Teoria Sterowania

Sprawozdanie – Pierwsza Metoda Lapunowa

Jakub Szczypek, Automatyka i Robotyka, grupa 2

1. Wstęp

Celem ćwiczenia jest zapoznanie się z:

- Trajektoriami stanu i trajektoriami fazowymi stanu systemu dynamicznego
- Stabilnością trajektorii stanu systemu dynamicznego w sensie Lapunowa
- Punktami równowagi systemu dynamicznego
- Linearyzacją równania nieliniowego w otoczeniu punktu równowagi
- Badaniem stabilności punktu równowagi przy użyciu pierwszej metody Lapunowa
- Określeniem przewidywanego charakteru trajektorii fazowych układu nieliniowego na podstawie znajomości trajektorii jego liniowego przybliżenia.

2. Przebieg ćwiczenia

W ramach ćwiczenia trzeba zbadać stabilność punktów równowagi dla 3 następujących układów nieliniowych:

1. Równanie ruchu wahadła tłumionego:

$$\ddot{y}(t) = \frac{g}{l} siny(t) + \frac{c}{lm}\dot{y}(t) = 0$$

gdzie g jest współczynnikiem przyśpieszenia ziemskiego, m i l to odpowiednio masa i długość wahadła, zaś c jest współczynnikiem tłumienia. Zmienna y oznacza kąt wychylenia wahadła z położenia równowagi trwałej.

2. Układ równań Van der Pola:

$$\dot{x}_1(t) = x_2(t) - x_1^3(t) - ax_1(t)$$
$$\dot{x_2}(t) = -x_1(t)$$

dla a=1 oraz a=2

3. Układ równań:

$$\dot{x_1}(t) = x_1(t)x_2(t) - x_1^2(t)$$
$$\dot{x_2}(t) = x_1^2(t)x_2(t) - x_2^2(t)$$

Przystąpiono do rozwiązywania 1 zadania. System równowagi opisałem następującymi równaniami stanu:

$$\begin{cases} \dot{y}_1(t) = y_2(t) \\ \dot{y}_2(t) = -\frac{g}{l}\sin\big(y(t)\big) - \frac{c}{lm} y_2(t) \end{cases}$$

Określiłem punkt równowagi jako $y^* = [k\pi, 0]^T$.

Wartości własne macierzy będą różnić się w zależności od tego, czy k jest parzyste czy nieparzyste. Napisałem następujący skrypt w Matlabie, dzięki czemu określiłem macierz stanu i jej wartości własne. Skrypt znajduje się na rysunku 1.

```
syms g l c m y1 y2
f = [y2; -g/l*sin(y1) - c/(l*m)*y2];
A = [diff(f(1), y1), diff(f(1), y2); diff(f(2), y1), diff(f(2), y2)]

A_even = subs(A, [y1 y2], [2*pi 0])
A_odd = subs(A, [y1 y2], [pi 0])

l = 1;
g = 1;
c = 1;
m = 1;
```

```
A_even = [0 1; -g/l, -c/(l*m)]
A_odd = [0 1; g/l, -c/(l*m)]
[eigenvalues_even] = eig(A_even)
[eigenvalues_odd] = eig(A_odd)
```

Rys 1. Kod służący do wyliczenia macierzy stanu i wartości własnych

Dla k parzystego uzyskałem:

```
A_even =
```

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{g}{l} & -\frac{c}{l\,m} \end{pmatrix}$$

```
A_even = 2×2
     0     1
    -1    -1
```

```
eigenvalues_even = 2×1 complex
   -0.5000 + 0.8660i
   -0.5000 - 0.8660i
```

Część rzeczywista wartości własnych jest ujemna, zatem punkt równowagi nieliniowego systemu jest asymptotycznie stabilny.

