Teoria Sterowania

Sprawozdanie – Kryterium koła i twierdzenie Popova

Jakub Szczypek, Automatyka i Robotyka, grupa 2

1. Cel ćwiczenia

Celem ćwiczenia było wyznaczenie największego dopuszczalnego sektora w kryterium koła oraz sektor Popova dla układu regulacji z ujemnym sprzężeniem zwrotnym. Transmitancja obiektu regulacji dana jest wzorem:

$$G(s) = \frac{4(1-5s)}{(1+3s)(1+2s)}$$

regulator opisany jest pewną funkcją nieliniową.

2. Kryterium koła

Korzystając z graficznej interpretacji nierówności częstotliwościowej dla kryterium koła jesteśmy wstanie oznaczyć część rzeczywistą transmitancji widmowej $G(j\omega)$ przez P, zaś część urojoną przez Q (pomijając także dla wygody zapis argumentu ω), to nasza nierówność częstotliwościowa przybiera postać:

$$Re([1 - m_1P - jm_1Q][1 - m_2P - jm_2Q]*) > 0$$

W wyniku kolejnych przekształceń otrzymujemy obszar spełniający nierówność:

$$1 - (m_1 + m_2)P + m_1m_2(P^2 + Q^2) > 0$$

Powyższa nierówność musi obejmować charakterystykę częstotliwościową obiektu regulacji.

Transmitancję naszego obiektu możemy zapisać w formie:

$$G(s) = \frac{-20s + 4}{6s^2 + 5s + 1}$$

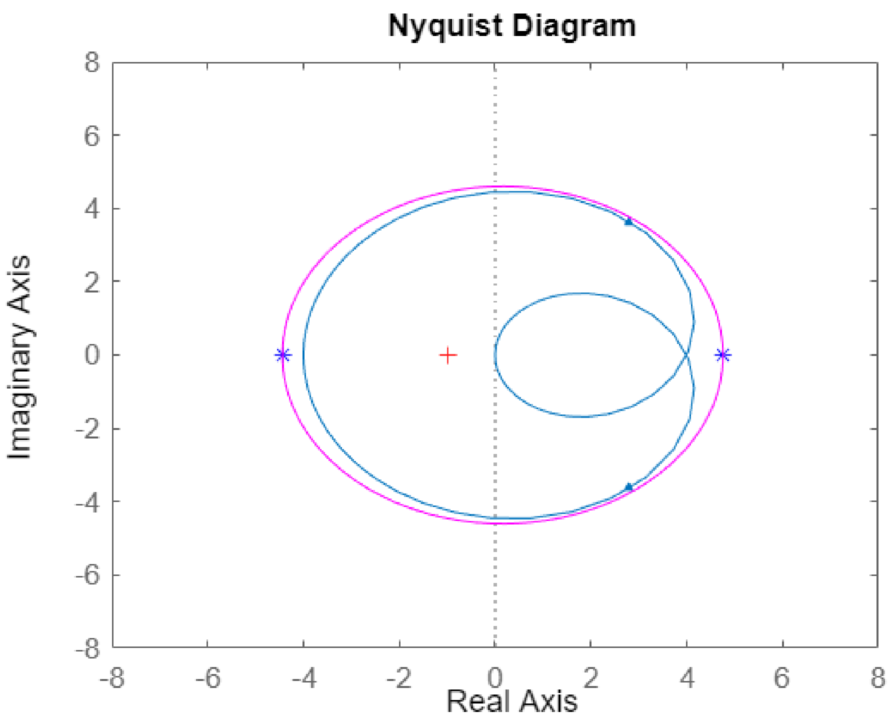
Nasze zadanie sprowadza się do stworzenia charakterystyki amplitudowo-fazowej dla opisanej transmitancji dla wartości $\omega \geq 0$. W celu osiągnięcia tego rezultatu skorzystano z wbudowanej funkcji *nyquist* w Matlabie uwzględniając przy tym sprzężenie zwrotne. Kryterium koła polega na odnalezieniu takich wartości m_1, m_2 dla powyżej przedstawionej nierówności. Parametry te dobrano eksperymentalnie i ostatecznie wynoszą $m_1 = -0.255$ oraz $m_2 = 0.21$. Poniżej na rysunku 1 przedstawiam kod dzięki któremu byłem wstanie wygenerować wykres nyquista.

```
clear all;
close all;

L = [20 -4];
M = [6 5 1];
[A, b, c] = tf2ss(L,M);
[P, Q, w] = nyquist(L, M);
m1 = -0.225;
m2 = 0.21;

syms X Y
F = @(X,Y) 1-(m1+m2)*X+m1*m2*(X.^2+Y.^2);
WYNIK = eig(A)
figure(1)
nyquist(L, M);
hold on
plot(1/m1, 0, 'b*');
plot(1/m2, 0, 'b*');
fcontour(F, 'm', 'LevelList', 0);
axis([-8 8 -8 8]);
```

Rys. 1 Kod służący do wyrysowania wykresu na rysunku 2.



