Rozkład normlany:
Materiały pomocnicze: http://cs229.stanford.edu/section/gaussians.pdf
Matematyka

1. Pokaż (1 pkt):

$$E[(X - E[X])(Y - E[Y])] = E[XY] - E[X]E[Y] \tag{1}$$

2. Pokaż, że Σ - macierz kowariancji jest dodatnio określona tj.: dla dowolnego $z, z^T \Sigma z \geq 0$ (+ pkt)

3. Mając zdefiniowane (+ pkt):

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \mu = \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{bmatrix}, \Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 \\ 0 & \sigma_2 \end{bmatrix} \tag{2}$$

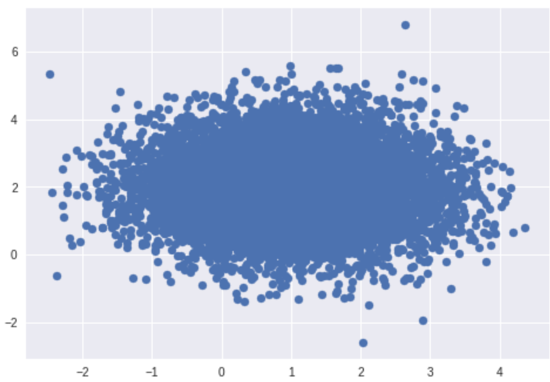
   udowodnij, że tak zdefiniowany wielowymiarowy rozkład normalny, jest iloczynem 2 niezależnych rozkładów normalnych jednowymiarowych.

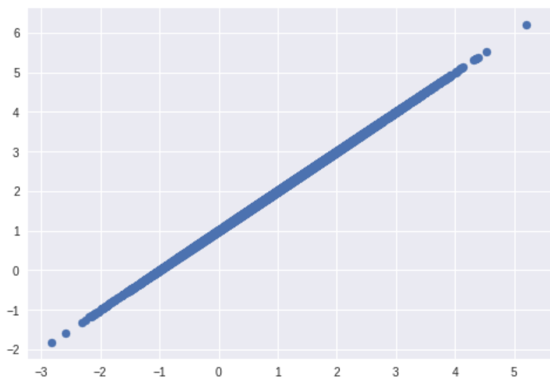
4. Definiując poziomicę c oraz $f(x)$ jako rozkład normalny, (+ pkt):
   $\{x \in R^2 : f(x) = c\}$, pokaż, że tak zdefiniowana poziomica tworzy elipsoidę.

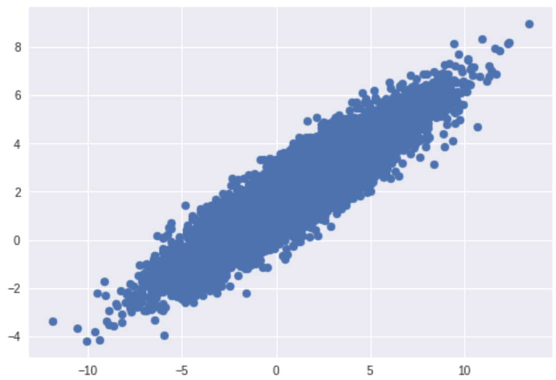
5. Do domu: przeczytaj i zrozum dowód z appendixu z theorem 1 oraz cały plik gaussians.pdf.

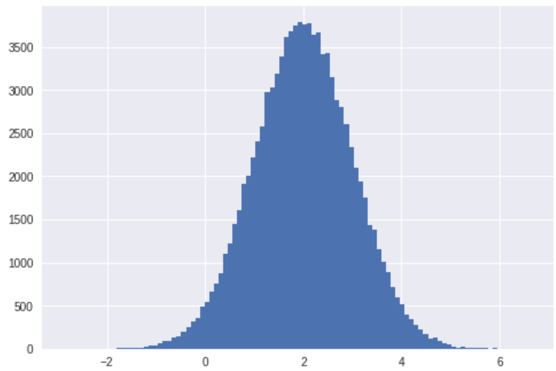
Programowanie

1. Wygeneruj podobne obrazki (np.random.multivariate_normal, plt.scatter, plt.hist, 10k punktów (scatter), 100k (histogram), do załączonych (2 pkt):

