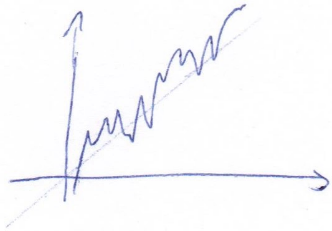
Geometriai Brown, Black-Scholes-Merton

Geometriai Brown → tőzsdén az árak változásának modellezésére

X Brown mozgás

μ sodrási paraméter

σ^2 szórásnégyzet (diffúziós együttható)



$$Y(t) = e^{X(t)} = Y(0)\, e^{X(t)-X(0)}$$

$$E(Y(t) \mid Y(0)=y) = y e^{t(\mu + \frac{1}{2}\sigma^2)}$$

$$D^2(Y(t) \mid Y(0)=y) = y^2 e^{2t(\mu + \frac{1}{2}\sigma^2)} \cdot (e^{t\sigma^2} - 1)$$

Pl. tökéletes piacon részvény ár modellezése

↳ árak ≥ 0

oszcilláló növekedés

nincs arbitrázs

$\frac{Y(t_1)}{Y(t_0)}, \dots, \frac{Y(t_n)}{Y(t_{n+1})}$ független vv-k

részvény értéke várhatóan $\alpha = \mu + \frac{1}{2}\sigma^2$ -el növekszik időegységenként, (a várható érték miatt!)

Merton:

S_0, S_t

$$\frac{dS_t}{S_t} = r\,dt + \sigma\, dW_t + dZ_t$$

W_t Brown mozgás

Z_t összetett Poisson-folyamat

$\xi_1, \xi_2, \dots$ vv. sorozat

$\{\xi(t), t \in [0,T]\}$ – Kolmogorov-féle kompatibilitási feltételnek megfelel

Jelenérték, kamat, logreturn, folytonos kamatozás. Lognormális eloszlás

Jelenérték: az az összeg, amelyet most kell befektetnünk ahhoz (egy bizonyos kamatláb mellett), hogy később azzal megegyező pénzünk legyen. jele: PV (present value)

$$PV = \frac{\overbrace{c}^{\text{kifizetés a jövőben}}}{\prod(1+\underbrace{r_t}_{\text{kamatláb adott periódusra}})}$$

fix kamatláb esetén: $PV = \dfrac{c}{(1+r)^t}$

Logreturn: a megtérülés logaritmusa

$$R = \ln\left(\frac{\overbrace{V_f}^{\text{value final}}}{\underbrace{V_i}_{\text{value initial}}}\right)$$

Folytonos kamatozás: egy befektetés jövőbeli értéke folytonos kamatozás esetén:

$$FV = PV \cdot e^{rt}$$

t → eltelt idő, r → kamatláb

változó kamatnál:

$$V(t) = V(0) \cdot e^{\int_0^t r(s)\,ds}$$

r(s) → az s időpillanatban a kamatláb

Lognormális eloszlás: folytonos valószínűségi eloszlás, a valószínűségi változó logaritmusa normális eloszlású. Az X valószínűségi változó μ várható értékkel és σ szórással:

$$X = e^{\mu + \sigma z}$$

z → z standard normális változó

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{, ha } x \leq 0 \\ \Phi\left(\frac{\ln x - \mu}{\sigma}\right) & \text{különben} \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{, ha } x \leq 0 \\ \varphi\left(\frac{\ln x - \mu}{\sigma}\right) \cdot \frac{1}{\sigma x} & \text{különben} \end{cases}$$

$$E(x) = e^{\mu + \frac{\sigma^2}{2}}$$

$$D^2(x) = e^{2\cdot\left(\mu + \frac{\sigma^2}{2}\right)} \cdot \left(e^{\sigma^2} - 1\right)$$

Alkalmazás: - tőzsdén a részvények folytonosan változnak, értékük lognormális eloszlást követ
- vezetéknélküli távközlés jelveszteségei.

Generálás: normális generálása (CHT-val, inverz fv.-el), majd vesszük a logaritmusát.

