Teoria Sterowania

Sprawozdanie – Systemy dyskretne

Jakub Szczypek, Automatyka i Robotyka, grupa 2

1. Cel ćwiczenia

Celem ćwiczenia było zapoznanie się z działaniem systemów dyskretnych oraz z wpływem dyskretyzacji na zachowanie układów ciągłych.

2. Przebieg ćwiczenia

W ramach ćwiczenia należało zrealizować trzy zadania znajdujące się na platformie Upel.

2.1 Zadanie 1

Należało zamodelować zadany system w pakiecie *Matlab/Simulink*:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$$

Na wejście systemu podłączyć ekstrapolator rzędu zerowego. Obliczyć macierze układu po dyskretyzacji z krokiem *h*. Przeanalizować zachowanie się układu dyskretno-ciągłego w zależności od *h*.

Macierze układu po dyskretyzacji można wyznaczyć zgodnie z poniższymi wzorami:

$$A^+ = e^{hA}$$

$$B^+ = \int_0^h e^{tA} B dt$$

$$C^+ = C$$

Wyznaczenie macierzy e^{hA} należy zacząć od wyznaczenia wartości własnych macierzy A, które wynoszą:

$$\lambda_1 = -1 \qquad \lambda_2 = -2$$

Macierz Jordana dla macierzy A ma postać:

$$J = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$

Następnie obliczono macierz modalną oraz odpowiednio do niej macierz odwrotną:

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \qquad T^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

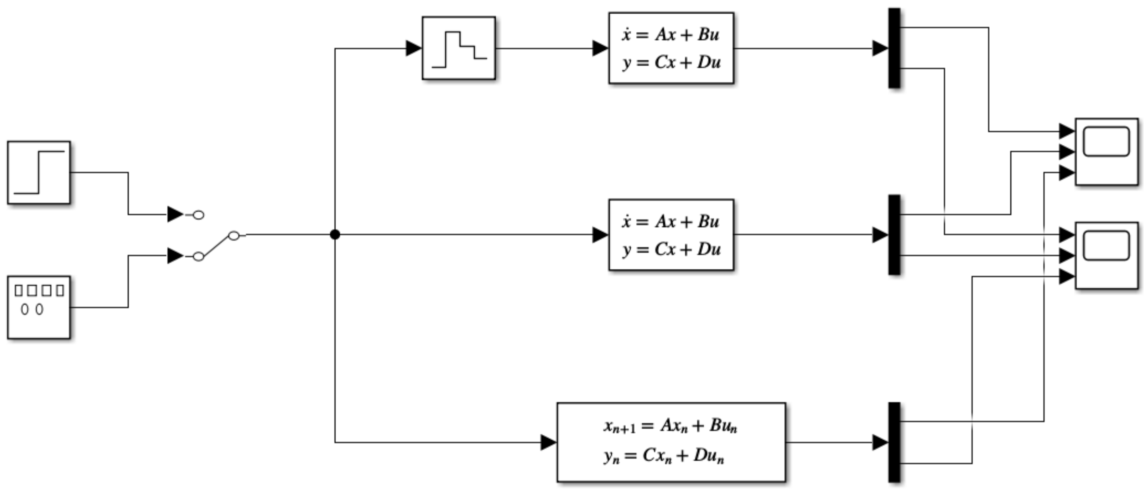
Korzystając z wcześniej przedstawionych wzorów na A^+, B^+, C^+wyznaczamy macierze układu po dyskretyzacji:

$$A^+ = e^{hA} = T \cdot e^{hJ} \cdot P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} e^{-h} & 0 \\ 0 & e^{-2h} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{-h} & e^{-h} - e^{-2h} \\ 0 & e^{-2h} \end{bmatrix}$$

$$B^+ = \int_0^h e^{tA} B dt = \int_0^h \begin{bmatrix} 3e^{-t} - 2e^{-2t} \\ 2e^{-2t} \end{bmatrix} dt = \begin{bmatrix} -3e^{-h} + e^{-2h} + 2 \\ -e^{-2h} + 1 \end{bmatrix}$$

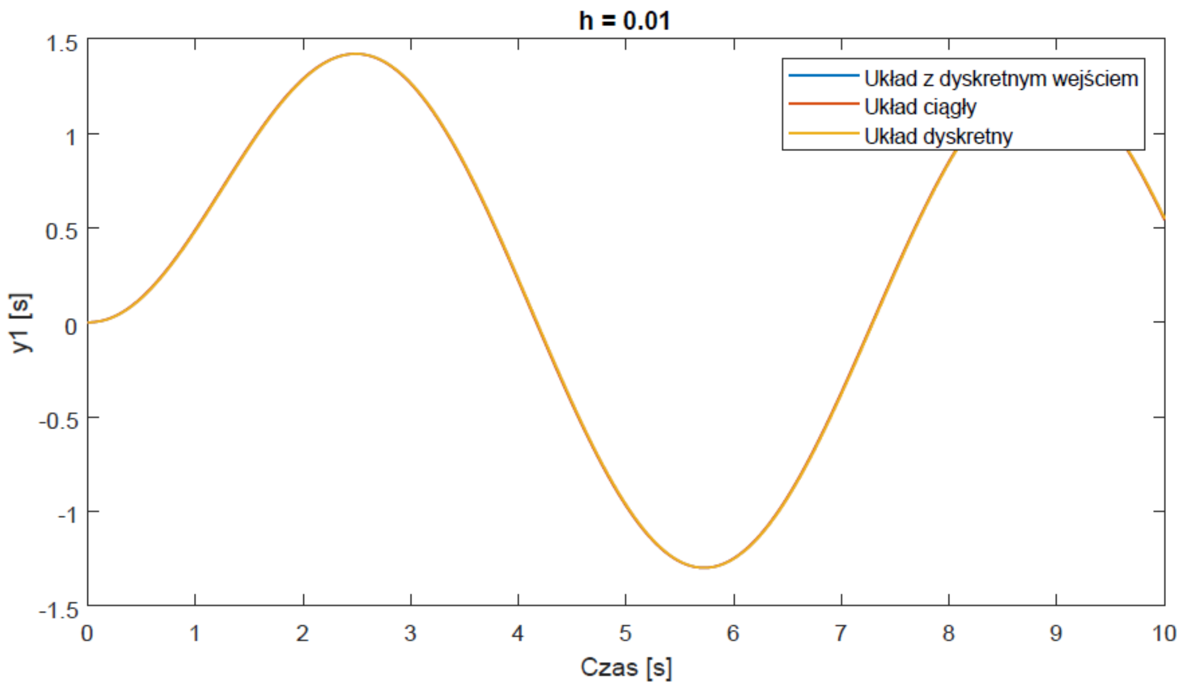
$$C^+ = C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Dla celów powyższego zadania utworzono model w *Simulinku*, w którym porównano trzy układy: ciągły, układ ze zdyskretyzowanym wejściem, oraz układ dyskretny. Model widoczny jest poniżej:

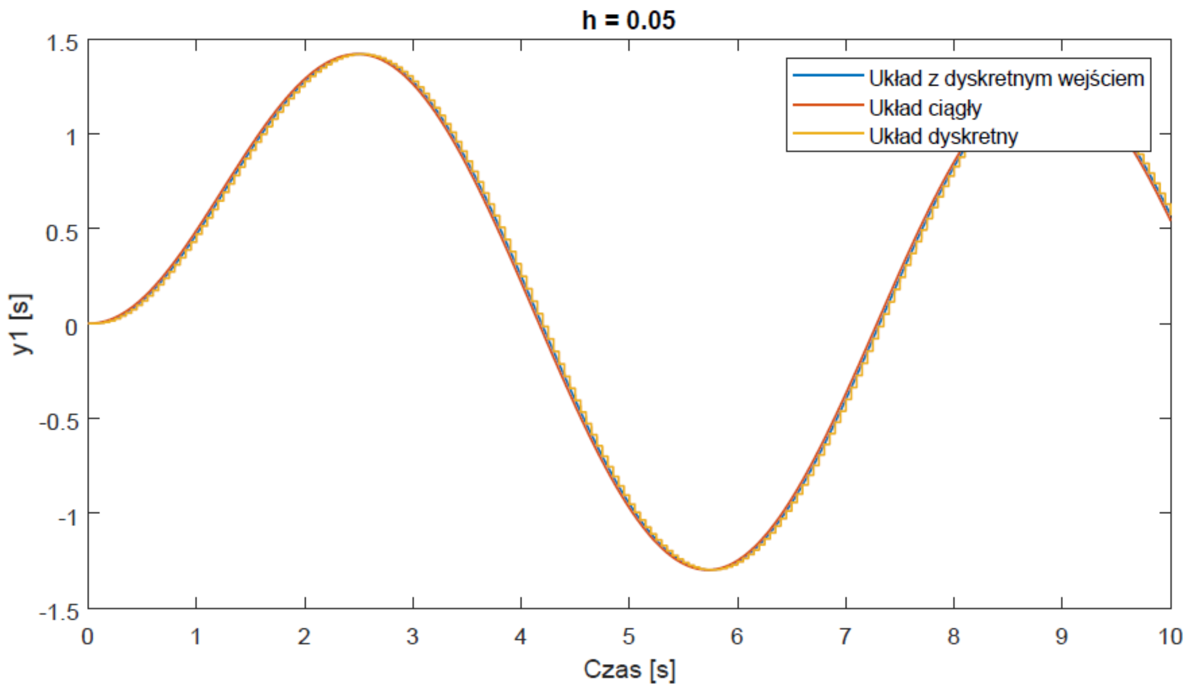


Rys 1. Model w programie Matlab/Simulink.

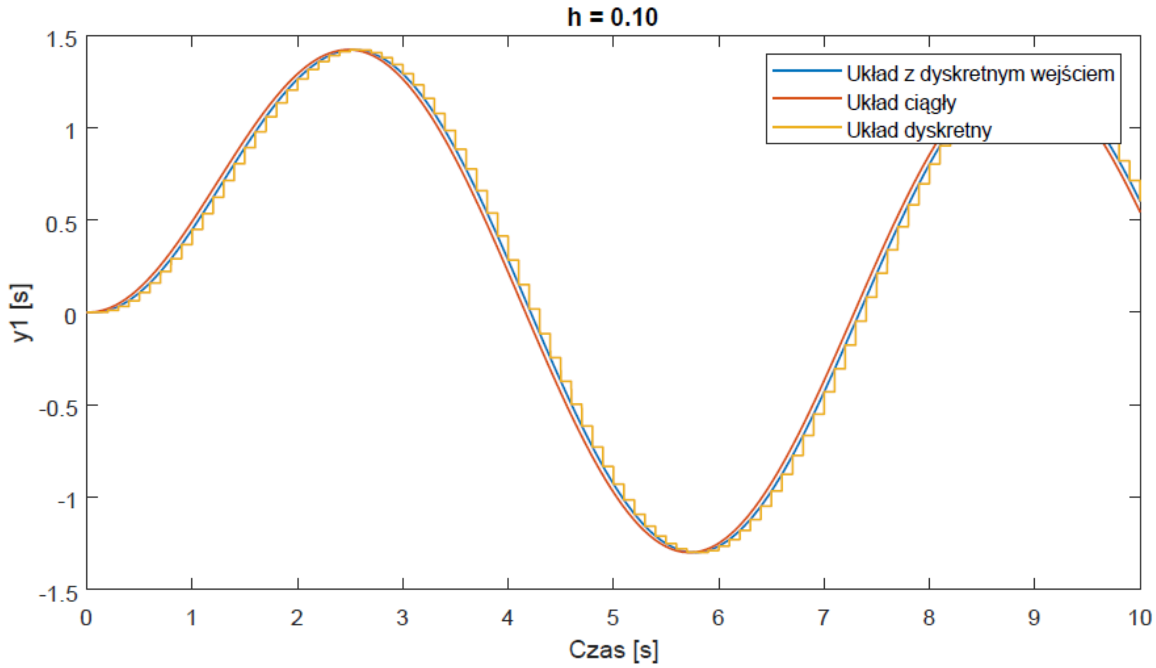
Po wpisaniu odpowiednich macierzy w bloki state space oraz discrete scate space utworzono skrypt w Matlabie, w którym zasymulowano odpowiedzi systemu dla różnych wartości h. Poniżej widoczne są wykresy przedstawiające jedną ze zmiennych wyjściowych (druga zachowuje się podobnie, różniąc się jedynie wartościami).



