

# Model Opisowy Rzeczywistego Problemu

## Zagadnienie Odśnieżania Ulic Danego Miasta

### Wprowadzenie

Problem polega na odpowiednim zaplanowaniu wysyłania odśnieżarek w celu jak najszybszego i optymalnego odśnieżenia ulic danego miasta. Do naszej dyspozycji mamy jakąś ilość maszyn oraz pracowników, którzy mogą je obsługiwać. Musimy również uwzględnić takie rzeczy jak plan miasta (rozkład ulic) oraz to, że ulice główne, dwukierunkowe, dojazdy do szkół, ważnych zakładów pracy czy szpitali są ważniejsze i wymagają uwzględnienia ich na samym początku. Warto również wziąć pod uwagę takie aspekty jak: materiał do posypywania dróg, ilość tego materiału oraz paliwa, które mieszczą się w danej maszynie, czas pracy ludzi.

### Co Podlega Optymalizacji

Głównym problemem optymalizacji będzie odpowiednie zarządzanie rozmieszczeniem pracy maszyn, tak aby ulice były odśnieżone jak najszybciej. Będzie to wtedy optymalizacja jednokryterialna. Możemy jednak dodać na przykład optymalizację kosztów, aby zaproponować miastu lepszą cenę niż konkurencja. Wtedy musimy również uwzględnić koszty paliwa dla maszyn, czas pracy pracowników czy rodzaj i koszty danego materiału do posypywania dróg (np. piasek lub sól). Nasz problem może stać się wielokryterialny.

### Zastosowanie Uproszczenia Zachowujące Istotę Problemu

Przy uproszczeniu możemy wziąć pod uwagę takie rzeczy jak dokładność odśnieżania, zakładając, że jeden przejazd maszyny całkowicie odśnieża daną drogę lub jeden pas (przy drodze dwukierunkowej) oraz problem pozbycia się zalegającego po odśnieżeniu śniegu, co może być już odrębnym problemem do optymalizacji. Przy rozwiązaniu moglibyśmy posłużyć się grafem, który opisywałby nasz układ ulic, biorąc pod uwagę czy ulica jest jedno- czy dwukierunkowa, a także uwzględniając wagę ulic (priorytet/które ulice muszą zostać najpierw odśnieżone). Musielibyśmy uwzględnić również siedzibę naszej firmy, gdzie maszyny mogłyby uzupełniać zapasy soli/piasku oraz paliwa.

### Dane konieczne do rozwiązania problemu

Do rozwiązania problemu potrzebne będą:

- Rozkład ulic oraz ich priorytety, czyli wiedza, które ulice wymagają szybszego odśnieżenia.
- Zasoby:
  - ilość maszyn,
  - liczba pracowników,
  - ilość piasku/soli,
  - ilość paliwa (oraz jego koszty, jeśli optymalizujemy koszty),
  - czas pracy pracowników.

## Formalizacja Modelu Matematycznego

### Struktury Danych:

- **Graf**  $G(S, U)$  obrazujący rozkład ulic, gdzie  $S$  to wierzchołki – skrzyżowania ulic, a  $U$  to krawędzie – czyli ulice.
  - Musimy znać długość ulic, czyli danych krawędzi  $U$  ( $l_u$ ), a także ich priorytet ( $p_u$ ), co będzie wskazywało, które ulice trzeba odśnieżyć najpierw.
  - W przypadku szerszej analizy ulicy pod kątem drogi jedno- lub dwupasmowej, która wskaże nam, czy odśnieżarka musi przejechać tam jeden czy dwa razy, musimy znać ilość pasów jezdni ( $j_u$ ).
- **Ilość maszyn/odśnieżarek** ( $M$ ), a także ich pojemność paliwa ( $b_m$ ) czy piasku/soli ( $ps_m$ ) oraz ilość pracowników obsługujących maszyny ( $P$ ).
- Przydatne byłoby również posiadanie informacji o szybkości/czasie odśnieżania danej ulicy, więc możemy wprowadzić np. szybkość odśnieżarki z podziałem na:
  - odśnieżanie ( $v_o$ )
  - wracanie do bazy po uzupełnieniu piasku/soli czy paliwa ( $v_b$ )

