ポートフォリオ分析と線形代数

証券アナリスト

Takayuki Suzuki

This is institute of the author

線形代数目標

線形代数（ベクトルと行列）では、「理解する」と「計算できる」が有る。

- 計算できるようにするもの
  - ２ x ２の固有方程式から固有ベクトルが計算できる
  - ２ x ２の対角化
  - 関数を成分とするベクトルの微分表記と関数の計算ができる
- 理解すればいいもの
  - 基本的計算
  - 内積の応用
  - 数理モデルの行列での表記
  - 行列式や逆行列について
  - 期待値、分散、共分散のベクトルの二次形式

計算できる必要があるのは、２ x ２の固有方程式から固有ベクトルを計算すること
および対角化、そして、関数を成分とするベクトルの微分表記、計算ができること。

理解しておく用語のリスト

- 内積
- 直交
- 転置（転置行列）
- 正方行列
- 対角成分、非対角成分
- トレース
- 単位行列
- 対称行列
- ゼロベクトル、ゼロ行列
- 行列式
- 逆行列
- 正則行列
- 固有値, 固有ベクトル
- 直交行列
- 対角化とスペクトル分解
- 一次形式と二次形式
- 一次形式と二次形式それぞれの微分

計算できるようにしておくもの

計算をできるようにしておくこと

- 2 x 2行列の固有ベクトルの算出
- 2 x 2行列の対角化

2 x 2 行列の固有ベクトルの算出

行列 $\boldsymbol{A}$ に対して、スカラー λ とベクトル $\boldsymbol{x}$ が

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \lambda \boldsymbol{x}$$

という関係を満たすとき、
λ を行列 $\boldsymbol{A}$ の固有値 (Eigenvalue), $\boldsymbol{x}$ を行列 $\boldsymbol{A}$ の固有ベクトル (Eigenvector) という。
行列 A の固有値を求めろ、という計算問題は出題される可能性がある。

固有値と固有ベクトルは、

$$\det(\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{I})$$

がゼロである条件から求める。det は行列式、$\boldsymbol{I}$ は単位行列である。
この式を特性方程式（または固有方程式）とよぶ。

固有値と固有ベクトルの求め方例

例；

$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ の固有値を求める。

$\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{I} = \begin{bmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 3 & 2-\lambda \end{bmatrix}$ であるので、その行列式は、

$$\det(\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{x}) = (1-\lambda)(2-\lambda) - 2 \cdot 3$$

である。これがゼロである条件を計算する。

$$(1-\lambda)(2-\lambda) - 2 \cdot 3 = \lambda^2 - 3\lambda - 4 = 0$$

より、$\lambda = -1, 4$ が固有値である。

$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ の行列式が、$(ad - bc)$ であったことを覚えておく

固有値と固有ベクトルの求め方例

つぎに、それぞれの固有値に対して、固有ベクトルを求める。固有値が $\lambda = -1$ のとき、固有値の定義から、

$$(\boldsymbol{A} - (-1) \cdot \boldsymbol{I})\boldsymbol{x} = 0$$

であるから、

$$(\boldsymbol{A} - \boldsymbol{I})\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 1-(-1) & 2 \\ 3 & 2-(-1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow 2x_1 + 2x_2 + 0 \text{ and } 3x_1 + 3x_2 = 0$$

これを満たすベクトルは無数にあるが、長さが 1 である単位ベクトルを選ぶと、

$x = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ が対応する固有ベクトルである。

もう一方の固有値 $\lambda = 4$ に対する固有値も、同様に求める。

対角化

固有ベクトルを並べた行列 P で元の行列を挟むと、結果、対角成分だけになる性質がある。
2 x 2行列で示す。

$\boldsymbol{A}$ の固有値を λ_1, λ_2, 固有ベクトルを $\boldsymbol{x}_1 = \begin{bmatrix} x_{1,1} \\ x_{1,2} \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{x}_2 = \begin{bmatrix} x_{2,1} \\ x_{2,2} \end{bmatrix}$ とする。固有ベクトルを並べた行列 P を考える。

$$\boldsymbol{P} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{x}_1 & \boldsymbol{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{1,1} & x_{2,1} \\ x_{1,2} & x_{2,2} \end{bmatrix}$$

元の行列 $\boldsymbol{A}$ にこの行列 $\boldsymbol{P}$ とその逆行列 $\boldsymbol{P}^{-1}$ を左右から掛けると

$$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$$

となる。(計算すると、必ずそうなる)
この操作を、行列の対角化という。
さらに、対角化の式を逆転させると、元の行列 A が、固有ベクトルの直積の和で表現できる。
これを、行列のスペクトル分解という。(スペクトル分解の話は、たぶん無理なのでやめておく)