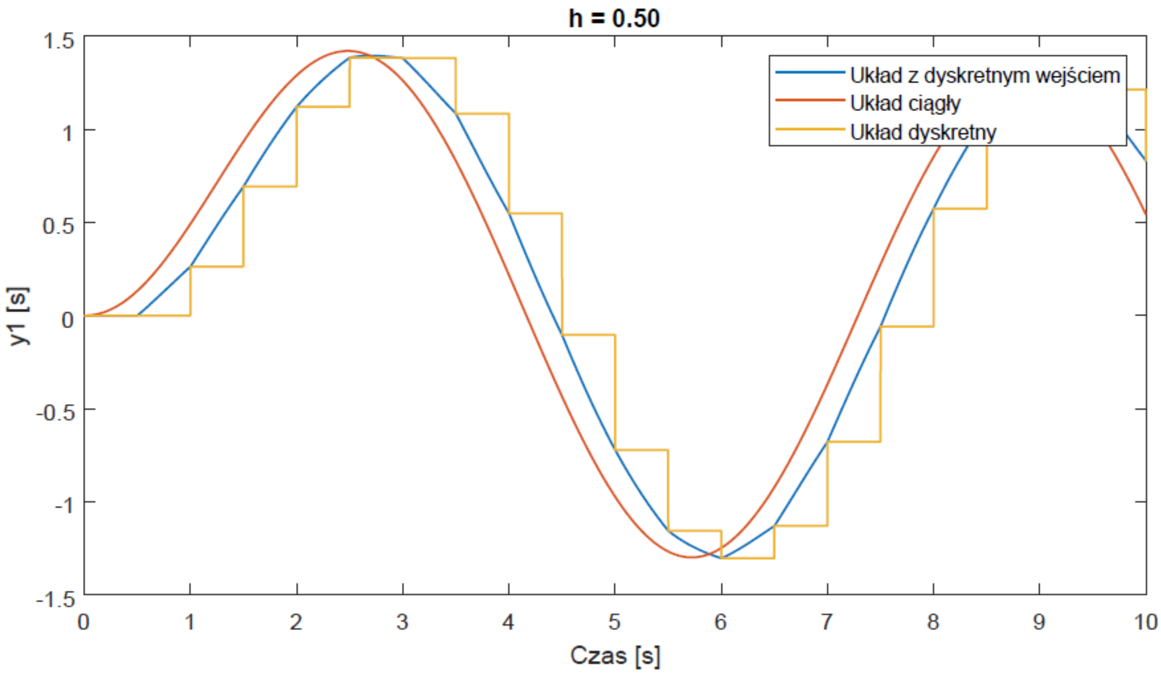
Rys 2. Odpowiedź układu dla h = 0.01.



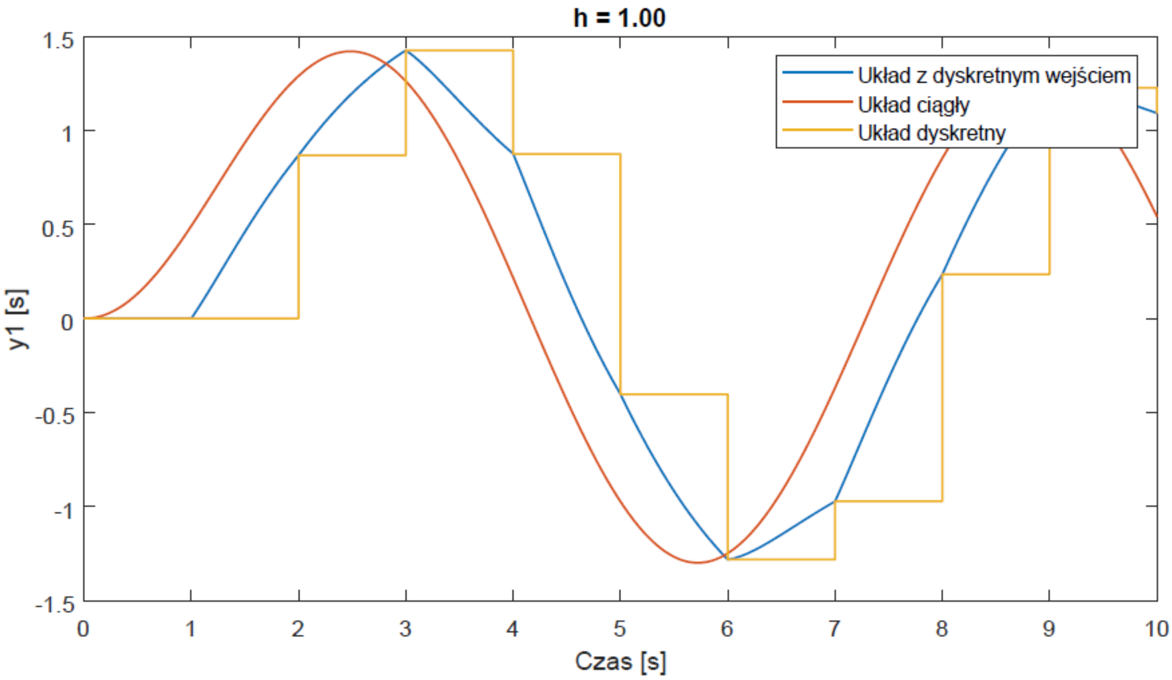
Rys 2. Odpowiedź układu dla h = 0.05



Rys 3. Odpowiedź układu dla h = 0.1.



Rys 4. Odpowiedź układu dla h = 0.5.



Rys 5. Odpowiedź układu dla h = 1.

2.2 Zadanie 2

W zadaniu drugim należało przeanalizować zachowanie się schematów różnicowych dla macierzy systemu ciągłego:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$

w zależności od wielkości h i porównać rozwiązania numeryczne z rozwiązaniem analitycznym układu ciągłego w czasie.

System przedstawiony z pomocą powyższej macierzy możemy zapisać w postaci:

$$\dot{x_1}(t) = -x_1(t)$$

$$\dot{x_2}(t) = -2x_2(t)$$

Rozwiązaniem tego układu są:

$$x_1(t) = e^{-t} \cdot x_1(0)$$

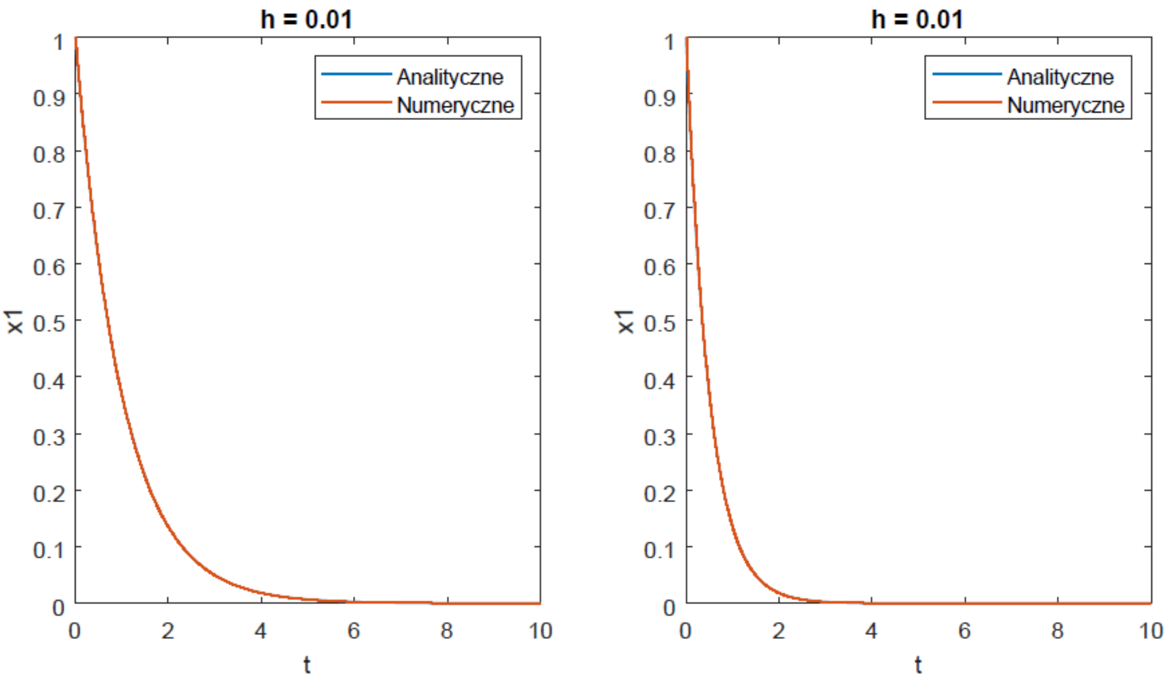
$$x_2(t) = e^{-2t} \cdot x_2(0)$$

Dla $x_1(0) = x_2(0) = 1$:

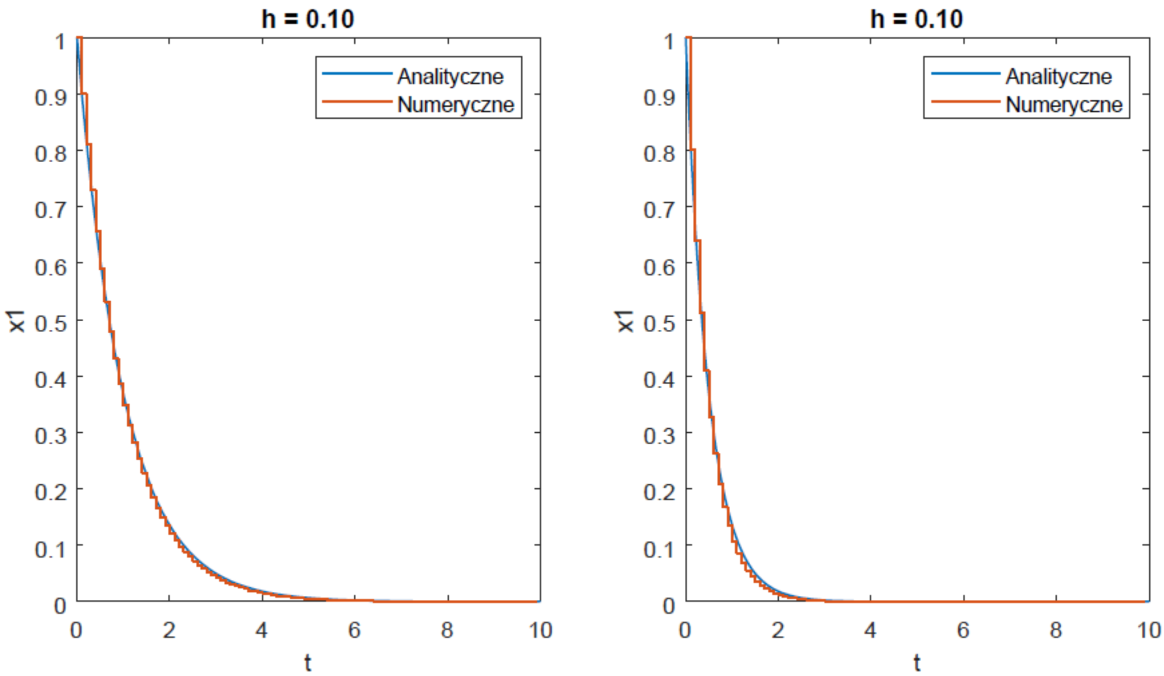
$$x_1(t) = e^{-t}$$

$$x_2(t) = e^{-2t}$$

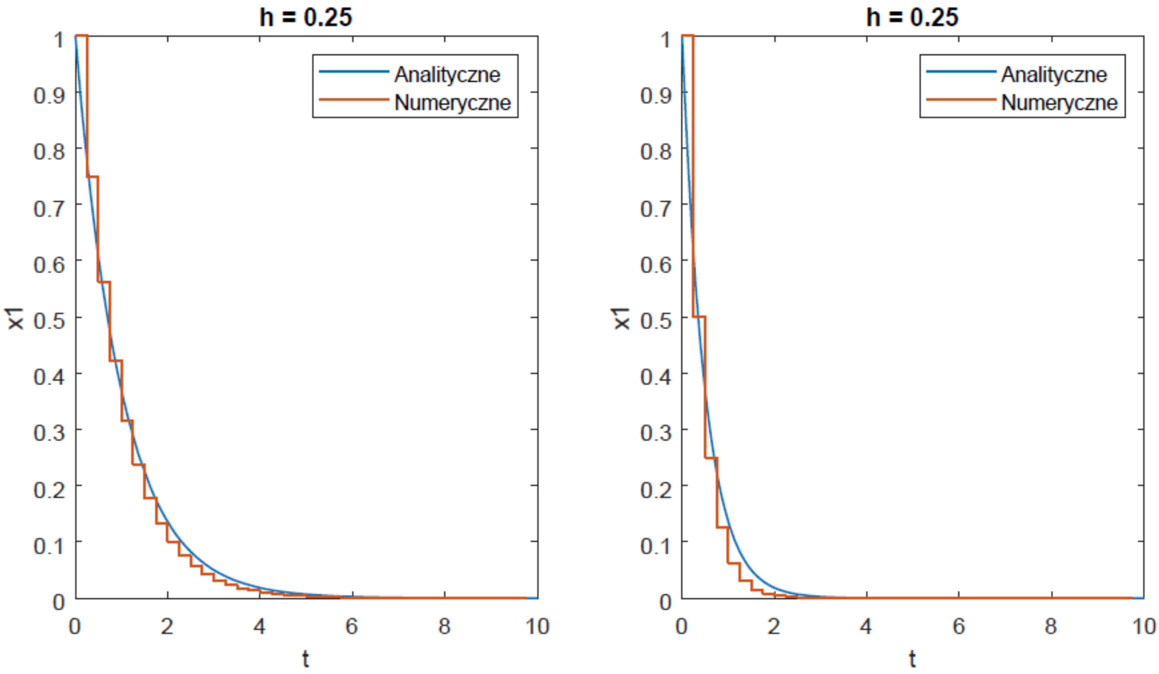
Dla tego schematu różnicowego utworzono skrypt w Matlabie, w którym za pomocą metody Eulera z krokiem w przód rozwiązano go. Poniżej widoczne są wykresy otrzymanych wartości w zależności od kroku h (dla porównania dodano również przebieg funkcji wyznaczonej analitycznie).



