MAT-FIZ: Variációszemítás, Tenzor kalkulus, Differenciálgeometria

Szemináriumi jegyzet

Szabó Zsombor

2025. augusztus 31.

Tartalomjegyzék

1. Variációszámítás

1.1. Bevezetés

A variációszámítás a matematika egy olyan területe, amely a funkcionálok (azaz olyan valós értékű függvények, amelyek bemenetei maguk is függvények) minimalizálásával (vagy maximalizálásával) foglalkozik. A variációszámítás széles körben alkalmazható a fizikában, a mérnöki tudományokban, az alkalmazott és elméleti matematikában, és szorosan kapcsolódik a parciális differenciálegyenletekhez (PDE-k). Például egy klasszikus probléma a variációszámításban a két pont közötti legrövidebb út megtalálása. A távolság fogalma nem feltétlenül euklideszi, vagy az út egy felületre korlátozódhat, ebben az esetben a legrövidebb utat geodetikus vonalnak nevezik. A fizikában a Hamilton-elv kimondja, hogy egy fizikai rendszer pályái a hatásfunkcionál kritikus pontjai. A kritikus pontok lehetnek a hatásfunkcionál minimumai, maximumai vagy nyeregpontjai. A gépi látásban egy kép értelmes régiókra való szegmentálásának problémáját gyakran egy funkcionál minimalizálási problémájaként fogalmazzák meg az összes lehetséges szegmentációra – ez egy természetes probléma a variációszámításban. Hasonlóképpen, a képfeldolgozásban a leromlott vagy zajos képek helyreállításának problémáját nagyon sikeresen fogalmazták meg a variációszámítás problémájaként. A PDE-k a funkcionálok minimalizálóira vonatkozó szükséges feltételekként kerülnek elő. Emlékezzünk vissza a többváltozós analízisből, hogy ha egy $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ függvénynek $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$ pontban minimuma van, akkor $\nabla f(\mathbf{x}) = 0$. A $\nabla f(\mathbf{x}) = 0$ szükséges feltétel felhasználható a lehetséges minimalizáló $\mathbf{x}$ pontok megoldására. A variációszámításban, ha egy $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ függvény egy $I(f)$ funkcionál minimalizálója, akkor a $\delta I(f) = 0$ szükséges feltétel egy PDE-nek bizonyul, amelyet Euler–Lagrange-egyenletnek neveznek. Az Euler–Lagrange-egyenlet tanulmányozása lehetővé teszi számunkra a minimalizálók explicit kiszámítását és tulajdonságaik vizsgálatát. Emiatt gazdag kölcsönhatás van a variációszámítás és a PDE-k elmélete között. Az ebben a fejezetben szereplő ötletek a Γ-konvergenciához kapcsolódnak, amely a funkcionálok konvergenciájának egy olyan fogalma, amely biztosítja, hogy a minimalizálók minimalizálókhoz konvergáljanak.

1.2. Egydimenziós skalárfüggvények elsőrendű szükséges feltételei: az első variáció — C^1 elmélet

Most a többváltozós analízisből jól ismert szélsőérték módszert a variációs integrálok esetére szeretnénk kiterjeszteni, azaz olyan $I : C^1([a,b]) \to \mathbb{R}$ funkcionálokra, melyek alakja:

$$I(f) := \int_a^b L(x, f(x), f'(x))\, dx$$

azzal a céllal, hogy levezessünk néhány (elsőrendű) szükséges feltételt, melyet a minimalizálóknak ki kell elégíteniük.

1.2.1. Az Euler–Lagrange-egyenlet — erős alak

Néhány jelölés rögzítésével kezdünk.

> **1.1. Definíció.** Az $L : [a,b] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvényt **Lagrange függvény**nek nevezzük.

Rögzítsünk tehát egy $f \in C^1([a,b])$ függvényt és vegyünk egy $\varphi \in C^1([a,b])$ irányt. Euler ötlete az volt, hogy tekintsük az I funkcionál f_0-nál vett iránymenti deriváltját a φ irány mentén, azaz tekintsük a $\Phi : (-\varepsilon_0, \varepsilon_0) \to \mathbb{R}$ függvényt, melynek definíciója:

$$\Phi(\varepsilon) := I(f + \varepsilon\varphi) \tag{1}$$

és deriváljuk azt. Ehhez szükségünk van a következő technikai eredményre.

1.2. Lemma. Legyen $g : [a,b] \times [c,d] \to \mathbb{R}$ egy folytonos függvény, melynek létezik a második változó szerinti parciális deriváltja, és az folytonos. Definiáljuk a $G : [c,d] \to \mathbb{R}$ függvényt az alábbiak szerint:

$$G(t) = \int_a^b g(x,t)\,dx$$

Ekkor G egy C^1 osztályú függvény, és

$$G'(t) := \int_a^b \frac{\partial g}{\partial t}(x,t)\,dx$$

Bizonyítás. Rögzítsünk egy $t \in [c,d]$ értéket, és elegendően kicsi h-ra tekintsük a differenciahányadost:

$$\frac{G(t+h) - G(t)}{h} = \int_a^b \frac{g(x,t+h) - g(x,t)}{h}\,dx = \int_a^b \frac{\partial g}{\partial t}(x, t + \theta_h)\,dx$$

ahol az utolsó lépésben a Lagrange-középértéktételt használtuk, és $\theta_h \in (0,1)$ függ x, t és h értékétől. Mivel $\frac{\partial g}{\partial t}$ folytonos, egyenletesen folytonos a $[c,d]$ intervallumon. Így, rögzített $\varepsilon > 0$-hoz találhatunk olyan $\delta > 0$ értéket, hogy ha $|h| < \delta$, akkor

$$\left| \frac{\partial g}{\partial t}(x, t+\theta_h) - \frac{\partial g}{\partial t}(x,t) \right| < \varepsilon$$

minden $x \in [a,b]$-re. Ekkor

$$\left| \frac{G(t+h) - G(t)}{h} - \int_a^b \frac{\partial g}{\partial t}(x,t)\,dx \right| = \left| \int_a^b \left(\frac{\partial g}{\partial t}(x, t+\theta_h) - \frac{\partial g}{\partial t}(x,t) \right)\,dx \right|$$

$$\leq \int_a^b \left| \frac{\partial g}{\partial t}(x, t+\theta_h) - \frac{\partial g}{\partial t}(x,t) \right|\,dx \leq \varepsilon(b-a)$$

Mivel ε tetszőleges, a bizonyítás kész.

Tegyük fel tehát, hogy a Lagrange függvény C^1 osztályú. Valójában csak arra van szükségünk, hogy L-nek a p (sebesség) és ξ (érték) változók szerinti parciális deriváltjai folytonosak legyenek. A fenti eredmény azt mondja, hogy a Φ függvény differenciálható $\varepsilon = 0$-ban, és

$$\Phi'(0) = \int_a^b \left[L_p(x, f(x), f'(x))\varphi'(x) + L_\xi(x, f(x), f'(x))\varphi(x) \right]\,dx$$

1.3. Definíció. Bevezetjük a $\delta I : C^1([a,b]) \times C^1([a,b]) \to \mathbb{R}$ operátort a következőképpen:

$$\delta I(f;\varphi) := \Phi'(0)$$

ahol Φ a (1) szerint definiált, feltéve, hogy a jobb oldal létezik. A $\delta I(f;\varphi)$ mennyiséget az I funkcionál **első variációjának** nevezzük f-nál a φ irány mentén.

1.4. Megjegyzés. Anélkül, hogy feltételeznénk L C^1 osztályú voltát, nem tudjuk, hogy Φ deriváltja $\varepsilon = 0$-ban létezik-e, és ha igen, hogyan írható fel.

Most azokra az $f \in C^1([a,b])$ függvényekre összpontosítunk, amelyek az I minimumai valamely $\mathcal{A} \subset C^1([a,b])$ megengedett függvényosztályon. Látni fogjuk, hogy a levont következtetések valóban függenek a megengedett osztály tulajdonságaitól.

A következőkben feltesszük, hogy a megengedett osztály:

$$\mathcal{A} := \{w \in C^1([a,b]) : w(a) = \alpha, w(b) = \beta\}$$

néhány rögzített $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ értékre. Ebben az esetben a megengedett variációk azok, amelyek a peremértékeket rögzítve hagyják. Emiatt csak olyan φ függvényeket veszünk figyelembe, amelyekre:

$$C_0^1([a,b]) := \{w \in C^1([a,b]) : w(a) = w(b) = 0\}$$

Tudjuk, hogy ha az operátor jól definiált, akkor

$$\delta I(f;\varphi) = 0$$

kell, hogy teljesüljön minden $\varphi \in C_0^1([a,b])$ esetén. A 3.2. Lemma alapján ez átfogalmazható:

$$\int_a^b \left[L_p(x, f(x), f'(x))\varphi'(x) + L_\xi(x, f(x), f'(x))\varphi(x)\right] dx = 0 \tag{2}$$

minden $\varphi \in C_0^1([a,b])$ esetén. Ezt az egyenletet az I **gyenge Euler–Lagrange-egyenletének** nevezzük.

1.5. Definíció. Egy $f \in C^1([a,b])$ függvényt, amely kielégíti a (2) egyenletet minden $\varphi \in C_0^1([a,b])$ esetén, az I **gyenge extremálisának** nevezzük.

A cél egy "szebb" egyenletet kapni, amelyet az I minimalizálóinak az $\mathcal{A}$ halmazon ki kell elégíteniük. Emiatt feltesszük, hogy a Lagrange függvény L C^2 osztályú, és a minimumhely f szintén C^2 osztályú. Ezen hipotézisek mellett, parciális integrálással, a gyenge Euler–Lagrange-egyenletet a következőképpen írhatjuk:

$$\begin{aligned}
0 &= \int_a^b L_p(x, f, f')\varphi'(x)\,dx + \int_a^b L_\xi(x, f, f')\varphi(x)\,dx \\
&= \left[L_p(x, f, f')\varphi(x)\right]_a^b - \int_a^b \frac{d}{dx} L_p(x, f, f')\varphi(x)\,dx + \int_a^b L_\xi(x, f, f')\varphi(x)\,dx \\
&= \int_a^b \left(L_\xi(x, f, f') - \frac{d}{dx} L_p(x, f, f')\right)\varphi(x)\,dx
\end{aligned}$$

ahol az utolsó lépésben felhasználtuk, hogy $\varphi(a) = \varphi(b) = 0$.

Szükségünk van egy további lépésre, hogy a fenti feltételből egy szép egyenletet kapjunk. A következő technikai eredmény megmutatja, hogyan.

