

# Vehicle Routing Problem - VRP

Emma Szigeti, Flaviu Sălnicean

Octombrie 2025

## 1 Introducere

---

## 2 Diferența dintre problema rutării vehiculelor și problema comis-voiajorului

Problema comis-voiajorului este o versiune, cel puțin din punctul meu de vedere, mai simplificată a problemei rutării vehiculelor.

**Problema comis-voiajorului** constă în găsirea celei mai scurte rute care traversează un set de puncte o singură dată (în mod teoretic, orașe), situate la distanțe cunoscute între ele, astfel încât fiecare punct să fie vizitat o singură dată, iar traseul să se încheie în punctul de plecare.

**Problema rutării vehiculelor** – în forma sa de bază – constă în găsirea unui set de rute cu cost total minim pentru un grup de vehicule (în mod teoretic, camioane cu marfă) care pornesc din același punct (depozit), astfel încât fiecare client să fie vizitat o singură dată. Ulterior, pot fi adăugate diverse constrângeri.

**Care este, așadar, diferența?** În problema comis-voiajorului există o singură persoană care trebuie să parcurgă cea mai scurtă rută completă prin toate punctele, în timp ce în problema rutării vehiculelor există mai multe camioane, fiecare având nevoie de o rută optimă care să acopere un anumit număr de puncte, astfel încât, împreună, să fie parcurse toate punctele.

## 3 Tipuri de VRP

Există mai multe variații de VRP, printre care:

- CVRP (Capacitated Vehicle Routing Problem)
- VRPP (Vehicle Routing Problem with Profits)
- VRPTW (Vehicle Routing Problem with Time Windows)
- VRPWT (Vehicle Routing Problem with Transfers)

- VRPMT (Vehicle Routing Problem with Multiple Trips)
- VRPPD (Vehicle Routing Problem with Pickup and Delivery)
- VRPB (Vehicle Routing Problem with Backhauls)
- PVRP (Periodic Vehicle Routing Problem)
- SVRP (Stochastic Vehicle Routing Problem)
- SDVRP (Split Delivery Vehicle Routing Problem)
- MDVRP (Multiple Depot Vehicle Routing Problem)
- IRP (Inventory Routing Problem)
- OVRP (Open Vehicle Routing Problem)
- OP (Orienteering Problem)
- TOP (The Team Orienteering Problem)
- CTOP (The Capacitated Team Orienteering Problem)
- TOPTW (The Capacitated Team Orienteering Problem with Time Windows)
- EVRP (Electric Vehicle Routing Problem)

## 4 Ce înseamnă ele?

**CVRP** este cea mai ușoară și des întâlnită variantă a VRP. Are constrângerea ca vehiculele să aibă o capacitate limitată de marfă pe care o pot transporta, iar scopul este găsirea drumurilor cu cost minim.

**VRPP** este o variantă a VRP în care fiecare client reprezintă un anumit profit, iar drumul până la el are un anumit cost. Scopul este maximizarea profitului total.

**VRPTW** este o variantă a VRP în care fiecare client trebuie vizitat într-o anumită fereastră de timp, iar scopul este găsirea drumurilor cu cost minim.

**VRPWT** este o variantă a VRP în care camioanele pot lăsa sau lua marfă din diferite puncte de transfer, iar scopul este găsirea drumurilor cu cost minim.

**VRPMT** este o variantă a VRP în care fiecare camion poate efectua mai multe drumuri într-o zi (de exemplu, drumurile de la client înapoi la depozit pentru a încărca din nou marfă), iar scopul este găsirea drumurilor cu cost minim.

**VRPPD** este o variantă a VRP în care fiecare client nu doar că așteaptă o livrare, dar vrea și să trimită una. Astfel, atunci când camionul ajunge la client, lasă un colet și ia altul care urmează să fie livrat. Scopul este găsirea drumurilor cu cost minim.

**VRPB** este o variantă a VRP în care există două tipuri de clienți: cei care doar primesc pachete și cei care doar trimit pachete. Scopul este găsirea drumurilor cu cost minim.

**PVRP** este o variantă a VRP în care livrările se fac pe o perioadă de timp, cum ar fi o săptămână sau o lună, iar scopul este stabilirea vehiculelor și a zilelor în care se va livra marfa fiecărui client.

**SVRP** este o variantă a VRP în care unele date nu sunt cunoscute cu certitudine înainte de planificarea rutelor, ele fiind aleatoare (stocastice – adică influențate de factori întâmplători). Exemple de parametri aleatori pot fi: condițiile de trafic, vremea sau cererea clienților. Scopul este găsirea drumurilor cu cost minim, ținând cont de aceste incertitudini.