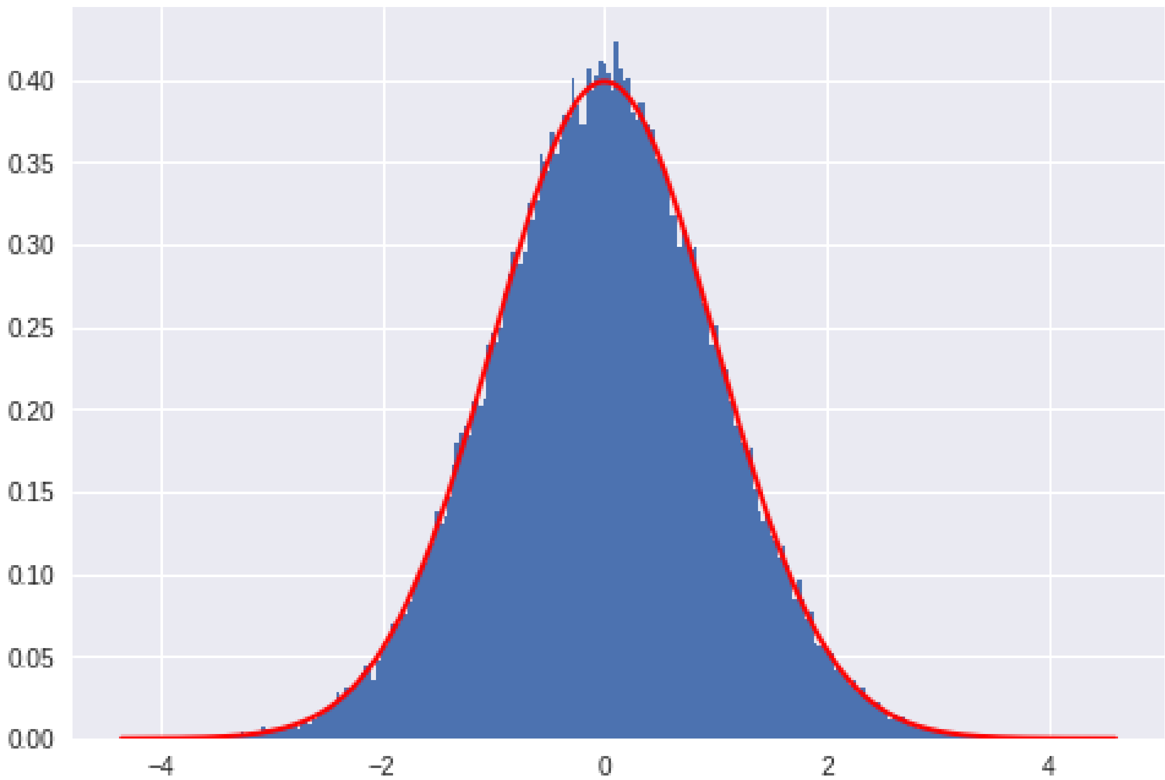








2. Używając wzoru na gęstość rozkładu normalnego oraz kubełków z funkcji plt.hist (zobacz dokumentację) stwórz wykres jak poniżej (scipy.stats zakazane) (2 pkt):



3. Theorem 1 (oraz dowód) z pliku gaussians.pdf pozwala stworzyć process w którym jesteśmy w stanie uzyskać wielowymiarowy rozkład normalny o zdefiniowanym Σ oraz μ z rozkładu normalnego jednowymiarowego $N(0, 1)$. Napisz tą procedurę(5 pkt).

   Podpowiedź - użyj scipy.linalg.sqrtm, do wyznaczenia B.