Paulina Golwiej, 191719

APROKSYMACJA PROFILU WYSOKOŚCIOWEGO

Metody Numeryczne – Projekt nr 3 – Sprawozdanie
Wydział Elektroniki, Telekomunikacji i Informatyki, 2022/2023

Projekt ten skupia się na zastosowaniu metod aproksymacji interpolacyjnej do tworzenia profilu wysokościowego trasy. Profil wysokościowy, czyli profil topograficzny, to wykres, który ilustruje zmianę wysokości terenu w stosunku do odległości od początku wyznaczonej trasy. Rzadko dysponujemy pełnym zestawem danych o wysokościach dla każdego punktu trasy. W takim przypadku konieczne jest zastosowanie aproksymacji, techniki matematycznej pozwalającej na estymację wartości pośrednich na podstawie dostępnych danych. W ramach tego projektu skupimy się na dwóch specyficznych metodach aproksymacji interpolacyjnej: na wykorzystaniu wielomianu interpolacyjnego Lagrange'a i funkcji sklejanych trzeciego stopnia.

Metoda interpolacji wielomianowej Lagrange'a polega na znalezieniu wielomianu, który dokładnie przechodzi przez daną serię punktów danych. Każdy punkt ma odpowiadający mu wielomian, a wynikowy wielomian interpolacyjny jest sumą tych wielomianów. Ta metoda jest szczególnie użyteczna, gdy mamy do czynienia z niewielką ilością punktów danych.

Funkcje sklejane trzeciego stopnia, często stosowane w interpolacji, są techniką umożliwiającą tworzenie gładkich krzywych przechodzących przez zestaw punktów danych. W przypadku profili wysokościowych, te funkcje sklejane mogą skutecznie modelować naturalne zmiany wysokości terenu, tworząc gładki i ciągły profil wysokości.

W ramach projektu, obie te metody zostaną zastosowane do tworzenia profilu wysokościowego trasy, a następnie porównane pod kątem efektywności i dokładności wyników implementując w języku Python. Mam przygotowane dane 4 tras o różnym ukształtowaniu terenu.

Metoda Lagrange’a

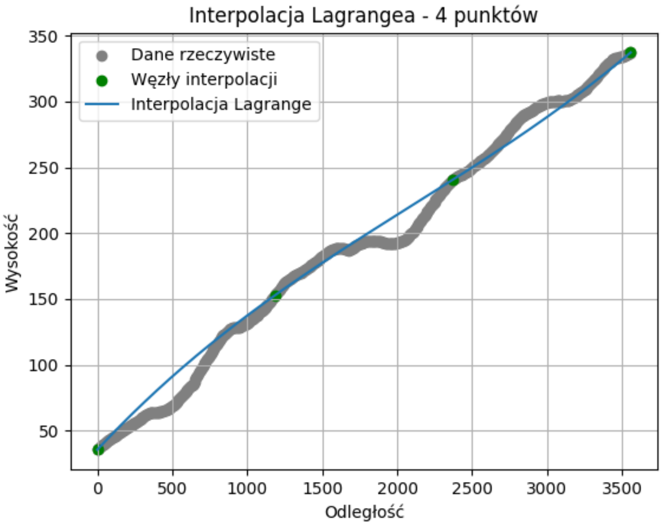
Metoda Lagrange'a jest jedną z fundamentalnych technik w matematyce numerycznej, której celem jest odnalezienie wielomianu, który dokładnie przechodzi przez daną serię punktów danych. Stosowana jest w wielu dziedzinach nauki i inżynierii, gdzie istnieje potrzeba estymacji wartości na podstawie ograniczonego zestawu punktów danych.

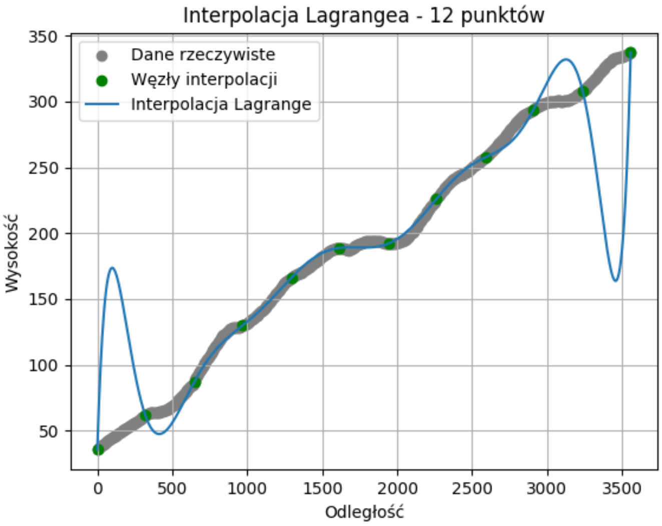
Interpolacja Lagrange'a polega na zdefiniowaniu wielomianu jako sumy wielomianów składowych, każdy z nich przyporządkowany do jednego z punktów danych. Każdy z tych składowych wielomianów jest zaprojektowany tak, aby przyjmować wartość 1 w swoim punkcie i 0 w pozostałych punktach. Dzięki temu, sumując je wszystkie, uzyskujemy wielomian, który dokładnie przechodzi przez wszystkie punkty danych.

Jedną z kluczowych zalet interpolacji Lagrange'a jest jej prostota - nie wymaga rozwiązania układów równań, a jej implementacja jest stosunkowo prosta. Jest jednak też wrażliwa na problem Rungego, który powoduje duże oscylacje wielomianu pomiędzy punktami danych, zwłaszcza na krańcach przedziału interpolacji. W praktyce problem ten ogranicza użyteczność interpolacji Lagrange'a do sytuacji, gdzie mamy do czynienia z niewielką ilością punktów danych.

