Teoria Sterowania

Sprawozdanie – Druga Metoda Lapunowa

Jakub Szczypek, Automatyka i Robotyka, grupa 2

1. Wstęp

Celem ćwiczenia jest zapoznanie się z wybranymi metodami badania stabilności nieliniowych systemów dynamicznych. W ramach tego ćwiczenia zostały omówione dwa twierdzenia, które można do tego celu wykorzystać:

- Twierdzenie Lapunowa
- Twierdzenie La Salle'a

2. Przebieg ćwiczenia

W ramach ćwiczenia należało zbadać 3 systemy dynamiczne.

2.1 System 1

System opisany jest następującym równaniem:

$$\dot{x}(t) = -x^3(t)$$

Przyjęty funkcjonał ma postać:

$$V(x) = \frac{1}{2}x^2$$

Pochodna funkcjonału V(x) na trajektoriach systemu wynosi:

$$\dot{V}(x) = \frac{\partial V}{\partial x} f(x) = -x^4(t)$$

Z równania układu dynamicznego wyznaczamy punkty równowagi:

$$x = 0$$

Wartość pochodnej funkcjonału Lapunowa na trajektoriach systemu dla tego punktu jest niedodatnia dla każdego x(t), funkcjonał Lapunowa jest nieujemny. Zgodnie z II twierdzeniem Lapunowa punkt równowagi x = 0 jest stabilny, lecz nie możemy wnioskować o jego asymptotycznej stabilności (występuje słaba nierówność). Jednakże w naszym przypadku jesteśmy wstanie wykorzystać twierdzenie La Salle'a. Zgodnie z tym twierdzeniem, w przypadku jeśli spełnione są wspomniane wcześniej nierówności silne (dla punktów poza zerem) zerowy punkt równowagi jest stabilny asymptotycznie. Twierdzenie to potwierdza się w naszym przypadku, a więc punkt równowagi x = 0 jest stabilny asymptotycznie na mocy twierdzenia La Salle'a.

2.2 System 2

System opisany jest następującym równaniem:

$$\dot{x}(t) = -x(t) + x^3(t)$$

Przyjęty funkcjonał ma postać:

$$V(x) = \frac{1}{2}x^2$$

Pochodna funkcjonału V(x) na trajektoriach systemu wynosi:

$$\dot{V}(x) = \frac{\partial V}{\partial x} f(x) = -x^2(t) + x^4(t)$$

Z równania układu dynamicznego wyznaczamy punkty równowagi:

$$x_1 = 0, \quad x_2 = -1, \quad x_3 = 1$$

Dla wszystkich trzech punktów równowagi pochodna funkcjonału Lapunowa na trajektoriach systemu jest niedodatnia dla dodatniego funkcjonału. Zgodnie z II twierdzeniem Lapunowa system taki jest stabilny w punktach równowagi. Podobnie jak w poprzednim systemie za pomocą II twierdzenia Lapunowa nie jesteśmy wstanie stwierdzić asymptotycznej stabilności zerowego punktu równowagi. Jednakże ponownie jesteśmy wstanie wykorzystać twierdzenie La Salle'a. Twierdzenie to potwierdza się w naszym przypadku, a więc punkt równowagi x = 0 jest stabilny asymptotycznie na mocy twierdzenia La Salle'a.

2.3 System 3

System opisany jest następującym równaniem:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t) - x_1(t) + x_1^3(t) \\ \dot{x_2}(t) = -x_1(t) \end{cases}$$

Przyjęty funkcjonał ma postać:

$$V(x_1, x_2) = \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2)$$

Pochodna funkcjonału V(x) na trajektoriach systemu wynosi:

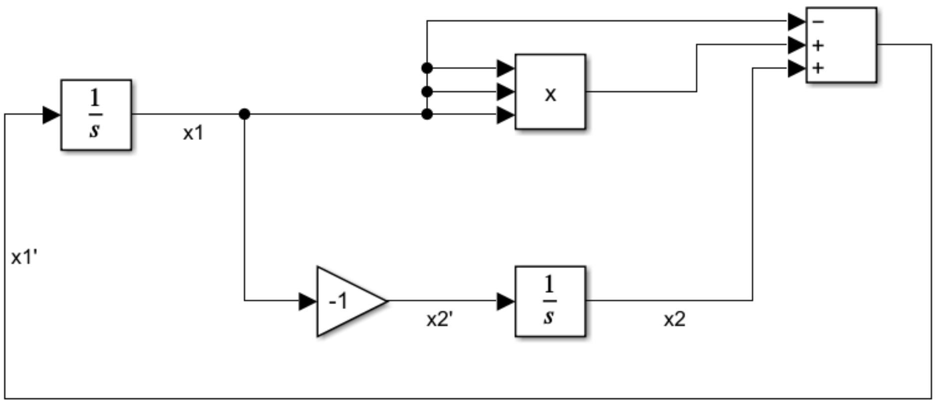
$$\dot{V}(x) = \frac{\partial V}{\partial x} f(x) = x_1(x_2 - x_1 + x_1^3) + x_2(-x_1) = x_1^4 - x_1^2$$

