

7. óra

Hamiltoni mechanika

A Lagrange-i mechanikával már nagyon jól megbarátkoztunk. Ennek lényege tömören hogy egy $\mathcal{L}(q, \dot{q}, t)$ Lagrange-függvényből az E-L egyenletek segítségével megkapjuk a mozgás egyenletet valamilyen $\ddot{q} = f(q, \dot{q})$ alakban. Ez egy szép, relatíve könnyen követhető lépésekkel álló folyamat eredménye, ami miatt hasznos és szemléletes.

Viszont a másodrendű diffegyenleteket nem szeretjük annyira, mint az elsőrendűeket. Sokkal kezelhetőbb, ha ehelyett átírjuk a mozgás egyenletet kétszer annyi elsőrendű diffegyenletté. Ez a Hamiltoni mechanika egyik előnye. A másik az, hogy a kvantummechanika is ezen a nyelven íródott, szóval nem árt megbarátkozni vele klasszikusan is.

Hogy áttérjünk a Lagrange-i formalizmusból a Hamiltoniba, néhány egyszerű lépést kell csak tennünk. Lagrange-függvény helyett most Hamilton-unk lesz:

$$\mathcal{H}(\underline{q}, \underline{p}) = \underline{p}^T \dot{\underline{q}}(\underline{p}) - \mathcal{L}(\underline{q}, \dot{\underline{q}}(\underline{p}))$$

aminek a változói a(z általános) koordináta és az (általános) impulzus.

Az Euler-Lagrange egyenlet helyett most két darab Hamilton egyenletünk lesz, amikből megkapjuk a két elsőrendű diffegyenletet:

$$\dot{\underline{q}} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \underline{p}} \quad \dot{\underline{p}} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \underline{q}}$$

A negatív előjel itt fontos, ne felejtsük el. Ha emlékezni akarunk rá, akkor idézzük vissza hogy $\dot{\underline{p}} = F = -\nabla V$.

7.1. példa: Egyszerű rugó

Nézzünk meg először egy egyszerű példát: egy sima, egy dimenziós rugót. Ennek a Lagrange-függvénye ugyebár

$$\mathcal{L} = K - V = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - \frac{1}{2}kx^2 \tag{7.1.1}$$

Hogy áttérjünk a Hamiltoni formalizmusra, először is kell valami jó p impulzus változó. Ez lehet a már korábban ismert általános impulzus:

$$p = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} = m\dot{x} \tag{7.1.2}$$

Tehát az egyenleteinkben $\dot{x} = \frac{p}{m}$ lesz, így a Lagrange az általános koordinátával ($q = x$) és impulzussal kifejezve:

$$\mathcal{L}(q, \dot{q}(p)) = \frac{1}{2}m\left(\frac{p}{m}\right)^2 - \frac{1}{2}kq^2 = \frac{1}{2m}p^2 - \frac{1}{2}kq^2 \tag{7.1.3}$$

Beírva ezt, és $p\dot{q}$ -t a Hamiltoni definíciójába:

$$\mathcal{H}(q, p) = p\frac{p}{m} - \frac{1}{2m}p^2 + \frac{1}{2}kq^2 \tag{7.1.4}$$

$$\mathcal{H}(q, p) = \frac{1}{2m}p^2 + \frac{1}{2}kq^2 \tag{7.1.5}$$

Ha szemfülesek vagyunk, akkor feltűnhet, hogy ez pont a rendszer teljes $E = K + V$ energiája. Ez gyakran így van, de nem minden. Részletes tárgyalást a Goldsteinben találunk, de nagyjából: ha

konzervatív a potenciál, illetve nem függ a sebességektől, továbbá az általános koordináták kényszerei időfüggetlenek, akkor $\mathcal{H} = E$. Nekünk ez a legtöbb feladatban teljesül, de később még visszatérünk rá egy kis általánosítással.