Dla k nieparzystego uzyskałem:

```
A_odd =
```

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{g}{l} & -\frac{c}{l\,m} \end{pmatrix}$$

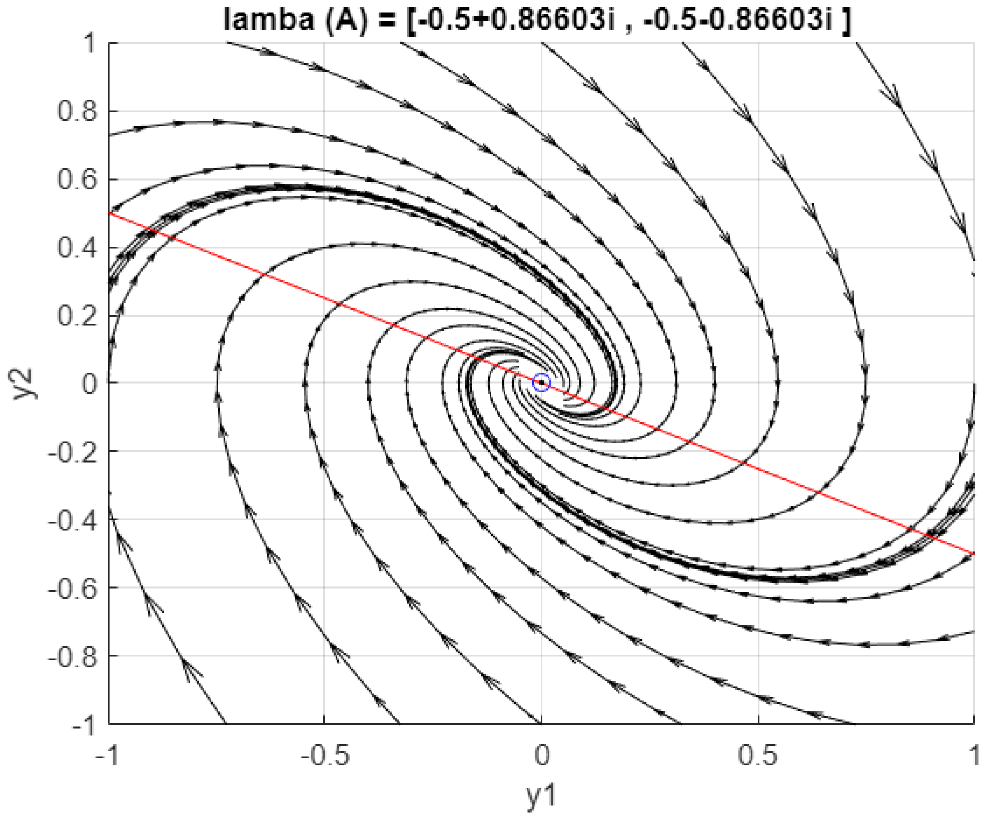
```
A_odd = 2×2
     0     1
     1    -1

eigenvalues_odd = 2×1
   -1.6180
    0.6180
```

Część rzeczywista wartości własnych jest różnych znaków zatem punkt równowagi nieliniowego systemu nie jest stabilny.