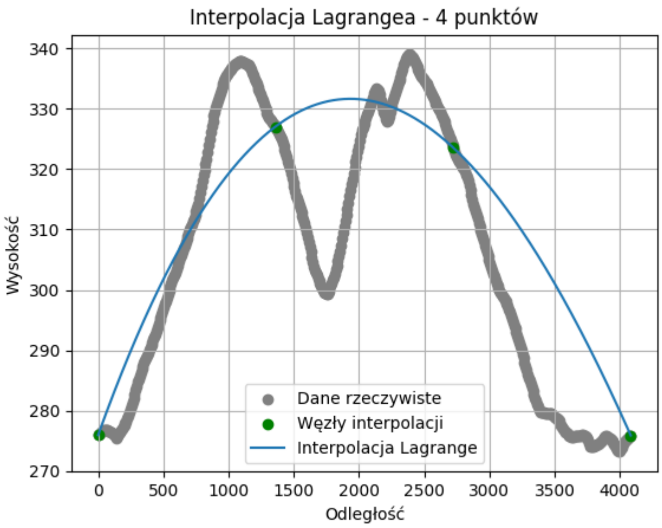
Wpływ liczby punktów na wyniki

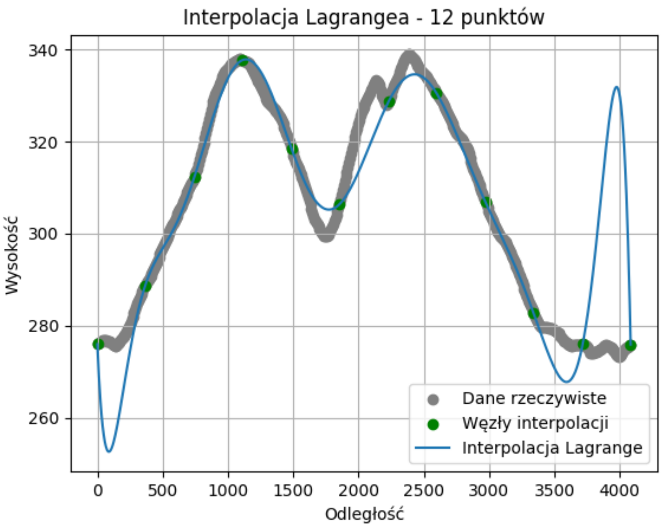
trasa grecja-trasa-pod-gore.txt



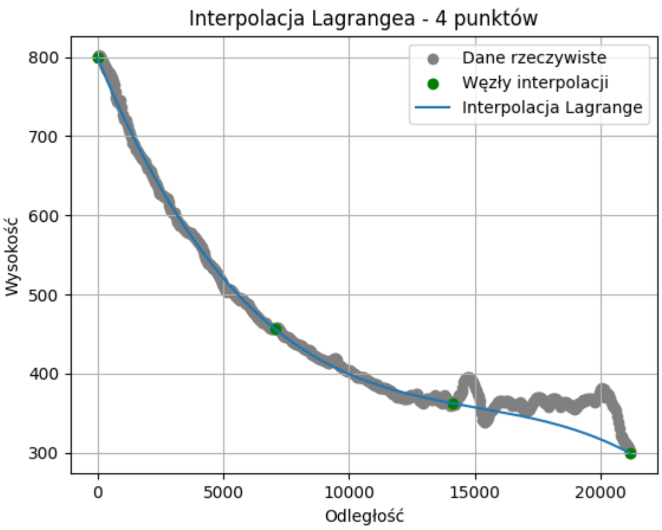


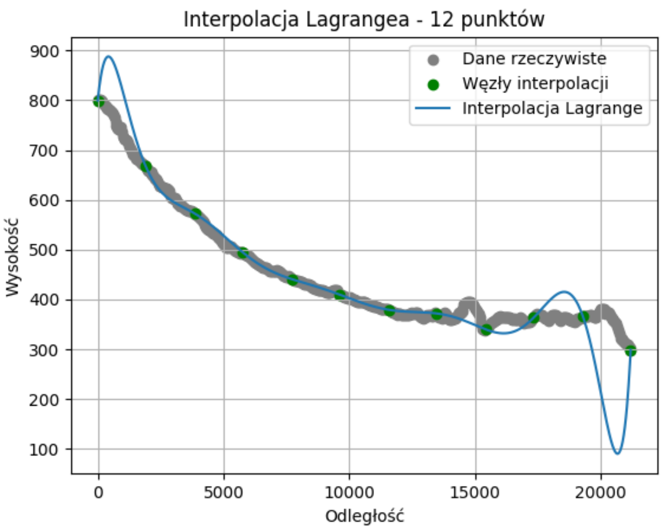
trasa kielce-trasa-plaska.txt





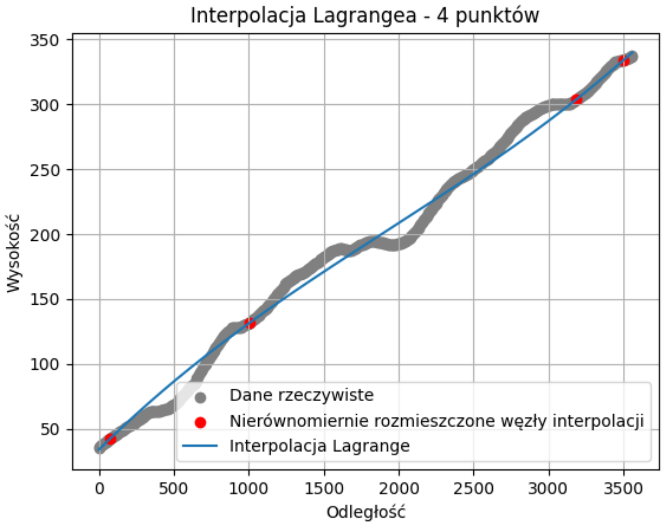
trasa slowacja-z-gorki.txt

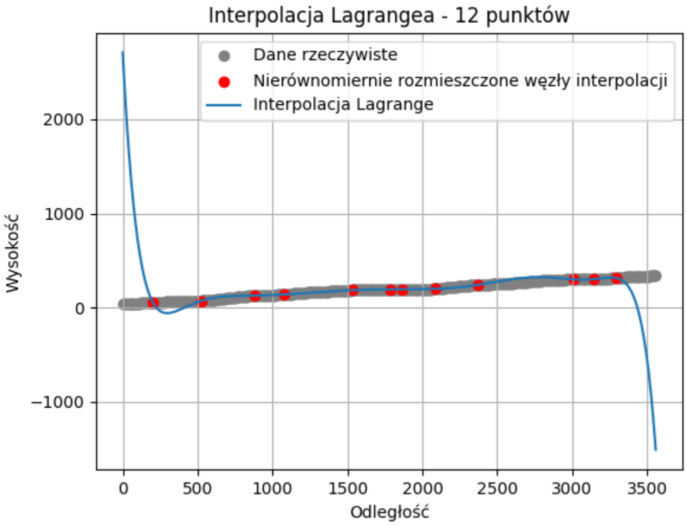




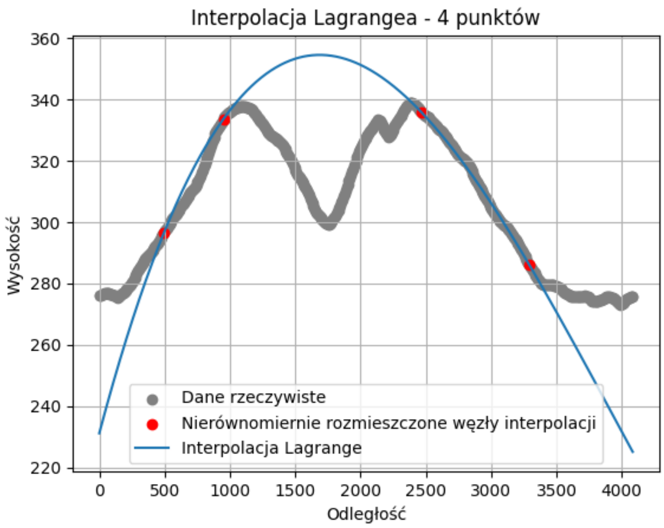
Wpływ rozmieszczenia punktów na wyniki