Mik lesznek ekkor a mozgássegyenletek? Egy-egy deriválás után:

$$\dot{q} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p} = \frac{p}{m} \quad -\dot{p} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q} = kq \quad (7.1.6)$$

Tehát

$$\dot{q} = \frac{1}{m}p \quad \dot{p} = -kq \quad (7.1.7)$$

Amit fel is írhatunk mátrixosan, kis gyakorlásként:

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} q \\ p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1/m \\ -\omega^2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q \\ p \end{pmatrix} \quad (7.1.8)$$

Ahol $\omega^2 = \frac{k}{m}$. Ennek a feladatnak a megoldását persze már ismerjük: deriváljuk le még egyszer az egyik Hamilton egyenletet.

$$\ddot{q} = \frac{1}{m}\dot{p} = -\omega^2 q \quad (7.1.9)$$

Ezt már párszor megoldottuk:

$$q(t) = A \cos(\omega t + \varphi) \quad (7.1.10)$$

$$\dot{q}(t) = -\omega A \sin(\omega t + \varphi) \quad (7.1.11)$$

amit visszaírva megvan az impulzus is:

$$p(t) = -m\omega A \sin(\omega t + \varphi) \quad (7.1.12)$$

Ezt is fel lehet írni vektorosan:

$$\begin{pmatrix} q \\ p \end{pmatrix}(t) = A \begin{pmatrix} \cos(\omega t + \varphi) \\ -m\omega \sin(\omega t + \varphi) \end{pmatrix} \quad (7.1.13)$$

Kicsit nézegetve ezt szét tudjuk kapni pár részre:

$$\begin{pmatrix} q \\ p \end{pmatrix}(t) = A \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -m\omega \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\omega t + \varphi) \\ \sin(\omega t + \varphi) \end{pmatrix} \quad (7.1.14)$$

Rajzoljuk le ennek a mozgásnak a fázisterét! Ehhez képzeljünk el egy olyan koordinátarendszert, aminek egyik tengelye q , a másik pedig p . Rakjuk le a tollunkat valamilyen kezdeti pontban, ami megfelel a $t = 0$ pillanatnak, aztán ahogy telik az idő, kövessük le egy görbével azt, hogy melyik pontokba halad tovább a rendszer. Ez a trajektória, amit a rendszerünk a mozgás során bejár.

A fenti példánkra ez relatíve egyszerű: van jobb oldalt egy körünk. Ez meg van szorozva egy nyújtást (és tükrözést) végző mátrixtal, meg valami irreleváns konstanssal. Tehát a fázistér nem lesz más, mint egy ellipszis. Gyakran szokás az A szabad paramétert lecserélni valamire, ami a kezdeti feltételekből adott. Ez lehet például az energia: itt például ha a $t = 0$ pillanatban $p = 0$ és $\varphi = 0$ akkor

$$E = 0 + \frac{1}{2}m\omega^2 A^2 \cos^2(\omega t + \varphi) = \frac{1}{2}m\omega^2 A^2 \quad (7.1.15)$$

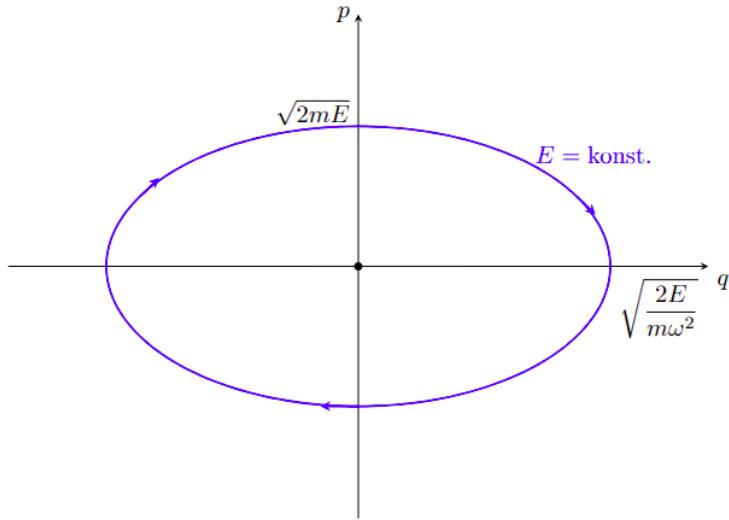
$$A = \pm \sqrt{\frac{2E}{m\omega^2}} \quad (7.1.16)$$

