

MMMKl, zadania na ćwiczenia

29 listopada 2025

Zadanie 1 Rozważyć dwa pozostałe przypadki dotyczące transformacji kanonicznej, mianowicie $\det(\frac{\partial \tilde{p}}{\partial q}) \neq 0$ oraz $\det(\frac{\partial \tilde{q}}{\partial p}) \neq 0$ oraz opisać jak funkcje (odpowiednio) $f_3(p, \tilde{q})$, $f_4(p, \tilde{p})$ opisują transformację kanoniczną.

Zadanie 2 Rozważmy transformację punktową $Q = Q(q, t)$; zakładamy $\det(\frac{\partial Q}{\partial q}) \neq 0$. Odpowiadająca jej transformacja współrzędnych pędowych była wyprowadzana na wykładzie. Wykazać, że jest to transformacja kanoniczna i znaleźć jej funkcję generującą.

Zadanie 3 [!] Załóżmy, że transformacja kanoniczna F spełnia oba warunki rozważane na wykładzie, t.j. $\det(\frac{\partial \tilde{q}}{\partial p}) \neq 0$ oraz $\det(\frac{\partial \tilde{p}}{\partial q}) \neq 0$. Wobec tego F wyznacza (lokalnie) funkcje $\phi(q, \tilde{q})$ oraz $\psi(q, \tilde{p})$. Wykazać, że funkcje te są związane transformacją Legendra po zmiennych \tilde{q} oraz \tilde{p} .

Uwaga: dynamika w ujęciu relatywistycznym (uwzględniająca konsekwencje wysokich prędkości) wygląda następująco (uzasadnienie na wykładzie)

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{m}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \bar{v} \right) = \bar{F},$$

gdzie \bar{F} jest wektorem siły a \bar{v} prędkości.

Zadanie 4 Rozważyć prostoliniowy przewodnik z prądem. Przejść do układu poruszającego się z prędkością równoległą do przewodnika. Uwzględniając efekty relatywistyczne znaleźć wartości pola elektrycznego oraz magnetycznego w układzie poruszającym się. Sprawdzić, że wynik zgadza się z pull-backiem 2-formy pola elektromagnetycznego F przez transformację Lorentza.

Zadanie 5 Wykazać, że $L = -mc^2 \sqrt{1 - v^2/c^2} - U(q)$ opisuje dynamikę relatywistyczną w formalizmie lagranżowskim. Zakładamy, że siły są potencjalne z potencjałem U .

Zadanie 6 Wyprowadzić lagranżjan opisujący dynamikę relatywistyczną uwzględniający oddziaływanie elektromagnetyczne.

Zadanie 7 Wykazać, że $H = c\sqrt{(\bar{p})^2 + (mc)^2} + U(q)$ opisuje dynamikę relatywistyczną w formalizmie hamiltonowskim. Zakładamy, że siły są potencjalne z potencjałem U .

Zadanie 8 Wyprowadzić Hamiltonian opisujący dynamikę relatywistyczną uwzględniający oddziaływanie elektromagnetyczne.

Zadanie 9 Opisać 1-wymiarowy ruch relatywistyczny pod wpływem stałej siły.

Zadanie 10 opisać ruch naładowanej cząstki relatywistycznej w stałym polu magnetycznym.