Pszeudo véletlenszámok generálása: általános módszerek, kongruenciális generátorok, tulajdonságaik.

Neumann → middle square: $675248 \xrightarrow{()^2} 455\underline{959861}504 \to 959861$

Wichmann - Hill:

$$x_{n+1} \equiv 171\, x_n \pmod{30269}$$
$$y_{n+1} \equiv 172\, y_n \pmod{30307}$$
$$z_{n+1} \equiv 170\, z_n \pmod{30323}$$
$$r = \left(\frac{x_{n+1}}{30269} + \frac{y_{n+1}}{30307} + \frac{z_{n+1}}{30323}\right) \pmod 1$$

- 2 byte-ban elfér
- x_n, y_n, z_n óra alapján random

Lineáris kongruenciális generátor:

$$x_{n+1} \equiv (a x_n + c) \pmod m$$

$c=0 \to$ multiplikatív
$c \neq 0 \to$ kevert

3 paraméterezési típus:

1. m prím, $c=0$
   - max periódusa: $m-1$ (pl. $2^{31}-1$)
   - x_0: 1 és $m-1$ közötti
   - lassan számítható
2. $m = 2^k$, $c=0$
   - max periódusa: $\frac{m}{4}$ $a \equiv (3 \text{ vagy } 5) \pmod 8$ esetén
   - x_0 páratlan
   - gyors, de az utolsó 3 bitre érzékeny (alacsony bitek periódusa rövidebb)
3. $c \neq 0$
   - max periódusa: m, ha
     - m és c relatív prímek (lnko $=1$)
     - m minden prímtényezője osztója $(a-1)$-nek
     - ha $4 \mid m$, akkor $4 \mid a-1$

Randu (IBM)

$$x_{n+1} \equiv 65539\, x_n \pmod{2^{31}}$$ → spektrál próbával láthatók a hipersíkok

Véletlenszámok transzformációja, inverzfüggvény módszer, elfogadás és elvetés módszere. Egyszerű alkalmazások. Monte Carlo módszerek. Hibaanalízis.

Transzformációk:

- Centrális határeloszlás tételével → std. norm bármiből

  ! $\xi_1, \dots \xi_n$ független, azonos eloszlású valószínűségi változók

  Ha $S_n = \xi_1 + \dots + \xi_n$, akkor ($S_n$ std. normálisként viselkedik)

$$\frac{S_n - E(S_n)}{D(S_n)} \sim Norm(0,1)$$

- Box - Müller → 2 egyenletesből (ξ_1, ξ_2) → 2 std. normálisat (η_1, η_2)

$$\eta_1 = \sqrt{-2\ln \xi_1} \cdot \cos(2\pi \xi_2)$$

$$\eta_2 = \sqrt{-2\ln \xi_1} \cdot \sin(2\pi \xi_2)$$

- Inverz függvény módszer:

  ! η tetszőleges eloszlású v.v. $F_\eta(x)$ eloszlásfüggvénnyel és $\exists F_\eta^{-1}(x)$ (van inverze)

  Akkor: $F_\eta(\eta) \sim U[0,1]$

  $F_\eta^{-1}(U) \sim \eta$

Elfogadás és elvetés módszere: (megfelel-e $f(x)$ eloszlásnak)

- veszünk egy v_1 véletlenszámot $f(x)$ értelmezési tartományából $v_1 \sim U[a,b]$
- veszünk egy v_2 véletlen számot $v_2 \sim U[0,c]$
- ha $v_2 < f(v_1)$ → v_1-et elfogadjuk, f sűrűségfüggvényű

Monte-Carlo módszerek:

- matematikai feladatok megoldásához véletlen mennyiségek modellezését felhasználó numerikus módszerek

Hibaanalízis: nagy számok törvénye szerint (Csebisev-egyenlőtlenség)

Exponenciális eloszlás és generálása. Gamma eloszlás, Poisson-folyamat.