Tehát az ellipszis szélei konstans energia mellett:

$$p\Big|_{q=0} = \mp m\omega \sqrt{\frac{2E}{m\omega^2}} = \mp \sqrt{2mE} \quad (7.1.17)$$

$$q\Big|_{p=0} = \pm \sqrt{\frac{2E}{m\omega^2}} \quad (7.1.18)$$

Az pedig, hogy merre mutat az áramlás most fizikai intuícióból adódik. Ha jobbra (+) van kitérítve a testünk, akkor onnan balra (-) fog gyorsulva visszarugózn. Tehát ha q pozitívból megy a negatív felé, akkor p negatív. Fordítva is igaz: ha a jobb oldali szélső pont felé halad a testünk, de még nincs ott, akkor pozitív lendülete lesz.



Harmonikus oszcillátor fázistere. Egy ellipszist látunk, aminek a két tengelye egyezik a fent kiszámítottakkal.

7.2. példa: Csillapított oszcillátor

Nézzük meg ehhez képest, hogy mi lesz a csillapított oszcillátor mozgássegyenlete. Az ő Lagrange-a:

$$\mathcal{L} = \left(\frac{1}{2}m\dot{x}^2 - \frac{1}{2}m\omega^2x^2 \right) e^{\gamma t} \quad (7.2.1)$$

szép explicit időfüggést tartalmaz. De nem baj, attól még tudunk számolni, például egy kanonikus impulzust:

$$p = m\dot{x}e^{\gamma t} \quad \dot{x} = \frac{1}{m}e^{-\gamma t}p \quad (7.2.2)$$

Szóval

$$p\dot{x}(p) = \frac{1}{m}e^{-\gamma t}p^2 \quad (7.2.3)$$

$$\mathcal{L}(x, \dot{x}(p)) = \frac{1}{2m}p^2e^{-\gamma t} - \frac{1}{2}m\omega^2x^2e^{\gamma t} \quad (7.2.4)$$

Összerakva:

$$\mathcal{H}(x, p) = \frac{1}{2m}p^2 e^{-\gamma t} + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2 e^{\gamma t} \quad (7.2.5)$$

ami **nem** a mechanikából szokásos energia. Annak az alakja $E_m = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + V$, szóval kis matekkal $\mathcal{H} = E_m e^{\gamma t}$. minden esetre a mozgás egyenletek még igazak:

$$\dot{x} = \frac{1}{m}pe^{-\gamma t} \quad \dot{p} = -m\omega^2 xe^{\gamma t} \quad (7.2.6)$$

Mit tudunk mondani ezeknek a megoldásáról? Nézzük meg először, hogy van-e fixpontja az egyenleteknek:

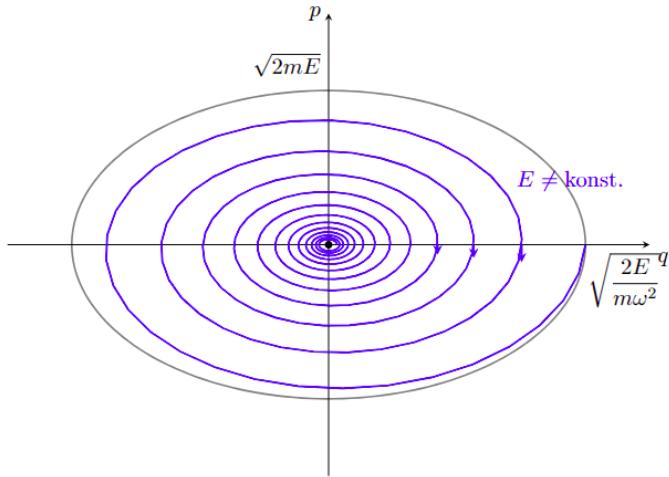
$$0 = \frac{1}{m}pe^{-\gamma t} \rightarrow p = 0 \quad (7.2.7)$$