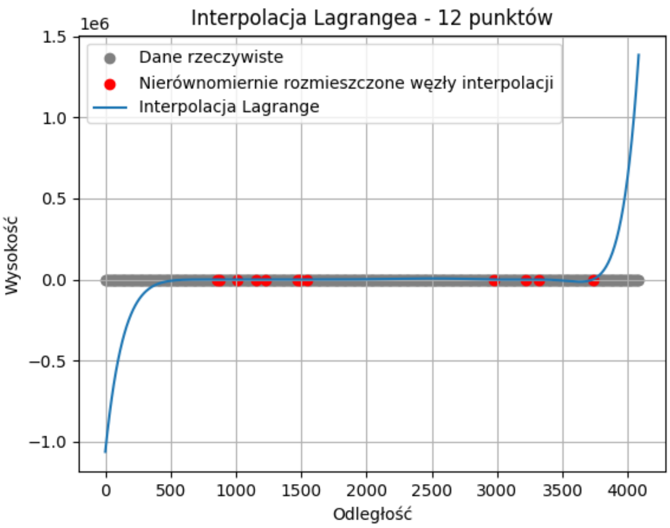
trasa grecja-trasa-pod-gore.txt



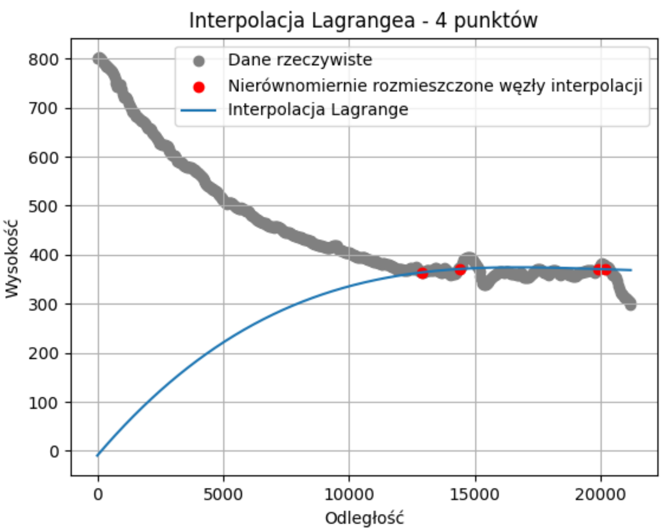


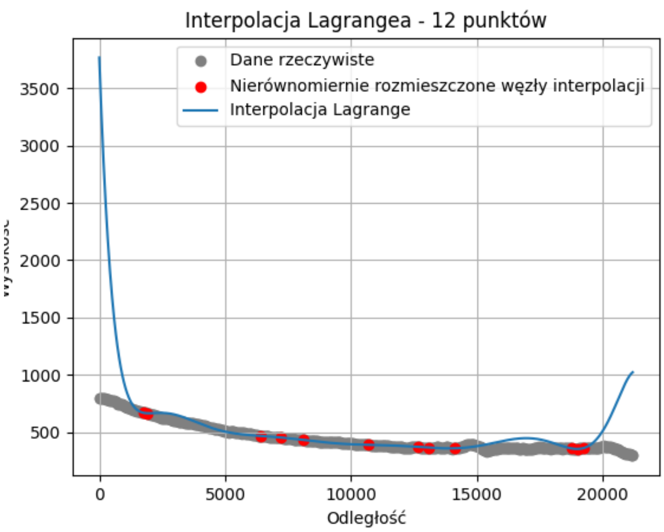
trasa kielce-trasa-plaska.txt





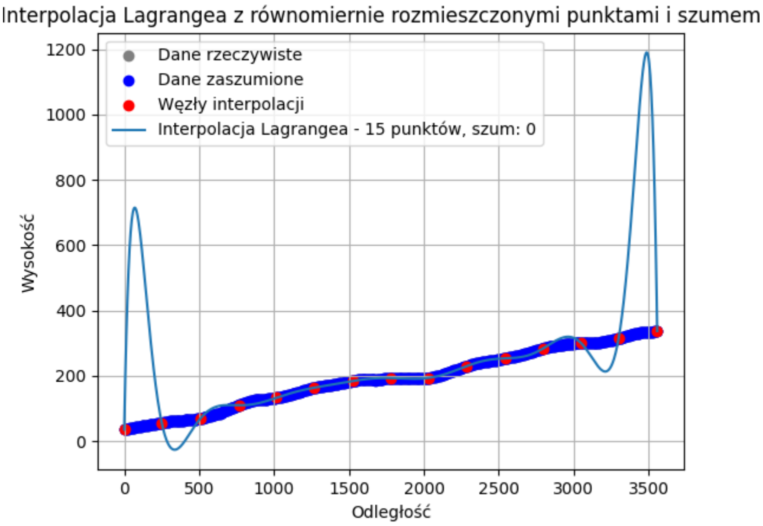
trasa slowacja-z-gorki.txt

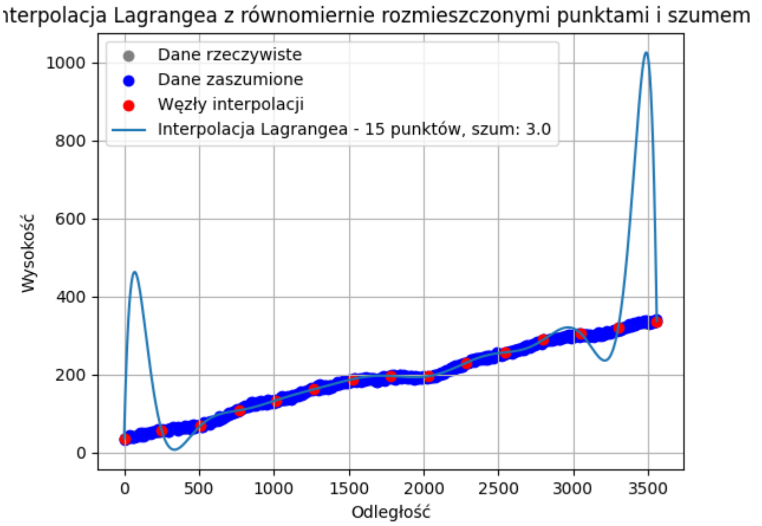




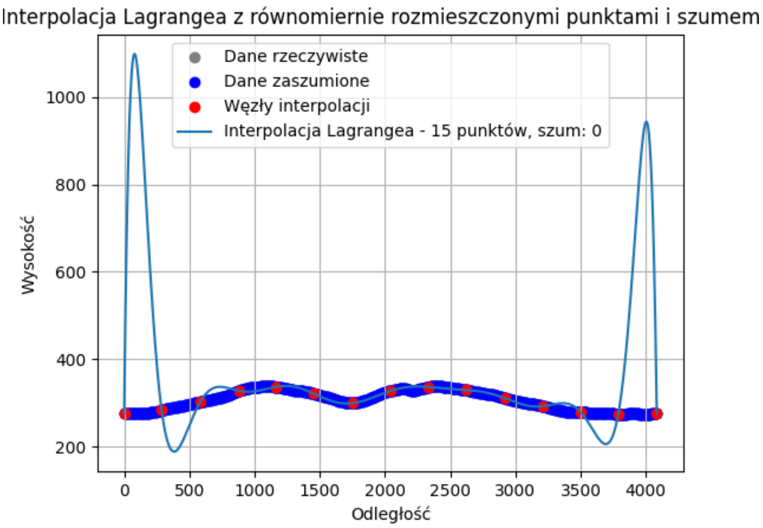
Wpływ dokładności pomiaru punktów na wyniki

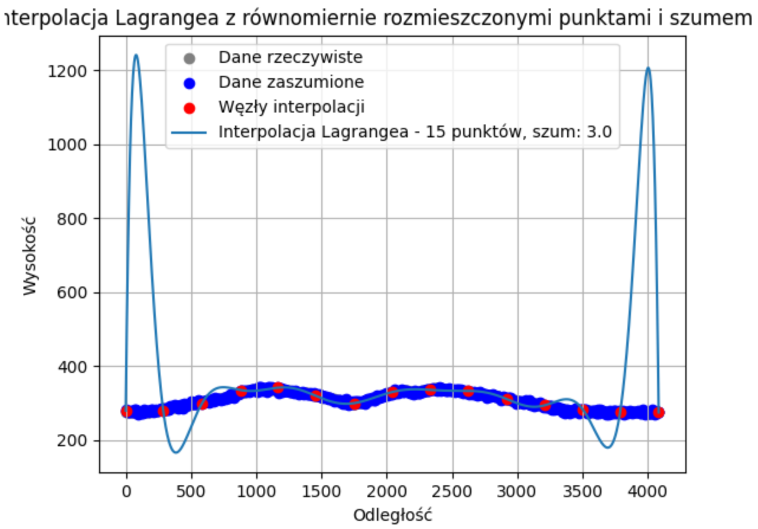