**SDVRP** este o variantă a VRP în care clienții pot primi livrări de la mai multe vehicule, livrarea putând fi împărțită în mai multe părți. Scopul este găsirea drumurilor cu cost minim.

**MDVRP** este o variantă a VRP în care există mai multe depozite din care se pot livra mărfurile către clienți. Scopul este găsirea drumurilor cu cost minim.

**IRP** este o variantă a VRP în care fiecare client are un stoc maxim și minim ce trebuie respectat, iar scopul este găsirea drumurilor cu cost minim astfel încât fiecare client să primească livrările în funcție de nivelul stocului și de nevoia sa curentă.

**OVRP** este o variantă a VRP în care, la finalul zilei, vehiculele nu se mai întorc la depozit. Scopul este găsirea drumurilor cu cost minim.

**OP** este o variantă a VRP în care fiecare client are un profit asociat, iar vehiculul (doar unul) are o distanță sau un timp limită în care poate vizita clienții. Scopul este alegerea clienților care vor fi vizitați astfel încât profitul să fie maxim.

**TOP** este o extensie a OP, în care livrarea se face cu mai multe vehicule, iar scopul este alegerea clienților care vor fi vizitați astfel încât profitul total să fie maxim.

**CTOP** este o extensie a TOP în care fiecare vehicul are o capacitate limită, iar scopul este alegerea clienților care vor fi vizitați astfel încât profitul total să fie maxim.

**TOPTW** este o extensie a CTOP în care fiecare client trebuie să își primească livrarea într-o anumită fereastră de timp. Scopul este alegerea clienților care vor fi vizitați astfel încât profitul total să fie maxim.

**EVRP** este o variantă a VRP în care se folosesc vehicule electrice, care au autonomie limitată și necesită reîncărcare. Scopul este găsirea drumurilor cu cost minim, ținând cont de nevoia și timpul de reîncărcare al vehiculelor electrice.

## 5 Varianta aleasă

În cadrul proiectului am ales să folosim varianta CVRP (Capacitated Vehicle Routing Problem) a problemei, fiind cea mai ușoară de înțeles și de abordat.

## 6 Formulare matematică pentru Capacitated Vehicle Routing Problem (CVRP)

**Date:**

- $V = \{0, 1, \dots, n\}$  — mulțimea nodurilor, unde 0 este depozitul și  $1, \dots, n$  sunt clienții.
- $c_{ij} \geq 0$  — costul (sau distanța) de la  $i$  la  $j$ .
- $d_i > 0$  — cererea clientului  $i$ , pentru  $i = 1, \dots, n$ ;  $d_0 = 0$ .
- $Q > 0$  — capacitatea fiecărui vehicul.
- $K$  — numărul maxim de vehicule disponibile.

**Variabile de decizie:**

$$x_{ij} \in \{0, 1\}, \quad \forall i, j \in V, \quad i \neq j$$

$$f_{ij} \geq 0, \quad \forall i, j \in V, \quad i \neq j$$

*Interpretare:*  $x_{ij} = 1$  dacă arcul  $(i, j)$  este utilizat într-o rută;  $f_{ij}$  este fluxul de marfă (încărcătura) transportat pe arc-ul  $i \rightarrow j$ .

**Funcția obiectiv:**

$$\min \sum_{i \in V} \sum_{\substack{j \in V \\ j \neq i}} c_{ij} x_{ij}$$

**Constrângeri:**

$$\sum_{\substack{j \in V \\ j \neq i}} x_{ij} = 1, \quad \forall i \in \{1, \dots, n\} \quad (\text{fiecare client este vizitat o dată}) \quad (1)$$

$$\sum_{\substack{i \in V \\ i \neq j}} x_{ij} = 1, \quad \forall j \in \{1, \dots, n\} \quad (\text{fiecare client este părăsit o dată}) \quad (2)$$

$$\sum_{\substack{j \in V \\ j \neq 0}} x_{0j} \leq K, \quad \sum_{\substack{i \in V \\ i \neq 0}} x_{i0} \leq K \quad (\text{maxim } K \text{ vehicule}) \quad (3)$$

$$0 \leq f_{ij} \leq Q x_{ij}, \quad \forall i, j \in V, i \neq j \quad (\text{legătura flux-arc}) \quad (4)$$

$$\sum_{\substack{j \in V \\ j \neq i}} f_{ji} + d_i = \sum_{\substack{j \in V \\ j \neq i}} f_{ij}, \quad \forall i \in \{1, \dots, n\} \quad (\text{conservare flux la clienți}) \quad (5)$$

$$\sum_{\substack{j \in V \\ j \neq 0}} f_{0j} = \sum_{i=1}^n d_i \quad (\text{flux total pornit din depozit}) \quad (6)$$

Domenii:

$$x_{ij} \in \{0, 1\}, \quad f_{ij} \geq 0$$

## 7 Funcția de fitness și costul penalizat pentru CVRP

În cadrul algoritmilor genetici, funcția de fitness are rolul de a evalua calitatea unei soluții candidate (set de rute). Deoarece nu toate soluțiile generate respectă constrângerile de capacitate sau numărul de vehicule, se utilizează un cost penalizat care integrează aceste abateri în valoarea totală a costului.

