

1. Problem obliczeniowy

$$\frac{d^2\Phi}{dx^2} = 4\pi G\rho(x) \quad (1)$$

$$\Phi(0) = 5, \quad \Phi(3) = 4$$

$$\rho(x) = \begin{cases} 0, & \text{dla } x \in [0, 1] \\ 1, & \text{dla } x \in (1, 2] \\ 0, & \text{dla } x \in (2, 3] \end{cases}$$

2. Wyprowadzenie sformułowania wariacyjnego

$$\frac{d^2\Phi}{dx^2} = 4\pi G\rho(x), \quad \Omega = [0, 3], \quad \underbrace{\Phi(0) = 5, \Phi(3) = 4}_{\text{warunki brzegowe Dirichleta}}$$

Z faktu, że brzegowe warunki Dirichleta są różne od 0 w obu punktach końca dziedziny, ustalamy taką funkcję $\bar{\Phi}$, że $\Phi(x) = \bar{\Phi}(x) + w(x)$ i w zeruje się na brzegach Ω .

$$\begin{aligned} \Phi &= \bar{\Phi} + w = 5 - \frac{x}{3} + w \\ \Phi' &= w' - \frac{1}{3} \end{aligned} \quad (2)$$

Następnie wyprowadzamy sformułowanie wariacyjne, korzystając z (2):

$$\begin{aligned} \forall v \in V : v(0) &= v(3) = 0 \\ \Phi''v &= 4\pi G\rho v \\ \int_{\Omega} \Phi''v dx &= 4\pi G \int_{\Omega} \rho v dx \\ \int_0^3 \Phi''v dx &= 4\pi G \int_1^2 v dx \\ \left[\Phi'v \right]_0^3 - \int_0^3 \Phi'v' dx &= 4\pi G \int_1^2 v dx \\ \int_0^3 \Phi'v' dx &= -4\pi G \int_1^2 v dx \\ \underbrace{\int_0^3 \left(w' - \frac{1}{3} \right) v' dx}_{B(w,v)} &= \underbrace{-4\pi G \int_1^2 v dx}_{L(v)} \end{aligned}$$

3. Konstrukcja podprzestrzeni elementów skończonych

Podprzestrzeń elementów skończonych będzie składać się z $N - 1$ \wedge -kształtnych funkcji liniowych, gdzie N to liczba równych podprzedziałów Ω , w postaci:

$$\begin{aligned} i &\in \{1, 2, \dots, N - 1\}, \quad x_k = \frac{3k}{N} \\ e_i &= \begin{cases} \frac{N}{3}(x - x_{i-1}), & \text{dla } x \in [x_{i-1}, x_i] \\ -\frac{N}{3}(x - x_i), & \text{dla } x \in (x_i, x_{i+1}] \\ 0, & \text{dla } x \in \Omega \setminus [x_{i-1}, x_{i+1}] \end{cases} \end{aligned} \quad (3)$$