

# MMMKI, zadania na ćwiczenia

29 listopada 2025

Zadanie 1 Rozważyć dwa pozostałe przypadki dotyczące transformacji kanonicznej, mianowicie  $\det(\frac{\partial \tilde{p}_i}{\partial q_j}) \neq 0$  oraz  $\det(\frac{\partial \tilde{q}_i}{\partial q_j}) \neq 0$  oraz opisać jak funkcje (odpowiednio)  $f_3(p, \tilde{q})$ ,  $f_4(p, \tilde{p})$  opisują transformację kanoniczną.

Zadanie 2 Rozważmy transformację punktową  $Q_i = Q_i(q_j, t)$ ; zakładamy  $\det(\frac{\partial \tilde{Q}_i}{\partial q_j}) \neq 0$ . Odpowiadająca jej transformacja współrzędnych pędowych była wyprowadzana na wykładzie. Wykazać, że jest to transformacja kanoniczna i znaleźć jej funkcję generującą.

Zadanie 3 [!] Założymy, że transformacja kanoniczna  $F$  spełnia oba warunki rozważane na wykładzie, t.j.  $\det(\frac{\partial \tilde{q}_i}{\partial p_j}) \neq 0$  oraz  $\det(\frac{\partial \tilde{p}_i}{\partial p_j}) \neq 0$ . Wobec tego  $F$  wyznacza (lokalnie) funkcje  $\phi(q_j, \tilde{q}_i)$  oraz  $\psi(q_j, \tilde{p}_i)$ . Wykazać, że funkcje te są związane transformacją Legendra po zmiennych  $\tilde{q}_i$  oraz  $\tilde{p}_i$ .

Uwaga: dynamika w ujęciu relatywistycznym (uwzględniająca konsekwencje wysokich prędkości) wygląda następująco (uzasadnienie na wykładzie)

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{m}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \bar{v} \right) = \bar{F},$$

gdzie  $\bar{F}$  jest wektorem siły a  $\bar{v}$  prędkości.

Zadanie 4 Rozważyć prostoliniowy przewodnik z prądem. Przejść do układu poruszającego się z prędkością równoległą do przewodnika. Uwzględniając efekty relatywistyczne znaleźć wartości pola elektrycznego oraz magnetycznego w układzie poruszającym się. Sprawdzić, że wynik zgadza się z pull-backiem 2-formy pola elektromagnetycznego  $F$  przez transformację Lorentza.

Zadanie 5 Wykazać, że  $L = -mc^2\sqrt{1 - v^2/c^2} - U(q_i)$  opisuje dynamikę relatywistyczną w formalizmie lagranżowskim. Zakładamy, że siły są potencjalne z potencjałem  $U$ .

Zadanie 6 Wyprowadzić lagranżjan opisujący dynamikę relatywistyczną uwzględniający oddziaływanie elektromagnetyczne.

Zadanie 7 Wykazać, że  $H = c\sqrt{(\tilde{p}_i)^2 + (mc)^2} + U(q_i)$  opisuje dynamikę relatywistyczną w formalizmie hamiltonowskim. Zakładamy, że siły są potencjalne z potencjałem  $U$ .

Zadanie 8 Wyprowadzić Hamiltonian opisujący dynamikę relatywistyczną uwzględniający oddziaływanie elektromagnetyczne.

Zadanie 9 Opisać 1-wymiarowy ruch relatywistyczny pod wpływem stałej siły.

Zadanie 10 opisać ruch naładowanej cząstki relatywistycznej w stałym polu magnetycznym.