1.6. Lemma. (A variációszámítás fundamentális lemmája) Tegyük fel, hogy van egy $g \in C^0([a,b])$ függvényünk, amelyre

$$\int_a^b g(x)\varphi(x)\,dx = 0$$

teljesül minden $\varphi \in C_0^1([a,b])$ esetén. Ekkor $g \equiv 0$ az $[a,b]$ intervallumon.

Bizonyítás. Tegyük fel indirekt, hogy létezik egy $x_0 \in (a,b)$ pont, ahol $g(x_0) \neq 0$. Az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük, hogy $g(x_0) > 0$. Mivel g folytonos, létezik egy $\delta > 0$, hogy $g(x) > \frac{g(x_0)}{2} > 0$ minden $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subset [a,b]$ esetén. Az ötlet az, hogy konstruálunk egy $\varphi \in C_0^1([a,b])$ függvényt, amely pozitív az $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ intervallumon, és nulla máshol. Egy pillanatra tételezzük fel egy ilyen φ létezését. Akkor azt kapnánk, hogy

$$0 = \int_a^b g(x)\varphi(x)\,dx = \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} g(x)\varphi(x)\,dx > \frac{g(x_0)}{2}\int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} \varphi(x)\,dx > 0$$

Mivel ez ellentmondás, arra következtetünk, hogy $g \equiv 0$ az $[a,b]$ intervallumon. Most konstruáljuk meg a megfelelő φ függvényt. Legyen:

$$\varphi(x) := \begin{cases} (x-(x_0-\delta))^2(x-(x_0+\delta))^2 & \text{ha } x \in (x_0-\delta, x_0+\delta) \\ 0 & \text{egyébként} \end{cases}$$

Könnyen belátható, hogy ez a függvény rendelkezik a kívánt tulajdonságokkal.

Így a következő eredményt kaptuk:

1.7. Tétel. (Euler–Lagrange-egyenlet — erős alak) Legyen $L : [a,b] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ egy C^2 osztályú függvény. Tegyük fel, hogy az $I : C^1([a,b]) \to \mathbb{R}$ funkcionál,

$$I(u) := \int_a^b L(x, f(x), f'(x))\,dx$$

egy $f \in C^2([a,b]) \cap \mathcal{A}$ minimummal rendelkezik. Ekkor a következő egyenlet teljesül:

$$L_\xi(x, f(x), f'(x)) = \frac{d}{dx} L_p(x, f(x), f'(x)) \tag{3}$$

minden $x \in [a,b]$ esetén.

1.8. Definíció. A (3) egyenletet az I **(erős) Euler–Lagrange-egyenletének** nevezzük. Egy $f \in C^2([a,b])$ függvényt, amely kielégíti ezt az egyenletet, az I **(erős) extremálisának** nevezzük.

1.9. Megjegyzés. A fenti tétel nem állít semmiféle létezési eredményt. Ez csupán egy szükséges feltétel, amelyet az I minimalizálóinak az $\mathcal{A}$ halmazon ki kell elégíteniük. Továbbá az a tény, hogy egy f minimum C^2 osztályú, olyasmi, amit a priori feltételezünk, és általában nem garantált.

1.10. Megjegyzés. Megjegyezzük, hogy mivel L és f feltételezhetően C^2 osztályúak, a (3) jobb oldalát a következőképpen írhatjuk:

$$L_{xp}(x, f, f') + L_{\xi p}(x, f, f')f'(x) + L_{pp}(x, f, f')f''(x)$$

1.2.2. Közjáték a tesztfüggvényekről és a lokális minimalitásról

Mielőtt folytatnánk, szeretnénk néhány szót ejteni két fontos kérdésről: a megengedett variációk terének megválasztásáról és a lokális minimalizálók fogalmáról.

Eddig a $C_0^1([a,b])$ teret használtuk a megengedett variációk, vagyis a tesztfüggvények terének az $\mathcal{A}$ osztályon való minimalizálók számára. Ezt a teret ad hoc választottuk ki az adott helyzetre. Tegyük fel, hogy egy hasonló szükséges feltételt szeretnénk levezetni az

$$I(f) := \int_a^b L(x, f(x), f'(x), f''(x))\, dx$$

típusú $F : C^2([a,b]) \to \mathbb{R}$ funkcionálok minimalizálóira a $\mathcal{B} := \{w \in C^2([a,b]) : w(a) = \alpha_0, w'(a) = \alpha_1, w(b) = \beta_0, w'(b) = \beta_1\}$ osztályon. Ebben az esetben a tesztfüggvények tere a $C_0^2([a,b])$ lesz. Hasonlóképpen, ha a Lagrange függvény az f k-adik deriváltjától függ, akkor a tesztfüggvények tere $C_0^k([a,b])$ lesz, és így tovább. Ezért szokás a tesztfüggvények standard terének a

$$C_c^\infty([a,b]) := \{w \in C^\infty([a,b]) : (w) \Subset (a,b)\}$$

teret venni, azaz azon C^∞ függvények terét, amelyek tartója (azaz annak a halmaznak a lezártja, ahol a függvény nem nulla) kompaktan tartalmazott az (a,b) intervallumban. Ennek a térnek a választását indokolni kell. Először is, vegyük észre, hogy $C_c^\infty([a,b]) \subset C_0^k([a,b])$ minden $k \in$ esetén. Így ez a tér bármilyen rendű deriváltaktól függő Lagrange függvényekhez használható. Továbbá kiderül, hogy a variációszámítás fundamentális lemmája még ebben a kisebb tesztfüggvénytérben is érvényes. Vagyis fennáll a következő:

1.11. Lemma. (Fundamentális lemma — második változat) Tegyük fel, hogy van egy $g \in C^0([a,b])$ függvényünk, amelyre

$$\int_a^b g(x)\varphi(x)\, dx = 0$$

minden $\varphi \in C_c^\infty([a,b])$ esetén. Ekkor $g \equiv 0$ az $[a,b]$ intervallumon.

1.12. Megjegyzés. Valójában egy általánosabb állítás is igaz: vehetjük, hogy $g \in L^1(a,b)$, és ugyanarra a következtetésre jutunk!

A bizonyítás ötlete ugyanaz, mint a 3.6. Lemmáé. Csak a megfelelő, $C_c^\infty([a,b])$-beli tesztfüggvényt kell megkonstruálni, ugyanazokkal a tulajdonságokkal, mint amit a 3.6. Lemmában konstruáltunk. Ez azt jelenti, hogy még ha csak azt tudjuk is, hogy az iránymenti derivált ezen kisebb tér irányaiban nulla, ez elegendő ahhoz, hogy megkapjuk a $\delta I(f;\varphi) = 0$ szükséges feltétel differenciális alakját.

Most a lokális minimalizálók fogalmát tárgyaljuk. Mint tudjuk, végtelen dimenzióban nem minden norma ekvivalens. Ez azt jelenti, hogy a lokalitás fogalma attól a normától függ, amelyet a terünkben választunk. Koncentráljunk most a $C^1([a,b])$ térre. A hozzá tartozó természetes norma az úgynevezett C^1-norma, $\|\cdot\|_{C^1}$, amelyet a következőképpen adunk meg:

$$\|f\|_{C^1} := \max_{x\in[a,b]} |f(x)| + \max_{x\in[a,b]} |f'(x)| =: \|f\|_{C^0} + \|f'\|_{C^0}$$

De ezen a téren a C^0-normát is tekinthetjük (alapvetően nem törődünk a deriválttal!):

$$\|f\|_{C^0} := \max_{x\in[a,b]} |f(x)|$$

Nyilvánvalóan $\|f\|_{C^0} \leq \|f\|_{C^1}$, de a két norma nem ekvivalens, amint azt az $f_n(x) := \frac{1}{n}\sin(nx)$ függvénysorozat mutatja. Tehát a $\|\cdot\|_{C^1}$ norma erősebb, mint a $\|\cdot\|_{C^0}$ norma. Így a lokális minimalitásnak két fogalma van:

1.13. Definíció. Egy $f \in \mathcal{A}$ függvényt, amelyre

$$I(f) \leq I(v)$$

teljesül minden $v \in \mathcal{A}$ esetén, amelyre $\|f - v\|_{C^1} < \varepsilon$ valamely $\varepsilon > 0$-ra, az I **gyenge lokális minimalizálójának** nevezzük. Ha az egyenlőség csak akkor áll fenn, ha $v = f$, akkor azt mondjuk, hogy f az I **szigorú gyenge lokális minimalizálója**.

1.14. Definíció. Egy $f \in \mathcal{A}$ függvényt, amelyre

$$I(f) \leq I(v)$$

teljesül minden $v \in \mathcal{A}$ esetén, amelyre $\|f - v\|_{C^0} < \varepsilon$ valamely $\varepsilon > 0$-ra, az I **erős lokális minimalizálójának** nevezzük. Ha az egyenlőség csak akkor áll fenn, ha $v = f$, akkor azt mondjuk, hogy f az I **szigorú erős lokális minimalizálója**.

Nyilvánvaló, hogy egy erős lokális minimalizáló egyben gyenge lokális minimalizáló is. Az ellenkezője nem igaz, amint azt a következő példa mutatja.

1.15. Példa. (Bolza) Tekintsük a funkcionált

$$I(f) := \int_0^1 \left((f'(x))^2 - (f'(x))^4\right)\,dx$$

a $C_0^1([0,1])$ halmazon definiálva. Bizonyítsuk be, hogy $f \equiv 0$ egy szigorú gyenge lokális minimalizáló, de nem erős. Az ötlet a következő: a $g(p) := p^2(1-p^2)$ Lagrange függvénynek izolált lokális minimuma van $p = 0$-ban. Ezért $f \equiv 0$ az I szigorú gyenge lokális minimalizálója. Másrészt lehetséges olyan $(f_n)_n$ függvénysorozatot konstruálni, hogy $f_n \to 0$ egyenletesen a $[0,1]$ intervallumon, és $I(f_n) \to -\infty$. Ehhez az ötlet az, hogy az f_n-ek deriváltját "felrobbantjuk". Ez bizonyítja, hogy $f \equiv 0$ nem erős lokális minimalizálója az I-nek.

Tehát minden alkalommal, amikor lokális minimalizálókat vizsgálunk, meg kell határoznunk, hogy melyik metrikát (vagy topológiát) vesszük figyelembe.

1.16. Megjegyzés. Nyilvánvaló, hogy a 3.7. Tétel érvényes az I gyenge lokális minimalizálóira is, és így az I erős lokális minimalizálóira is.

1.2.3. A Du Bois-Reymond-egyenlet — erős alak

Most egy másik elsőrendű szükséges feltételt szeretnénk levezetni az I lokális minimalizálóira. Egyelőre az eredményt anélkül közöljük, hogy megmagyaráznánk a levezetés mögött rejlő ötletet.

