

6. óra

Merev testek

Ha merev testekről beszélünk, az azt jelenti, hogy minden pont közti távolság fix. Ezzel a nagy korlátozással két féle mozgást végezhet a test: vagy minden pontja ugyanarra megy, ez lesz a tömegközépponti mozgás, vagy valahogy forog egy tengely körül. Ezekkel a kinetikus tag:

$$K = \frac{1}{2} M \underline{v}_0^2 + \frac{1}{2} \underline{\omega} \underline{\Theta} \underline{\omega}$$

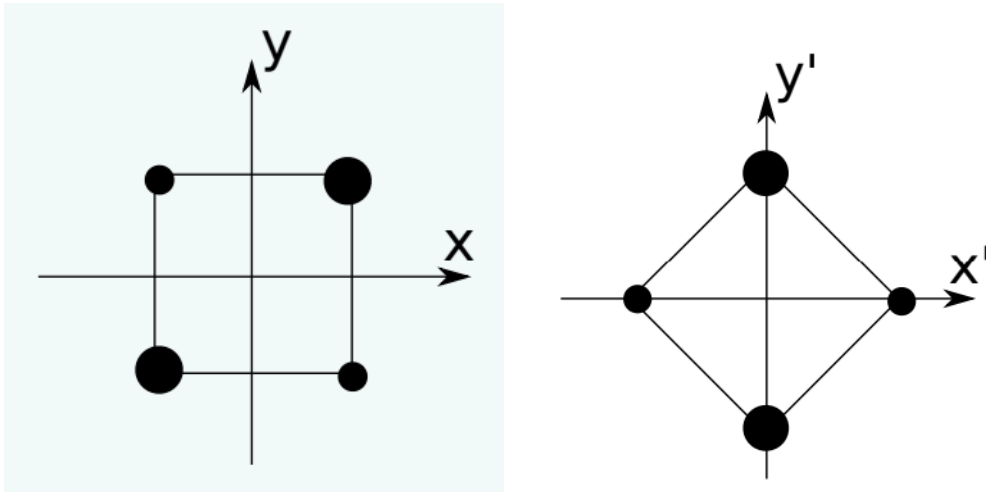
Ahol M a test össztömege, \underline{v}_0 pedig a tömegközéppont sebessége. Emlékeztetőül, a forgási tagban megjelenik a tehetetlenségi nyomaték tenzor:

$$\Theta_{ij} = \int d^3\mathbf{r} \rho(\mathbf{r}) (\delta_{ij} r^2 - r_i r_j)$$

ami olyan mint a tömeg, csak a gyorsulásra való tehetetlenség helyett a forgatásra vonatkozik. Ezen felül megjelenik még a forgatás vektoros ábrázolása $\underline{\omega}$ -n keresztül: ő mondja meg, hogy milyen tengelyek körül milyen gyorsan forgunk.

Nézzünk először pár példát arra, hogy hogyan kell kiszámolni ezt a tömegszerű mátrixos izét.

6.1. példa: 2+2 tömegpont



1. ábra. 2+2 tömegpont rajza.

Határozzuk meg ennek a 4-pont-rendszernek a tehetetlenségi tenzorát! Először is: inkább legyünk okosak, és forgassuk el az egészet 45 fokkal, mert úgy egyszerűbb. Nézzve a képletet:

$$\Theta_{ij} = \int d^3\mathbf{r} \rho(\mathbf{r}) (\delta_{ij} r^2 - r_i r_j) \quad (6.1.1)$$

nekünk itt igazából 4 diszkrét pontunk van: csak szummáznunk kell az egyes pontokra, mert ρ egy pár Dirac delta, ami meg teszi az integrálást.

$$\Theta_{ij} = \sum_k m_k (\delta_{ij} r_k^2 - r_i^k r_j^k) \quad (6.1.2)$$

Ezt kiírva például az xx komponensre:

$$\Theta_{xx} = \sum_k m_k (\delta_{xx} r^{k^2} - r_x^k r_x^k) = \sum_k m_k (r^{k^2} - r_x^k r_x^k) \quad (6.1.3)$$

$$= \sum_k m_k (x_k^2 + y_k^2 + z_k^2 - x_k^2) = \sum_k m_k (y_k^2 + z_k^2) \quad (6.1.4)$$