Z równania układu dynamicznego wyznaczamy punkty równowagi:

$$x = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

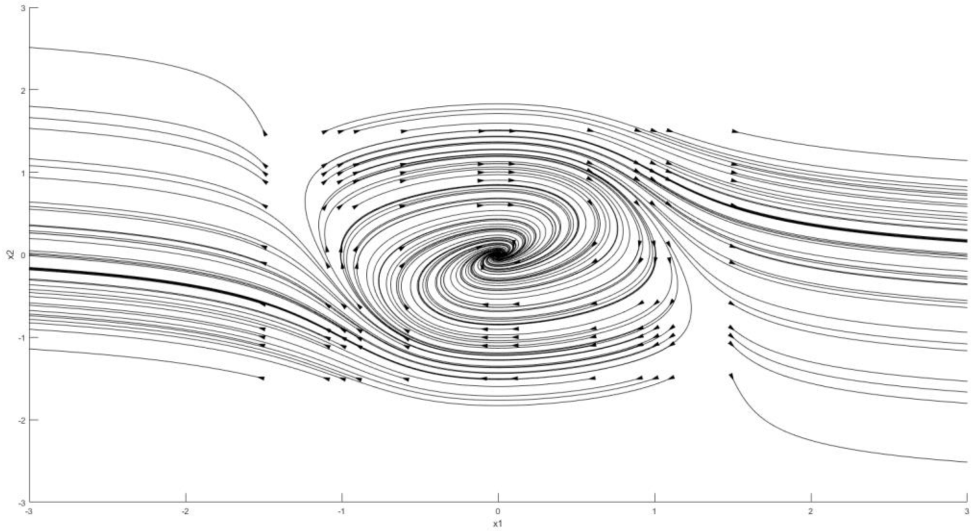
Podobnie jak w poprzednich systemach dla tego punktu wartość pochodnej funkcjonału Lapunowa na trajektoriach systemu jest równa zero. Zgodnie z II Twierdzeniem Lapunowa punkt ten jest stabilny (nie asymptotycznie). Na mocy twierdzenia La Salle'a możliwe jest jednak stwierdzenie stabilności asymptotycznej zerowego punktu równowagi. Spełnione są nierówności ostre dla punktów poza zerem, a więc punkt x = [0, 0] jest stabilny również asymptotycznie.

Ponad to dla tego układu wykonano schemat w Simulinku w celu nakreślenia trajektorii fazowych układu w zależności od różnych warunków początkowych. Schemat widoczny jest na rysunku 1.



Rysunek 1. Schemat w Simulinku dla trzeciego układu dynamicznego

Korzystając z kodu utworzonego na pierwszych laboratoriach wyrysowano trajektorię fazową znajdującą się na rysunku 2.



Rysunek 2. Trajektoria fazowa w zależności od różnych warunków początkowych

Na wykresie możemy zauważyć, że zarówno zero jest asymptotycznie stabilnym punktem równowagi jak również obszar jego przyciągania [-1, 1].

3. Wnioski

Dzięki temu ćwiczeniu zapoznałem się z wykorzystaniem dwóch twierdzeń:

- Twierdzenie Lapunowa
- Twierdzenie La Salle'a

Dzięki wykonaniu ćwiczenia mogłem zauważyć, że jeśli wykorzystywałbym tylko II twierdzenie Lapunowa to nie byłbym wstanie określić czy system jest asymptotycznie stabilny w punkcie równowagi x = 0, który występował w każdym z systemów. Aby móc stwierdzić czy system jest asymptotycznie stabilny wykorzystywałem metodę La Salle'a. Co za tym idzie metoda La Salle'a jest dobrym rozwinięciem II metody Lapunowa, dzięki której jesteśmy wstanie określać asymptotyczną stabilność. W trakcie ćwiczenia przypomniałem sobie także jak tworzyć proste modele w programie Simulink, oraz przypomniałem sobie jak rysować portrety fazowe, które uczyłem się rysować na pierwszych zajęciach.