trasa grecja-trasa-pod-gore.txt



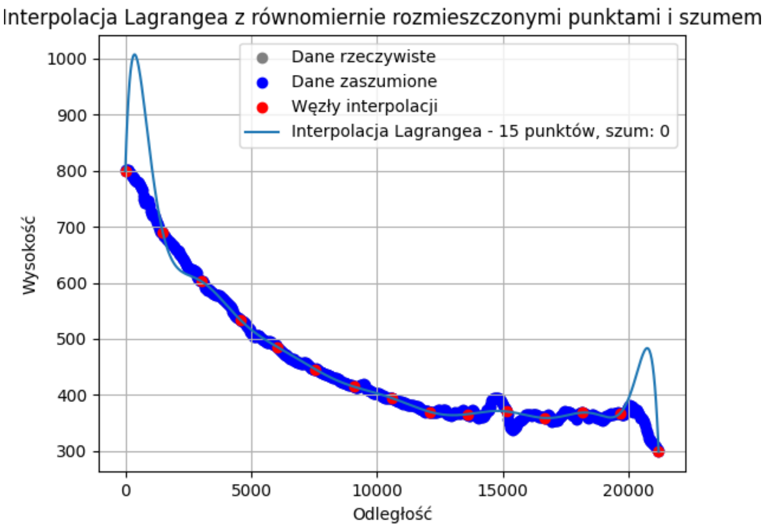


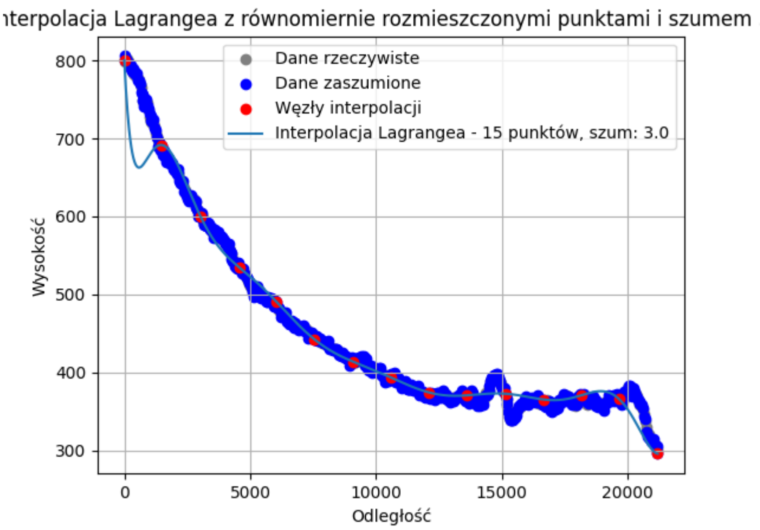
trasa kielce-trasa-plaska.txt





trasa slowacja-z-gorki.txt





Wpływ charakteru trasy na wyniki

Charakter trasy, na której metoda Lagrange'a jest stosowana, może znacząco wpłynąć na wyniki interpolacji. Różne cechy trasy, takie jak zmienność wysokości, nachylenie czy obecność depresji, mogą wpływać na jakość interpolacji.