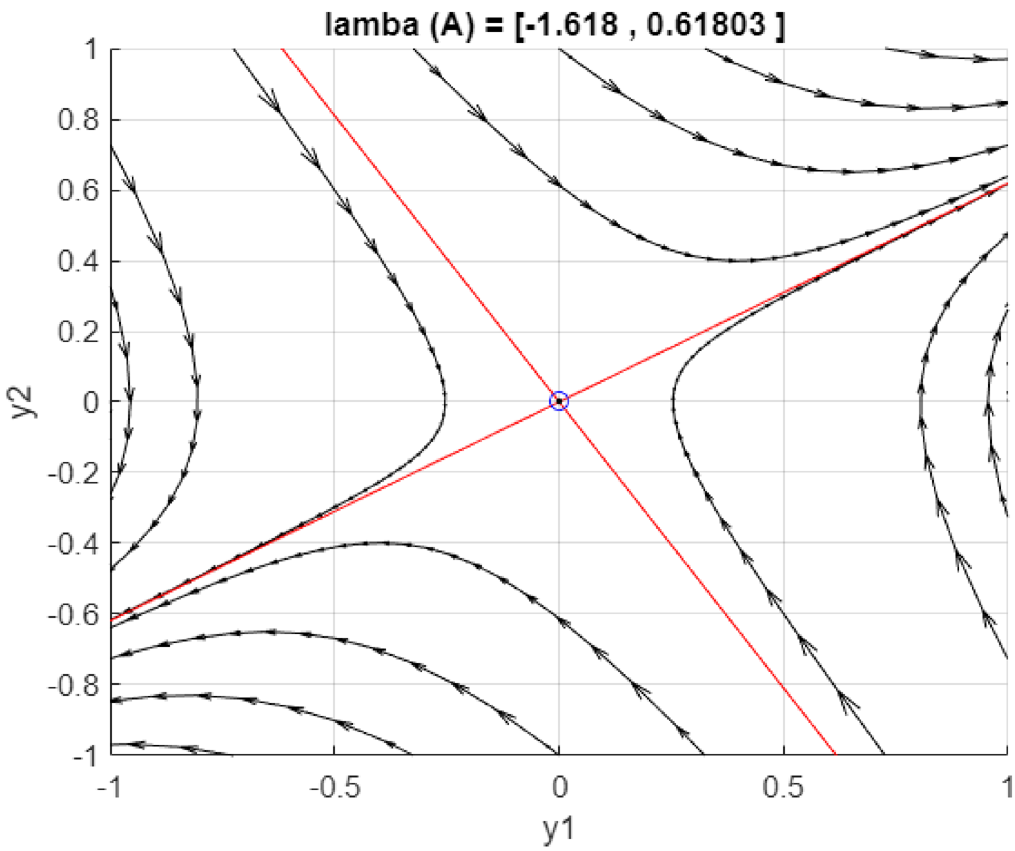
Korzystając z kodu, który został stworzony na potrzeby pierwszego laboratorium wyrysowałem portrety fazowe dla k parzystych i nieparzystych.

```
close all;
clear all;
A = [0 1; -1 -1];

T = 6;
[w J] = eig(A);
figure; hold on; grid on;
a = 0 : (pi/10) : (pi*2);
X1 = [cos(a); sin(a)];
X2 = X1./[max(abs(X1)) ; max(abs(X1))];
M=size(X2, 2);
for i = 1 : M
    x0 = X2(:, i);
    out = sim('MojModel', T);
    hold on;
    grid on;

    dx1 = diff(out.x1);
    dx2 = diff(out.x2);
    quiver(out.x1(1:end-1), out.x2(1:end-1), dx1, dx2, 0, 'black')
end
plot(w(1,1)*[-3,3], w(2,1)*[-3,3], 'r', w(1,2)*[-3,3], w(2,2)*[-3,3], 'r');
plot(0,0,'k.');
plot(0,0,'bo');
axis([-1 1 -1 1]);
title(['lamba (A) = [', num2str(J(1, 1)) , ' , ', num2str(J(2, 2)), ' ] ' ]);
xlabel('y1');
ylabel('y2');
hold off;
```

Rys 2. Kod służący do wyrysowania portretów fazowych



Rys 3. Portret fazowy dla ruchu wahadła tłumionego, k – parzyste



Rys 4. Portret fazowy dla ruchu wahadła tłumionego, k – nieparzyste

Jak możemy zauważyć na powyższych portretach fazowych potwierdzają one że dla k parzystych układ jest stabilny, a dla k nieparzystych układ jest niestabilny.

Teraz przechodzimy do rozwiązywania zadania 2. Układ równań Van der Pola najpierw będziemy rozwiązywać dla a = 1. Punkt równowagi to x* = 0. Napisałem następujący kod w Matlabie aby określić macierz stanu oraz wartości własne:

```
syms x1 x2
a = 1;
f = [x2 - x1^3 - a * x1; -x1];
A = [diff(f(1), x1), diff(f(1), x2); diff(f(2), x1), diff(f(2), x2)]
lambda_1 = eig(A)
A = subs(A, [x1 x2], [0 0])
lambda_2 = eig(A)
```

Rys 5. Kod służący do wyliczenia macierzy stanu i wartości własnych

Otrzymałem następujące wyniki:

A =

$$\begin{pmatrix} -3\,x_1^2-1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Wartości własne:

lambda_1 =

$$\begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{3}\,\sqrt{(x_1^2+1)\,(3\,x_1^2-1)}}{2}-\frac{3\,x_1^2}{2}-\frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}\,\sqrt{(x_1^2+1)\,(3\,x_1^2-1)}}{2}-\frac{3\,x_1^2}{2}-\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Dla punktu równowagi uzyskałem następującą macierz stanu A i wartości własne:

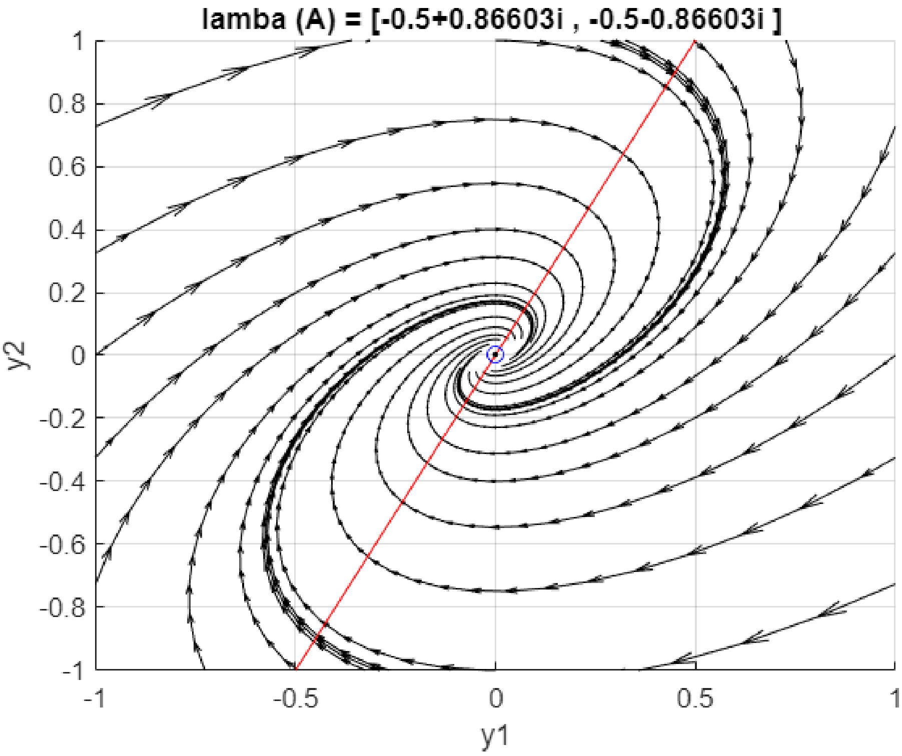
A =

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

lambda_2 =

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}\,\mathrm{i}}{2} \\ -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}\,\mathrm{i}}{2} \end{pmatrix}$$

Część rzeczywista wartości własnych jest ujemna, zatem punkt równowagi nieliniowego systemu jest asymptotycznie stabilny. Następnie korzystając z kodu, który znajduje się na Rysunku 2, wyrysowałem portret fazowy, który potwierdza stabilność.



Rys 6. Portret fazowy dla równań Van der Pola – stabilny

Teraz przechodzimy do rozwiązania układu równań Van der Pola dla a = 2. Punkt równowagi to x* = 0. Korzystając z kodu napisanego wcześniej (Rys. 5) dla a = 1 otrzymałem następujące wyniki:

A =

$$\begin{pmatrix} -3\,x_1^2 - 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Wartości własne:

```
lambda_1 =
```

$$\begin{pmatrix} -\frac{3\,x_1^2}{2} - \frac{\sqrt{3}\,x_1\,\sqrt{3\,x_1^2+4}}{2} - 1 \\ \frac{\sqrt{3}\,x_1\,\sqrt{3\,x_1^2+4}}{2} - \frac{3\,x_1^2}{2} - 1 \end{pmatrix}$$

Dla punktu równowagi uzyskałem następującą macierz stanu A i wartości własne:

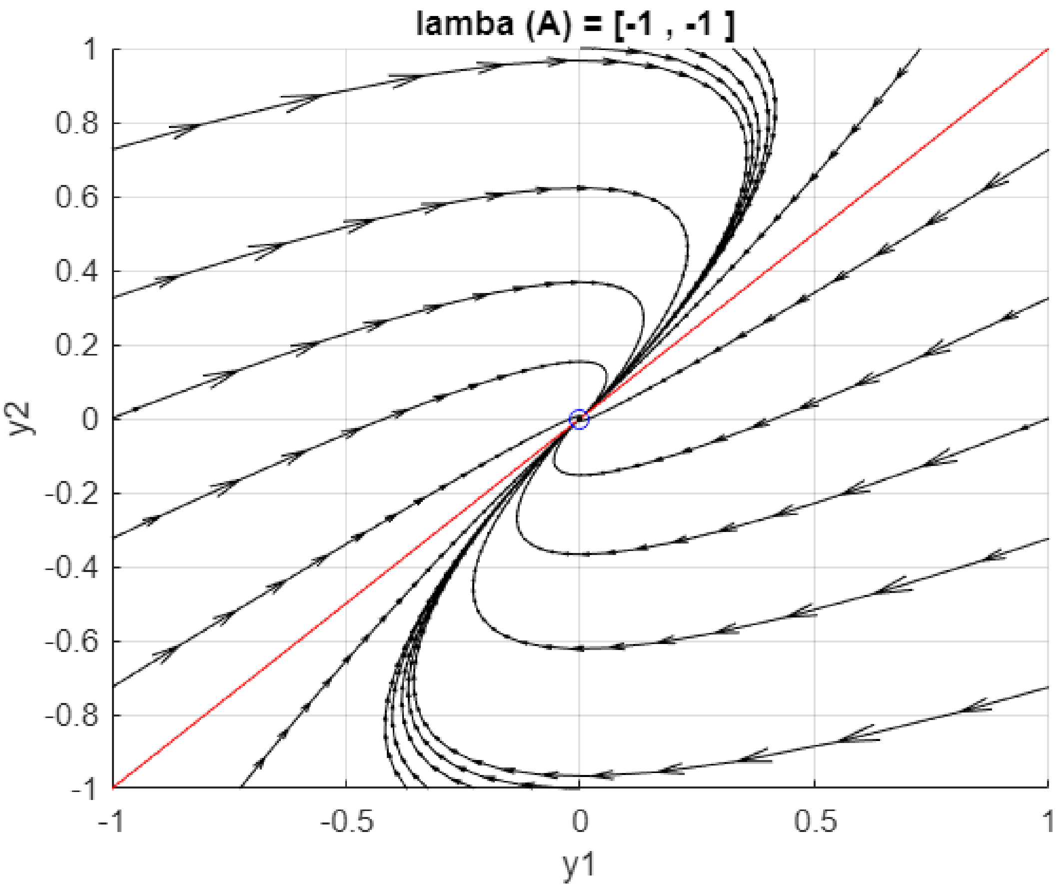
```
A =
```

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

```
lambda_2 =
```

$$\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Mamy dwukrotną wartość własną która ma tylko część rzeczywistą i jest ona ujemna. Na mocy I metody Lapunowa układ jest stabilny co potwierdza poniższy porter fazowy wykonany za pomocą kodu z rysunku 2.



Rys 7. Portret fazowy dla równań Van der Pola – stabilny

Przechodzimy do rozwiązania zadania trzeciego. Będziemy badać stabilność systemu dynamicznego:

$$\dot{x_1}(t) = x_1(t)x_2(t) - x_1^2(t)$$

$$\dot{x_2}(t) = x_1^2(t)x_2(t) - x_2^2(t)$$

Rozpoczynamy od wyznaczenia punktów równowagi:

$$x_1(x_2 - x_1) = 0$$

$$x_2(x_1^2 - x_2) = 0$$

I ma on dwa rozwiązania:

$$x^* = \begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix} \quad \text{i} \quad x^* = \begin{matrix} 1 \\ 1 \end{matrix}$$

Napisałem następujący kod w Matlabie aby określić macierz stanu oraz wartości własne:

```
syms x1 x2
f = [x1 * x2 - x1^2; x1^2 * x2 - x2^2];
A = [diff(f(1), x1), diff(f(1), x2); diff(f(2), x1), diff(f(2), x2)]
lambda_1 = eig(A)
A1 = subs(A, [x1 x2], [0 0])
[lambda_2] = eig(A1)
A2 = subs(A, [x1 x2], [1 1])
[lambda_3] = eig(A2)
```

Rys 8. Kod służący do wyliczenia macierzy stanu i wartości własnych

Otrzymałem następujące wyniki:

A =

$$\begin{pmatrix} x_2 - 2\,x_1 & x_1 \\ 2\,x_1\,x_2 & {x_1}^2 - 2\,x_2 \end{pmatrix}$$

Wartości własne:

```
lambda_1 =
```

$$\begin{pmatrix} \frac{x_1^2}{2} - \frac{x_2}{2} - \sigma_1 - x_1 \\ \sigma_1 - \frac{x_2}{2} - x_1 + \frac{x_1^2}{2} \end{pmatrix}$$

where

$$\sigma_1 = \frac{\sqrt{x_1^4 + 4\,x_1^3 + 2\,x_1^2\,x_2 + 4\,x_1^2 - 12\,x_1\,x_2 + 9\,x_2^2}}{2}$$

Dla punktu równowagi $x^* = [0\ 0]^T$ uzyskałem następującą macierz stanu A i wartości własne:

```
A1 =
```

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

```
lambda_2 =
```

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Posiadamy 2 wartości własne równe 0. W tym przypadku I metoda Lapunowa nie rozstrzyga kwestii stabilności.