Exponenciális eloszlás:

$$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x} & \text{, ha } x \geq 0 \\ 0 \end{cases} \qquad E(X) = \frac{1}{\lambda}$$

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & \text{, ha } x \geq 0 \\ 0 \end{cases} \qquad D^2(X) = \frac{1}{\lambda^2}$$

Generálás: inverz fv. módszerrel

$$F^{-1} = -\frac{1}{\lambda} \ln(1-y)$$
$$\quad \quad \quad \quad \quad \sim U$$

Gamma eloszlás: λ paraméterű, α-adrendű gamma-eo:

$$f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} \lambda^{\alpha} e^{-\lambda x} \qquad E(x) = \frac{\alpha}{\lambda}$$

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty x^{\alpha-1} \cdot e^{-x}\, dx \qquad D^2(X) = \frac{\alpha}{\lambda^2}$$

Generálás: - exponenciálisak összege Γ

$$\downarrow$$

$$\sum -\frac{1}{\lambda} \ln(1-x_i)$$
$$\quad \quad \quad \quad \sim U$$

- két Γ összege is Γ

Poisson-folyamat: események számát és időközeit modellezi (pl. biztosítás → károk)

- a bekövetkező események függetlenek egymástól
- a bekövetkező események száma csak az időintervallum hosszától függ
- egy időpillanatban legfeljebb egyszer következik be

P (pontosan k db bekövetkezés h hosszú intervallumon) $= \frac{(\lambda h)^k}{k!} \cdot e^{-\lambda h}$

- várakozási idő a következő eseményre exp. eo-t követ
- bármely időközben az előfordulás egyenletes eo-ú
- bekövetkező események száma poisson eo-ú λt paraméterrel

Optimalizálás és modellillesztés. Regresszió, faktoranalízis.

Regresszió számítás célja: két vagy több véletlen változó között fennálló kapcsolatot modellezzük.

Modellillesztés: azt a modellt keressük, amire a hiba minimális $\sum (y_i - \overset{\text{becsült}}{\overline{y}_i})^2 \to min$

Lineáris regresszió: két változó közti kapcsolat magyarázata (y - függő, x - magyarázó változó)

$$y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \ldots + \beta_m x_m + \varepsilon \quad \text{(hibatag)}$$

kétváltozós eset:

$$\underset{\text{tengelymetszet}}{\beta_0} + \underset{\text{meredekség}}{\beta_1} x_1 = y$$

cél: β_0, β_1 becslése pl. legkisebb négyzetek módszerével

$$\hat{\beta}_1 = \frac{\sum x_i \cdot y_i - m \bar{x} \cdot \bar{y}}{\sum x_i^2 - m(\bar{x})^2}$$

$$\hat{\beta}_0 = \bar{y} - \beta_1 \cdot \bar{x}$$

Nemlin. regr: ha a modell nem lineáris pl. exp, log

pl. $y = a e^{bx}$

$\downarrow$ linearizálás

$$\ln y = \ln(a e^{bx}) = \underbrace{\ln a}_{\beta_0} + \underbrace{bx}_{\beta_1 x}$$

linearizált problémát oldjuk meg

Faktoranalízis: többváltozós statisztikai módszer, célja a változók számának redukálása

$\xi_1, \ldots, \xi_N$

$f_1, \ldots, f_n$

$$\eta = a + \sum_{i=1}^{n} c_i f_i$$

alkalmazás: - intelligencia kutatás

- mi befolyásolja egy részvény árát?

Normális (Gauss) eo , Gauss-papír

$$f(x) = \frac{1}{\sigma \cdot \sqrt{2\pi}} \cdot e^{\frac{-(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

generálás: - CHT
- Box-Müller
- inverz fv.

$$\left.\begin{aligned} E(x) &= \mu \\ D^2(x) &= \sigma^2 \end{aligned}\right\} \text{ ha } \begin{aligned} \mu &= 0 \\ \sigma^2 &= 1 \end{aligned} \rightarrow \text{std. norm}$$

Többdimenziós eset: legyen $m \in \mathbb{R}^n$, A $n \times n$-es mátrix és $\xi \sim N(0,1)$. Ekkor
$\eta = A\xi + m$ -et n-dimenziós normális eloszlásúnak nevezzük.