A z koordináta mindegyikre nulla. Az y pedig csak a kettő nagy M tömegűre nem: ekkor ha mondjuk $2a$ az oldalhosszúságunk, akkor $y_k = \sqrt{2}a$

$$\Theta_{xx} = M \cdot 2a^2 + M \cdot 2a^2 = 4Ma^2 \quad (6.1.5)$$

Teljesen hasonlóan:

$$\Theta_{yy} = 4ma^2 \quad (6.1.6)$$

Ami más, az a harmadik irány:

$$\Theta_{zz} = \sum_k m_k (\delta_{zz} r^{k^2} - r_z^k r_z^k) = \sum_k m_k (x_k^2 + y_k^2) \quad (6.1.7)$$

mert ebbe már mind a négy járulékot ad. Beírva:

$$\Theta_{zz} = 2 \cdot M \cdot (2a^2) + 2 \cdot m \cdot (2a^2) = 4(M + m)a^2 \quad (6.1.8)$$

A vegyes tagok még hátra vannak, mind a három. Ezekből például

$$\Theta_{xy} = \sum_k m_k (\delta_{xy} r^{k^2} - x_k y_k) = 0 \quad (6.1.9)$$

mert a δ nulla, illetve nincs olyan tömegpont, amire $x_k \cdot y_k$ ne lenne nulla. A tenzor tehát ebben a forgatott rendszerben:

$$\underline{\underline{\Theta}} = 4a^2 \begin{pmatrix} M & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & M + m \end{pmatrix} \quad (6.1.10)$$

Jó, de minket nem ez érdekelt, hanem ennek a 45 fokkal elforgatott esete. Van már viszont egy mátrixunk: ezt könnyen el tudjuk forgatni egy 3D-s forgásmátrixszal, mivel

$$\underline{\underline{\Theta}}' = \underline{\underline{Q}}^T \underline{\underline{\Theta}} \underline{\underline{Q}} \quad (6.1.11)$$

Ez a mátrix most, beírva a szögfüggvényekbe a 45 fokot:

$$\underline{\underline{Q}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix} \quad (6.1.12)$$

A végeredmény egy kis szorozgatás után:

$$\underline{\underline{\Theta}}' = 2a^2 \begin{pmatrix} m + M & m - M & 0 \\ m - M & m + M & 0 \\ 0 & 0 & 2(m + M) \end{pmatrix} \quad (6.1.13)$$

Ugyanezt kaptuk volna, ha rögtön ebben a koordinátarendszerben számolunk: csak látszik, hogy 2 nem nulla tagot kellett volna még figyelembe vennünk.

6.2. példa: Henger

Nézzünk meg egy folytonos tömegeloszlású esetet is. Mi lesz egy homogén henger tehetetlenségi nyomatéka a tömegközéppontra vonatkoztatva? Mivel homogén, így

$$\rho(r) = \rho = \text{konst.} \quad (6.2.1)$$

Felírva az integrált:

$$\Theta_{ij} = \rho \int d^3r (\delta_{ij} r^2 - r_i r_j) \quad (6.2.2)$$

de nekünk csak a henger határaiig kell elmennünk, azokon kívül nincs tömeg. Ehhez térjünk át hengerkoordinátákba, ahol az integrál

$$\Theta_{ij} = \rho \int_{-L/2}^{L/2} dz \int_0^{2\pi} r d\varphi \int_0^R dr (\delta_{ij} q^2 - q_i q_j) \quad (6.2.3)$$

Itt átírtam az eddig r -el jelölt koordinátákat q -ra, hogy ne keverjük össze a hengerkoordinátákból a sugárral.

Nézzük meg most a zárójeles kifejezést az egyes komponensekre, és hogy azt hogyan kell kifejezni a koordinátáinkkal.

$$ij = zz \quad \longrightarrow \quad (\delta_{zz} q^2 - q_z q_z) = x^2 + y^2 = r^2 \quad (6.2.4)$$

ami felülnézetből felrajzolva a problémát vizuálisan is látszik. Tehát erre a komponensre:

$$\Theta_{zz} = \rho \int_{-L/2}^{L/2} dz \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R dr r^3 \quad (6.2.5)$$

$$= \rho L \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R dr r^3 \quad (6.2.6)$$

$$= 2\pi \rho L \int_0^R dr r^3 \quad (6.2.7)$$

$$= 2\pi \rho L \frac{R^4}{4} = R^2 \pi L \frac{R^2}{2} \quad (6.2.8)$$

$$= \frac{M}{2} R^2 \quad (6.2.9)$$

A másik kettőre:

$$ij = yy \quad \longrightarrow \quad (\delta_{yy} q^2 - q_y q_y) = x^2 + z^2 = r^2 \sin^2 \varphi + z^2 \quad (6.2.10)$$