Trasa "z górki": Na trasach o spadzistym terenie interpolacja wielomianowa może działać dość dobrze, szczególnie jeśli stopień wielomianu jest wystarczający, aby dobrze dopasować się do nachylenia terenu. Niemniej jednak, metoda Lagrange'a może prowadzić do niepożądanych oscylacji, szczególnie na krańcach przedziału interpolacji.

Trasa "pod górkę": Podobnie jak w przypadku tras z górki, metoda Lagrange'a może być skuteczna na trasach pod górę, pod warunkiem, że stopień wielomianu jest odpowiedni do nachylenia terenu. Jednak na ostrych zboczach lub w punktach o dużych zmianach wysokości, interpolacja wielomianowa może nie być w stanie dokładnie odwzorować profilu trasy.

Trasa "płaska": Na płaskich trasach, metoda Lagrange'a powinna działać bardzo dobrze, ponieważ niewielkie zmiany wysokości mogą być łatwo modelowane za pomocą wielomianów niskiego stopnia.

Analiza

Metoda Lagrange'a to technika interpolacji wielomianowej, którą charakteryzuje prostota i uniwersalność. Jednym z jej najważniejszych atutów jest zdolność do dokładnego dopasowania do podanych punktów danych, co oznacza, że wielomian interpolacyjny przechodzi bezpośrednio przez wszystkie te punkty.

Metoda Lagrange'a ma pewne ograniczenia. Głównym z nich jest efekt Rungego, który jest szczególnie widoczny przy większych zestawach danych i równomiernym rozmieszczeniu punktów. Efekt ten prowadzi do nieoczekiwanych oscylacji wielomianu, szczególnie na krańcach przedziału interpolacji, co może negatywnie wpłynąć na dokładność estymacji.

Ponadto, metoda ta ma dość wysoką złożoność obliczeniową, zwłaszcza dla dużych zestawów danych. Stopień wielomianu interpolacyjnego jest równy liczbie punktów danych minus jeden, co oznacza, że zwiększenie liczby punktów prowadzi do zwiększenia złożoności obliczeń.

Metoda Lagrange'a jest bardzo wrażliwa na zmiany w zestawie danych. Każda modyfikacja, taka jak dodanie, usunięcie lub zmiana pojedynczego punktu danych, może mieć duży wpływ na kształt całego wielomianu.

Podsumowując, mimo że metoda Lagrange'a jest potężnym narzędziem do interpolacji wielomianowej, ważne jest, aby pamiętać o jej ograniczeniach, zwłaszcza kiedy pracuje się z większymi zestawami danych. Zbyt mała ilość punktów powoduje niedokładną interpolację, zbyt duża powoduje oscylacje wzmacniające się wraz ze zbliżaniem się do końca przedziału.

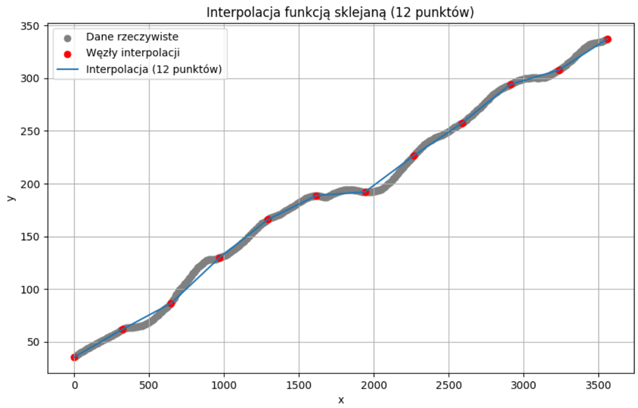
Metoda funkcji sklejanych trzeciego stopnia

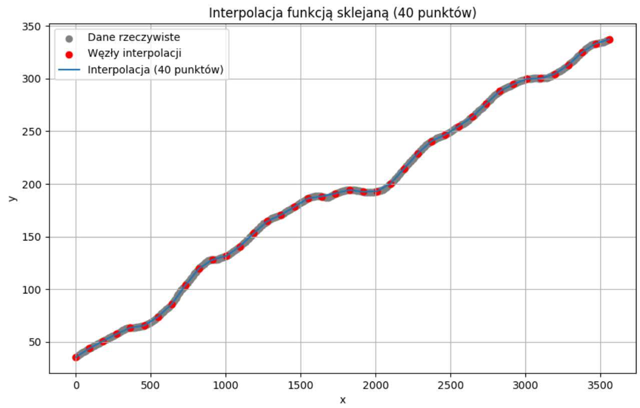
Metoda funkcji sklejanych trzeciego stopnia, zwana także interpolacją sześciennymi splajnami, to popularna technika interpolacyjna, która polega na stworzeniu gładkiej krzywej przechodzącej przez zadane punkty. Podstawowa idea metody polega na tym, że na każdym podprzedziale między dwoma punktami (węzłami) interpolacji definiowany jest osobny wielomian trzeciego stopnia. Dla N punktów danych będziemy mieli N-1 takich podprzedziałów i N-1 wielomianów. Wielomiany są dobierane tak, aby krzywa była gładka, to znaczy aby nie było "skoków" w pierwszej i drugiej pochodnej na granicach przedziałów. Oznacza to, że na styku dwóch sąsiednich wielomianów, ich wartości oraz wartości ich pierwszych i drugich pochodnych muszą się zgadzać.

Ta metoda jest szczególnie użyteczna, gdy potrzebujemy gładkiej krzywej interpolacyjnej. W przeciwieństwie do metody Lagrange'a, metoda sześciennych splajnów nie cierpi na efekt Rungego, co oznacza, że nie występują duże oscylacje, nawet jeśli punkty danych są równomiernie rozmieszczone. Warto jednak zauważyć, że metoda ta wymaga dodatkowych obliczeń w porównaniu do metody Lagrange'a, ponieważ musimy rozwiązać układ równań w celu znalezienia wielomianów sklejanych.