tul.: - η elemeinek lineáris kombinációi is norm. eloszlásúak
- η bármely részhalmaza is normális eo-ú
- ha $cov = 0$ → az összetevők függetlenek

kovariancia: megadja két egymástól különböző változó együttmozgását

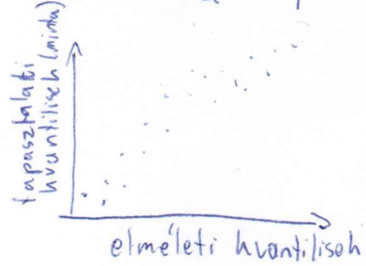
~~Pl.: $X = (X_1, X_2)$ kétdim. norm. eo~~

$cov(X,Y) = E((X - E(X))(Y - E(Y)))$

többdim. eset → kovariancia-mátrix $cov(\eta_i, \eta_j) = c_{ij}$

ebből képezünk mátrixot
(szimmetrikus, pozitív szemidefinit lesz)

Gauss-papír: normális Q-Q plot (normalitás tesztelése ~ adataink normális eo-t követnek-e?



- ha közel egy egyenesre esnek a pontok, akkor a minta normális eo-ból származik

Paraméterbecslés: loglikelihood-dal

Weibull-eo.

$$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\left(\frac{x-c}{b}\right)^{a}}, & \text{ha } x \geq 0 \\ 0, & \text{különben} \end{cases}$$

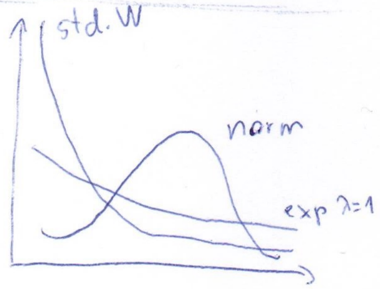
c - eltolás
b - skála
a - alak

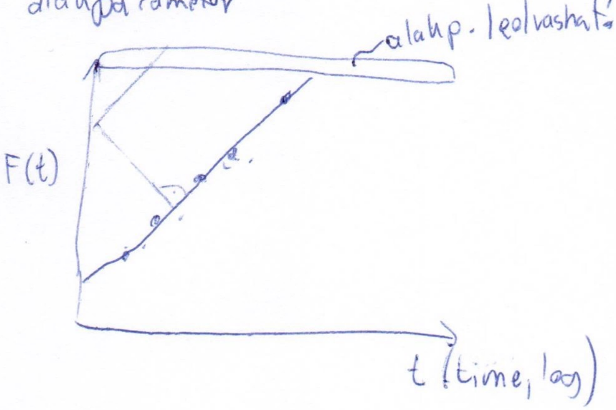
Spec. esetek:

$c=0$		$b=1$	standard Weibull
$c=0$	$a=1$	$b=1/\lambda$	$Exp(\lambda)$
$c=0$	$a=2$	$b=\lambda$	Rayleigh
$c=0$	$a=3{,}57$	$b=1$	normálishoz hasonló, szimmetrikus

Alkalmazás: túlélés-analízis
hibaanalízis
megbízhatóság-számítás

Weibull-papír: Q-Q plothoz hasonlít, az eloszlásfv. értékeit ábrázoljuk rajta
→ ha egy egyenesre esnek, aminta Weibull-eo-ú
az egyenes meredeksége az alakparaméter





Hasznossági függvények

cél: egy x érték hasznosságának számszerűsítésére szolgál.

alkalmazás: fogyasztáselmélet, portfólió-elmélet

n-változós alakja: $U(x_1, \dots, x_n)$

jell: -2-szer deriválható
- monoton
- konkáv

$x, y \in \mathbb{R}$ ~~[illegible]~~

$x \preceq y \iff U(x) \leq U(y)$ (magyarul nagyobb hasznossághoz nagyobb értéket rendel)

↑ gyengén preferált

(preferenciarendezés: -tranzitív
- reflexív
- teljes
- folytonos)

Spec. esetek:

1) lineáris: $(x_1, \dots, x_n) \to \sum a_i x_i$
2) $\sum x_i^{a_i}$
3) $\prod x_i^{a_i}$ (~geom közép)
4) Exp: $U(x) = 1 - e^{-bx}$
5) Log: $U(x) = \ln x$
6) Hatvány: $U(x) = x^b$
7) Kvadratikus: $U(x) = x - bx^2$

Maximum likelihood, opt. modell, hely-skála-alakparaméter. Eloszlástípus.