1.17. Tétel. (A Du Bois-Reymond-egyenlet — erős alak) Tekintsünk egy $L : [a, b] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ C^2 osztályú függvényt. Tegyük fel, hogy az $I : C^1([a, b]) \to \mathbb{R}$ funkcionál

$$I(f) := \int_a^b L(x, f(x), f'(x))\, dx$$

egy $f \in C^2([a, b]) \cap \mathcal{A}$ gyenge lokális minimummal rendelkezik. Ekkor a következő egyenlet teljesül:

$$\frac{d}{dx}\left(L(x, f, f') - f'(x)L_p(x, f, f')\right) = L_x(x, f, f') \tag{4}$$

minden $x \in [a, b]$ esetén.

Bizonyítás. Közvetlen számítással kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\left(L - f'L_p\right) &= L_x + L_\xi d' + L_p f'' - f''L_p - f'\frac{d}{dx}L_p \\ &= L_x + f'\left(L_\xi - \frac{d}{dx}L_p\right)\end{aligned}$$

Mivel f kielégíti az Euler–Lagrange-egyenletet, a zárójelben lévő kifejezés nulla, ami bizonyítja az állítást.

1.18. Megjegyzés. A (4) egyenletet az Euler–Lagrange-egyenlet második alakjának is nevezik.

1.2.4. A minimalizálók létezéséről

Az összes eddigi szükséges feltételben adottnak vettük egy minimalizáló létezését. Itt meg akarjuk mutatni, hogy még egy nagyon egyszerű esetben is előfordulhat, hogy a minimalizálók létezése nem teljesül.

A bemutatandó példa az úgynevezett Euler-paradoxon. Tekintsük az $L(p) := (1-p^2)^2$ függvényt. Definiáljuk a funkcionált:

$$I(f) := \int_0^1 L(f'(x))\, dx$$

minden $f \in C_0^1([0, 1])$ esetén. Ekkor $I(f) \geq 0$, de nincs olyan függvény, amelyre $I(f) = 0$ lenne. Valóban, egy ilyen f függvénynek csak $f' = \pm 1$ lehetne, és ki kellene elégítenie az $f(0) = f(1) = 0$ feltételt. De ez nem egyeztethető össze az $f \in C^1$ követelménnyel. Ha a megengedett függvények osztályát kiterjesztjük a szakaszonként C^1 függvényekre, akkor létezik minimalizáló.

1.2.5. Egy megmaradási törvény: Beltrami-azonosság

Tegyük fel, hogy a Lagrange függvény expliciten nem függ az x változótól, azaz $L = L(\xi, p)$. Ebben az esetben a Du Bois-Reymond-egyenlet (4) a következőre egyszerűsödik:

$$\frac{d}{dx}\left(L(f, f') - f' L_p(f, d')\right) = 0$$

ami azt jelenti, hogy létezik egy $c \in \mathbb{R}$ konstans, amelyre

$$L(f(x), f'(x)) - f'(x) L_p(f(x), f'(x)) = c$$

minden $x \in [a, b]$ esetén. Ezt az egyenletet **Beltrami-azonosságnak** vagy az energia-megmaradás törvényének nevezik.

1.2.6. Egy regularitási eredmény

Most tegyük fel magunknak a következő kérdést: tegyük fel, hogy van egy (lokális) $f \in C^1([a, b])$ minimalizálója az I-nek. Lehetséges-e a gyenge Euler–Lagrange-egyenletből, anélkül, hogy expliciten megoldanánk, arra következtetni, hogy f valójában simább? A következő eredmény választ ad erre.

1.19. Tétel. Legyen $L : [a, b] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ egy C^2 osztályú Lagrange függvény. Legyen $f \in C^1([a, b])$ a gyenge Euler–Lagrange-egyenlet egy megoldása. Tegyük fel, hogy

$$L_{pp}(x, f(x), f'(x)) \neq 0$$

minden $x \in [a, b]$ esetén. Ekkor $f \in C^2([a, b])$.

Bizonyítás. Tudjuk, hogy létezik $c \in \mathbb{R}$ konstans, amelyre a következő egyenlet teljesül:

$$L_p(x, f(x), f'(x)) = g(x) := c + \int_a^x L_\xi(t, f(t), f'(t))\, dt$$

minden $x \in [a, b]$ esetén. A g függvény C^1 osztályú. Definiáljuk a $G(x, p) := L_p(x, f(x), p) - g(x)$ függvényt, amely C^1 osztályú. Tudjuk, hogy $G(x, f'(x)) = 0$ minden $x \in [a, b]$ esetén. Továbbá

$$\frac{\partial G}{\partial p}(x, f'(x)) = L_{pp}(x, f(x), f'(x)) \neq 0$$

minden $x \in [a, b]$ esetén. Az implicitfüggvény-tétel alkalmazásával azt kapjuk, hogy $f'(x) = h(x)$ valamely C^1 osztályú h függvényre. Tehát $f \in C^2([a, b])$.

1.20. Megjegyzés. Lehetséges a fenti tételt a következőképpen kiterjeszteni: tegyük fel, hogy a Lagrange függvény L C^k osztályú és továbbra is kielégíti a nem-elfajulási feltételt. Ekkor a gyenge Euler–Lagrange-egyenlet bármely C^1 megoldása valójában C^k osztályú.

A következő példa mutatja, hogy a nem-elfajulási feltétel valóban szükséges egy ilyen regularitási eredmény eléréséhez.

1.21. Példa. Legyen $L \in C^2(\mathbb{R})$ egy konvex függvény, amelyre $L(p) = |p|$ a $[-1, 1]$ intervallumon. Ekkor az $\int_0^1 L(f'(x))\,dx$ funkcionál minimalizálói az $f(0) = 0, f(1) = 1$ feltételek mellett szingularitásokat mutathatnak.

1.3. Egydimenziós skalárfüggvények elsőrendű szükséges feltételei: az első variáció — C^1 elmélet

Az előző fejezetben két fontos elsőrendű szükséges feltételt (az Euler–Lagrange-egyenletet és a Du Bois-Reymond-egyenletet) vezettünk le, feltételezve, hogy a minimalizáló C^2 osztályú. A következő példa mutatja, hogy általában ez egy olyan feltételezés, amelyet nem tehetünk meg a priori.

1.22. Példa. Tekintsük a következő funkcionált:

$$I(f) := \int_{-1}^{1} (f'(x)^2(2x - f'(x))^2)\,dx$$

és vizsgáljuk a minimalizálás problémáját a $v \in C^1([-1, 1])$ függvények körében, amelyekre $v(-1) = 0$ és $v(1) = 1$. Könnyen belátható, hogy a funkcionált egyértelműen minimalizálja a következő függvény:

$$f(x) := \begin{cases} 0 & x \in [-1, 0] \\ x^2 & x \in [0, 1] \end{cases}$$

Ez a függvény $C^1([-1, 1])$, de nem eleme a $C^2([-1, 1])$ térnek.

Tehát hasznos lenne olyan elsőrendű szükséges feltételeket találni, amelyek igazak a csak $C^1([a, b])$ osztályba tartozó (lokális) minimalizálókra is.

1.3.1. Az Euler–Lagrange-egyenlet

Visszatekintve arra, amit az Euler–Lagrange-egyenlet levezetése során tettünk, észrevesszük, hogy az alapvető lépés, ahol az f minimalizáló (és az L Lagrange függvény) további regularitása igazán számít, az a parciális integrálás. Valóban, csupán feltételezve, hogy L C^1 osztályú és a minimalizáló f C^1 osztályú, tudjuk, hogy:

$$\int_a^b \left[L_p(x, f, f')\varphi'(x) + L_\xi(x, f, f')\varphi(x)\right]\,dx = 0 \tag{5}$$

minden $\varphi \in C_c^\infty((a, b))$ esetén. Ebből a feltételből szeretnénk egy differenciálegyenletet kapni.

Tehát, tegyük ezt lépésről lépésre: tegyük fel, hogy van két folytonos $g, h : [a, b] \to \mathbb{R}$ függvényünk, amelyekre a következő igaz:

$$\int_a^b \left[g(x)\varphi'(x) + h(x)\varphi(x)\right]\,dx = 0 \tag{6}$$

minden $\varphi \in C_c^\infty((a, b))$ esetén. Szeretnénk valamilyen kapcsolatot levezetni g és h között. Mivel nem tudunk parciálisan integrálni, az első tagot kell kezelnünk. A technikai eredmény, ami segít nekünk, a következő:

1.23. Lemma. (Du Bois-Reymond-lemma) Legyen $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ egy folytonos függvény, amelyre

$$\int_a^b g(x)\psi'(x)\,dx = 0$$

minden $\psi \in C_c^\infty((a, b))$ esetén. Ekkor létezik egy $c \in \mathbb{R}$ konstans, úgy, hogy $g(x) = c$ az $[a, b]$ intervallumon.

1.24. Megjegyzés. Vegyük észre, hogy ha $\psi \in C_c^\infty((a, b))$, akkor $\psi' \in C_c^\infty((a, b))$. Így a fenti eredmény azt mondja, hogy ha $\int_a^b g(x)v(x)dx = 0$ csak olyan függvényekre igaz, amelyek deriváltak, akkor arra következtethetek, hogy g konstans, de nem következtethetek arra, hogy a konstans 0, ahogy azt a variációszámítás fundamentális lemmájában tehettük.

Bizonyítás. (*A 3.20. Lemma bizonyítása*) Először is szeretnénk megérteni (jellemezni) a $C_c^\infty((a, b))$ azon részhalmazát, amely a $C_c^\infty((a, b))$ függvényeinek deriváltjaiból áll. Legyen $v \in C_c^\infty((a, b))$; ekkor $v = \psi'$ valamely $\psi \in C_c^\infty((a, b))$-re, és

$$\int_a^b v(x)\,dx = \psi(b) - \psi(a) = 0 - 0 = 0$$

Azt állítjuk, hogy ez a tulajdonság jellemzi a deriváltakat. Pontosabban, ha van egy $v \in C_c^\infty((a, b))$ függvényünk, amelyre

$$\int_a^b v(x)\,dx = 0,$$

akkor létezik $\psi \in C_c^\infty((a, b))$ úgy, hogy $v = \psi'$. Valóban, a $\psi(x) := \int_a^x v(t)\,dt$ definícióval $\psi \in C_c^\infty((a, b))$ és $\psi' = v$.
Az ötlet most az, hogy a variációszámítás fundamentális lemmáját használjuk fel ennek az eredménynek a bizonyítására. Vegyünk egy $\varphi \in C_c^\infty((a, b))$ függvényt. Annak érdekében, hogy ezt a függvényt a problémánkban tesztfüggvényként használhassuk, át kell alakítanunk egy deriválttá, azaz át kell alakítanunk egy olyan függvénnyé, amelynek az $[a, b]$ feletti integrálja nulla. A legegyszerűbb módja ennek a következő függvény megfontolása:

$$\tilde{\varphi}(x) := \varphi(x) - \eta(x) \int_a^b \varphi(t)\,dt$$

ahol $\eta \in C_0^\infty([a, b])$ egy olyan rögzített függvény, amelyre $\int_a^b \eta(t)\,dt = 1$. Most ellenőrizzük, hogy jól jártunk-e el: $\tilde{\varphi} \in C_c^\infty((a, b))$ és $\int_a^b \tilde{\varphi}(x)\,dx = 0$. Tehát ezt a függvényt használhatjuk tesztfüggvényként a problémánkban. Ekkor

$$\begin{aligned}
0 &= \int_a^b g(x)\tilde{\varphi}(x)\,dx \\
&= \int_a^b g(x)\left(\varphi(x) - \eta(x)\int_a^b \varphi(t)\,dt\right)dx \\
&= \int_a^b g(x)\varphi(x)\,dx - \left(\int_a^b \varphi(t)\,dt\right)\left(\int_a^b g(x)\eta(x)\,dx\right) \\
&= \int_a^b \left(g(x) - \int_a^b g(t)\eta(t)\,dt\right)\varphi(x)\,dx
\end{aligned}$$

Mivel ez minden $\varphi \in C_c^\infty((a,b))$ esetén igaz, a variációszámítás fundamentális lemmáját használva arra következtetünk, hogy

$$g(x) - \int_a^b g(t)\eta(t)\,dt = 0.$$

Ez azt mondja, hogy g egy konstans.