ポートフォリオマネージメントへの応用

分散共分散行列

通常の分散は、確率変数に対して計算される。つまり、
$\mathrm{var}(x)$ と書いた場合、x は確率変数であった。つまり単純な定数ではなく、値が一定の確率分布によってランダムに定まる変数であった。[1]
では、ベクトル変数 $\boldsymbol{x}$ に対する分散はどうなるか？ 分散共分散行列になる。
例えば、３つの資産のリターン（これは確率変数である）から成る下記のベクトルを考える。

$$\boldsymbol{r} = (r_1, r_2, r_3)$$

これの分散は、実は下記のような行列になり、これを分散共分散行列という。（覚える）

$$\mathrm{var}(\boldsymbol{r}) = \begin{bmatrix} \mathrm{var}(r_1) & \mathrm{cov}(r_1, r_2) & \mathrm{cov}(r_1, r_3) \\ \mathrm{cov}(r_2, r_1) & \mathrm{var}(r_2) & \mathrm{cov}(r_2, r_3) \\ \mathrm{cov}(r_3, r_1) & \mathrm{cov}(r_3, r_2) & \mathrm{var}(r_3) \end{bmatrix}$$

[1] x が定数であれば、$\mathrm{E}(x) = x, \mathrm{var}(x) = 0$ であるが、x が確率変数であれば、$\mathrm{E}(x) = \bar{x}, \mathrm{var}(x) = \sigma_x^2$ である。

一次形式とその微分

一次形式とは、ベクトルの世界の一次式で、係数ベクトル $\boldsymbol{a}$ と、変数ベクトル $\boldsymbol{x}$ の積で表される式のこと。

$$f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{a}^T\boldsymbol{x}$$

これの x での微分すると下記になる。

$$\frac{\partial f(\boldsymbol{x})}{\partial \boldsymbol{x}} = \boldsymbol{a}$$

つまり、結果的には普通の一次式の微分と同じになる。

二次形式とその微分

二次形式とは、ベクトルの世界の二次式である。
この場合、係数はもはやベクトルではなく、行列になる。
すなわち、係数行列を $\boldsymbol{A}$ とすると、二次形式は、

$$f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}^T \boldsymbol{A} \boldsymbol{x}$$

これを微分すると、下記になる。

$$\frac{\partial f(\boldsymbol{x})}{\partial \boldsymbol{x}} = 2\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$$

つまり、結果的には、普通の二次式の微分とほぼ、同じになる。
これらの微分のやり方は、結果だけ知っておけばいいはず。
分散共分散行列と、一次形式、二次形式の微分は、次の効用関数最適化への応用で利用される。

効用関数最適化への応用

x を各資産の配分比率としたとき、効用関数 U が

$$\mathrm{U} = \boldsymbol{x}^T \boldsymbol{\mu} - \frac{1}{2\tau} \boldsymbol{x}^T \Sigma \boldsymbol{x}$$

ただし μ は各資産の期待リターンベクトル、Σ は各資産の分散共分散行列

で表せた場合の、最適比率を求める。最適の時、微分がゼロになることから、

$$\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial \boldsymbol{x}} = 0$$

の条件から求めることができればよい。

$$\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial \boldsymbol{x}} = \boldsymbol{\mu} - \frac{1}{\tau} \Sigma \boldsymbol{x}$$

であるから、これがゼロになる条件を見つければよい。

$$\boldsymbol{\mu} - (1/\tau) \Sigma \boldsymbol{x} = 0$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{x} = \tau \Sigma^{-1} \boldsymbol{\mu}$$

となり、τ、Σ, μ が分かっていれば、上記を計算することで最適分配比率を求めることができる。やることは、行列とベクトルの掛け算である。

トービンの分離定理

結果だけ覚えておくこと。
前記のような効用関数の場合、上記の最適投資比率の計算式から言える。リスク許容度 τ はスカラーであり、すべての成分に対して一律同じ値がかかるためである。

1. リスク資産間の投資比率は、リスク許容度 τ には依存しない。
2. リスク許容度 τ によって変わるのは、リスク資産と無リスク資産の比のみである。

リスク許容度の上昇は、リスク資産への投資を増加させ、無リスク資産への投資を減少させる。リスク許容度が変わっても、リスク資産の中での分配比率は変わらない。
リスク資産内での分配比率が変化するのは、期待リターン μ が変わったり、分散共分散（つまり各資産の期待リスクや、資産間の共分散）Σ が変わった場合である。