1. Problem obliczeniowy

$$\frac{d^2\Phi}{dx^2} = 4\pi G\rho(x) \tag{1}$$

$$\Phi(0) = 5,\ \Phi(3) = 4$$

$$\rho(x) = \begin{cases} 0, & \text{dla } x \in [0,1] \\ 1, & \text{dla } x \in (1,2] \\ 0, & \text{dla } x \in (2,3] \end{cases}$$

2. Wyprowadzenie sformułowania wariacyjnego

$$\frac{d^2\Phi}{dx^2} = 4\pi G\rho(x),\quad \Omega = [0,3],\quad \underbrace{\Phi(0) = 5,\ \Phi(3) = 4}_{\text{warunki brzegowe Dirichleta}}$$

Z faktu, że brzegowe warunki Dirichleta są różne od 0 w obu punktach końca dziedziny, ustalamy taką funkcję $\overline{\Phi}$, że $\Phi(x) = \overline{\Phi}(x) + w(x)$ i w zeruje się na brzegach Ω.

$$\Phi = \overline{\Phi} + w = 5 - \frac{x}{3} + w \tag{2}$$

$$\Phi' = w' - \frac{1}{3}$$

Następnie wyprowadzamy sformułowanie wariacyjne, korzystając z (2):

$$\forall\, v \in V : v(0) = v(3) = 0$$
$$\Phi'' v = 4\pi G\rho v$$
$$\int_\Omega \Phi'' v dx = 4\pi G \int_\Omega \rho v dx$$
$$\int_0^3 \Phi'' v dx = 4\pi G \int_1^2 v dx$$
$$\Big[\Phi' v\Big]_0^3 - \int_0^3 \Phi' v' dx = 4\pi G \int_1^2 v dx$$
$$\int_0^3 \Phi' v' dx = -4\pi G \int_1^2 v dx$$
$$\underbrace{\int_0^3 (w' - \frac{1}{3}) v' dx}_{B(w,v)} = \underbrace{-4\pi G \int_1^2 v dx}_{L(v)}$$