**Fie pentru o soluție  $S$  (set de rute) costul total nepenalizat:**

$$C(S) = \sum_{r \in S} \sum_{(i,j) \in r} c_{ij},$$

unde suma internă se face pe arcele succesive ale rutei  $r$  (inclusiv arcul de la depozit 0 la primul client și arcul de la ultimul client înapoi la 0).

## Definiții pe rută

Pentru fiecare rută  $r \in S$  definim:

$$Q_r = \sum_{i \in r} d_i \quad (\text{încărcătura totală pe ruta } r),$$

$$\Delta_r = \max(0, Q_r - Q) \quad (\text{depășirea capacității pentru ruta } r).$$

Dacă există o limită  $K$  pe numărul de vehicule, definim și:

$$\Delta_K = \max(0, |S| - K) \quad (\text{numărul de vehicule în exces}).$$

## Cost penalizat

Atunci costul penalizat pentru soluția  $S$  este:

$$C_{\text{pen}}(S) = C(S) + \alpha \sum_{r \in S} \Delta_r + \beta \Delta_K,$$

unde  $\alpha, \beta > 0$  sunt coeficienți de penalizare (de exemplu:  $\alpha$  — cost pe unitate de marfă depășită;  $\beta$  — cost fix per vehicul în exces).

## Transformare în funcție de fitness

$$\text{fitness}(S) = \frac{1}{1 + C_{\text{pen}}(S)}.$$

Astfel, valorile de fitness mai mari corespund soluțiilor cu cost penalizat mai mic (adică rute mai scurte și mai fezabile).

## 8 Bibliografie

<https://blog.locus.sh/vehicle-routing-problem/>

[https://en.wikipedia.org/wiki/Vehicle\\_routing\\_problem](https://en.wikipedia.org/wiki/Vehicle_routing_problem)

[https://tttp-au.com/wp-content/uploads/2024/06/Pages-from-TTTP-Vol-9-No-1\\_2024-WEB-8.pdf](https://tttp-au.com/wp-content/uploads/2024/06/Pages-from-TTTP-Vol-9-No-1_2024-WEB-8.pdf)

[https://ro.wikipedia.org/wiki/Problema\\_rut%C4%83rii\\_vehiculelor](https://ro.wikipedia.org/wiki/Problema_rut%C4%83rii_vehiculelor)

[https://ro.wikipedia.org/wiki/Problema\\_comis-voiajorului](https://ro.wikipedia.org/wiki/Problema_comis-voiajorului)

<https://developers.google.com/optimization/routing/cvrp>

<https://www.upperinc.com/glossary/route-optimization/vehicle-routing-problem-with-pro>

<https://developers.google.com/optimization/routing/vrptw>

<https://www.sciencedirect.com/science/article/abs/pii/S0305054825000085>

<https://www.sciencedirect.com/science/article/abs/pii/S0305054820301040>

<https://www.upperinc.com/glossary/route-optimization/vehicle-routing-problem-with-bac>

<https://www.upperinc.com/glossary/route-optimization/periodic-vehicle-routing-problem>

<https://www.upperinc.com/glossary/route-optimization/stochastic-vehicle-routing-probl>  
<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0305054814002159>  
<https://www.sciencedirect.com/science/article/abs/pii/S0305054813001408>  
<https://www.hexaly.com/templates/inventory-routing-problem-irp>  
<https://www.upperinc.com/glossary/route-optimization/open-vehicle-routing-problem-ovr>  
<https://www.sciencedirect.com/topics/mathematics/orienteering-problem>  
<https://drops.dagstuhl.de/storage/01oasics/oasics-vol014-atmos2010/OASICS.ATMOS.2010.142/OASICS.ATMOS.2010.142.pdf>  
[https://www.researchgate.net/publication/256022425\\_The\\_Capacitated\\_Team\\_Orienteering\\_Problem\\_A\\_Bi-Level\\_Filter-and-Fan\\_Method](https://www.researchgate.net/publication/256022425_The_Capacitated_Team_Orienteering_Problem_A_Bi-Level_Filter-and-Fan_Method)  
<https://www.praiseworthyprize.org/jsm/index.php?journal=irecos&page=article&op=view&path%5B%5D=18244>  
<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S2352146516000089>