$$0 = -m\omega^2 xe^{\gamma t} \rightarrow x = 0 \quad (7.2.8)$$

Van, méghozzá az origó. Kis mellébeszélésssel¹ nézzük meg, stabil-e. Térítsük ki az egyensúlyi pontból a rendszert egy kis Δx és Δp távolsággal. Ekkor:

$$\dot{x} = \frac{1}{m}e^{-\gamma t}\Delta p \quad \dot{p} = -m\omega^2 e^{\gamma t}\Delta x \quad (7.2.9)$$

Ha kellően sok idő eltelt, akkor $e^{-\gamma t} \approx 0$, tehát az elsőt elhanyagolhatjuk. A második előjele pont ellenétes a kitérítés irányával: ez a pont egy stabil vonzópont lesz. A fázistéren ezt fel tudjuk rajzolni a sima oszcillátor alapján, csak egy különbséggel: a trajektóriák az origóba tartanak, miután $t \neq 0$. Attól függően, hogy túlcillapított-e az oszcillátorunk; vagy keringenek körülötte párat, vagy rögtön belezuhannak.



Csillapított oszcillátor fázistere. Láthatjuk, hogy úgy néz ki mint a sima eleinte: aztán a trajektóriák belespirálóznak az origóba. Ez egyébként egy nagyon gyengén csillapított eset, jó sokat kering előtte.

¹Az érdeklődőknek: igazából ez egy jó nagy mellébeszélés, aminek szinte semmi igazságágalja nincs. Valójában a stabilitásvizsgálatot itt célszerűbb $q - \dot{q}$ térben elvégezni, mert ott kiderül, hogy ez egy vonzó fixpont, mert a fixpontban kiértékelt Jacobi sajátértékeinek valós része minden negatív. A képzetes részeik pedig megadják a mozgás oszcilláló mivoltját: ha eltűnnek, túlcillapítást tapasztalunk.

7.3. példa: Potenciálvölgyek

Nézzünk egy (talán már ismerős) egy dimenziós rendszert, amelynek potenciális energiája

$$V = A(q^2 - v^2)^2 \quad (7.3.1)$$

ahol v valamelyen konstans. Ekkor a Hamilton

$$\mathcal{H}(q, p) = \frac{p^2}{2m} + A(q^2 - v^2)^2 \quad (7.3.2)$$

A belőle fakadó egyenletek:

$$\dot{q} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p} = \frac{p}{m} \quad (7.3.3)$$

$$\dot{p} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q} = -4Aq(q^2 - v^2) \quad (7.3.4)$$

Milyen fixpontjai vannak ezeknek?

$$p_0 = 0 \quad (7.3.5)$$

$$q_0 = 0 \quad \text{vagy} \quad q_0 = \pm v \quad (7.3.6)$$

Fixpontból három fajta lehet:

- Vonzó, ami bevonzza a trajektóriákat. Ide tarthat a rendszer végtelen idő után.
- Taszító, ami taszítja a trajektóriákat. Itt nagyon nem akar lenni a rendszer.
- Nyeregpont, ami egyes irányokban vonz, másik irányokban pedig taszít.

Hogyan döntsük el egy pontról, hogy ő melyik? Sokféleképpen. Mi most a Lineáris Stabilitásvizsgálat módszerét fogjuk megnézni. Eszerint, ha van egy egyenletrendszerünk, akkor annak tudjuk venni a Jacobi mátrixát:

$$\underline{J} = \begin{pmatrix} \partial_q \dot{q} & \partial_p \dot{q} \\ \partial_q \dot{p} & \partial_p \dot{p} \end{pmatrix} \quad (7.3.7)$$

Amit ki tudunk értékelni egy-egy fixpontban.