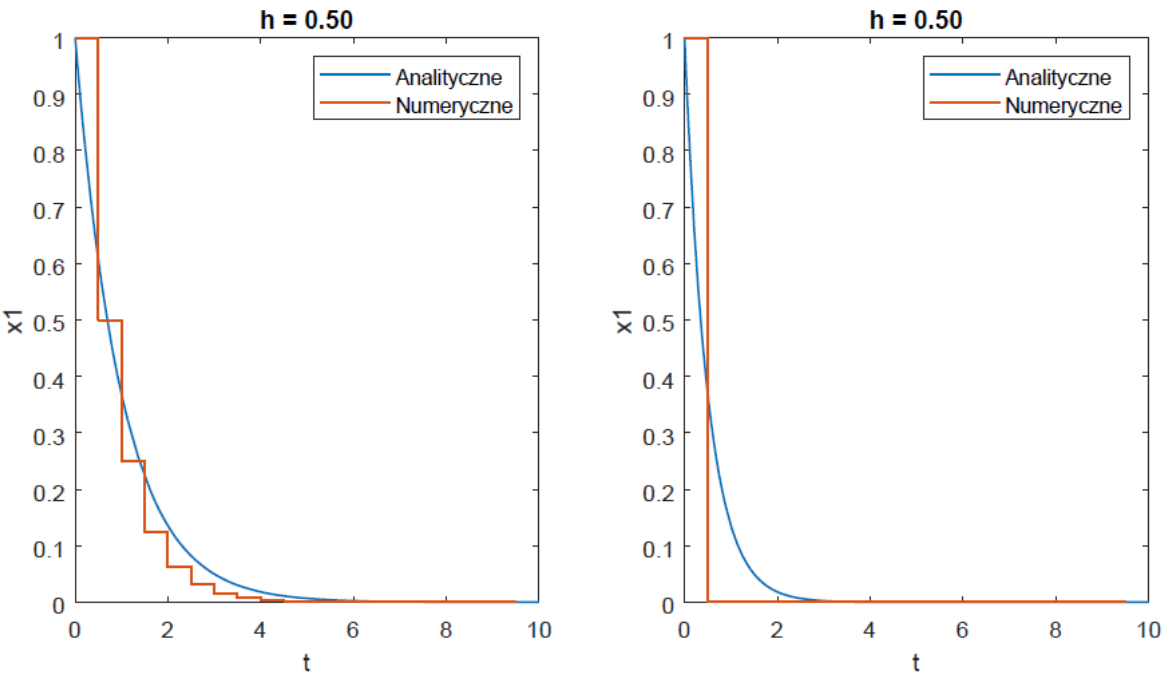
Rys 5. Porównanie metody Eulera z krokiem w przód z metodą analityczną dla h = 0.01.



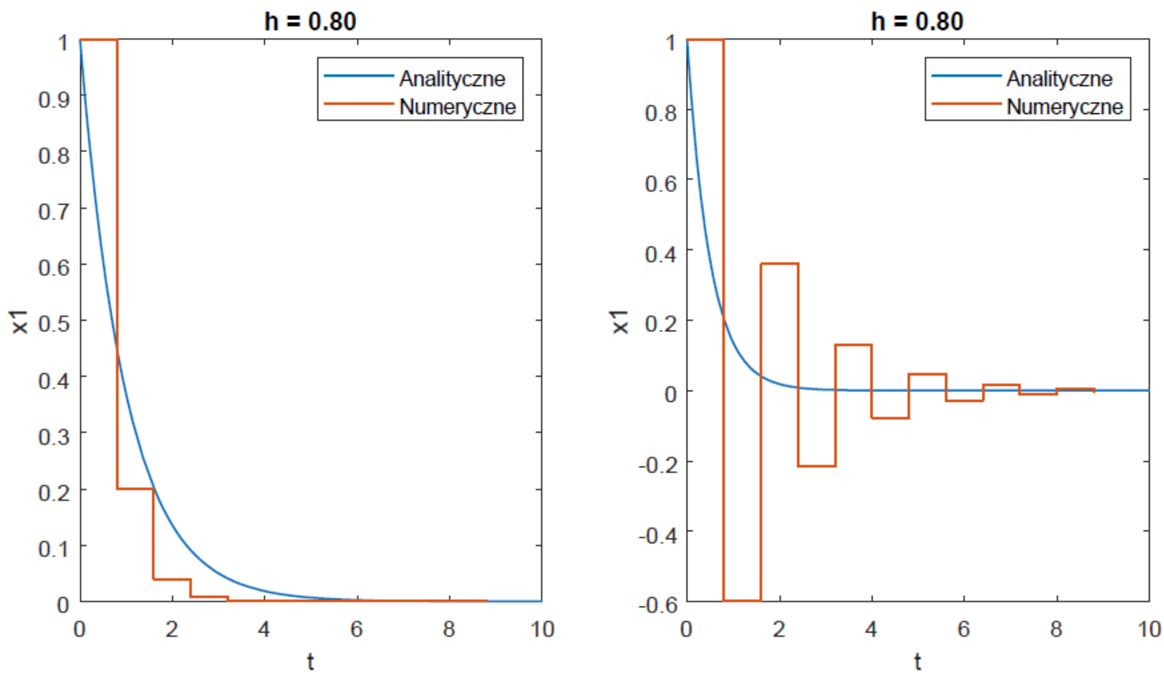
Rys 6. Porównanie metody Eulera z krokiem w przód z metodą analityczną dla h = 0.1.



Rys 7. Porównanie metody Eulera z krokiem w przód z metodą analityczną dla h = 0.25.



Rys 8. Porównanie metody Eulera z krokiem w przód z metodą analityczną dla h = 0.5.



Rys 9. Porównanie metody Eulera z krokiem w przód z metodą analityczną dla h = 0.8.

Na powyższych wykresach można zauważyć, że dla mniejszego kroku obliczenia są znacznie bliższe wartości wyznaczonej analitycznie.