Legyen $x_1, \dots x_m$ független minta $f(x_i, \theta)$ sűrűségfv-el (azonos eo-ú)

θ: tartalmazza az eloszlás paramétereit, tehát ezt keressük

A minta együttes sűrűségfv-e:

$$L(x_1, \dots, x_n, \theta) = \prod f(x_i, \theta) \quad \text{Likelihood fv.}$$

$$\hat{\theta} = \max\{L(x_1, \dots, x_n; \theta)\} \qquad (\hat{\theta} = ? \text{ ez a becslés})$$

Könnyebb számíthatóság miatt vesszük a logaritmusát:

$$\ln L(x_1, \dots, x_n; \theta) = \ln(\prod f(x_i, \theta)) = \sum \ln f(x_i; \theta) \quad \text{Log-likelihood fv.}$$

$$\hat{\theta} = \max\{\ln L(x_1, \dots, x_n; \theta)\}$$

Az optimalizáló eljárások minimumkeresésre vannak $\Rightarrow$ a loglikelihood fv. (-1)-szeresét vesszük:

$$-\ln L(x_1, \dots, x_n, \theta) = -\sum \ln f(x_i, \theta)$$

$$\hat{\theta} = \min\{-\ln L(x_1, \dots, x_n; \theta)\}$$

Opt. modellek:

- Nemlineáris minimalizálás (R-ben NLM, Newton-féle algoritmust használ)
- Általános célú optimalizálás (OPTIM)

Eloszlások típusa:

$$F(x) = G\left(\frac{x-b}{a}\right) \quad \exists\, a > 0,\ b \in \mathbb{R}, \text{ akkor } F \text{ és } G \text{ azonos típusú}$$

Cauchy, norm $\to$ típus

nem típus: exp - nincs eltolás paramétere

t, w $\}$ alakparaméterenként 1-1 típus $\Rightarrow$ végtelen típus

Biztosítási modellek, véletlen tagszámú összeg, Poisson (összetett)

$S = X_1 + \dots + X_n$ egyedi kockázat

$\eta = \sum_{i=1}^{N} \xi_i$ kollektív kockázat

$E(\eta) = E(N) \cdot E(\xi_i)$

$D^2(\eta) = E(N) \cdot D^2(\xi_i) + E^2(\xi_i) \cdot D^2(N)$

ξ_i	N
kárnagyság	kárszám
lognorm	geom
gamma	Poisson
exp-ek keveréke	negatív bin
pareto	bin.

Biztosító pénze:

$U(t) = U + c \cdot t - S(t)$ ← kár kifizetés

$- \eta(t)$ ← kár kifizetés

U: kezdeti tőke

$c \cdot t$: biztosítási díj

Véletlen tagszámú összeg

N valségi változó (tagszám)

$\xi_1, \dots, \xi_N$ független, azonos eo-ú v.v-k (tagok)

$S = \sum \xi_i$ a véletlen tagszámú összeg, egy összetett eo.

Ha a tagszám Poisson-eloszlást követ, akkor az összeg összetett Poisson eo. lesz.

$E(S) = E(N) \cdot E(\xi)$ → $E(\xi_1) = E(\xi_2) \dots$ mert azonos eo!