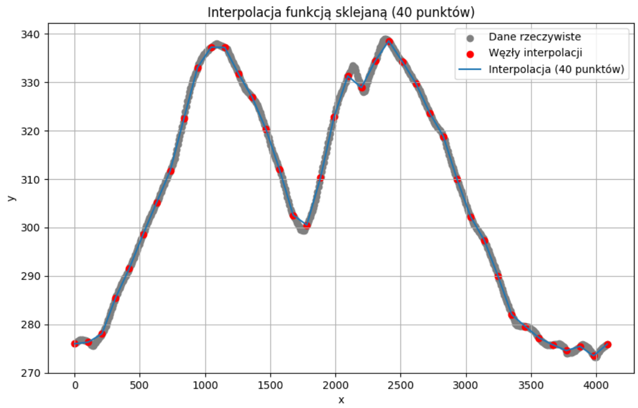
Wpływ liczby punktów na wyniki

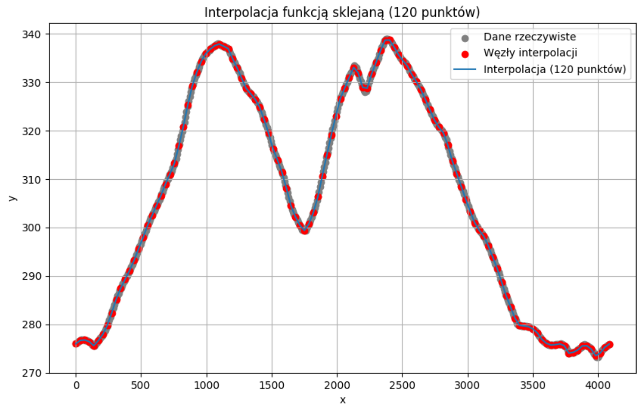
trasa grecja-trasa-pod-gore.txt



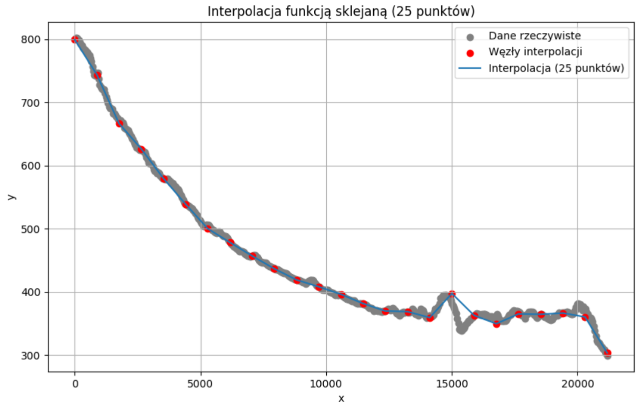


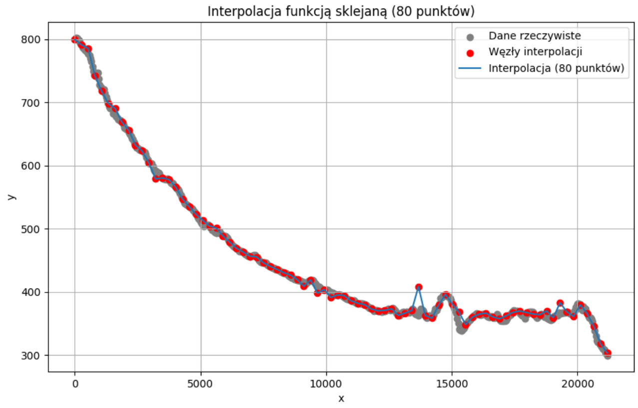
trasa kielce-trasa-plaska.txt





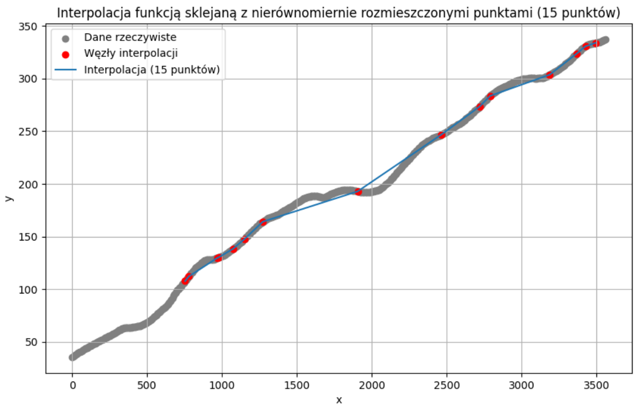
trasa slowacja-z-gorki.txt

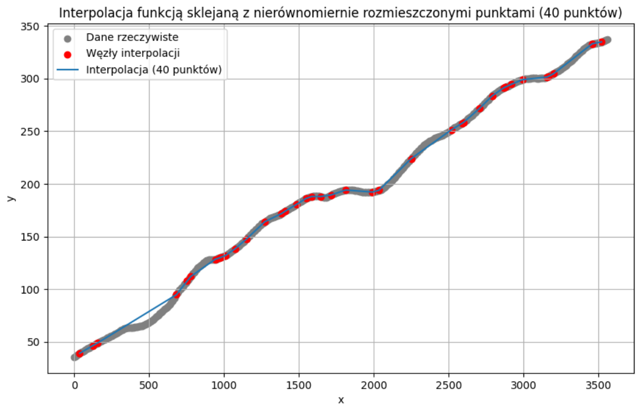




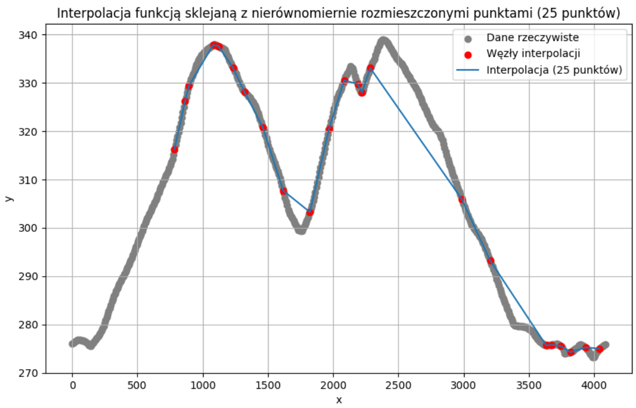