### Postać Rozwiązania:

- Kolejność ulic (krawędzi  $U$ ), jakie wybrana maszyna będzie musiała kolejno przejechać – permutacja. Długość takiej jednej trasy musi uwzględnić zasób paliwa i materiału do posypywania drogi. Musimy też pamiętać o tym, czy daną ulicę trzeba przejechać jeden lub dwa razy (ilość pasów).
- Musimy również podzielić te trasy dla dysponowanych przez nas maszyn.
- Ważny jest również czas potrzebny na przejechanie danej ulicy lub powrót do bazy (znając długość ulicy oraz prędkość maszyny podczas odśnieżania i powrotu do bazy):
  - $T_o = \frac{l_u}{v_o^m}$ .

## Funkcja celu

Minimalizujemy całkowity czas odśnieżania wszystkich ulic. Czas ten składa się z dwóch elementów:

- Czas odśnieżania ulicy  $u$  przez maszynę  $m$ :

$$T_o = \frac{l_u}{v_o^m} \times c_u$$

gdzie:

- $l_u$  to długość ulicy  $u$
- $v_o^m$  to prędkość odśnieżania dla maszyny  $m$
- $c_u$  to liczba przejazdów (odśnieżanie jednokierunkowe lub dwukierunkowe)
- Czas powrotu do bazy po odśnieżaniu ulicy  $u$ :

$$T_b = \frac{d_b^u}{v_b^m}$$

gdzie:

- $d_b^u$  to odległość ulicy  $u$  od bazy
- $v_b^m$  to prędkość powrotu maszyny  $m$

Całkowity czas dla maszyny  $m$  odśnieżającej ulicę  $u$  to suma tych dwóch wartości:

$$T_u^m = T_o + T_b = \frac{l_u}{v_o^m} \times c_u + \frac{d_b^u}{v_b^m}$$

Funkcja celu, czyli minimalizacja całkowitego czasu dla wszystkich maszyn i ulic:

$$\text{Min} \sum_{m=1}^M \sum_{u=1}^U x_{mu} \times \left( \frac{l_u}{v_o^m} \times c_u + \frac{d_b^u}{v_b^m} \right)$$

gdzie  $x_{mu}$  to zmienna decyzyjna, która przyjmuje wartość 1, jeśli maszyna  $m$  odśnieża ulicę  $u$ , a 0 w przeciwnym razie.

## Ograniczenia

1. **Zasoby paliwa:** Maszyna  $m$  nie może przekroczyć swojego zasobu paliwa podczas odśnieżania ulic:

$$\sum_{u=1}^U x_{mu} \times l_u \leq b_m$$

gdzie  $b_m$  to maksymalna ilość paliwa dla maszyny  $m$ .

2. **Zasoby materiałów (piasek/sól):** Maszyna  $m$  nie może przekroczyć swojego zasobu materiałów do posypywania dróg:

$$\sum_{u=1}^U x_{mu} \times c_u \leq ps_m$$

gdzie  $ps_m$  to maksymalna ilość materiałów dla maszyny  $m$ .

3. **Każda ulica musi być odśnieżona przez jedną maszynę:**

$$\sum_{m=1}^M x_{mu} = 1 \quad \forall u = 1, \dots, U$$

4. **Ograniczenia czasowe** (opcjonalne): Możemy nałożyć maksymalny czas na odśnieżenie wszystkich ulic:

$$\sum_{m=1}^M \sum_{u=1}^U x_{mu} \times T_u^m \leq T_{\max}$$

gdzie  $T_{\max}$  to maksymalny dozwolony czas na wykonanie zadania.