Dla punktu równowagi $x^* = [1\ 1]^T$ uzyskałem następującą macierz stanu A i wartości własne:

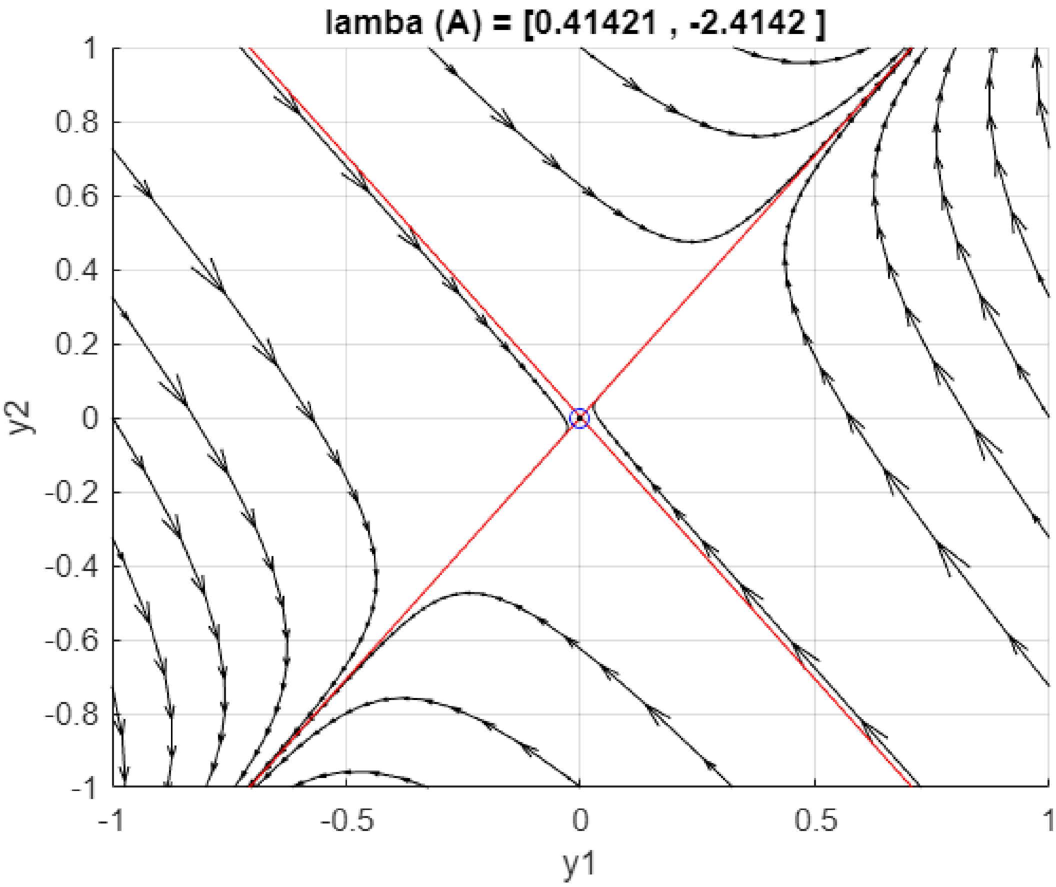
```
A2 =
```

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

```
lambda_3 =
```

$$\begin{pmatrix} -\sqrt{2} - 1 \\ \sqrt{2} - 1 \end{pmatrix}$$

W tym przypadku druga rzeczywista wartość własna jest dodatnia. Na mocy twierdzenia Lapunowa, punkt $[1\ 1]^T$ jest niestabilnym punktem równowagi nieliniowego systemu. Potwierdza to portret fazowy przedstawiony na rysunku poniżej:



Rys 9. Portret fazowy dla równania z zadania 3 – niestabilny

3. Wnioski

Podczas ćwiczenia zapoznałem się z systemami dynamicznymi, w których występowała nieliniowość. Zgodnie z oczekiwaniami, dzięki zastosowaniu pierwszej metody Lapunowa udało się systemy zlinearyzować i zbadać ich stabilność analitycznie oraz przy pomocy generowania portretów fazowych. Wyniki pokryły się z obliczeniami tablicowymi.