Rys. 2 Charakterystyka amplitudowo-fazowa (kolor niebieski) oraz wyrysowany sektor (kolor fioletowy).

Na wykresie oznaczono niebieską gwiazdką punkty $\frac{1}{m_1}$ oraz $\frac{1}{m_2}$. Wykres ukazuje że wszystkie założone kryteria zostały spełnione, więc znalezione parametry wyznaczają - w odpowiedniej dokładności – sektor dopuszczalny w kryterium koła.

3. Twierdzenie Popova

W drugiej części zadania koniecznym było wykorzystanie twierdzenia Popova. Pierwszym krokiem było sprawdzenie czy macierz A jest asymptotycznie stabilna. Do wykonania tej części zmodyfikowano kod z twierdzenia koła. Koniecznym okazało się użycie transmitancji zmodyfikowanej $\overline{G(j\omega)} = \overline{P(\omega)} + j\overline{Q(\omega)}$, gdzie $\overline{P(\omega)} = P(\omega)$, natomiast $\overline{Q(\omega)} = \omega Q(\omega)$. Kolejno zajęto się narysowaniem prostej Popova, która przecina półoś OP jak najbliżej punktu 0. Wyznaczone równanie prostej, gdzie m to parametr wyznaczony eksperymentalnie, określający sektor Popova:

$$\overline{P(\omega)} + q\overline{Q(\omega)} < \frac{1}{m}$$

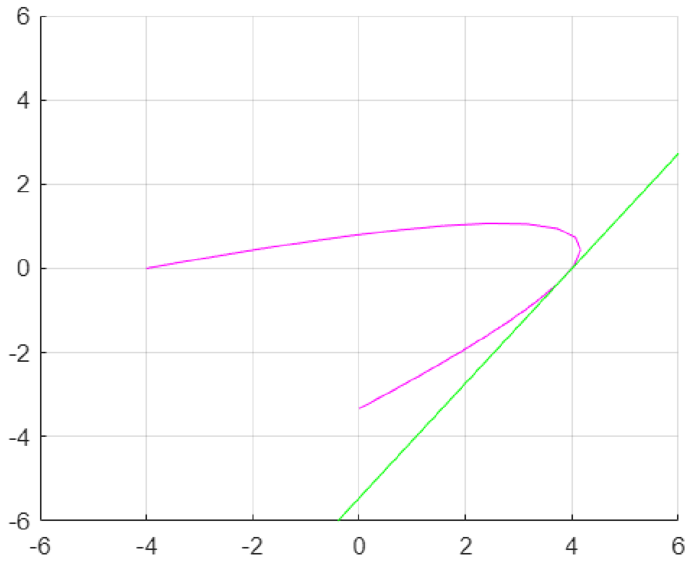
Poniżej na rysunku 3 przedstawiam kod dzięki któremu byłem wstanie wygenerować wykres charakterystykę amplitudowo-fazową dla zmodyfikowanej transmitancji.

```
clear all;
close all;

L = [20 -4];
M = [6 5 1];
[A, b, c] = tf2ss(L,M);
WYNIK = eig(A);
[P, Q, w] = nyquist(L, M);
Q = w.*Q;

syms X Y
x1 = 4;
y1 = 0;
x2 = 3.726;
y2 = -0.3737;
q = (x1-x2)/(y1-y2);
m = 0.25;
F = X - q.*Y;
figure(1)
hold on
grid
plot(P, Q, 'm');
fcontour(F, 'g', 'LevelList', 1/m);
axis([-6 6 -6 6]);
```

Rys. 3 Kod służący do wyrysowania wykresu na rysunku 4.



Rysunek 2. Charakterystyka amplitudowo-fazowa dla zmodyfikowanej transmitancji (kolor różowy) oraz otrzymana prosta dla kryterium Popova (kolor zielony).

4. Wnioski

Wykonanie ćwiczenia pozwoliło mi zapoznać się z kryterium koła oraz twierdzeniem Popova. Kryterium koła oraz twierdzenie Popova znajdują zastosowanie przy badaniu stabilności nieliniowych układów dynamicznych, w skład których wchodzi stacjonarny, liniowy system dynamiczny SISO objęty niestacjonarnym, nieliniowym sprzężeniem zwrotnym. Pewnym utrudnieniem w zastosowaniu twierdzenia Popova jest fakt, iż jedną z prostych ograniczających sektor Popova jest oś Oy, co zawęża klasę regulatorów opisanych funkcją f. Zarówno sektor Popova, jak i sektor dopuszczalny w kryterium koła są jedynie podzbiorami zbioru wartości parametrów, dla których rozpatrywany układ jest stabilny. W przypadku rozpatrywania układu o ujemnej pętli sprzężenia zwrotnego, korzystając z twierdzenia koła należy pamiętać o włączeniu znaku „minus” do transmitancji układu. Używając powyższych twierdzeń należy pamiętać o sprawdzeniu wszystkich warunków wykorzystywanych kryteriów. Jak więc możemy zauważyć wykonanie powyższego ćwiczenia doprowadziło mnie do wysunięcia kilku interesujących wniosków.