Ezután ki kell számítani a fixpontban vett mátrix λ sajátértékeit:

- Ha $\forall \Re(\lambda) > 0$, akkor taszító.
- Ha $\forall \Re(\lambda) < 0$, akkor vonzó.
- Ha is-is, akkor nyeregpont.

+1 Illetve ha $\Im(\lambda) \neq 0$, akkor oszcilláló mozgást fogunk tapasztalni.

Most nézzük meg ezeknek a stabilitását rendesen! Ehhez szükségünk van a Jacobi mátrixra, amely definíció szerint

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} q \\ p \end{pmatrix} = \underline{f}(q, p) \quad (7.3.8)$$

$$\underline{J} = \begin{pmatrix} \partial_q f_1 & \partial_p f_1 \\ \partial_q f_2 & \partial_p f_2 \end{pmatrix} \quad (7.3.9)$$

tehát esetünkben

$$\underline{\underline{J}} = \begin{pmatrix} 0 & 1/m \\ -4A(q^2 - v^2) - 8Aq^2 & 0 \end{pmatrix} \quad (7.3.10)$$

Őt kell kiértékelni a fixpontokban, majd kiszámolni a sajátértékeit. Először is $q_0 = v$ esetén

$$\underline{\underline{J}} \Big|_{q_0=v} = \begin{pmatrix} 0 & 1/m \\ -8Av^2 & 0 \end{pmatrix} \quad (7.3.11)$$

$$\lambda_{\pm} = \pm i \sqrt{\frac{8A}{m}} v \quad (7.3.12)$$

ezek képzetesek. Róluk több minden nem tudunk mondani a lineáris stabilitásvizsgálattal: az annyiban merül ki, hogy valami oszcilláló keringésre számítunk körülöttük.

Másrészt

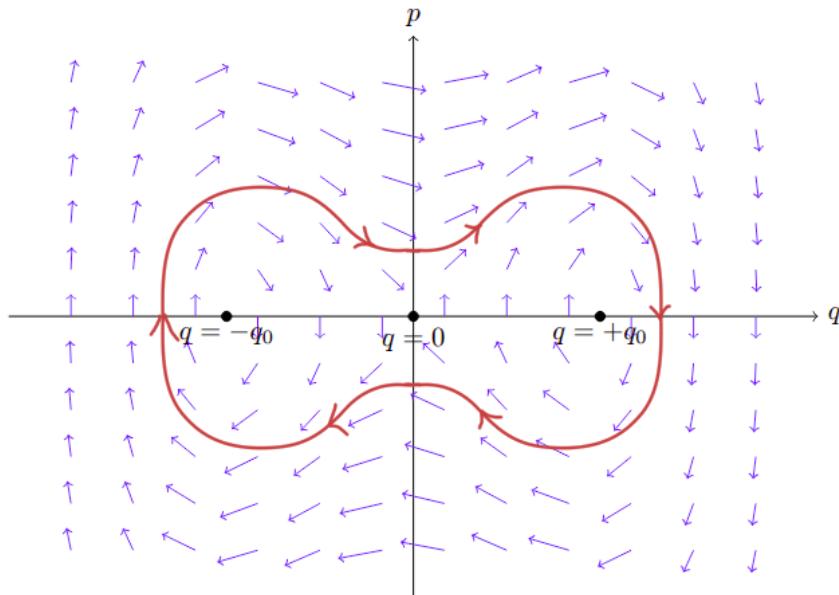
$$\underline{\underline{J}} \Big|_{q_0=0} = \begin{pmatrix} 0 & 1/m \\ 4Av^2 & 0 \end{pmatrix} \quad (7.3.13)$$