Az előző eredmény segít nekünk a (6) kifejezés kezelésében.

1.25. Következmény. Legyenek $g, h : [a,b] \to \mathbb{R}$ folytonos függvények. Tegyük fel, hogy

$$\int_a^b [g(x)\varphi'(x) + h(x)\varphi(x)]\,dx = 0$$

minden $\varphi \in C_c^\infty((a,b))$ esetén. Ekkor a g függvény $C^1([a,b])$ osztályú és $g'(x) = h(x)$.

A fenti eredményt a mi esetünkre alkalmazva a következő szükséges feltételt kapjuk az f és u természetes feltételezései mellett.

1.26. Tétel. Legyen $L : [a,b] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ egy C^1 osztályú függvény. Tegyük fel, hogy az $I : C^1([a,b]) \to \mathbb{R}$ funkcionál

$$I(f) := \int_a^b L(x, f(x), f'(x))\,dx$$

egy $f \in C^1([a,b]) \cap \mathcal{A}$ minimummal rendelkezik. Ekkor a $x \mapsto L_p(x, f(x), f'(x))$ függvény C^1 osztályú, és létezik egy konstans, úgy, hogy a következő egyenlet teljesül:

$$L_p(x, f(x), f'(x)) = c + \int_a^x L_\xi(t, f(t), f'(t))\,dt$$

minden $x \in [a,b]$ esetén.

1.27. Megjegyzés. Általában a fenti egyenletet a következő formában írják:

$$\frac{d}{dx} L_p(x, f(x), f'(x)) = L_\xi(x, f(x), f'(x))$$

Mindazonáltal mi inkább az integrális formában írjuk, hogy emlékeztessük magunkat arra, hogy a bal oldalt (általában) nem lehet a láncszabállyal kifejteni, mivel csak azt tételezzük fel, hogy L és f C^1 osztályúak.

1.3.2. A Du Bois-Reymond-egyenlet

Mivel szerencsénk volt, és sikerült visszanyerni az Euler–Lagrange-egyenletet (gyengébb formában!) csupán az L és f természetes hipotéziseinek feltételezésével, most azt szeretnénk megérteni, hogy vajon a Du Bois-Reymond-egyenletet is visszanyerhetjük-e ugyanezen gyenge feltételezések mellett.

A tétel bizonyításának ötlete a következő: eddig egy f függvény olyan variációit vizsgáltuk, amelyek külső variációknak tekinthetők. De mivel függvényekkel dolgozunk, kihasználhatjuk azt a tényt is, hogy a független változót is variálhatjuk.

(A szöveg itt egy komplex levezetést mutat be a független változó variálásával, diffeomorfizmusok segítségével, ami végül a következő tételhez vezet.)

1.28. Tétel. Legyen $L : [a, b] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ egy C^1 osztályú függvény. Tegyük fel, hogy az $I : C^1([a, b]) \to \mathbb{R}$ funkcionál

$$I(f) := \int_a^b L(x, f(x), f'(x))\, dx$$

egy $f \in C^1([a, b]) \cap \mathcal{A}$ minimummal rendelkezik. Ekkor létezik egy $c \in \mathbb{R}$ konstans, úgy, hogy a következő egyenlet teljesül:

$$L(x, f, f') - f' L_p(x, f, f') = c + \int_a^x L_x(t, f(t), f'(t))\, dt \tag{7}$$

minden $x \in [a, b]$ esetén.

1.29. Megjegyzés. Vegyük észre, hogy az Euler–Lagrange-egyenlet és a Du Bois-Reymond-egyenlet általában különböző egyenletek, mivel az L különböző deriváltjai szerepelnek bennük.

1.3.3. Egy regularitási eredmény

Most tegyük fel magunknak a következő kérdést: tegyük fel, hogy van egy (lokális) $f \in C^1([a, b])$ minimalizálója I-nek. Lehetséges-e a gyenge Euler–Lagrange-egyenletből, anélkül, hogy expliciten megoldanánk, arra következtetni, hogy f valójában simább? A következő eredmény ad választ.

1.30. Tétel. Legyen $L : [a, b] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ egy C^2 osztályú Lagrange függvény. Legyen $f \in C^1([a, b])$ a gyenge Euler–Lagrange-egyenlet egy megoldása. Tegyük fel, hogy

$$L_{pp}(x, f(x), f'(x)) \neq 0$$

minden $x \in [a, b]$ esetén. Ekkor $f \in C^2([a, b])$.

Bizonyítás. Tudjuk, hogy létezik $c \in \mathbb{R}$ úgy, hogy a következő egyenlet teljesül:

$$L_p(x, f(x), f'(x)) = g(x) := c + \int_a^x L_\xi(t, f(t), f'(t))\, dt$$

minden $x \in [a, b]$ esetén. A g függvény C^1 osztályú. Definiáljuk a $G(x, p) := L_p(x, f(x), p) - g(x)$ függvényt, amely C^1 osztályú. Tudjuk, hogy $G(x, u'(x)) = 0$. Továbbá

$$\frac{\partial G}{\partial p}(x, f'(x)) = L_{pp}(x, f(x), f'(x)) \neq 0$$

minden $x \in [a, b]$ esetén. Az implicitfüggvény-tétel alkalmazásával azt kapjuk, hogy $f'(x) = h(x)$ valamely C^1 osztályú h függvényre. Tehát $f \in C^2([a, b])$.

1.31. Megjegyzés. Lehetséges a fenti tételt a következőképpen kiterjeszteni: tegyük fel, hogy az L Lagrange függvény C^k osztályú, és továbbra is kielégíti a nem-elfajulási feltételt. Ekkor a gyenge Euler–Lagrange-egyenlet bármely C^1 megoldása valójában C^k osztályú lesz.

A következő példa mutatja, hogy a nem-elfajulási feltétel valóban szükséges egy ilyen regularitási eredmény eléréséhez.

1.32. Példa. Legyen $L \in C^2(\mathbb{R})$ egy konvex függvény, amelyre $L(p) = |p|$ a $[-1, 1]$ intervallumon, és L injektív $\mathbb{R}\setminus[-1, 1]$-en. Ekkor az $\int_0^1 L(f'(x))\,dx$ funkcionál minimalizálói az $f(0) = 0, f(1) = 1$ feltételekkel szingularitásokat mutathatnak.

1.33. Megjegyzés. A feltétel, amit az előző tételben megköveteltünk, a $p \mapsto f(x, f(x), p)$ függvény konvexitásával kapcsolatos a $p = f'(x)$ pontban.

1.4. Problémák szabad végpontokkal

Ebben a szakaszban azokat az eseteket vizsgáljuk, amikor a funkcionált a $C^1([a, b])$ osztályon minimalizáljuk, azaz nincsenek peremfeltételek a végpontokra. Legyen $f \in C^1([a, b])$ egy lokális minimalizáló. Vegyünk egy tetszőleges $\varphi \in C^\infty([a, b])$ függvényt. Mivel $f + \varepsilon\varphi$ is a megengedett halmazba tartozik, az első variációnak el kell tűnnie:

$$0 = \int_a^b \left[L_p(x, f, f')\varphi' + L_\xi(x, f, f')\varphi\right] dx.$$

Tegyük fel egyelőre, hogy L és f C^2 osztályúak, így parciálisan integrálhatunk:

$$0 = \int_a^b \left(L_\xi - \frac{d}{dx}L_p\right) \varphi(x)\,dx + \left[L_p(x, f, f')\varphi(x)\right]_a^b.$$

Ez az egyenlőség minden $\varphi \in C^\infty([a, b])$ esetén fennáll. Mivel a kompakt tartójú függvényekre ($C_c^\infty((a, b))$) is igaz, a korábbiakból tudjuk, hogy az integrál alatti kifejezésnek nullának kell lennie, tehát az Euler–Lagrange-egyenlet továbbra is érvényes:

$$L_\xi(x, f, f') = \frac{d}{dx}L_p(x, f, f').$$

Így a peremtagoknak is el kell tűnniük:

$$L_p(b, f(b), f'(b))\varphi(b) - L_p(a, f(a), f'(a))\varphi(a) = 0$$

minden $\varphi \in C^\infty([a, b])$ esetén. Mivel $\varphi(a)$ és $\varphi(b)$ értékeit tetszőlegesen, egymástól függetlenül megválaszthatjuk, a következő lemma adja a következtetést.

1.34. Lemma. Ha $g(b)\varphi(b) - g(a)\varphi(a) = 0$ minden $\varphi \in C^\infty([a, b])$ esetén, akkor $g(a) = 0$ és $g(b) = 0$.

1.35. Tétel. Legyen L egy C^2 osztályú Lagrange függvény, és $f \in C^2([a, b])$ a funkcionál lokális minimalizálója a $C^1([a, b])$ osztályon. Ekkor f kielégíti az Euler–Lagrange-egyenletet az $[a,b]$ intervallumon, valamint a következő **természetes peremfeltételeket**:

$$L_p(a, f(a), f'(a)) = 0 \quad \text{és} \quad L_p(b, f(b), f'(b)) = 0. \tag{8}$$

1.36. Megjegyzés. Ha csak az egyik végpont szabad (pl. $f(a) = \alpha$ rögzített, de $f(b)$ szabad), akkor a természetes peremfeltétel csak a szabad végpontban, azaz b-ben érvényesül.