Wpływ rozmieszczenia punktów na wyniki

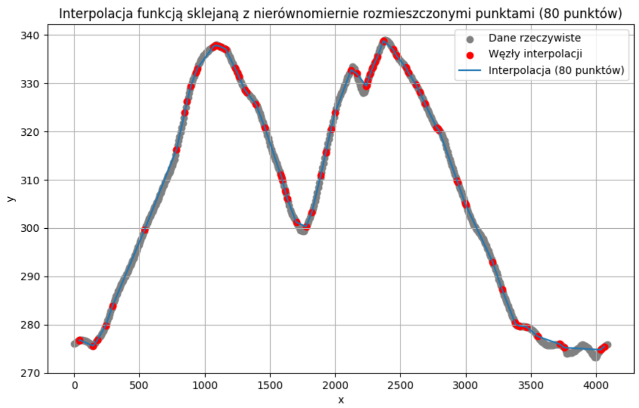
trasa grecja-trasa-pod-gore.txt



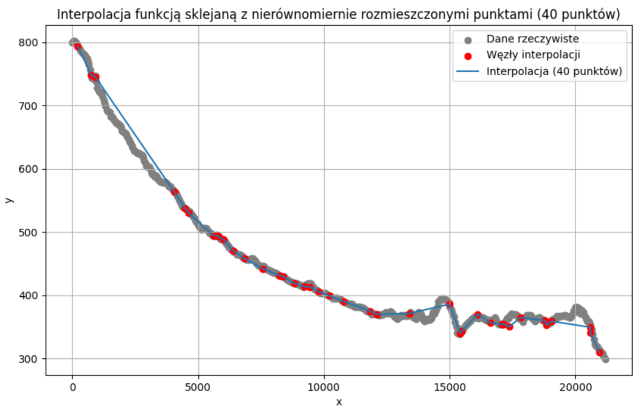


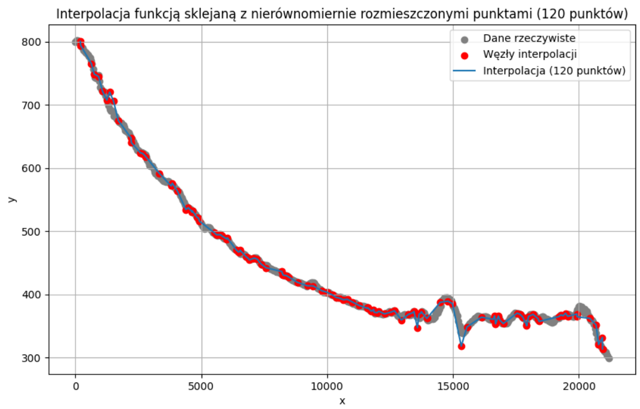
trasa kielce-trasa-plaska.txt





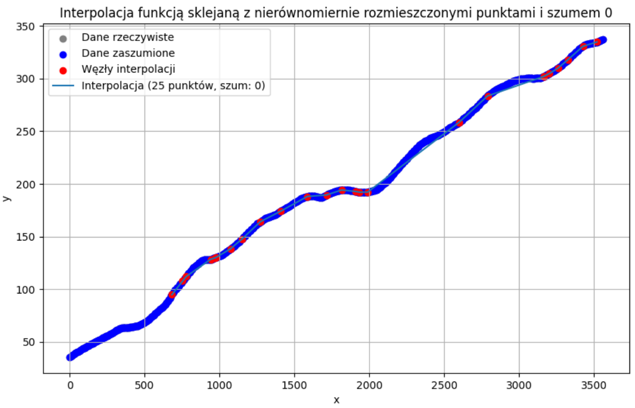
trasa slowacja-z-gorki.txt

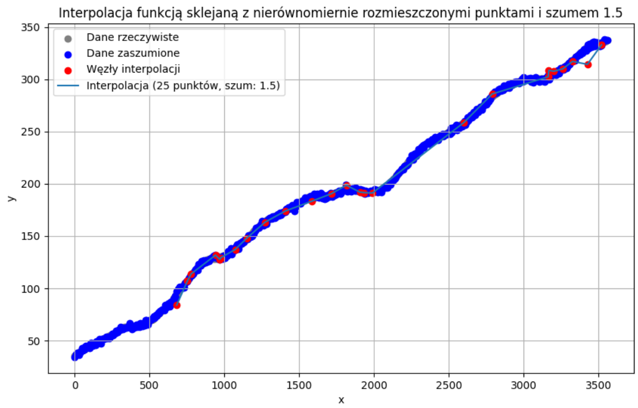




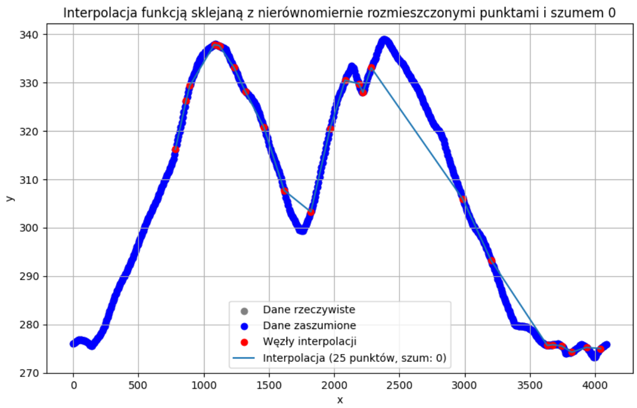
Wpływ dokładności pomiaru punktów na wyniki