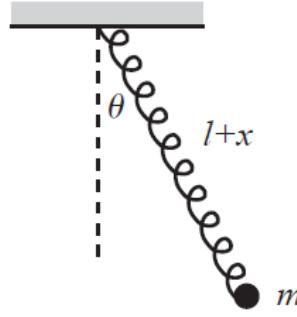
$$\lambda_{\pm} = \pm \sqrt{\frac{4A}{m}} v \quad (7.3.14)$$

amik valósak: az egyik pozitív, a másik negatív. Ez azt jelenti, hogy ő egy nyeregpont lesz: az egyik irányból bevonzza, a másikban pedig kitaszítja a trajektoriákat. Meg tudjuk nézni még a sajátvektorait is:

$$\underline{u}_+ \propto \begin{pmatrix} 1 \\ v\sqrt{4Am} \end{pmatrix} \quad \underline{u}_- \propto \begin{pmatrix} 1 \\ -v\sqrt{4Am} \end{pmatrix} \quad (7.3.15)$$

Amikről azt látjuk, hogy a taszítóhoz tartozó egy pozitív meredekségű egyenes irányába mutat, a másik, vonzó irány pedig rá merőleges. Ezt össze tudjuk vetni a lenti, gép által generált ábrával:





Rugós inga. Nekünk x helyett r , θ helyett φ lesz.

7.4. példa: Rugós inga

Véve egy l nyugalmi hosszúságú rugót, és azt felfüggesztve egy plafonra, a Lagrange-unk:

$$\mathcal{L}(\underline{q}, \dot{\underline{q}}) = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{1}{2}m(l+r)^2\dot{\varphi}^2 + mg(l+r)\cos\varphi - \frac{1}{2}m\omega^2r^2 \quad (7.4.1)$$

Hogy áttérjünk a Hamiltoni formalizmusra, kellenek először is a kanonikus impulzusok, amikből most kettő is lesz:

$$p_r = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{r}} = m\dot{r} \quad p_\varphi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} = m(l+r)^2\dot{\varphi} \quad (7.4.2)$$

Illetve ezeknek az invertálása, hogy ki tudjuk fejezni a sebességeket az impulzusokkal:

$$\dot{r} = \frac{1}{m}p_r \quad \dot{\varphi} = \frac{1}{m(l+r)^2}p_\varphi \quad (7.4.3)$$

Tehát a Hamiltonhoz kellő tagok:

$$\underline{p}^T \dot{\underline{q}}(\underline{p}) = \frac{1}{m}p_r^2 + \frac{1}{m(l+r)^2}p_\varphi^2 \quad (7.4.4)$$

$$\mathcal{L}(\underline{q}, \dot{\underline{q}}(\underline{q}, \underline{p})) = \frac{1}{2m}p_r^2 + \frac{1}{2m(l+r)^2}p_\varphi^2 + mg(l+r)\cos\varphi - \frac{1}{2}m\omega^2r^2 \quad (7.4.5)$$

Összekombinálva, a Hamilton:

$$\mathcal{H} = \frac{1}{m}p_r^2 + \frac{1}{m(l+r)^2}p_\varphi^2 - \frac{1}{2m}p_r^2 - \frac{1}{2m(l+r)^2}p_\varphi^2 - mg(l+r)\cos\varphi + \frac{1}{2}m\omega^2r^2 \quad (7.4.6)$$

$$= \frac{1}{2m}p_r^2 + \frac{1}{2m(l+r)^2}p_\varphi^2 - mg(l+r)\cos\varphi + \frac{1}{2}m\omega^2r^2 \quad (7.4.7)$$

Ebből a mozgásegyenleteket egy-egy deriválással kapjuk:

$$\dot{r} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_r} = \frac{1}{m}p_r \quad \dot{\varphi} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_\varphi} = \frac{1}{m(l+r)^2}p_\varphi \quad (7.4.8)$$

$$-\dot{p}_r = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial r} = -\frac{1}{m} \frac{1}{(l+r)^3}p_\varphi^2 - mg\cos\varphi + m\omega^2r \quad -\dot{p}_\varphi = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \varphi} = mg(l+r)\sin\varphi \quad (7.4.9)$$