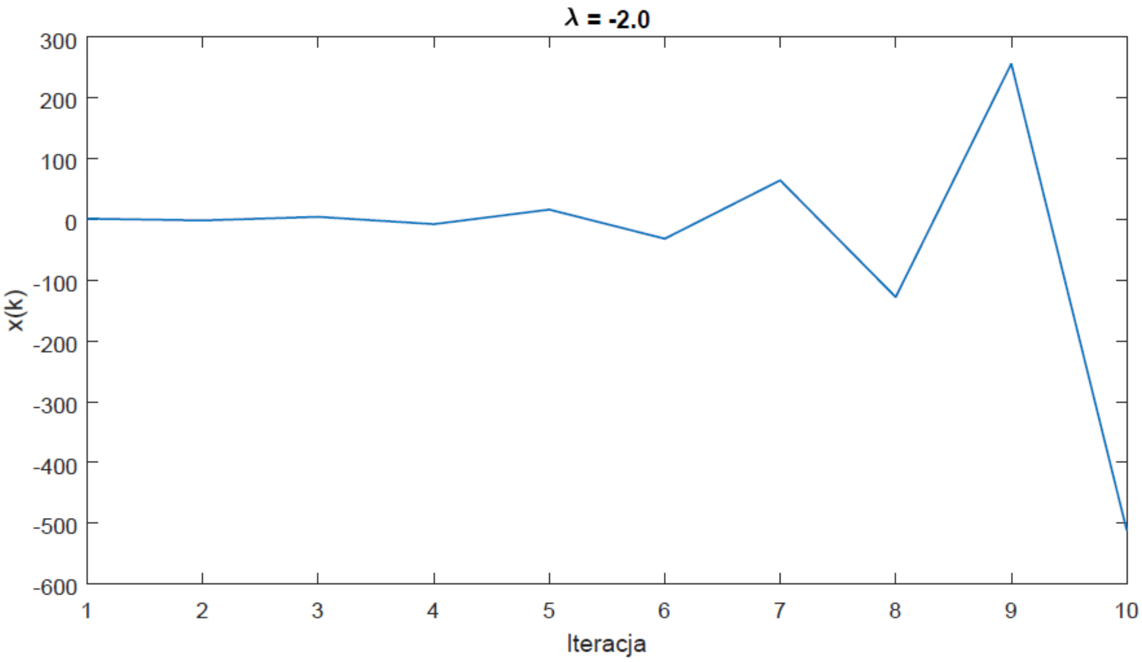
2.3 Zadanie 3

W zadaniu trzecim należało przeanalizować zachowanie się następującego systemu dyskretnego:

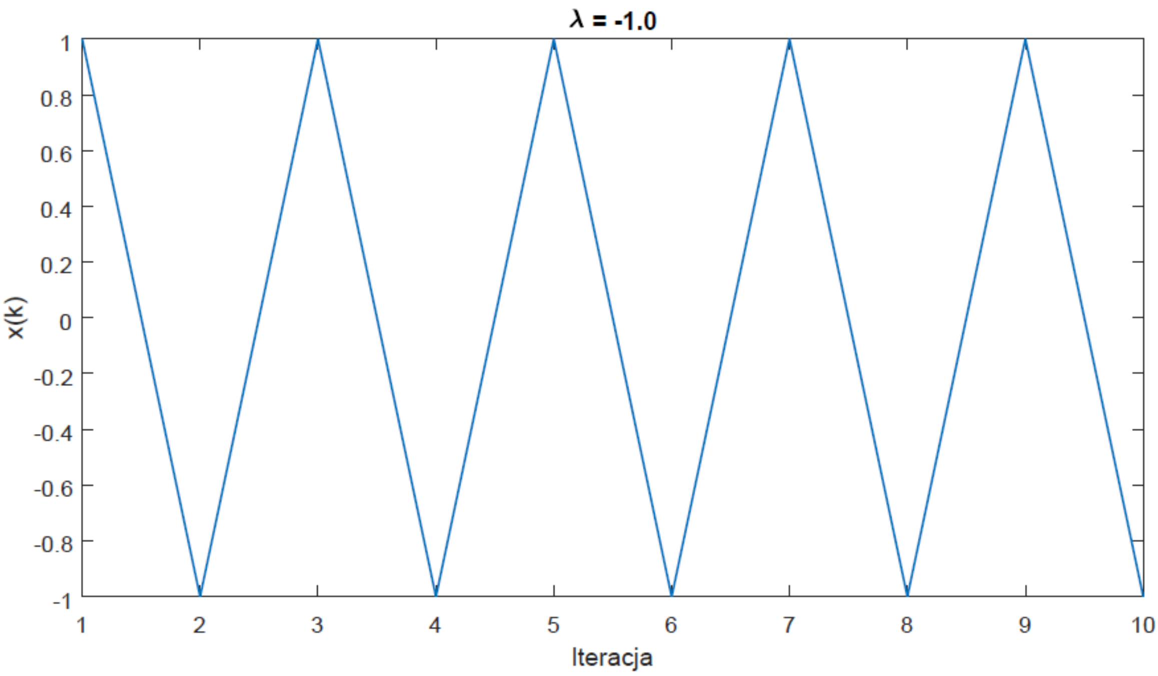
$$x(k+1) = \lambda x(k)$$

dla k = 0, 1, 2, … w zależności od parametru λ.

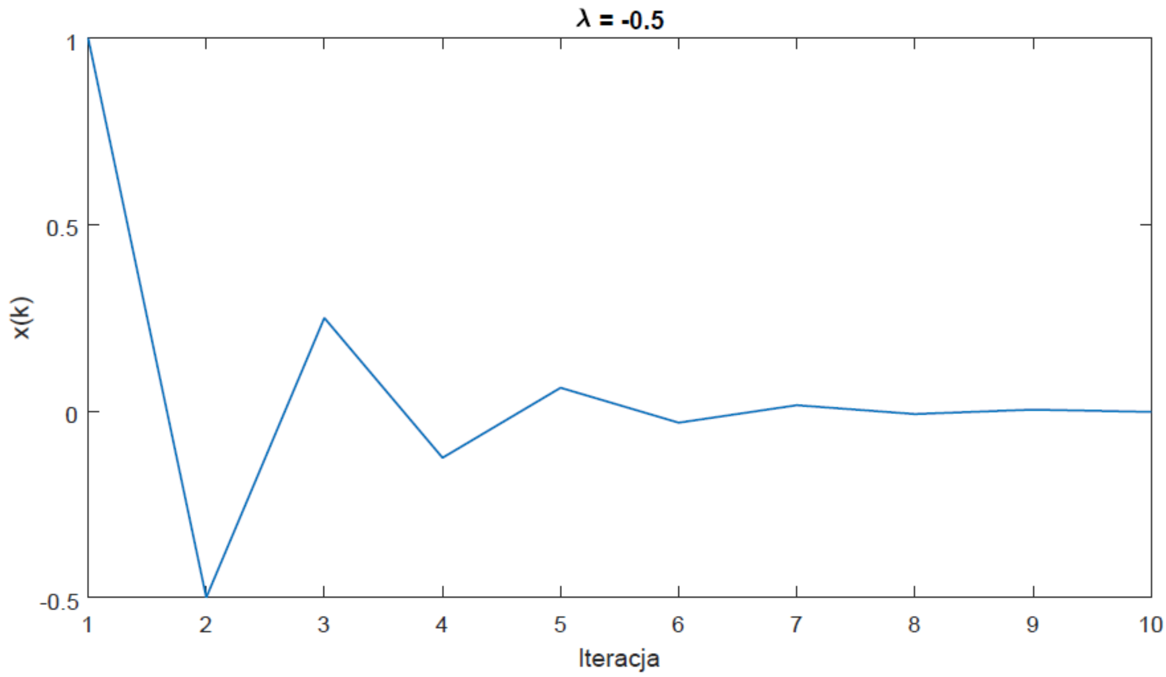
Utworzono skrypt w Matlabie, w którym przeprowadzono obliczenia dla różnych wartości lambda. Wykresy wartości x(k) w kolejnych iteracjach widoczne są poniżej.