1.5. Izoperimetrikus problémák

Most olyan minimalizálási problémákat vizsgálunk, amelyek egy integrális kényszert is tartalmaznak: minimalizáljuk

$$I(f) := \int_a^b L(x, f, f')\,dx$$

funkcionált az

$$\mathcal{A} := \left\{ f \in C^1([a,b]) : f(a) = \alpha, f(b) = \beta, \text{ és } G(f) = c \right\}$$

osztályon, ahol $c \in \mathbb{R}$ és

$$G(f) := \int_a^b g(x, f, f')\,dx.$$

1.5.1. A Lagrange-multiplikátor szabály variációs problémákra

Az ötlet hasonló a véges dimenziós Lagrange-multiplikátoros módszerhez. Ott egy $I(\mathbf{x})$ függvényt minimalizálunk a $G(\mathbf{x}) = 0$ feltétel mellett, és a szükséges feltétel az, hogy $\nabla I(\mathbf{x}) = \lambda \nabla G(\mathbf{x})$ valamely $\lambda \in \mathbb{R}$ konstansra.

1.37. Tétel. (Lagrange-multiplikátor szabály) Legyenek L és g C^1 osztályú függvények. Legyen $f \in \mathcal{A}$ az I funkcionál lokális minimumhelye a $G(f) = c$ kényszer mellett. Tegyük fel, hogy f nem "degenerált" pontja a kényszernek (azaz létezik ψ_0, amire $\delta G(f)[\psi_0] \neq 0$). Ekkor létezik egy $\lambda \in \mathbb{R}$ konstans (a Lagrange-multiplikátor), amelyre f kielégíti a

$$\delta I(f)[\varphi] + \lambda\, \delta G(f)[\varphi] = 0$$

egyenletet minden megengedett φ variációra. Ez ekvivalens azzal, hogy f kielégíti a $H = I + \lambda G$ funkcionálhoz tartozó Euler–Lagrange-egyenletet, melynek a Lagrange függvénye $h = L + \lambda g$.

Bizonyítás. (*A bizonyítás vázlata*) Vegyünk egy φ variációt, amely általában nem tartja a $G(f) = c$ kényszert. Az ötlet az, hogy ezt a variációt egy másik, ψ_0 irányú (amelyre $\delta G(f)[\psi_0] \neq 0$) kis perturbációval korrigáljuk úgy, hogy az új $f + \varepsilon\varphi + s(\varepsilon)\psi_0$ függvény már eleget tegyen a kényszernek. Az implicitfüggvény-tétel garantálja egy ilyen $s(\varepsilon)$ korrekciós függvény létezését. Mivel a korrigált függvényen az I funkcionálnak minimuma van $\varepsilon = 0$-ban, a deriváltnak el kell tűnnie, ami a tétel állításához vezet.

1.38. Megjegyzés. A módszer a gyakorlatban úgy működik, hogy megoldjuk a $h = L + \lambda g$ Lagrange függvényhez tartozó Euler–Lagrange-egyenletet. A megoldás, $f(x; \lambda, c_1, c_2)$, általában függ a λ multiplikátortól és két integrálási állandótól. Ezt a három konstanst a peremfeltételekből és a $G(f) = c$ kényszer-egyenletből határozzuk meg.

1.6. Elsőrendű szükséges feltételek általános függvényekre

Ebben a fejezetben az elsőrendű szükséges feltételekhez vezető gondolatokat általánosítjuk $u : \Omega \to \mathbb{R}^M$ függvények esetére, ahol $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ egy C^1 osztályú peremmel rendelkező nyílt halmaz. Az ilyen függvényekhez

$$L : \Omega \times \mathbb{R}^M \times \mathbb{R}^{M\times N} \to \mathbb{R}$$

típusú Lagrange függvényeket kell tekintenünk. A változókat a következőképpen jelöljük: $(x, \xi, p) = (x_1, \ldots, x_N; \xi^1, \ldots, \xi^M; p_1^1, \ldots, p_N^M)$. A deriváltakra a $p_\alpha^i = \frac{\partial f^i}{\partial x_\alpha}$ jelölést használjuk. Az egyszerűség kedvéért az ismétlődő indexekre az Einstein-féle szummázási konvenciót alkalmazzuk (görög indexek 1-től N-ig, latin indexek 1-től M-ig futnak).

1.6.1. Az Euler–Lagrange-egyenlet

Az egyváltozós esethez hasonlóan, egy f gyenge lokális minimalizálót egy $\varphi \in C_c^\infty(\Omega; \mathbb{R}^M)$ tesztfüggvénnyel perturbálunk. Az $I(f + \varepsilon\varphi)$ funkcionál $\varepsilon = 0$ pontbeli első deriváltjának el kell tűnnie:

$$0 = \delta I(f)[\varphi] = \int_\Omega \left(\frac{\partial L}{\partial \xi^i} \varphi^i + \frac{\partial L}{\partial p_\alpha^i} \frac{\partial \varphi^i}{\partial x_\alpha} \right) dx.$$

A második tagra parciális integrálást (Gauss-Osztrogradszki tételt) alkalmazva, és kihasználva, hogy φ a peremen nulla, kapjuk:

$$0 = \int_\Omega \left(\frac{\partial L}{\partial \xi^i} - \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left(\frac{\partial L}{\partial p_\alpha^i} \right) \right) \varphi^i(x)\, dx.$$

Mivel ez minden φ^i tesztfüggvényre igaz, a variációszámítás (többdimenziós) fundamentális lemmája szerint az integrálandó kifejezésnek el kell tűnnie.

1.39. Lemma. (A variációszámítás fundamentális lemmája) Legyen $g \in C^0(\Omega)$ olyan, hogy $\int_\Omega g(x)\varphi(x)\, dx = 0$ minden $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$ esetén. Ekkor $g \equiv 0$ az Ω-n.

1.40. Definíció. Az L Lagrange függvényhez tartozó **Euler-operátor** (E_L):

$$E_L(f)_i := \frac{\partial L}{\partial \xi^i} - \sum_{\alpha=1}^{N} \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left(\frac{\partial L}{\partial p_\alpha^i} \right) \quad (i = 1, \ldots, M).$$

Ezt tömörebben is írhatjuk: $E_L(f) = L_\xi - \operatorname{div}(L_p) = 0$.

1.41. Tétel. Legyen $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ egy korlátos, nyílt halmaz C^1 peremmel. Tegyük fel, hogy az L Lagrange függvény C^2 osztályú. Ha $f \in C^2(\Omega; \mathbb{R}^M)$ egy gyenge lokális minimalizálója az I funkcionálnak, akkor kielégíti az $E_L(f) = 0$ Euler–Lagrange-egyenletrendszert Ω-ban.

1.42. Példa. (Példák)

- **Dirichlet-funkcionál:** $I(f) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla f|^2 dx$. Az Euler–Lagrange-egyenlet a **Laplace-egyenlet**: $\Delta f = 0$. Mivel a Lagrange függvény szigorúan konvex, minden megoldás egyedi minimalizáló.

- **Poisson-egyenlet:** Ha a funkcionál $I(f) = \int_\Omega (\frac{1}{2}|\nabla f|^2 + hf)dx$, az egyenlet $\Delta f = h$.
- **Minimálfelület-egyenlet:** Az $f : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ függvény grafikonjának felszínét adó $A(f) = \int_\Omega \sqrt{1 + |\nabla f|^2} dx$ funkcionál Euler–Lagrange-egyenlete:
$$\operatorname{div}\left(\frac{\nabla f}{\sqrt{1+|\nabla f|^2}}\right) = 0.$$
- **Előírt közepes görbületű felület:** Az $I(f) = \int_\Omega (\sqrt{1 + |\nabla f|^2} + Hu)\, dx$ funkcionál egyenlete:
$$\operatorname{div}\left(\frac{\nabla f}{\sqrt{1+|\nabla f|^2}}\right) = H.$$

1.6.2. Természetes peremfeltételek

Ha a minimalizálási feladatban a peremértékek nincsenek rögzítve (azaz a $C^1(\overline{\Omega}; \mathbb{R}^M)$ téren minimalizálunk), a parciális integrálás egy peremintegrált is eredményez:

$$\int_\Omega (E_L(f)_i \varphi^i)\, dx + \int_{\partial\Omega} \left(\frac{\partial L}{\partial p^i_\alpha} \nu_\alpha\right) \varphi^i\, dS = 0.$$

Mivel az Euler–Lagrange-egyenlet az Ω belsejében továbbra is érvényes, a peremintegrálnak el kell tűnnie minden φ variációra. A variációszámítás peremre vonatkozó fundamentális lemmája szerint ez csak akkor lehetséges, ha a φ^i együtthatója nulla.

1.43. Tétel. Egy lokális minimalizálónak nemcsak az $E_L(f) = 0$ egyenletet kell kielégítenie Ω-ban, hanem a peremen a következő **természetes peremfeltételt** is:

$$\sum_{\alpha=1}^{N} \frac{\partial L}{\partial p^i_\alpha} \nu_\alpha = 0 \quad \text{az } \partial\Omega\text{-n minden } i = 1, \dots, M \text{ esetén,}$$

ahol ν a peremre állított külső normálvektor.

1.44. Példa.
- A Dirichlet-funkcionál esetében ez a homogén **Neumann-peremfeltételt** adja: $\frac{\partial f}{\partial \nu} = 0$.
- A minimálfelület-funkcionálnál a természetes peremfeltétel geometriai jelentése az, hogy a felület merőlegesen metszi a peremet.

1.6.3. Belső variációk és az energia-impulzus tenzor

A független x változó variálásával ("belső variációk") a Du Bois–Reymond-egyenlet általánosítását kapjuk. Az ötlet az, hogy az Ω tartományt egy η vektormező mentén "deformáljuk", és a funkcionál stacionaritását vizsgáljuk. A levezetés az **energia-impulzus tenzor** fogalmához vezet.

1.45. Definíció. Az **energia-impulzus tenzor** egy $T_{\alpha\beta}$ mátrix, melynek elemei:

$$T_{\alpha\beta} := \frac{\partial L}{\partial p^i_\alpha}\frac{\partial f^i}{\partial x_\beta} - L\delta_{\alpha\beta}.$$

1.46. Tétel. Ha f egy lokális minimalizáló, akkor teljesül rá a $\operatorname{div}(T) + L_x = 0$ egyenlet, ami egy megmaradási törvényt fejez ki. (Itt L_x az L explicit x-függéséből származó parciális derivált.)

1.6.4. Izoperimetrikus problémák

Egy $G(f) = c$ integrális kényszer esetén a megoldás egy λ **Lagrange-multiplikátor** konstanssal módosított Euler-Lagrange egyenletet elégít ki, amely a $H = L + \lambda G_{lagrangian}$ funkcionálhoz tartozik.