Megkaptuk a négy differenciálegyenletet, ami leírja a mozgást. Hogy valamit ránézésre is tudjunk róla mondani, nézzük meg, hogy van-e egyensúlyi pontja ezeknek, illetve ha igen, akkor hol. Egyensúly akkor van, ha a fenti egyenletek mindegyike nulla, tehát:

$$0 = \frac{1}{m} p_r \quad 0 = \frac{1}{m} \frac{1}{(l+r)^2} p_\varphi \quad (7.4.10)$$

$$0 = -\frac{1}{m} \frac{1}{(l+r)^3} p_\varphi^2 - mg \cos \varphi + m\omega^2 r \quad 0 = mg(l+r) \sin \varphi \quad (7.4.11)$$

Ezek szerint

$$p_r = 0 \quad p_\varphi = 0 \quad (7.4.12)$$

$$0 = -\frac{1}{m} \frac{1}{(l+r)^3} p_\varphi^2 - mg \cos \varphi + m\omega^2 r \quad \varphi = n\pi \quad (7.4.13)$$

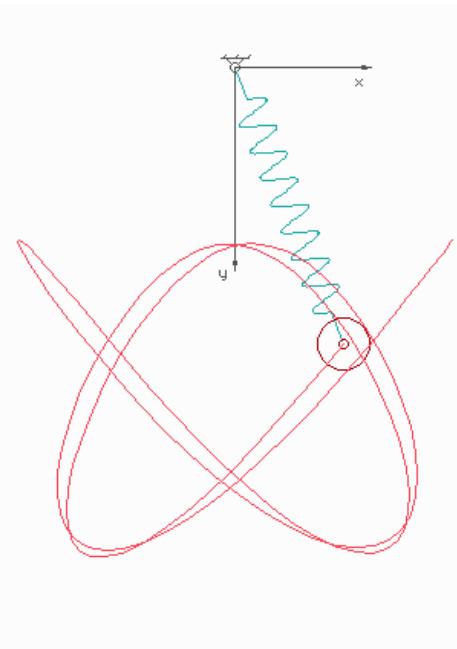
Innen az utolsó előtti a legbonyolultabb. Beleírva a többöt ($\cos n\pi = \pm 1$, $p_\varphi = 0$), azt látjuk, hogy

$$0 = \mp mg + m\omega^2 r \quad (7.4.14)$$

$$\pm g = \omega^2 r \quad (7.4.15)$$

$$\frac{g}{r} = \pm \omega^2 \quad (7.4.16)$$

Két ilyen pont lesz tehát: az egyik lent $\varphi = 0$ irányban, a másik pedig fent ahol $\varphi = \pi$ (most tegyük fel, hogy nincs fal felette, vagy mágikusan át tud rajta haladni). Mindkét esetben a rugó ingaszerű megnyúlása (g/L -es jellemző frekvenciája) kapcsolatban lesz a rugó saját frekvenciájával, egyedül az iránya az ami eltér. Fent egy picit összenyomódik, lent pedig egy picit megnyúlik.



Wikipédia ábra a rugós inga mozgásáról pár periódusra. Közel sem triviális, hogy mit csinál, a fázisteréről [itt](#) találhatunk pár szép színes képet.

