvény pontosan akkor invertálható, ha az értékkészlet minden eleme az értelmezési tartomány pontosan egy eleméhez van hozzárendelve.
Például: f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$, $f(x) = 2^x$ függvény és a g: $\mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, $g(x) = \log_2 x$ függvény egymás inverzei, ugyanis $g(f(x)) = \log_2 2^x = x$, illetve $f(g(x)) = 2^{\log_2 x}$, valamint az egyik függvény értelmezési tartománya a másik függvény értékkészlete és viszont.
A nem kölcsönösen egyértelmű függvényeknek nincs inverze. Ezek a függvények gyakran az értelmezési tartomány szűkítésével invertálhatóvá tehetők.
Például:

1. a másodfokú függvény értelmezési tartományának szűkítésével invertálható, ha f: $\mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}_0^+$, $f(x) = x^2$ akkor inverze a g: $\mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}_0^+$, $g(x) = \sqrt{x}$.



2. a szinusz függvény inverze az értelmezési tartományának $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ intervallumra való szűkítésén az arkusz szinusz függvény.



Inverz függvény előállítása:
Egy kölcsönösen egyértelmű függvény inverze algebrai úton előállítható a változók felcserélésével a következő módon:

1. $f(x) = 2x - 3$ függvény inverzének előállítása: $y = 2x - 3$ kifejezésben a változókat felcseréljük: $x = 2y - 3$, majd ebből az egyenletből az y változót kifejezzük: $y = \frac{x+3}{2}$, ebből $f^{-1}(x) = \frac{x+3}{2}$, ahol mindkét függvény értelmezési tartománya és értékkészlete a valós számok halmaza.
2. $f(x) = \sqrt{x-2} - 4$ függvény (ahol $x \ge 2$, $y \ge -4$ inverzének előállítása: $y = \sqrt{x-2} - 4$ kifejezésben a változókat felcseréljük: $x = \sqrt{y-2} - 4$, majd ebből az egyenletből az y változót kifejezzük: $y = (x + 4)^2 + 2$, ebből $f^{-1}(x) = (x + 4)^2 + 2$, (ahol $x \ge -4$, $y \ge 2$).

VI. Alkalmazások:

- $2^x = 3$ egyenlet megoldása logaritmussal
- Matematikai műveletek visszavezetése egyszerűbb műveletek elvégzésére (szorzás helyett összeadás, hatványozás helyett szorzás)
- Kamatos kamatszámításnál az alaptőke, az n-edik év végi tőke, és a kamattényező ismeretében az n meghatározása:
$$t_n = t_0 \cdot q^n \;\Rightarrow\; \frac{t_n}{t_0} = q^n \;\Rightarrow\; \lg\frac{t_n}{t_0} = \lg q^n \;\Rightarrow\; \lg\frac{t_n}{t_0} = n \cdot \lg q \;\Rightarrow\; n = \frac{\lg t_n - \lg t_0}{\lg q}$$
- Számolás gépbe nem férő nagy számokkal, pl.:
$$x = \frac{85^{200}}{130^{120}} \;\Rightarrow\; \lg x = 200 \cdot \lg 85 - 120 \cdot \lg 130 = 132{,}21$$
$$x = 10^{132{,}21} = 10^{132} \cdot 10^{0{,}21} = 1{,}6218 \cdot 10^{132}$$
- Gravitációs erőtérben a barometrikus magasságformulában a levegő sűrűsége a magassággal exponenciálisan csökken.
- A Richter-skála (földrengések méretét határozza meg) logaritmus alapú
- pH érték: az oldatok szabad oxónium-ion koncentrációjának negatív 10-es alapú logaritmusa: $pH = -\lg[H_3O^+]$
- Exponenciális függvény írja le: a radioaktív izotópok bomlását, az oldódás folyamatát, a kondenzátor feltöltődésének és kisülésének folyamatát.

Matematikatörténeti vonatkozások:

- A logaritmust **Napier** (1550–1617) skót matematikus találta ki, a logaritmus szót a logosz (viszony) és az aritmosz (szám) görög szavakból alkotta. Elsősorban matematikai számításokat megkönnyítését segítő módszereket talált ki, így a logaritmust, amely a csillagászati számításokban bizonyult hasznosnak. **Kepler** használta csillagászati táblázatai elkészítésekor. Napier feltalálta a róla elnevezett számolópálcákat, melyek segítségével a szorzás és az osztás gyorsabban volt elvégezhető. A trigonometrikus függvények logaritmusának táblázatát is elkészítette, táblázatában a logaritmus alapja $\frac{1}{e}$ volt.

- **Bürgi** (1552–1632) svájci órásmester és matematikus csillagászati eszközökkel is foglalkozott Kepler munkatársaként. Segített Keplernek a csillagászati számításokban, ehhez megalkotta az első logaritmustáblázatot.
- Az oxfordi egyetem tanára **Briggs** (1561–1630) angol matematikus és Napier közösen kidolgozták az első 10-es alapú 8 jegyű logaritmustáblázatot.
- Napier számolópálcáiból az 1600-as években kifejlesztették a logarlécet, amelyet az 1970-es évekig használtak. A **logarléc** és a logaritmustáblázatok több száz évig nélkülözhetetlen eszközei voltak a bonyolultabb számításokkal foglalkozó embereknek. Szerepük csak az elektromos számológépek és a számítógépek megjelenésével szűnt meg fokozatosan.