1.6.5. Holonóm kényszerek

Ha a kényszer egy $G(\mathbf{x}, f(\mathbf{x})) = 0$ egyenlettel adott (azaz a megoldásnak egy sokaságon kell lennie), a szükséges feltétel az, hogy az Euler-operátor merőleges legyen a kényszersokaság érintősíkjára. Ez $\lambda_j(\mathbf{x})$ **függvény értékű Lagrange-multiplikátorok** megjelenéséhez vezet:

$$E_L(f)_i = \sum_{j=1}^{k} \lambda_j(\mathbf{x})\frac{\partial G_j}{\partial \xi^i}.$$

1.7. Másodrendű szükséges feltételek

Eddig csak az első variáció eltűnésével kapcsolatos szükséges feltételeket vizsgáltuk. Most magasabb rendű szükséges feltételeket vizsgálunk. Három ilyet fogunk látni: a második variáció nemnegativitását, a Legendre–Hadamard-feltételt gyenge lokális minimalizálókra, és a Weierstrass-feltételt erős lokális minimalizálókra. Az elsőt teljes általánosságban bizonyítjuk, míg a másik kettő esetében a görbék, azaz $f : [a, b] \to \mathbb{R}^M$ függvények esetére szakosodunk. Ennek oka, hogy ebben az esetben a számítások egyszerűbbek, így jobban megragadható a fő gondolat. Minden bizonyítás, technikai részletektől eltekintve, adaptálható az általánosabb esetre.

1.7.1. A második variáció nem-negativitása

Ez az első feltétel nem meglepő. A véges dimenziós esetben egy lokális minimumhely egyben kritikus és stabil pont is, azaz $\nabla g(\mathbf{x}) = 0$ és $D^2 g(\mathbf{x}) \geq 0$. Azt állítjuk, hogy ugyanez igaz a variációs integrálokra is.

1.47. Tétel. Legyen L egy C^2 osztályú Lagrange függvény, és tegyük fel, hogy $f \in C^1(\Omega; \mathbb{R}^M)$ egy gyenge lokális minimalizáló. Ekkor

$$\delta^2 I(f)[\varphi] \geq 0$$

minden $\varphi \in C_c^\infty(\Omega; \mathbb{R}^M)$ esetén, ahol

$$\delta^2 I(f)[\varphi] := \int_\Omega \Bigg(\varphi^T L_{\xi\xi}(x, f, Df)\varphi + \\ 2\varphi^T L_{\xi p}(x, f, Df) D\varphi + \\ (D\varphi)^T L_{pp}(x, f, Df) D\varphi \Bigg)\, dx.$$

Bizonyítás. Vegyünk egy $\varphi \in C_c^\infty(\Omega; \mathbb{R}^M)$ függvényt, és tekintsük a $\Phi(\varepsilon) := I(f + \varepsilon\varphi)$ függvényt. Tudjuk, hogy $\Phi'(0) = 0$ és $\Phi''(0) \geq 0$. Az állítás az utóbbi feltételből következik.

1.7.2. A Legendre–Hadamard szükséges feltétel

Az előző integrális feltételből szeretnénk egy pontonkénti feltételt levezetni. Kiderül, hogy a második variációban szereplő három tag közül a legfontosabb az L_{pp}-t tartalmazó.

1.48. Tétel. (Legendre–Hadamard-feltétel) Legyen L egy C^2 Lagrange függvény és tegyük fel, hogy u egy gyenge lokális minimalizáló. Ekkor az $M \times M$-es $L_{pp}(x, f(x), Df(x))$ mátrix pozitív szemidefinit, azaz

$$\eta^T L_{pp}(x, f(x), Df(x))\eta \geq 0$$

minden $x \in [a, b]$ és $\eta \in \mathbb{R}^M$ esetén.

Bizonyítás. (*A bizonyítás vázlata*) A bizonyítás egy speciális, "tüskés" tesztfüggvény-sorozat konstruálásán alapul. Ezek a függvények egy x_0 pont körül egyre keskenyebb és meredekebb tartományon vesznek fel nem nulla értéket. Behelyettesítve őket a $\delta^2 I(f)[\varphi_k] \geq 0$ feltételbe és elvégezve a $k \to \infty$ határátmenetet, a deriváltakat tartalmazó tagok dominálnak, és megkapjuk a pontonkénti feltételt.

1.7.3. A Weierstrass-féle szükséges feltétel

Ha feltesszük, hogy f egy **erős** lokális minimalizáló, egy globálisabb jellegű szükséges feltételt kaphatunk.

1.49. Definíció. (Weierstrass-féle többlet függvény) Az $\mathcal{E}$ **többlet függvény** a következőképpen definiált:

$$\mathcal{E}(x, \xi, p, q) := L(x, \xi, q) - L(x, \xi, p) - (q - p)^T L_p(x, \xi, p).$$

Geometriailag az $\mathcal{E}$ függvény azt méri, hogy a $p \mapsto L(x, \xi, p)$ függvény mennyivel van a p_0 pontbeli érintője felett. A konvex függvényekre $\mathcal{E} \geq 0$.

1.50. Tétel. (Weierstrass-feltétel) Ha f egy erős lokális minimalizáló, akkor

$$\mathcal{E}(x, f(x), Df(x), q) \geq 0$$

minden $x \in [a, b]$ és minden $q \in \mathbb{R}^{M \times N}$ esetén.

Bizonyítás. (*A bizonyítás vázlata*) A bizonyítás egy "fűrészfog" alakú variáció konstruálásán alapul. Egy kis intervallumon eltérítjük a megoldást egy lineáris függvénnyel, majd visszavezetjük az eredeti görbéhez. Mivel erős minimumról van szó, a deriváltak tetszőlegesen nagyok lehetnek, így ez a variáció megengedett. A funkcionál változásának nulladrendűnek kell lennie, amiből a határátmenet után az $\mathcal{E} \geq 0$ feltétel adódik.

1.8. Null-Lagrange függvények

Ebben a részben olyan Lagrange függvényeket vizsgálunk, amelyekre $E_L(f) = 0$ minden f függvényre. Ezek azért érdekesek, mert az Euler–Lagrange-egyenlet nem ad semmilyen információt a minimumhelyekről.

1.51. Definíció. Egy L Lagrange függvény **null-lagrange függvénynek** nevezünk, ha $L_L(f) = 0$ minden sima f függvényre.

1.52. Állítás. A következő állítások ekvivalensek:

(i) L egy null-lagrange függvény.

(ii) Az $I(f)$ funkcionál értéke csak a peremértékektől függ.

(iii) L egy teljes divergencia, azaz létezik egy Φ vektormező, amelyre $L = \operatorname{div}(\Phi)$.

Bizonyítás. (*A bizonyítás vázlata*) (i) $\Leftrightarrow$ (ii) az Euler-operátor definíciójából és egy útvonal-integrálos trükkből következik. (iii) $\Rightarrow$ (i) a Stokes-tétel direkt következménye, mivel egy teljes divergencia integrálja a peremen kiértékelt potenciállal egyenlő.

Az egydimenziós skalár esetben ($N = M = 1$) a null-lagrange függvény szerkezete különösen egyszerű:

1.53. Állítás. Egy $L(x, \xi, p)$ Lagrange függvény pontosan akkor null-lagrange függvény, ha létezik egy $S(x, \xi)$ függvény, amelyre

$$L(x, \xi, p) = \frac{\partial S}{\partial x}(x, \xi) + p\frac{\partial S}{\partial \xi}(x, \xi) = \frac{d}{dx}S(x, f(x)).$$

Ez azt jelenti, hogy az $I(f)$ funkcionál egyszerűen $I(f) = \int_a^b \frac{d}{dx}S(x, f(x))\, dx = S(b, f(b)) - S(a, f(a))$, ami nyilvánvalóan csak a peremértékektől függ.

1.9. Elégséges feltételek

Ebben a fejezetben a következő kérdésre keressük a választ: milyen feltételeket kell hozzáadnunk az előző fejezetekben levezetett első- és másodrendű szükséges feltételekhez annak érdekében, hogy gyenge vagy erős lokális minimalitást biztosítsunk?

1

[1] Vegyük észre, hogy az összes bemutatott feltétel nem globális minimalitási tulajdonságokkal foglalkozik, hanem csak lokálisakkal. A globális minimalitási eredmények eléréséhez bonyolultabb érvelések szükségesek.

1.9.1. A második variáció koercitivitása

Az I második variációjának vizsgálatával kezdünk. Tudjuk, hogy a véges dimenziós esetben, ha van egy $g \in C^2(\mathbb{R}^N)$ függvényünk és egy $x_0 \in \mathbb{R}^N$ pontunk, amelyre

$$\nabla g(x_0) = 0 \quad \text{és} \quad D^2 g(x_0) > 0,$$

akkor x_0 a g függvény izolált lokális minimalizálója. Így feltételezhetnénk, hogy ugyanez igaz a variációszámítás funkcionáljaira is. A válasz azonban nemleges, amint azt a következő, Bolza által bemutatott példa mutatja. A probléma az, hogy egy végtelen dimenziós térben vagyunk. A véges dimenziós esetben, ha egy folytonos függvény pozitív az egységgömbön, akkor az infimuma is pozitív a kompaktság miatt. Végtelen dimenzióban az egységgömb nem kompakt, így ez az érvelés megbukik. Előfordulhat, hogy létezik egy olyan függvénysorozat, amelyen a második variáció nullához tart, anélkül, hogy a sorozat normában konvergálna. A helyes feltétel a **koercitivitás**.

1.54. Tétel. Legyen L egy C^2 osztályú Lagrange függvény, és legyen $f \in C^2((a,b))$ egy kritikus pont, amelyre

$$\inf_{\|\varphi\|_{H^1}=1} \delta^2 I(f)[\varphi] = c > 0,$$

azaz létezik $c > 0$ konstans, hogy

$$\delta^2 I(f)[\varphi] \geq c \int_a^b ((\varphi'(x))^2 + (\varphi(x))^2)\, dx = c\|\varphi\|_{H^1}^2$$

minden $\varphi \in C_c^\infty((a,b))$ tesztfüggvényre. Ekkor f egy gyenge lokális minimalizáló. Pontosabban, f egy izolált gyenge lokális minimalizáló.

1.55. Megjegyzés. A fenti érvelés nem alkalmazható erős lokális minimalitás elérésére, mivel valóban szükségünk van a függvény deriváltjának kontrolljára az L másodrendű deriváltjainak becsléséhez.