7.5. példa: Kisrezgések

Erre nem nézünk meg specifikus példát, mert a következő az állítás: itt is ugyanúgy lehet kisrezgéset vizsgálni mátrixosan. A rezgéses Lagrange általános esetben:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \underline{\dot{q}}^T \underline{\underline{M}} \underline{\dot{q}} - \frac{1}{2} \underline{q}^T \underline{\underline{D}} \underline{q} \quad (7.5.1)$$

Amiből kellenek nekünk a kanonikus impulzusok. Egy szimbolikus deriválással

$$\underline{p} = \underline{\underline{M}} \underline{\dot{q}} \quad \underline{p}^T = \underline{\dot{q}}^T \underline{\underline{M}} \quad (7.5.2)$$

Amit invertálnunk kell, hogy megkapjuk a sebességeket az impulzusokkal kifejezve:

$$\underline{\underline{M}}^{-1} \underline{p} = \underline{\dot{q}} \quad \underline{p}^T \underline{\underline{M}}^{-1} = \underline{\dot{q}}^T \quad (7.5.3)$$

Beírva a Lagrange-ba:

$$\mathcal{L}(\underline{q}, \underline{\dot{q}}(\underline{p})) = \frac{1}{2} \underline{p}^T \underline{\underline{M}}^{-1} \underline{\underline{M}} \underline{\underline{M}}^{-1} \underline{p} - \frac{1}{2} \underline{q}^T \underline{\underline{D}} \underline{q} \quad (7.5.4)$$

$$\mathcal{L}(\underline{q}, \underline{\dot{q}}(\underline{p})) = \frac{1}{2} \underline{p}^T \underline{\underline{M}}^{-1} \underline{p} - \frac{1}{2} \underline{q}^T \underline{\underline{D}} \underline{q} \quad (7.5.5)$$

Ehhez jön még hozzá

$$\underline{\dot{q}}^T \underline{p} = \underline{p}^T \underline{\underline{M}}^{-1} \underline{p} \quad (7.5.6)$$

Amiket beírva:

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2} \underline{p}^T \underline{\underline{M}}^{-1} \underline{p} + \frac{1}{2} \underline{q}^T \underline{\underline{D}} \underline{q} \quad (7.5.7)$$

Ebből a Hamilton egyenletek egyszerűen deriválással kijönnek:

$$\underline{\dot{q}} = \underline{\underline{M}}^{-1} \underline{p} \quad \underline{\dot{p}} = -\underline{\underline{D}} \underline{q} \quad (7.5.8)$$

Deriválva méggyeszer az elsőt (feltéve hogy $\underline{\underline{M}}^{-1}$ konstans, mint például egy kisrezgés esetén), és behelyettesítve a másodikat:

$$\underline{\ddot{q}} = \underline{\underline{M}}^{-1} \underline{\dot{p}} \quad (7.5.9)$$

$$= -\underline{\underline{M}}^{-1} \underline{\underline{D}} \underline{q} \quad (7.5.10)$$

egy ismerős egyenletet kapunk: innentől megint jöhetnek a normálmodusok, pont ahogy eddig.

Ami viszont hasznos még akkor is, ha nem rezgésekre vagyunk kíváncsiak, az a Hamiltonra való áttérés mátrixos útja. Ha felírható ilyen mátrixos alakban a Lagrange (tehát négyzetesen szerepelnek a sebességek benne, és "szépen" keverednek) akkor elég felírnunk a tömegmátrixot, és invertálnunk. Például a fenti rugós ingára

$$\underline{\underline{M}} = m \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (l+r)^2 \end{pmatrix} \quad (7.5.11)$$

$$\underline{\underline{M}}^{-1} = \frac{m}{m^2(l+r)^2} \begin{pmatrix} (l+r)^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{m(l+r)^2} \begin{pmatrix} (l+r)^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (7.5.12)$$

$$K(\underline{q}, \underline{p}) = \frac{1}{2} \underline{p}^T \underline{\underline{M}}^{-1} \underline{p} = \frac{p_r^2}{2m} + \frac{p_\varphi^2}{2m(l+r)^2} \quad (7.5.13)$$

Ez meg tud spórolni nekünk pár deriválást, ha például egy sok dimenziós rendszerről beszélünk. Azért a biztonság kedvéért érdemes a deriválgatással számolnunk még, főleg ha nem vagyunk biztosak benne, hogy "szép"-e a Lagrange elégé.