

# Szorgalmi - I/A,B

## Elméleti mechanika A

2025.10.19.

### A, Anomálikus szakadék

Egy alternatív, két dimenziós világ kutatói felfedeztek egy nagyon furcsa szakadékot, amin belül nem úgy működik a fizika, mint várnánk. Ezt egyik kedvenc mérőeszközük, a  $ds^2$  területű *méter-négyzet* segítségével tapasztalták ki: ez olyasmi mint egy méterrúd, csak két irányban mér. Azt figyelték meg, hogy a szakadékba dobott méternégyzetük mérete változik, minél mélyebbre halad. A feljegyzéseik alapján:

- A négyzet mindig négyzet marad, tehát az oldalainak aránya nem változik.
- A négyzet mért területe fordítottan arányos azzal, hogy milyen mélyen van épp.
- A négyzet teteje és alja közt elhanyagolható annak a megváltozása.

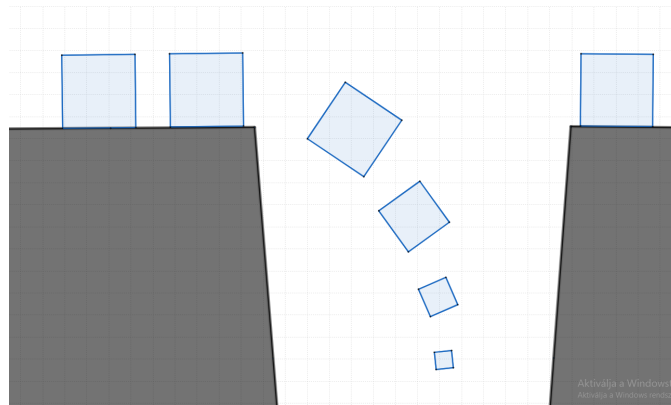
Mindezek tudatában:

(a) Mi az ívelemnégyzet ( $ds^2$ ) a szakadékon belül?

(1 pont)

(b) Mi a legrövidebb út a szakadék két tetszőleges pontja közt?

(2 pont)



1. ábra. Vázlatos ábra a tapasztaltakról.

*Tipp: írjuk fel az ívelemnégyzetet először a szakadékon kívüli, megszokott fizikában. Induljunk ki abból, hogy ez miként változik. A gravitációt ne vegyük figyelembe, de az órai jegyzeteket igen.*

## B, Lagrange-multiplikátor

Nézzük ismét az órán tárgyalt félkörrel lecsúszó tömegpontot. Most arra vagyunk kíváncsiak, hogy mikor fog ez elválni a félkörtől, aminek kiszámításához megismerkedünk a Lagrange-multiplikátor módszerével.

- (a) Írjuk fel általánosságban a Lagrange-függvényt a *kényszerek nélkül*,  $(r, \theta)$  polárkoordinátákkal. **(0.5 pont)**

- (b) Adjuk hozzá a Lagrange-hoz egy tagot, ami nulla ha a kényszer teljesül: például

$$\mathcal{L} \ni \lambda(r - R)$$

alakban. Mik lesznek a mozgásegyenletek a  $\theta$  és  $r$  koordinátákra?

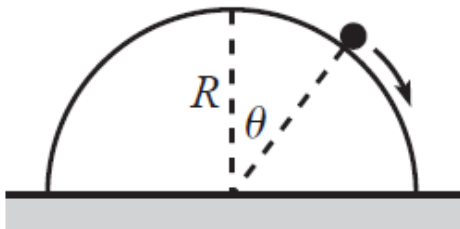
**(1 pont)**

- (c) Rendezzük az  $r(t)$  mozgásegyenletet  $\lambda$ -ra. Írjuk be *most* a kényszerünket a mozgásegyenletekbe, mint  $r = R$ . Ismerjük fel milyen Newtoni mechanikában használt objektumra hasonlít nagyon ez a  $\lambda$ .

**(1.5 pont)**

- (d) Fejezzük ki  $\lambda$ -t pusztán a  $\theta$  szög függvényeként. Milyen  $\theta_0$  szögnél lesz  $\lambda(\theta_0) = 0$ ?

**(2 pont)**



2. ábra. Félkörrel lecsúszó test ábrája.

*Tipp: mindkét mozgásegyenletet fel kell használni.*