$D^2(S) = E(N) \cdot D^2(\xi) + E^2(\xi) \cdot D^2(N)$

Ha $N \sim$ Poisson, akkor $E(N) = \lambda$ és $D^2(N) = \lambda$

Karakterisztikus fv.:

$\Phi_\eta(t) = g_N(\Phi_\xi(t))$

Φ_ξ: ξ karakterisztikus fv-e

g_N: N generátor fv-e

Díjkalkulációs elvek, kárszám, kárnagyság

Elvek:

1) $\Pi(\xi) \geq E(\xi)$ nemnegatív terhelés (díj > várható kár)

2) $\xi \leq m \Rightarrow \Pi(\xi) \leq m$ maximális veszteség (ne kérjünk nagyobb összeget, mint a maximális kár)

3) $\xi_1 \leq \xi_2 \Rightarrow \Pi(\xi_1) \leq \Pi(\xi_2)$ monotonitás (kisebb értékű cuccnál kisebb a várható kár is)

4) $\Pi(\xi_1+\xi_2) \leq \Pi(\xi_1)+\Pi(\xi_2)$ szubadditivitás (két külön biztosítás drágább, mint egy kombinált)

Modellek: (a egy konstans)

1) Várható érték

$$\Pi(\xi)=(1+a)E(\xi)$$

2) Szórás

$$\Pi(\xi)=E(\xi)\cdot a\cdot D(\xi)$$

3) Szórásnégyzet

$$\Pi(\xi)=E(\xi)+a\cdot D^2(\xi)$$

4) Exp

$$\Pi(\xi)=\frac{1}{a}\cdot \ln E(e^{a\xi})$$

5) Esscher

$$\Pi(\xi)=E\left(\xi\cdot \frac{e^{a\xi}}{E(e^{a\xi})}\right)$$

6) Kvantilis elv

$$\Pi(\xi)=\min\{m \mid P(\xi\geq m)\leq a\}$$

Alkalmazott eo-k:

Kárszám (N)

Binomiális $P(\xi=k)=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$

Negatív bin. $P(\xi=k)=\binom{\alpha+k-1}{k}\cdot p^{\alpha}(1-p)^k$

Poisson $P(\xi=k)=e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$

Geom. $P(\xi=k)=pq^{k-1}$

Kárnagyságok (ξ_i)

Exp: $f(x)=\lambda x^{-\lambda x}$

Exp. keveréke: $f(x)=\sum p_i\cdot\lambda_i x^{-\lambda_i x}$

Pareto

Lognorm

Élettartam modellek

T - élettartam (születéskor)

$F(t) = P(T \leq t)$ eo.fv. $\qquad {}_t q_0 = F(t)$

$\bar{F}(t) = P(T > t)$ túlélésfv. ~t kort megéljük $\qquad {}_t p_0 = \bar{F}(t)$

Feltételes valségek

$P(T \leq x+t \mid T > x) = {}_t q_x$ ~t éven belül meghalunk-e, ha x-ig éltünk

$P(T > x+t \mid T > x) = {}_t p_x$ ~ valószínűsége, hogy megérjük-e $x+t$ kort, ha x kort elérjük

Halálozási intenzitás

$$\mu(t) = \lim_{\Delta t \to 0+0} \frac{1}{\Delta t} \cdot P(T < t + \Delta t \mid T > t) = -\frac{d}{dt}(\ln \bar{F}(t))$$

$$\bar{F}(t) = e^{-\int_0^t \mu(s)\,ds}$$

$$ {}_t p_x = e^{-\int_0^t \mu(x+s)\,ds}$$

Halandósági modellek:

Exp.: $\mu(t) = \lambda$, $\bar{F}(t) = e^{-\lambda t}$

Weibull: $\mu(t) = \beta \alpha^{-\beta} t^{\beta - 1}$

$$\bar{F}(t) = e^{-\left(\frac{t}{\alpha}\right)^{\beta}}$$

Gompertz-Makeham:

$$\mu(t) = \alpha + \beta e^{\gamma t}$$

$$\bar{F}(t) = e^{-\alpha t - \beta \cdot \frac{e^{\gamma t} - 1}{\gamma}}$$

Halálozási táblák

Díjkalkulációhoz → néphalandósági (teljes lakosság)
→ szelekciós (foglalkozás/lakhely/népcsoport stb. alapján)

Jelölések

l_0 a populáció nagysága

l_x az x kort túlélők száma

d_x az x korban elhaltak száma

e_x az adott korban várható élettartam

${}_tp_x$ t évig életben maradunk-e még, ha x kort megéltük?

