

Kody Hamminga

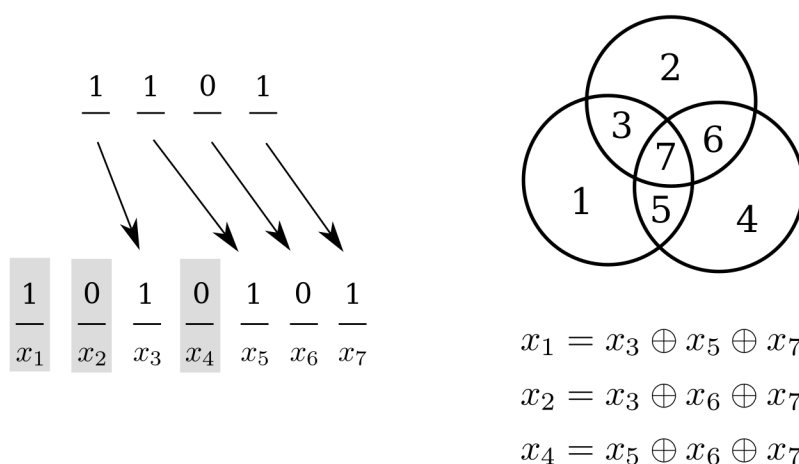
Opracowanie: Tomasz Mąka <tmaka@zut.edu.pl>

1. Wprowadzenie

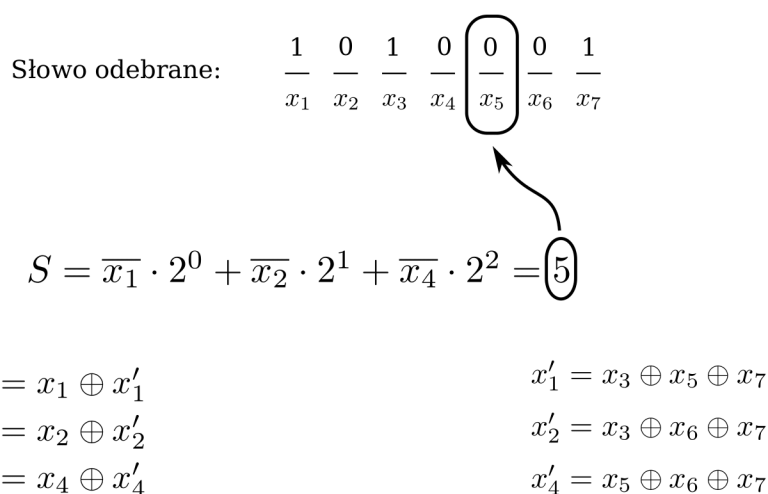
Kody Hamminga stanowią zbiór liniowych kodów blokowych (n, k) , gdzie n jest całkowitą długością bloku, a parametr k określa liczbę bitów informacyjnych. Zakładając, że m określa liczbę bitów parzystości ($m \geq 3$) zachodzą następujące związki [1]: $m = n - k$, $n = 2^m - 1$ oraz $k = 2^m - m - 1$. Bity parzystości wyznaczane są na podstawie bitów informacyjnych za pomocą operacji dodawania modulo 2. Zdolność korekcyjna kodów Hamminga wynosi 1 bit, natomiast detekcyjna wynosi 2 bity [2].

2. Ćwiczenia

1. Zaimplementować koder oraz dekoder kodu Hamminga (7,4) według schematów przedstawionych na rysunkach 1 oraz 2, gdzie operator \oplus jest dodawaniem modulo 2. Z wykorzystaniem opracowanych implementacji należy zilustrować proces kodowania i dekodowania. W przypadku dekodowania należy przedstawić 2 przypadki: (I) kiedy słowo zakodowane jest bez zmian wprowadzane na wejście dekodera oraz (II) kiedy jeden losowo wybrany bit jest negowany w słowie zakodowanym i dekoder realizuje procedurę korekty słowa wejściowego.

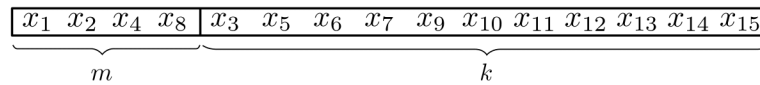


Rysunek 1. Proces kodowania z użyciem kodu Hamminga (7,4)



Rysunek 2. Ilustracja procesu detekcji i korekcji z użyciem kodu Hamminga (7,4)

2. Zaimplementować koder oraz dekoder kodu Hamminga (15,11) z wykorzystaniem rachunku macierzowego z operacją dodawania modulo 2. W tym przypadku zakładamy, że struktura słowa kodowego ($n = 15, k = 11, m = 4$) jest przedstawiona na rysunku 3.