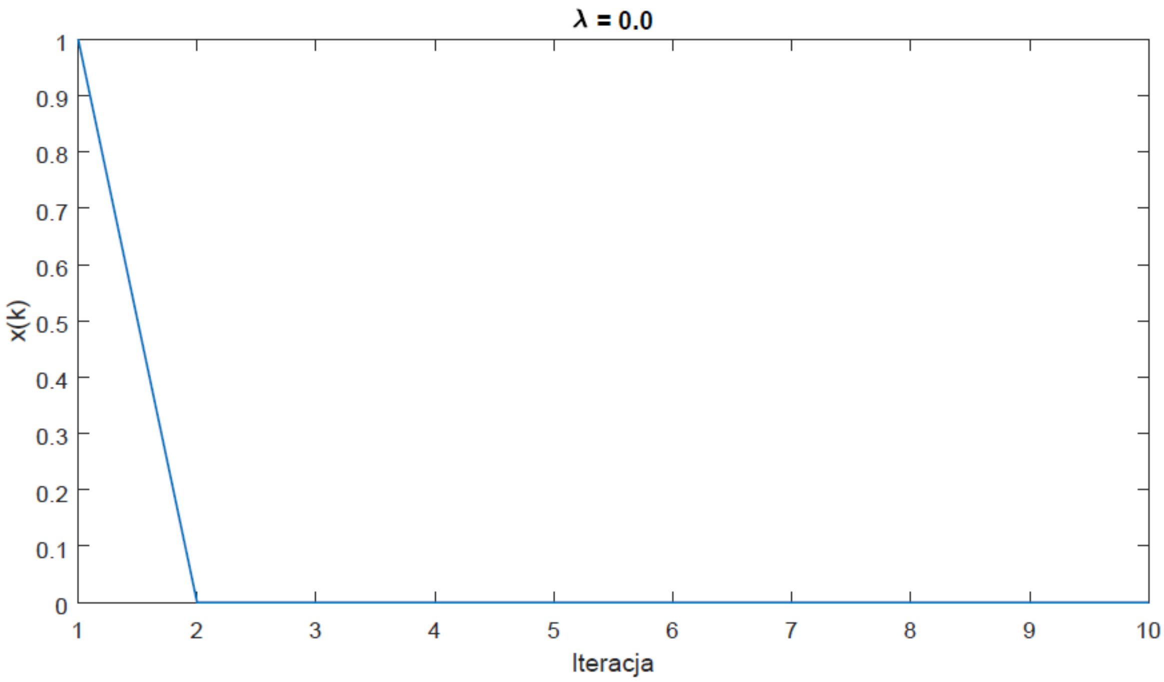
Rys 10. Wykres x(k) dla lambda = -2.



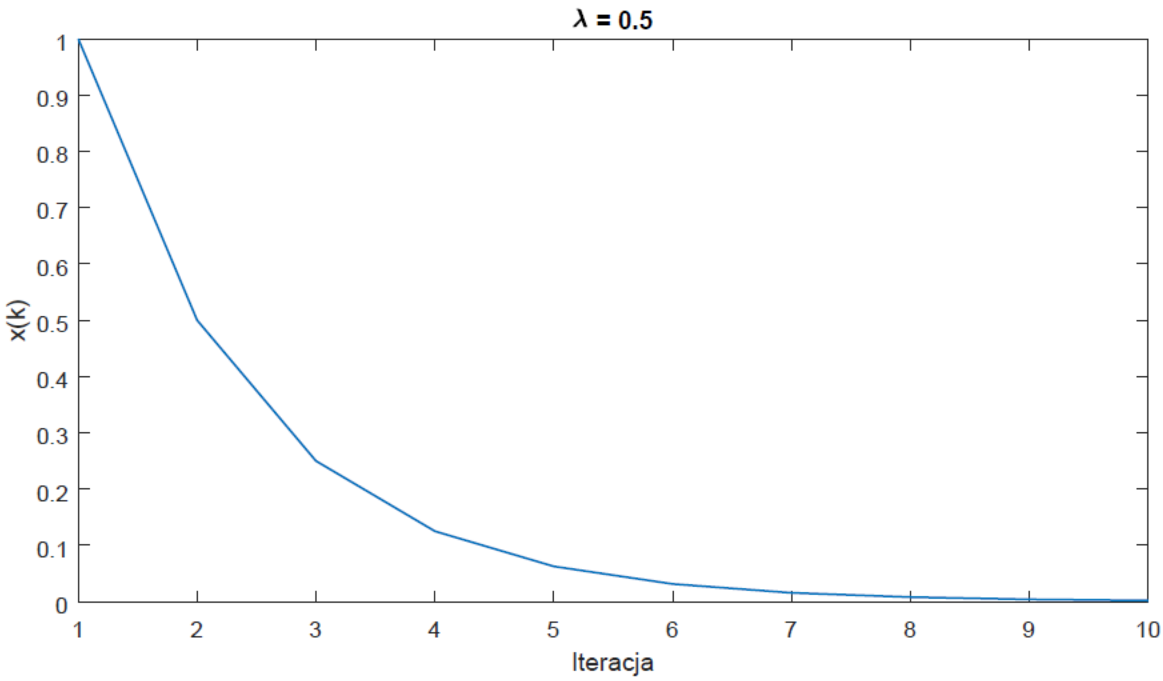
Rys 11. Wykres x(k) dla lambda = -1.