${}_tq_x$ meghalunk-e t éven belül, ha x-et már megéltük?

x	l_x	d_x	q_x	e_x
0				
⋮				
119				

$${}_tp_x = \frac{l_{x+t}}{l_x} \qquad {}_tq_x = \frac{l_x - l_{x+t}}{l_x} \qquad e_x = \int_0^{\omega-x} {}_tp_x \, dt = \frac{l_{x+1} + l_{x+2} + \dots}{l_x}$$

Paraméterbecslés:

halandósági modell paraméterei becsülhetők loglikelihooddal (Exp, Weibull, Gomportz)

Markowitz portfólió elmélet

$R_1 \ldots R_n$ valószínűségi változók, $r_i = E(R_i)$ várható hozamok. Cél: olyan kombinációt találni a befektetési lehetőségek között, hogy kockázat → min és hozam → max

Feltevések: - magasabb hozamút választjuk két ugyanolyan kockázatú befektetésnél
- a hozamok pontos adatok
- a befektetők logikusan cselekednek

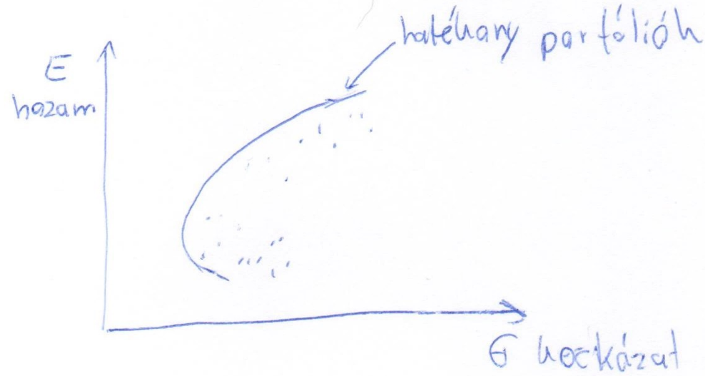
Portfólió várható hozama: $E(R) = \sum x_i r_i$ — befektetési súlyok ~ melyik részvénybe mekkora részét fektetjük az egységnyi pénzünknek

kockázata: $D^2(R) = \sum \sum x_i c_{ij} x_j$

$c_{ij} = cov(R_i, R_j)$

$\sum x_i = 1$, $x_i \geq 0$, $\sum r_i x_i = \bar{r}$ (elvárt hozam)

2 feladat - kitűzött hozamhoz súlyokat keresni
- adott kockázathoz megkeresni a legjobb hozamot



Arbitrázs tétel

Arbitrázs-lehetőségeknek nevezzük azokat a valamilyen piaci félreárazásból adódó lehetőségeket, amelyek a kockázatmentes hozamhoz képest azonnal és kockázatmentesen nyújtanak magasabb hozamot

Primál feladat: $Ax = b$, $\min\{c^T b\}$

Duál: $y^T A \leq c$, $\max\{y^T b\}$

Tétel: x optimális a primál feladatban, akkor y is optimális a duálban és $\min\{c^T b\} = \max\{y^T b\}$

Tétel: pontosan 1 igaz:

1) $\exists\, y^T = (y_1, \dots, y_m)$ eloszlás, amelyre $\sum y_j r_{ij} = 0$

vagy

2) $\exists$ fogadási stratégia $x^T = (x_1, \dots, x_n)$, amelyre $\sum x_i r_{ij} > 0$ → ekkor van arbitrázs-lehetőség
(x_i a tét az i-edikre, r_{ij} a megtérülés, ha egységnyit teszünk i-re és j jön ki)

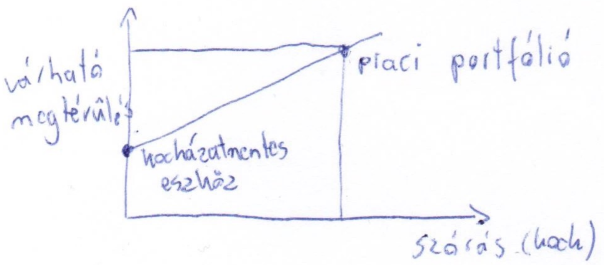
Kockázatos és nem kockázatos befektetések, CAPM

CAPM: capital assets pricing model ~ tőkepiaci árfolyamok modellje
A modell segítségével a befektetők számára kiszámíthatóvá válik a befektetések elvárt hozama. A módszer alapgondolata, hogy a befektetéskor felvállalt kockázathoz mérten elérhető-e az a minimális mértékű hozam, amelyet egy hasonló befektetésből is megkapnának.