Na ez már bonyolultabb:

$$\Theta_{yy} = \rho \int_{-L/2}^{L/2} dz \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R dr r (r^2 \sin^2 \varphi + z^2) \quad (6.2.11)$$

$$= \rho \int_{-L/2}^{L/2} dz \int_0^{2\pi} d\varphi \left(\frac{R^4}{4} \sin^2 \varphi + \frac{R^2}{2} z^2 \right) \quad (6.2.12)$$

$$= \rho \int_0^{2\pi} d\varphi \left(L \frac{R^4}{4} \sin^2 \varphi + \frac{L^3}{3 \cdot 4} \frac{R^2}{2} \right) \quad (6.2.13)$$

$$= \rho \left(L \frac{R^4}{4} \pi + \frac{L^3}{3 \cdot 4} \frac{R^2}{2} 2\pi \right) \quad (6.2.14)$$

$$= \frac{M}{12} (L^2 + 3R^2) \quad (6.2.15)$$

De szerencsére ugyanez lesz xx -re is. Minden más tagban pedig olyanok jelennek meg, hogy

$$\int_0^{2\pi} \sin \varphi \cos \varphi \propto \int_0^{2\pi} \sin 2\varphi, \quad \int_0^{2\pi} \sin \varphi, \quad \int_0^{2\pi} \cos \varphi \quad (6.2.16)$$

Amik mint teljes periódusra integrálnak sima szögfüggvényeket: ezeket felrajzolva beláthatjuk, hogy nullát adnak.

Tehát a tehetetlenségi tenzorunk:

$$\underline{\underline{\Theta}} = \frac{M}{12} \begin{pmatrix} L^2 + 3R^2 & 0 & 0 \\ 0 & L^2 + 3R^2 & 0 \\ 0 & 0 & 6R^2 \end{pmatrix} \quad (6.2.17)$$

Egy fontos részt leolvashatunk ennek jobb alsó sarkából: ha körbe forog egy hengerünk, a tehetetlenség nem függ a z irányú hosszától, nagysága pedig $\frac{1}{2}MR^2$. A henger felülnézetből pedig nem más mint egy korong, így:

$$\Theta_{korong} = \frac{1}{2}MR^2 \quad (6.2.18)$$

Egy másik érdekes határeset, amikor a henger sokkal hosszabb, mint szélesebb. Ezt köznyelven rúdnak hívjuk, matematikailag pedig $L \gg R$ -nek, amit beírva a tenzorba megkapjuk a rúd **középpontja** körüli forgatásokra vonatkoztatott tehetetlenségét:

$$\Theta_{rd}^{CM} = \frac{1}{12}ML^2 \quad (6.2.19)$$

Ha esetleg az érdekel minket, hogy egy rúd a középpontja helyett az egyik vége körül mennyire ellenáll a forgatásokra, azt a párhuzamos tengelyek (Steiner) tétele alapján kapjuk:

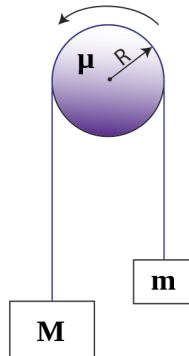
$$\Theta_{rd}^{vg} = \Theta^{CM} + Md^2 = \frac{L^2}{3}M \quad (6.2.20)$$

Ha a jövőben szükség lenne rá, akkor ennek a tételnek a mátrixos alakja

$$\underline{\underline{\Theta}} = \underline{\underline{\Theta}}^{CM} + M (\delta_{ij}d^2 - d_id_j) \quad (6.2.21)$$

6.3. példa: Tömeges Atwood gép

Vegyünk egy egyszerű Atwood gépet, m és M tömegekkel. Viszont most vegyük figyelembe, hogy a csiga is forog: az μ tömegű, és R sugarú. Mik lesznek ekkor a mozgásegyenletek?



A teljesen általános Lagrange-unk ezúttal:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}m\dot{y}_1^2 + \frac{1}{2}M\dot{y}_2^2 + mgy_1 + Mgy_2 + \frac{1}{2}\Theta\omega^2 \quad (6.3.1)$$

Kiróhatunk viszont pár kényszert: mivel a kötéel hossza fix, így

$$y_2 = -y_1 \quad (6.3.2)$$

Vagy másképp kifejezve, a kötéel minden pontja azonos sebességgel mozog, mert különben szétcsúszna:

$$|\dot{y}_1| = |\dot{y}_2| = |\dot{y}| \quad (6.3.3)$$

A kötéel pedig nem csúszhat el a csigán: tehát

$$\dot{y} = R\omega \quad (6.3.4)$$

Beírva még az előző feladatból a nyomatékot, a Lagrange-unk végső alakja:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\dot{y}^2(m + M) + g(m - M)y + \frac{1}{4}\mu\dot{y}^2 \quad (6.3.5)$$