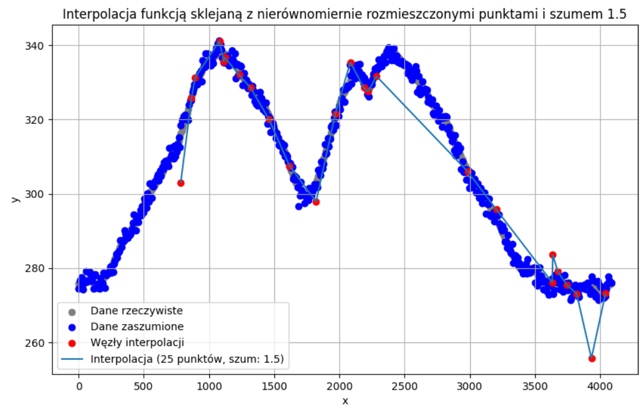
trasa grecja-trasa-pod-gore.txt



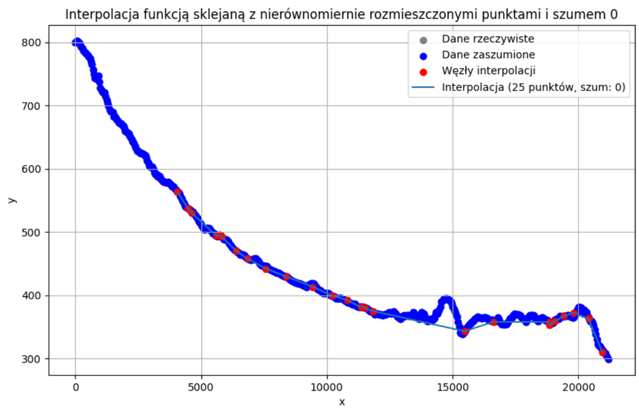


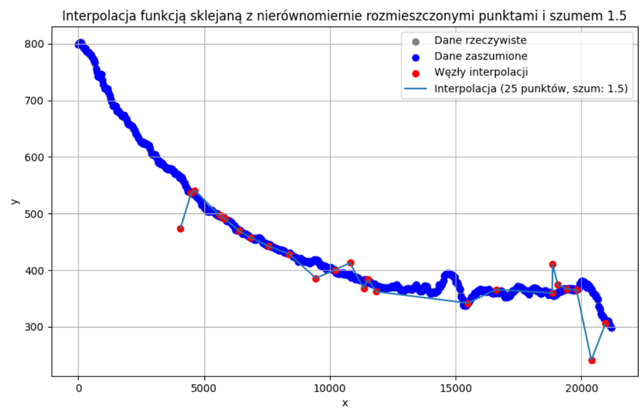
trasa kielce-trasa-plaska.txt





trasa slowacja-z-gorki.txt





Wpływ charakteru trasy na wyniki

Metoda funkcji sklejanych trzeciego stopnia, jest wyjątkowo skuteczna przy modelowaniu różnorodnych tras, dzięki swojej zdolności do tworzenia gładkich krzywych, które mogą dopasować się do zróżnicowanych warunków terenowych. Wpływ różnych charakterystyk trasy na wyniki metody funkcji sklejanych przedstawia się następująco:

Trasa "z górki": Dzięki gładkości krzywej generowanej przez metody splajnów, trasy o spadzistym terenie są zazwyczaj dobrze modelowane. Wielomiany trzeciego stopnia są zdolne do efektywnego opisu zróżnicowanych spadków i nachyleń.

Trasa "pod górkę": Podobnie jak w przypadku tras z górki, metoda funkcji sklejanych może skutecznie modelować trasy pod górkę. Sposobność do tworzenia gładkiej krzywej, która może dostosować się do różnych gradientów, sprawia, że jest ona doskonałym wyborem dla takich tras.

Trasa "płaska": Dla płaskich tras, metoda funkcji sklejanych jest doskonała. Gładkie krzywe wielomianowe trzeciego stopnia mogą skutecznie modelować trasy z niewielkimi zmianami wysokości.

Analiza

Metoda funkcji sklejanych trzeciego stopnia, czyli interpolacja sześciennymi splajnami, to skuteczne narzędzie do tworzenia gładkich krzywych, które doskonale pasują do różnych terenów. Dzięki jej gładkości, krzywa jest estetycznie przyjemna i naturalnie odwzorowuje rzeczywiste warunki terenowe. Co więcej, jest odporna na tzw. efekt Rungego, co oznacza, że nie ma skoków czy dużych oscylacji, nawet gdy dodajemy więcej punktów do modelu.

Nawet zmiany w pojedynczych punktach mają wpływ tylko na najbliższe sąsiedztwo, co jest korzystne, gdy dane mogą się zmieniać lub gdy są dodawane nowe punkty. Mimo że obliczanie sześciennych splajnów jest nieco bardziej złożone niż w przypadku innych metod interpolacji, oprogramowanie zwykle radzi sobie z tym zadaniem bez problemów, minimalizując ten dodatkowy nakład pracy.

Ogólnie rzecz biorąc, metoda ta jest bardzo praktyczna i uniwersalna, dostarczając dobre rezultaty dla różnych typów tras, czy to płaskich, górskich czy z depresjami.

Interpolacja sześciennymi splajnami ma jednak pewną naturalną odporność na szumy. Ponieważ każdy wielomian jest dopasowywany tylko do lokalnego zestawu punktów, a nie do całego zbioru danych, pojedyncze szumy są mniej prawdopodobne do wprowadzenia dużych fluktuacji w całej krzywej, w porównaniu do globalnych metod interpolacji, takich jak interpolacja Lagrange'a.

Podsumowanie

W kontekście projektu dotyczącego aproksymacji profilu wysokościowego, zdecydowanie należy rozważyć zarówno metodę Lagrange'a, jak i metodę funkcji sklejanych trzeciego stopnia (sześciennych splajnów), jednak każda z nich ma swoje własne mocne strony i słabości.

Metoda Lagrange'a jest prostsza do zrozumienia i implementacji, zapewniając precyzyjną interpolację, czyli gwarantując, że wygenerowana krzywa przejdzie przez wszystkie dostępne punkty danych. Wadą jest jednak to, że ta metoda może cierpieć na tzw. efekt Rungego, prowadzący do niestabilności i dużych oscylacji, szczególnie przy większej liczbie punktów danych. Dodatkowo, zmiana wartości jednego punktu danych wpływa na całą krzywą, co może być niepożądane w niektórych zastosowaniach.

Z drugiej strony, metoda funkcji sklejanych trzeciego stopnia tworzy gładką krzywą, która nie tylko przechodzi przez wszystkie punkty danych, ale również zachowuje gładkość, co jest często pożądane w kontekście modelowania profili wysokościowych. Ta metoda jest także odporna na efekt Rungego, co oznacza, że dodanie więcej punktów nie prowadzi do dużych oscylacji krzywej. Co więcej, ta metoda ma lokalne zachowanie, czyli zmiana jednego punktu danych wpływa tylko na część krzywej w jego sąsiedztwie. Wadą jest jednak zwiększona złożoność obliczeniowa.

Podsumowując, obie metody mają swoje miejsce i użyteczność, a wybór między nimi zależy od specyficznych wymagań projektu. Jeśli najważniejszą cechą jest gładkość profilu wysokościowego i odporność na oscylacje przy dużej liczbie punktów, metoda funkcji sklejanych trzeciego stopnia może być lepszym wyborem. Jeżeli natomiast liczy się prostota implementacji i zrozumienia, a liczba punktów nie jest zbyt duża, metoda Lagrange'a może być wystarczająca.