1. Problem obliczeniowy

$$\frac{d^2\Phi}{dx^2} = 4\pi G\rho(x) \tag{1}$$

$$\Phi(0) = 5,\ \Phi(3) = 4$$

$$\rho(x) = \begin{cases} 0, & \text{dla } x \in [0,1] \\ 1, & \text{dla } x \in (1,2] \\ 0, & \text{dla } x \in (2,3] \end{cases}$$

2. Wyprowadzenie sformułowania wariacyjnego

$$\frac{d^2\Phi}{dx^2} = 4\pi G\rho(x),\quad \Omega = [0,3],\quad \underbrace{\Phi(0) = 5,\ \Phi(3) = 4}_{\text{warunki brzegowe Dirichleta}}$$

Z faktu, że brzegowe warunki Dirichleta są różne od 0 w obu punktach końca dziedziny, ustalamy taką funkcję $\overline{\Phi}$, że $\Phi(x) = \overline{\Phi}(x) + w(x)$ i w zeruje się na brzegach Ω.

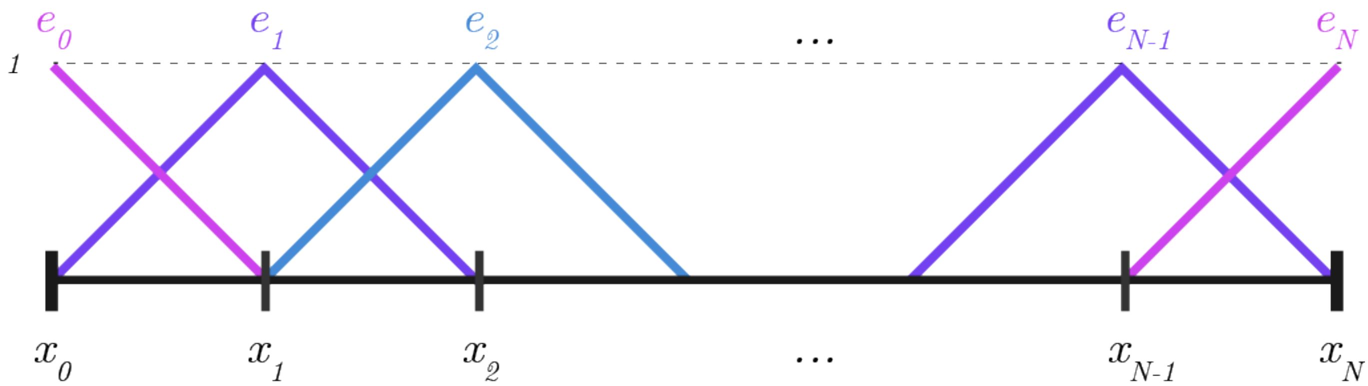
$$\Phi = \overline{\Phi} + w = 5 - \frac{x}{3} + w \tag{2}$$

$$\Phi' = w' - \frac{1}{3}$$

Następnie wyprowadzamy sformułowanie wariacyjne, korzystając z (2):

$$\forall\, v \in V : v(0) = v(3) = 0$$
$$\Phi'' v = 4\pi G\rho v$$
$$\int_\Omega \Phi'' v dx = 4\pi G \int_\Omega \rho v dx$$
$$\int_0^3 \Phi'' v dx = 4\pi G \int_1^2 v dx$$
$$\Big[\Phi' v\Big]_0^3 - \int_0^3 \Phi' v' dx = 4\pi G \int_1^2 v dx$$
$$\int_0^3 \Phi' v' dx = -4\pi G \int_1^2 v dx$$
$$\int_0^3 (w' - \frac{1}{3}) v' dx = -4\pi G \int_1^2 v dx$$
$$\underbrace{\int_0^3 w' v' dx}_{B(w,v)} = \underbrace{\frac{1}{3}\int_0^3 v' dx - 4\pi G \int_1^2 v dx}_{L(v)}$$

3. Konstrukcja podprzestrzeni elementów skończonych



Podprzestrzeń elementów skończonych będzie składać się z $N-1$ $\wedge$-kształtnych funkcji liniowych (z wykluczeniem e_0 i e_N), gdzie N to liczba równych podprzedziałów Ω, w postaci:

$$i \in \{1, 2, ..., N-1\},\ x_k = \frac{3k}{N}$$

$$e_i = \begin{cases} \frac{N}{3}(x - x_{i-1}), & \text{dla } x \in [x_{i-1}, x_i] \\ -\frac{N}{3}(x - x_{i+1}), & \text{dla } x \in (x_i, x_{i+1}] \\ 0, & \text{dla } x \in \Omega \setminus [x_{i-1}, x_{i+1}] \end{cases} \tag{3}$$

4. Układ równań liniowych

Rozwiązaniem zadanego problemu potencjału grawitacyjnego jest:

$$\sum_{i=1}^{N-1} w_i B(e_i, e_j) = L(e_j),\ j \in \{1, 2, ..., N-1\} \tag{4}$$

Postać macierzowa prezentuje się następująco:

$$\begin{bmatrix} B(e_1, e_1) & B(e_2, e_1) & \cdots & B(e_{N-1}, e_1) \\ B(e_1, e_2) & B(e_2, e_2) & \cdots & B(e_{N-1}, e_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ B(e_1, e_{N-1}) & B(e_2, e_{N-1}) & \cdots & B(e_{N-1}, e_{N-1}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_{N-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L(e_1) \\ L(e_2) \\ \vdots \\ L(e_{N-1}) \end{bmatrix} \tag{5}$$