1.9.2. Jacobi-féle konjugált pontok

Most azt vizsgáljuk, mikor lehetséges a második variáció alulról történő becslése, ahogy azt a tétel hipotézise megköveteli. Ebben a szakaszban csak $f \in C^2((x_1,x_2))$ függvényekkel foglalkozunk. Rögzítsünk egy f kritikus pontot és definiáljuk:

$$a(x) := L_{pp}(x,f,f'), \quad b(x) := L_{p\xi}(x,f,f'), \quad c(x) := L_{\xi\xi}(x,f,f').$$

A Legendre–Hadamard-feltételből tudjuk, hogy $a(x) \geq 0$. Tegyük fel az erős Legendre-feltételt, azaz $a(x) > 0$. Jacobi és Legendre ötlete az volt, hogy a járulékos Lagrange függvényt (a második variáció integranduszát) teljes négyzetté egészítsék ki egy null-lagrange függvény hozzáadásával. Ez egy w segédfüggvény bevezetéséhez és egy Riccati-típusú egyenlethez vezet. Egy okos helyettesítéssel ($w = -a\frac{v'}{v} - b$) ez az egyenlet egy másodrendű lineáris differenciálegyenletre redukálható:

Ez azonban nem meglepő, hiszen, ahogy a véges dimenziós esetben is, ezek a technikák a 'második deriváltak' tulajdonságain alapulnak, amelyek definíciójuk szerint lokális természetűek.

$$(a(x)v'(x))' + (c(x) - b'(x))v(x) = 0. \tag{9}$$

Ezt az egyenletet **Jacobi-egyenletnek** nevezzük. Egy pozitív megoldását **Jacobi-mezőnek**. Ha létezik Jacobi-mező (azaz egy $v > 0$ megoldás) az $[x_1, x_2]$ intervallumon, akkor a második variáció alulról becsülhető, és a kritikus pont egy gyenge lokális minimalizáló.

1.56. Tétel. Legyen L egy C^2 osztályú Lagrange függvény és $f \in C^2((x_1, x_2))$ egy kritikus pont. Tegyük fel, hogy létezik egy Jacobi-mező (amely f-hoz tartozik) az $[x_1, x_2]$ intervallumon. Ekkor f egy szigorú gyenge lokális minimalizáló.

1.9.3. Konjugált pontok és a gyenge lokális minimalitás szükséges feltétele

A Jacobi-egyenlet megoldásainak zérushelyei központi szerepet játszanak.

1.57. Definíció. Egy x_0 ponthoz **konjugált pontoknak** nevezzük a Jacobi-egyenlet azon megoldásának izolált zérushelyeit, amely $v(x_0) = 0$ és $v'(x_0) \neq 0$ feltételekkel indul.

A Sturm-féle oszcillációs tétel segítségével megmutatható, hogy egy lineárisan független megoldáspár zérushelyei "váltogatják" egymást. Ez a konjugált pontok elméletének alapja.

1.58. Tétel. Legyen f egy kritikus pont, és tegyük fel, hogy az erős Legendre-feltétel ($a(x) > 0$) teljesül. Ekkor:

(i) ha az $(x_1, x_2]$ intervallumban nincsenek x_1-hez konjugált pontok, akkor f egy izolált gyenge lokális minimalizáló.

(ii) ha létezik az (x_1, x_2) nyílt intervallumban x_1-hez konjugált pont, akkor f nem gyenge lokális minimalizáló.

(iii) ha az első konjugált pont éppen x_2, akkor a helyzet határeset, bármi előfordulhat.

1.9.4. Weierstrass-féle térelmélet (erős minimumhoz)

Eddig a gyenge lokális minimalitáshoz adtunk elégséges feltételeket. Ebben a szakaszban az erős lokális minimalitást biztosító feltételeket vizsgáljuk.

1.59. Definíció. Egy extremálisokból álló $f(x, \alpha)$ sereg egy **extremálisok mezejét** alkotja, ha a görbesereg egyszeresen fedi le a sík egy tartományát.

Az elmélet lényege, hogy egy f_0 extremálist beágyazunk egy ilyen mezőbe. Ez lehetővé teszi a **Hilbert-féle invariáns integrál** és a **Weierstrass-féle többlet (excess) függvény** definiálását.

$$\mathcal{E}(x, \xi, p, q) = L(x, \xi, q) - L(x, \xi, p) - (q - p)L_p(x, \xi, p)$$

A Weierstrass-féle szükséges feltétel szerint egy erős lokális minimumnál $\mathcal{E} \geq 0$ kell, hogy legyen.

1.60. Tétel. (Elégséges feltétel erős minimumra) Legyen $f \in C^2([a, b])$ egy extremális. Tegyük fel, hogy:

1. f beágyazható egy extremálisok mezejébe.

2. Az erős Legendre-feltétel, $L_{pp} > 0$, teljesül.

3. A Weierstrass-féle feltétel, $\mathcal{E} > 0$, teljesül a vizsgált pontok környezetében.

Ekkor f egy izolált erős lokális minimalizáló.

Megmutatható, hogy az extremálisok mezejébe való beágyazhatóság feltétele szorosan kapcsolódik a konjugált pontok hiányához. Így a konjugált pontok hiánya a gyenge minimum, míg az (erősített) Weierstrass-feltétellel kiegészítve az erős minimum elégséges feltételét adja.

1.10. Fontosabb Példák

Folytatjuk a példák sorát az Euler–Lagrange-egyenletek kiszámításával és megoldásával az 1.1. szakaszból származó példákra.

1.10.1. A legrövidebb út

Emlékezzünk vissza, hogy a legrövidebb út problémájánál a következő funkcionált szeretnénk minimalizálni:

$$I(f) = \int_0^a g(x, f(x))\sqrt{1 + f'(x)^2}\, dx,$$

az $f(0) = 0$ és $f(a) = b$ feltételek mellett. Itt $d = 1$ és a Lagrange függvény:

$$L(x, z, p) = g(x, z)\sqrt{1 + p^2}.$$

Ezért $L_z(x, z, p) = g_z(x, z)\sqrt{1 + p^2}$ és $L_p(x, z, p) = g(x, z)(1 + p^2)^{-\frac{1}{2}}p$. Az Euler–Lagrange-egyenlet:

$$g_z(x, f(x))\sqrt{1 + f'(x)^2} - \frac{d}{dx}\Big(g(x, f(x))(1 + f'(x)^2)^{-\frac{1}{2}}f'(x)\Big) = 0.$$

Ezt általában nehéz megoldani. Abban a speciális esetben, ha $g(x, z) = 1$, akkor $g_z = 0$, és az egyenlet a következőre egyszerűsödik:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{f'(x)}{\sqrt{1 + f'(x)^2}}\right) = 0.$$

A deriváltat elvégezve $f''(x) = 0$ adódik, tehát a megoldás egy egyenes! Ez megerősíti azt az intuíciónkat, hogy két pont között a legrövidebb út az egyenes.

subsubsectionA brachisztochron-probléma A brachisztochron-problémánál a legrövidebb lecsúszási időt keressük, ami a következő funkcionállal írható le:

$$T[y(x)] = \int_A^B dt = \int_A^B \frac{ds}{v}.$$

Homogén gravitációs térben, ha a test az origóból indul ($y(0) = 0$), az energiamegmaradás törvénye szerint $v = \sqrt{-2gy}$ (a lefelé mutató y tengely miatt). Az $ds = \sqrt{1 + y'^2}dx$ ívhosszelemmel a funkcionál:

$$T[y] = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_0^a \sqrt{\frac{1 + y'(x)^2}{-y(x)}}\, dx,$$

az $y(0) = 0$ és $y(a) = b$ ($b < 0$) feltételek mellett. Itt a Lagrange függvény

$$L(x, y, y') = \sqrt{\frac{1 + y'^2}{-y}}.$$

Vegyük észre, hogy L nem függ expliciten x-től. Ezért használhatjuk az Euler–Lagrange-egyenlet alternatív, energiamegmaradást kifejező alakját (Beltrami-azonosság: $y' \frac{\partial L}{\partial y'} - L =$ konstans), amely a következőhöz vezet:

$$y(x)(1 + y'(x)^2) = -C_0, \tag{10}$$

ahol C_0 egy pozitív konstans. Ebből több kvalitatív tulajdonság is levezethető:

- A pálya függőlegesen indul, $\lim_{x \to 0^+} y'(x) = -\infty$.
- A függvény konvex ($y''(x) > 0$).
- A pálya szimmetrikus a legmélyebb pontjára.

Az (10) egyenlet egy elsőrendű, szétválasztható differenciálegyenlet y'-re:

$$\frac{dy}{dx} = -\sqrt{\frac{-C_0 - y}{y}}.$$

Az integrál elvégzéséhez célszerű egy új θ paramétert bevezetni a következő helyettesítéssel:

$$y(\theta) = -\frac{C_0}{2}(1 - \cos\theta).$$

Ezt visszahelyettesítve és integrálva x-re, a következő paraméteres alakot kapjuk:

$$x(\theta) = \frac{C_0}{2}(\theta - \sin\theta)$$
$$y(\theta) = -\frac{C_0}{2}(1 - \cos\theta)$$

A C_0 konstanst úgy kell megválasztani, hogy a görbe áthaladjon a (a, b) végponton.

A megoldás egy **ciklois** görbe, amelyet egy egyenesen legördülő kerék peremének egy pontja ír le.

1. ábra. Brachisztochron-görbék családja. A megoldás egy lefelé fordított ciklois ív.

Érdekesség, hogy a ciklois egyben **tautochron** görbe is: a súrlódásmentesen lecsúszó testnek ugyanannyi időbe telik elérni a legalsó pontot, bárhonnan is indítjuk a pályán.

1.10.2. Minimálfelületek

A minimálfelület-probléma célja az

$$I(f) = \int_U \sqrt{1 + |\nabla f|^2}\, dx$$

funkcionál minimalizálása, az $u = g$ peremfeltétel mellett a ∂U peremen. Itt $L_z = 0$, így az Euler–Lagrange-egyenlet a következő:

$$\operatorname{div}\left(\frac{\nabla f}{\sqrt{1 + |\nabla f|^2}}\right) = 0 \quad U\text{-ban.} \tag{11}$$

Ezt **minimálfelület-egyenletnek** nevezik. Kifejtve egy bonyolult, nemlineáris másodrendű parciális differenciálegyenletet kapunk:

$$(1 + |\nabla f|^2)\Delta f - \sum_{i,j=1}^{d} f_{x_i x_j} f_{x_i} f_{x_j} = 0.$$

1.61. Példafeladat. Mutassuk meg, hogy az $f(\mathbf{x}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{x} + b$ sík megoldja a minimálfelület-egyenletet.

1.62. Példafeladat. Mutassuk meg, hogy $n = 2$ esetén a Scherk-felület, $f(x_1, x_2) = \log\left(\frac{\cos(x_1)}{\cos(x_2)}\right)$, megoldja a minimálfelület-egyenletet a $(-\pi/2, \pi/2)$x$(-\pi/2, \pi/2)$ négyzeten.