Ebből az Euler Lagrange eredménye:

$$\ddot{y} \left[(m + M) + \frac{1}{2}\mu \right] = g(m - M) \quad (6.3.6)$$

Legyen most $M = 2m$, $\mu = m$, amikkel

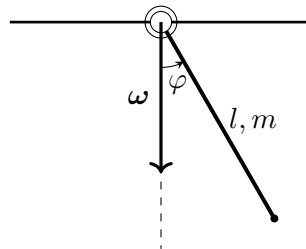
$$\ddot{y} \left[3m + \frac{1}{2}m \right] = -gm \quad (6.3.7)$$

$$\ddot{y} = \frac{2}{7}g \quad (6.3.8)$$

egy konstans gyorsulást tapasztalunk.

6.4. példa: Forgatott rúd

Vegyünk egy m tömegű, l hosszúságú rudat, rögzítsük az egyik végét a plafonhoz úgy, hogy forogni tudjon, de másképp elmozdulni ne. Kezdjük el forgatni valamilyen állandó ω szögsebességgel a felfüggesztési pontjától lehúzott vertikális tengely körül. Mi lesz a rúd vízszintessel bezárt szöge?



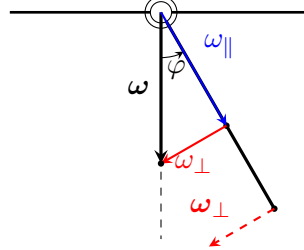
Kis emlékeztetőként

$$\Theta = \frac{1}{3}ml^2 \quad (6.4.1)$$

a tehetetlenség, a rúd végére merőleges forgatásokra. Itt a forgatás lefelé mutat: annak a rúdra merőleges komponense

$$\omega_{\perp} = \omega \sin \varphi \quad (6.4.2)$$

ami a rúd végére vonatkoztatott forgatásoknak feleltethető meg. Itt hangsúlyoznám, hogy ω_{\perp} vektora nem keverendő össze a rá ható erővel. Ez egy axiálvektor, a forgatás mit ő ír le jobbkéz-szabály szerint adódik, és itt a képernyő felől az olvasó irányába mutat. Ha szépen szeretnénk kiszámolni a feladatot, akkor tenzorosan és vektorosan kellene felírni a problémát, amiből ugyanaz fog kijönni.



A potenciális tagunkban vehetjük a teljes tömeget a rúd közepébe, így

$$V = -mg \frac{l}{2} \cos \varphi \quad (6.4.3)$$

Tehát a Lagrange most:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \Theta \omega_{\perp}^2 + \frac{1}{2} mgl \cos \varphi \quad (6.4.4)$$

$$= \frac{1}{2} \frac{1}{3} ml^2 \omega^2 \sin^2 \varphi + \frac{1}{2} mgl \cos \varphi \quad (6.4.5)$$

Erre ráküldve egy Euler-Lagrange-ot:

$$0 = -\frac{1}{2} mgl \sin \varphi + \frac{2}{6} ml^2 \omega^2 \sin \varphi \cos \varphi \quad (6.4.6)$$

lesz a mozgásegyenlet.

Ennek egy lehetséges megoldása

$$\sin \varphi = 0 \quad \longrightarrow \quad \varphi = 0 \quad (6.4.7)$$

Ami teljesen logikus: azt írja le, hogy a rúd egyenesen lefelé lóg. Ezt letudva leoszthatunk vele, így

$$g = \frac{2}{6} l \omega^2 \cos \varphi \quad (6.4.8)$$

$$\cos \varphi = \frac{3}{2} \frac{g}{l} \frac{1}{\omega^2} \quad (6.4.9)$$

Nevezzük el megszokásból a dolgokat:

$$\cos \varphi = \frac{3}{2} \frac{\omega_0^2}{\omega^2} \quad (6.4.10)$$

Na de ez korlátos, $-1 \leq \cos \leq 1$: csak akkor lesz ez a megoldás valid, ha

$$\frac{3}{2} \frac{\omega_0^2}{\omega^2} \leq 1 \quad (6.4.11)$$

$$\frac{3}{2} \omega_0^2 \leq \omega^2 \quad (6.4.12)$$

Minden más esetben csak a 0 kitérés lesz opció. A megoldás tehát úgy néz ki, hogy a forgatás sebességét növelve egyszer csak elkezd a rúd kilengeni. Végtelen gyors forgatás esetén pedig derékszöget tapasztalunk.