A részvény elvárt hozama = kockázatmentes hozam + β * részvénypiac kockázati prémium

β ~ részvény hozama és a részvénypiaci hozam közti összefüggést fejezi ki

CML: capital market line ~ tőkepiaci egyenes: a kockázat abszolút megközelítésében írja le a hozamok alakulását.



---

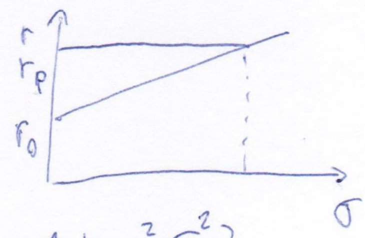
1 kockázatos és 1 nem kockázatos eszköz esete

K.e.: r_p, σ_p, x

Nke: r_0, x (fix kamat, nincs szórás)

$$E(R) = x \cdot r_p + (1-x) r_0$$

$$D^2(R) = x^2 \sigma_p^2$$



$$E(U(R)) \to \max\left\{ x r_p + (1-x) r_0 - \frac{1}{2} b \cdot x^2 \sigma_p^2 \right\}$$

Stabil eloszlások, Stabil eloszlások generálása, becslése, alkalmazása

$\xi_1, \xi_2 \dots \xi_n$ független, azonos eloszlású valószínűségi változók.

ξ stabilis eo-ú, ha $\forall n$-re $\exists a_n > 0$ és $b_n \in \mathbb{R}$, úgy, hogy

$$\frac{\sum \xi_i}{a_n} - b_n$$ eloszlása megegyezik ξ eloszlásával

paraméterei: hely, skála, szimmetria, karakterisztikus kitevő (alakparaméter)

$0 < \alpha < 2$

$\alpha = 2 \sim$ norm

$\alpha = 1 \sim$ cauchy

Generálás:

Zolotarev:

$$\xi = \frac{\sin(\alpha \cdot \xi_1)}{(\cos \xi_1)^{1/\alpha}} \left(\frac{\cos((1-\alpha)\cdot \xi)}{\eta} \right)^{\frac{1-\alpha}{\alpha}}$$

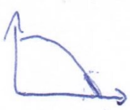
$\alpha \neq 1$

$\xi_1 \sim U\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

$\eta \sim Exp(\lambda = 1)$

Inverz fv-el nehéz ($F^{-1}(x)$ bonyolult)

Becslés: - log-log skálán ábrázolva a tapasztalati eo-t, az eo szélének meredeksége a $-\alpha$ lesz



$-\alpha$

- Max likelihood (nehéz a sűrűségfv. felírása)

- alakparaméterre Fegyverneki-módszer $\quad 1 \leq a \leq 2$ (cauchy ... norm)

$$\beta_1(a) = D^2_{\alpha}\left(\frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} \xi\right)$$

$$\beta_2(a) = D^2_{\alpha}\left(\Phi(\xi) - \frac{1}{2}\right)$$

Alkalmazás: kamatváltozás becslése tőzsdén

tőkepiacra jellemző pl. BUX-ra alakparaméter

Brown mozgás

$\{w(t), t \in [0, \infty]\}$ folyamat Brown-mozgás, ha:

1) $w(0) = 0$

2) $w(t)$ folytonos

3) w független növekményű ($w(t_1), w(t_2) - w(t_1), \ldots$ függetlenek)

4) $w(t+s) - w(s) \sim N(0, \sigma^2 t)$

Alkalmazás: pl. részecskeszimuláció

generálás: véletlenszerű bolyongással