Rysunek 3. Struktura słowa kodowego kodu (15,11).

Procedura kodowania sprowadza się do realizacji następującej operacji macierzowej:

$$\mathbf{c} = \mathbf{bG},$$

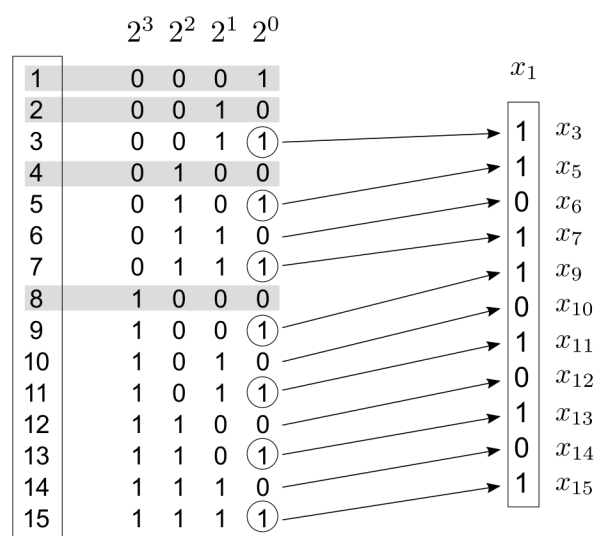
gdzie: \mathbf{b} jest wektorem zawierającym bity wiadomości, \mathbf{c} jest wektorem słowa kodowego, natomiast \mathbf{G} jest macierzą generującą.

Macierz generującą wyznacza się w następujący sposób:

$$\mathbf{G} = \left[\mathbf{P} \mid \mathbf{I}_k \right],$$

gdzie: \mathbf{I}_k jest macierzą jednostkową, a \mathbf{P} jest macierzą określającą bity parzystości, w której kolumny reprezentują kolejne bity parzystości, natomiast wiersze bity wiadomości. Sposób określania postaci pierwszej kolumny tej macierzy dla kodu (15,11) przedstawiono na rysunku 4.

$$\mathbf{I} = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{P} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_4 & x_8 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix} \begin{matrix} x_3 \\ x_5 \\ x_6 \\ \vdots \end{matrix}$$



Rysunek 4. Przykład tworzenia pierwszej kolumny macierzy \mathbf{P} dla kodu Hamminga (15,11).

Procedura dekodowania realizowana jest przy pomocy następującej zależności:

$$\mathbf{s} = \mathbf{c}\mathbf{H}^T$$

gdzie: \mathbf{s} jest wektorem syndromu, natomiast \mathbf{H} jest macierzą kontroli parzystości.

Macierz kontroli parzystości wyznacza się w następująco:

$$\mathbf{H} = \left[\mathbf{I}_{n-k} \mid \mathbf{P}^T \right].$$

Syndrom S wyznaczony na podstawie wektora $\mathbf{s} = [\overline{x_1}, \overline{x_2}, \overline{x_4}, \overline{x_8}]$ (analogicznie jak w ćwiczeniu 1) określa indeks bitu na którym wystąpił błąd zgodnie ze strukturą słowa kodowego przedstawionego na rysunku 3.

Ilustrację procesu kodowania i dekodowania należy wykonać tak samo jak w ćwiczeniu 1.

3. Uwagi

- Do operacji macierzowych można wykorzystać własną implementację lub gotową bibliotekę (zalecane). Np. w przypadku języka Python można użyć biblioteki *Numpy*, w przypadku języka C++ biblioteki *Eigen*, itd.
- W pliku tekstowym (*wnioski.txt*) należy opisać obserwacje i wnioski wynikające z przeprowadzonych eksperymentów.
- Wszystkie pliki uzyskane w trakcie ćwiczenia należy umieścić w repozytorium GIT w katalogu *lab-6*.

Literatura

- [1] S. Haykin, *Systemy telekomunikacyjne - tom 2*, Wydawnictwa Komunikacji i Łączności, Warszawa 1998
- [2] W. Kwiatkowski, *Wprowadzenie do kodowania*, BEL Studio Sp. z o.o., Warszawa 2010