1.10.3. Forgási minimálfelület

Mi a minimális felület alakja két, egymástól $2L$ távolságra lévő, r sugarú gyűrű között? A szimmetria miatt feltételezhetjük, hogy a felület egy $f : [-L, L] \to \mathbb{R}$ függvény x-tengely körüli megforgatásával jön létre. A felszín:

$$I(f) = 2\pi \int_{-L}^{L} f(x)\sqrt{1 + f'(x)^2}\, dx.$$

A Lagrange függvény nem függ expliciten x-től, így a Beltrami-azonosságot használva a következő egyenlethez jutunk:

$$cf(x) = \sqrt{1 + f'(x)^2}.$$

Az egyenlet megoldása egy **láncgörbe** (katenáris):

$$f(x) = \frac{1}{c}\cosh(cx).$$

Az ebből származó forgásfelület a **katenoid**. Érdekes, hogy nem mindig létezik megoldás: ha a gyűrűk túl messze vannak egymástól a sugarukhoz képest (r/L arány túl kicsi), a szappanbuborék elpattan, és nem jön létre stabil minimálfelület. Ha létezik megoldás, akkor általában kettő is van; ezek közül a "kevésbé domború" adja a valódi minimumot.

1.10.4. Fénysugár útja változó törésmutatójú közegben

Milyen pályán halad a fénysugár, ha a törésmutató $n(y) = n_0 \frac{d}{y}$? A Fermat-elv szerint a fénysugár azt az utat követi, amelyen az optikai úthossz minimális:

$$S = \int n(\mathbf{r})ds.$$

Az $ds = \sqrt{1 + y'^2}dx$ ívhosszelemmel a minimalizálandó funkcionál:

$$S[y] = \int_{x_0}^{x_1} n_0 \frac{d}{y}\sqrt{1 + y'(x)^2}\, dx.$$

A Lagrange függvény $L(y, y') = n_0 \frac{d}{y}\sqrt{1 + y'^2}$ nem függ expliciten x-től, így ismét a Beltrami-azonosságot használhatjuk:

$$y'\frac{\partial L}{\partial y'} - L = E \quad \text{(konstans)}.$$

Behelyettesítés és egyszerűsítés után a következőhöz jutunk:

$$-\frac{n_0 d}{y\sqrt{1 + y'^2}} = E.$$

Átrendezve y'-re:

$$y'(x) = \frac{dy}{dx} = \pm\sqrt{\frac{n_0^2 d^2}{E^2 y^2} - 1}.$$

Ez egy szétválasztható differenciálegyenlet. A változókat szétválasztva és integrálva:

$$\int dx = \pm \int \frac{y}{\sqrt{\frac{n_0^2 d^2}{E^2} - y^2}}\, dy.$$

Az integrál elvégzése után kapjuk:

$$x + c = \mp\sqrt{\frac{n_0^2 d^2}{E^2} - y^2}.$$

Mindkét oldalt négyzetre emelve és átrendezve az eredmény:

$$(x + c)^2 + y^2 = \frac{n_0^2 d^2}{E^2}.$$

Tehát a fénysugár pályája egy olyan körív, amelynek a középpontja az x-tengelyen helyezkedik el.

1.10.5. Izoperimetrikus egyenlőtlenség

Melyik az a síkbeli zárt görbe, amely adott ℓ kerület mellett a lehető legnagyobb A területet zárja körbe? A sejtés (és a helyes válasz) a kör. Ezt az állítást az **izoperimetrikus egyenlőtlenség** fogalmazza meg:

$$4\pi A \leq \ell^2,$$

ahol egyenlőség pontosan akkor áll fenn, ha a görbe egy kör. A bizonyításhoz a Lagrange-multiplikátoros módszert alkalmazzuk funkcionálokra. Maximalizáljuk az $A(x, y)$ területfunkcionált az $\ell(x, y) = \ell_0$ kerület-kényszer mellett. Az Euler–Lagrange-egyenletek megoldása valóban egy kört ad.

1.10.6. Képhelyreállítás

A zajos képek "megtisztítására" szolgáló egyik sikeres módszer a **teljes variáció (Total Variation, TV)** regularizált minimalizálás. A feladat az

$$I(u) = \int_U \left(\frac{1}{2}(f - u)^2 + \lambda |\nabla u| \right) dx$$

funkcionál minimalizálása az összes $u : U \to \mathbb{R}$ függvényre, ahol $U = (0, 1)^2$ a képtartomány. Az f függvény az eredeti zajos kép, a minimalizáló u pedig a zajtalanított kép. A Lagrange függvény itt:

$$L(x, z, p) = \frac{1}{2}(f(x) - z)^2 + \lambda |p|.$$

Ez a Lagrange függvény a $|p| = |\nabla u|$ tag miatt nem differenciálható $p = 0$-ban. Ez kisebb problémákat okoz a numerikus szimulációk során, ezért gyakori, hogy a TV funkcionál egy differenciálható approximációját használják. Egy népszerű választás:

$$I_\varepsilon(u) = \int_U \left(\frac{1}{2}(f - u)^2 + \lambda \sqrt{|\nabla u|^2 + \varepsilon^2} \right) dx,$$

ahol $\varepsilon > 0$ egy kicsi paraméter. Ha $\varepsilon = 0$, visszakapjuk az eredeti teljes variáció funkcionált. Ebben az esetben a Lagrange függvény:

$$L_\varepsilon(x, z, p) = \frac{1}{2}(f(x) - z)^2 + \lambda \sqrt{|p|^2 + \varepsilon^2},$$

amely már z-ben és p-ben is differenciálható. Bizonyítható, hogy az I_ε minimalizálói konvergálnak az I minimalizálóihoz, amint $\varepsilon \to 0$, de a bizonyítás nagyon technikai. Az ötlet tehát az, hogy rögzítünk egy kis $\varepsilon > 0$ értéket, és minimalizáljuk az I_ε funkcionált. Az Euler–Lagrange-egyenlet kiszámításához vegyük észre, hogy:

$$L_{\varepsilon,z}(x,z,p) = z - f(x) \quad \text{és} \quad \nabla_p L_\varepsilon(x,z,p) = \frac{\lambda p}{\sqrt{|p|^2+\varepsilon^2}}.$$

Ezért az Euler–Lagrange-egyenlet a következő:

$$u - \lambda \operatorname{div}\left(\frac{\nabla u}{\sqrt{|\nabla u|^2+\varepsilon^2}}\right) = f \quad U\text{-ban},$$

homogén Neumann-peremfeltételekkel: $\frac{\partial u}{\partial \nu} = 0$ a ∂U peremen. Ezt az egyenletet szinte soha nem lehet analitikusan megoldani, így numerikus approximációkat kell alkalmaznunk.

1.10.7. Képszegmentáció

A képszegmentáció célja egy kép felosztása értelmes régiókra, például egy objektum elválasztása a háttértől. A Chan-Vese modell ezt a feladatot a következő funkcionál minimalizálásaként fogalmazza meg:

$$I(u,a,b) = \int_U \big(H(u)(f-a)^2 + (1-H(u))(f-b)^2 + \lambda\delta(u)|\nabla u|\big)\,dx,$$

ahol a minimalizálás az $u : U \to \mathbb{R}$ "szintfüggvényre" és az a, b valós számokra történik. Itt f a szegmentálandó kép, a és b a két régió (pl. objektum és háttér) átlagos intenzitása, u pedig egy olyan függvény, amelynek nulla-szinthalmaza ($u(x) = 0$) adja a régiók közötti határt. A $H(u)$ a Heaviside-függvény, a $\delta(u)$ pedig a Dirac-delta függvény, amely a határvonal hosszát "méri".

A Lagrange függvény:

$$L(x,z,p) = H(z)(f(x)-a)^2 + (1-H(z))(f(x)-b)^2 + \lambda\delta(z)|p|$$

a Heaviside- és delta-függvények miatt nem folytonos, ami numerikus problémákat okoz. A gyakorlatban ezért sima approximációkat használunk. Egy $\varepsilon > 0$ paraméterrel definiáljuk a sima Heaviside-függvényt:

$$H_\varepsilon(x) = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{2}{\pi}\arctan\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\right).$$

Ennek deriváltja a sima delta-függvény approximációja:

$$\delta_\varepsilon(x) := H'_\varepsilon(x) = \frac{1}{\pi}\frac{\varepsilon}{\varepsilon^2+x^2}.$$

Ezzel a simított funkcionál:

$$I_\varepsilon(u) = \int_U \big(H_\varepsilon(u)(f-a)^2 + (1-H_\varepsilon(u))(f-b)^2 + \lambda\delta_\varepsilon(u)|\nabla u|\big)\,dx.$$

Ennek a Lagrange függvénynek már levezethetjük az Euler–Lagrange-egyenletét u-ra (rögzített a, b mellett). A számítások elvégzése után a következő PDE-t kapjuk:

$$\delta_\varepsilon(u)\left[(f-a)^2 - (f-b)^2\right] - \lambda \operatorname{div}\left(\frac{\nabla u}{|\nabla u|}\right) = 0 \quad U\text{-ban},$$

homogén Neumann-peremfeltételek mellett ($\frac{\partial u}{\partial \nu} = 0$).

Mivel a minimalizálás u, a és b szerint történik, egy **alternáló minimalizálási algoritmust** alkalmazunk.

1. a **és** b **frissítése:** Rögzített u mellett az I_ε funkcionál minimuma a-ra és b-re analitikusan számolható. Az optimális értékek a két régió súlyozott átlagai:

$$a = \frac{\int_U H_\varepsilon(u) f \, dx}{\int_U H_\varepsilon(u) \, dx}, \quad b = \frac{\int_U (1 - H_\varepsilon(u)) f \, dx}{\int_U (1 - H_\varepsilon(u)) \, dx}.$$

2. u **frissítése:** Rögzített a és b mellett végzünk egy kis lépést az I_ε funkcionál gradiensének ellentétes irányába. Ez a **gradiens ereszkedés** egy parciális differenciálegyenlet megoldását jelenti:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \delta_\varepsilon(u) \left[(f-a)^2 - (f-b)^2 \right] - \lambda \operatorname{div} \left(\frac{\nabla u}{\sqrt{|\nabla u|^2 + \varepsilon^2}} \right) = 0.$$

(Itt a $|\nabla u|$ tagot is simítjuk a nevezőben, hogy elkerüljük a nullával való osztást.)

Ezt a két lépést iteratívan ismételjük, amíg a folyamat konvergál. Az algoritmus eredményeként az u függvény nulla-szinthalmaza kirajzolja a szegmentált kép határait.

Hivatkozások

[1] Riccardo Cristoferi (2016) *Calculus of Variations Lecture Notes.*

[2] Jeff Calder (2024) *The Calculus of Variations*, University of Minnesota School of Mathematics