

Beadandó - II./4,5

Elméleti mechanika A

2025.10.19.

4. feladat

Adott az 1. ábrán látható elrendezés: 5 csiga, amelyek közül kettő a plafonhoz van rögzítve, és három, ami szabadon mozoghat fel-le. Ezek között ki van feszítve egy fix l hosszúságú kötél, az utóbbi három csigára pedig rendre $4m$, $3m$ és m tömegeket akasztunk. Ha nyugalomból elengedjük őket, mi lesz a kapcsolat a bal és a jobb oldali tömegek sebessége között?

- (a) Mi lesz a rendszer Lagrange-függvénye? A középső csiga elmozdulásához használjuk ki, hogy a kötél hossza fix.

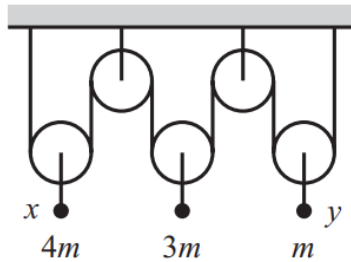
(3 pont)

- (b) Tippeljünk meg egy szimmetriát a potenciális tag alapján. Ha a jobb oldali testet eltoljuk valami konstans ϵ taggal, akkor a bal oldali mekkora eltolására lesz a Lagrange szimmetrikus?

(2 pont)

- (c) Milyen megmaradó mennyiség tartozik ehhez a szimmetriához? Ez alapján milyen arányban lesz a bal és a jobb oldali testek sebessége?

(3 pont)



1. ábra. 1. feladatot szemléltető vázlatos ábra.

Tipp: a megmaradó mennyiség a nyugalomból való indításhoz képest is megmarad.

5. feladat

Vegyünk két azonos hosszúságú és tömegű matematikai ingát! Ezeket kössük össze egy rugóval, aminek nyugalmi hossza megegyezik a felfüggesztési pontok távolságával: a potenciális tagjában tehát elég a nyugalmi helyzettől való elmozdulások általános koordinátáit figyelembe vennünk.

- (a) Írjuk fel a Lagrange-ot, és lássuk be, hogy az kis kitérésekre átírható a

$$\underline{\underline{M}} = ml^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \underline{\underline{D}} = ml^2 \begin{pmatrix} \frac{g}{l} + \frac{k}{m} & -\frac{k}{m} \\ -\frac{k}{m} & \frac{g}{l} + \frac{k}{m} \end{pmatrix}$$

mátrixok segítségével!

(3 pont)

- (b) Számítsuk ki a normálmódusokat!

(3 pont)

- (c) Hattassunk **csak a bal oldali** ingára egy $F = F_0 \cos(\Omega t)$ gerjesztő erőt a $t = 0$ időponttól. Ezt bontsuk fel a sajátmódusokkal, majd írjuk fel a mozgás integrálját a Green-függvények segítségével!

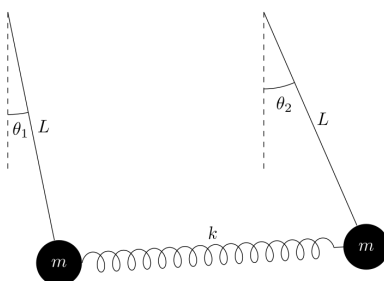
(3 pont)

$$\underline{\underline{G}}(t) = \sum_i \Theta(t) \frac{\sin(\omega_i t)}{\omega_i} \boldsymbol{\eta}_i \tilde{\boldsymbol{\eta}}_i$$

$$\mathbf{q} = \int_{-\infty}^{\infty} \underline{\underline{G}}(t - t') \underline{\underline{M}}^{-1} \mathbf{F}(t') dt'$$

- (d) Végezzük el az integrált.

(3 pont)



2. ábra. Rugóval csatolt ingák.

Tipp: Az erő akár szemmel is felbontható a sajátmódusok irányaira. Az integrál határaihoz két dolgot kell tudnunk: hogy a gerjesztő erő csak $t = 0$ után hat, a Green-függvényben szereplő $\Theta(t - t')$ pedig megadja a felső határt. Magában az integrálban jól jöhet egy addíciós tétel:

$$\cos x \sin y = \frac{\sin(x + y) - \sin(x - y)}{2}$$

ami után egy változócserevel elemi integrálokat kapunk.