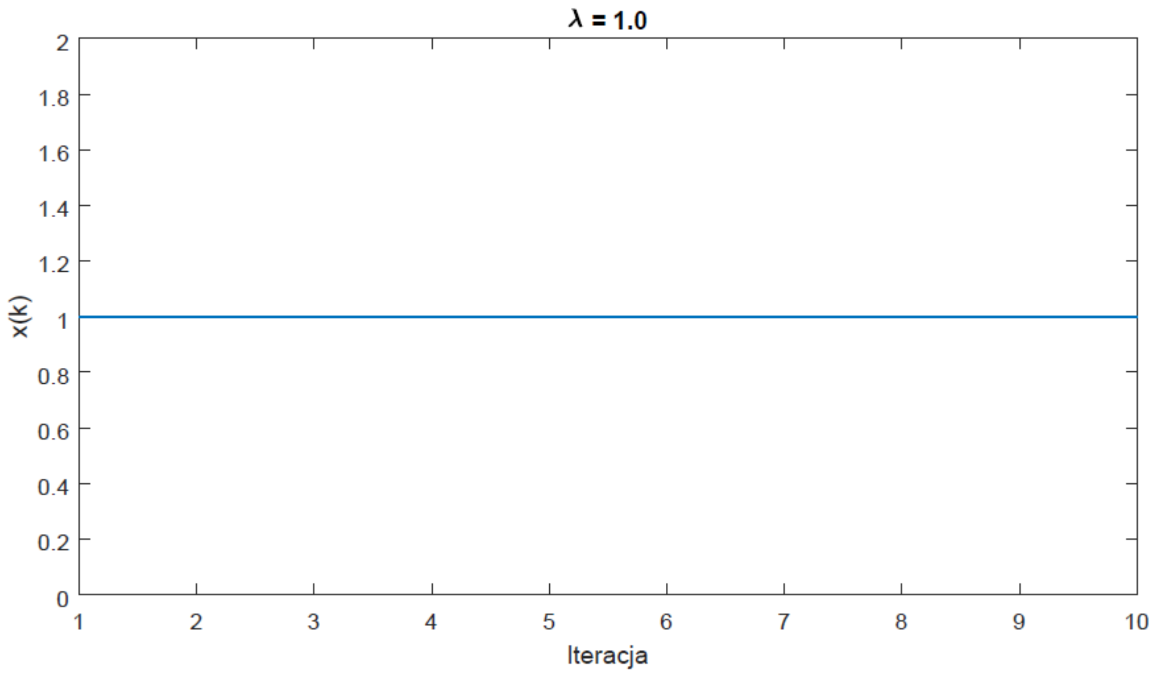
Rys 12. Wykres x(k) dla lambda = -0.5.



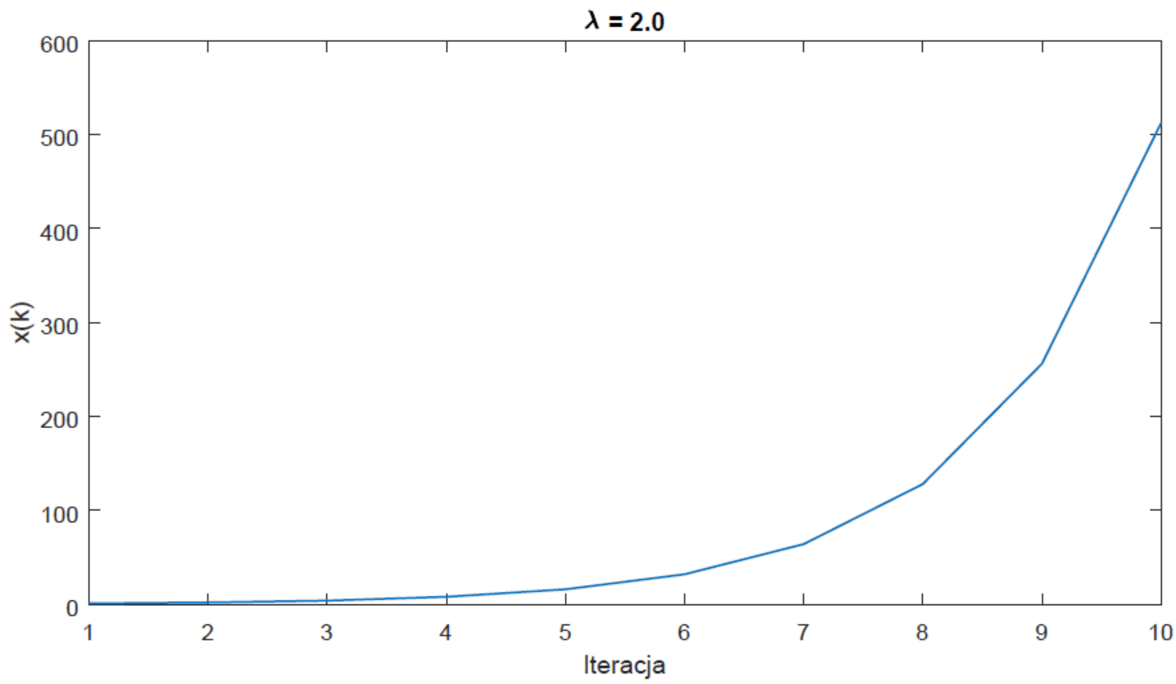
Rys 13. Wykres x(k) dla lambda = 0.



Rys 14. Wykres x(k) dla lambda = 0.5.



Rys 15. Wykres x(k) dla lambda = 1.



Rys 16. Wykres x(k) dla lambda = 2.

Na podstawie analizy powyższych wykresów można wywnioskować, układ jest stabilny asymptotycznie dla wartości λ w przedziale (-1, 1], stabilny dla samej λ równej 1, oraz że jest on niestabilny dla pozostałych wielkości λ.

3. Wnioski

Dzięki wykonaniu ćwiczenia zapoznałem się z działaniem systemów dyskretnych oraz z wpływem dyskretyzacji na zachowanie układów ciągłych. Dowiedziałem się także, że dyskretyzacja systemu ciągłego zawsze wpływa na utratę informacji. Możemy kontrolować tą stratę jedynie poprzez zmianę okresu próbkowania – im niższy okres próbkowania, tym dokładniej odwzorowany zostanie przebieg w czasie systemu ciągłego. Niesamowicie ważną wiedzą dotyczącą próbkowania jest twierdzenie o próbkowaniu, dzięki któremu możemy ustrzec się przed zjawiskiem aliasingu, które powoduje, że dyskretyzowany sygnał zniekształca się w sposób nieodwracalny i niepozwalający go poprawnie zinterpretować (wynika to ze zbyt znacznej utraty informacji, gdy częstotliwość próbkowania jest mniejsza niż dwukrotność najwyższej z częstotliwości próbkowanych sygnałów). Dowiedziałem się także, że do badania stabilności układów dyskretnych można stosować kryteria Hurwitza oraz Routha, jednak należy pamiętać o zastosowaniu przekształcenia biliniowego, które w sposób jednoznaczny odwzorowuje lewą półpłaszczyznę zespoloną we wnętrze koła jednostkowego. Stabilność układów dyskretnych można również badać przy pomocy kryterium Schura-Couha oraz Jury'ego. Jak możemy zauważyć wykonanie ćwiczenia pozwoliło mi znacznie poszerzyć swoją wiedzę z zakresu działania systemów dyskretnych oraz pozwoliło mi na wyciągnięcie powyższych wniosków, które uważam za bardzo wartościowe i mam nadzieję, że zdobytą wiedzę będę wstanie wykorzystać w przyszłości.