WSPOMAGANIE DECYZJI – ĆWICZENIA II – LINEARYZACJA PROBLEMÓW NIELINIOWYCH

I. Doprowadzić do postaci problemu programowania liniowego.

$$\min \sum_{i=1}^{k} w_i \left| c_i^T x - c_{i0} \right|$$

p.o. $Ax\{\geq = \leq\}b$

$x \geq 0$

$$\min \sum_{i=1}^{k} w_i (y_i + z_i)$$

p.o. $c_i^T x - c_{i0} = y_i - z_i$

$Ax\{\geq = \leq\}b$

$x \geq 0,\ y \geq 0,\ z \geq 0$

a) min $|x_1 + 2x_2 - 5| + |3x_1 + 2x_2 - 7| + |2x_1 + x_2 - 3|$

p.o. $5x_1 + 7x_2 \leq 10$

$x_1, x_2 \geq 0$

min $y_1 + z_1 + y_2 + z_2 + y_3 + z_3$

p.o. $x_1 + 2x_2 - 5 = y_1 - z_1$

$3x_1 + 2x_2 - 7 = y_2 - z_2$

$2x_1 + x_2 - 3 = y_3 - z_3$

$5x_1 + 7x_2 \leq 10$

$x_1, x_2, y_1, z_1, y_2, z_2, y_3, z_3 \geq 0$

b) min $3\,|4x_1 + 2x_2 - 7| + 2\,|x_1 + 3x_2 - 4|$

p.o. $x_1 + 3x_2 \geq 8$

$x_1 - x_2 \leq 0$

$x_1, x_2 \geq 0$

min $3(y_1 + z_1) + 2(y_2 + z_2)$

p.o. $4x_1 + 2x_2 - 7 = y_1 - z_1$

$x_1 + 3x_2 - 4 = y_2 - z_2$

$x_1 + 3x_2 \geq 8$

$x_1 - x_2 \leq 0$

$x_1, x_2, y_1, z_1, y_2, z_2 \geq 0$

II. Linearyzacja problemu min-max.

$$\max\{w_i (c_i^T x - c_{i0})\} \to \min$$

p.o. $Ax\{\geq = \leq\}b$

$x \geq 0$

$\min \alpha$

p.o. $\alpha \geq w_i (c_i^T x - c_{i0}),\quad i = 1,\ldots,k$

$Ax\{\geq = \leq\}b$

$x \geq 0$

a) max$\{|X_F - 6|, |X_G - 7|, |X_H - 3|\}$ -> min

$5X_F + 3X_G + 1X_H \geq 15$ …

$X_F, X_G, X_H \geq 0$

min α

p.o. $\alpha \geq |X_F - 6| \Rightarrow \alpha \geq X_F - 6$ oraz $\alpha \geq -X_F + 6$

$\alpha \geq |X_G - 7| \Rightarrow \alpha \geq X_G - 7$ oraz $\alpha \geq -X_G + 7$

$\alpha \geq |X_H - 3| \Rightarrow \alpha \geq X_H - 3$ oraz $\alpha \geq -X_H + 3$

$5X_F + 3X_G + 1X_H \geq 15$ ...

$X_F, X_G, X_H \geq 0$

III. Zespół akwizytorów odwiedza „starych” i „nowych” klientów. Przeciętnie 1 akwizytor poświęca 2h na jedno spotkanie ze „starym” klientem i 3h z „nowym”. „Stary” klient przynosi przeciętnie 250 PLN przychodu na miesiąc, a „nowy” 125 PLN. Należy ustalić ilu „starych”, a ilu „nowych” klientów odwiedzać, jeżeli istnieje następujący zbiór celów, które należy spełnić: a) przychody musza wynosić co najmniej 70000 PLN; b-c) czas pracy musi wynosić min. 600, maks. 680 godzin; d) należy odwiedzić co najmniej 200 starych klientów.

Cele:

$250x_S + 125x_N \geq 70000$

$2x_S + 3x_N \geq 600$

$2x_S + 3x_N \leq 680$

$x_S \geq 200$

min $z_1 + z_2 + y_3 + z_4$

$250x_S + 125x_N - 70000 = y_1 - z_1$

$2x_S + 3x_N - 600 = y_2 - z_2$

$2x_S + 3x_N - 680 = y_3 - z_3$

$x_S - 200 = y_4 - z_4$

$x_S, x_N, y_1, z_1, y_2, z_2, y_3, z_3, y_4, z_4 \geq 0$

IV. Sprawdź, czy podane niżej cele są sprzeczne (tygodniowy plan produkcji 3 wyrobów). Zapisać problem programowania liniowego i do sprawdzenia sprzeczności wykorzystać *solver* (Lab2-PC-example.xls).

	Parametry			Wartości docelowe
Przychody (PLN/t)	1200	900	1500	Co najmniej 12500
Zatrudnienie (os/t)	5	3	4	Dokładnie 40
Koszty prod. (PLN/t)	500	700	800	Co najwyżej 5500

Rozwiązać zadanie metodą programowania celowego (z wagami równymi 1).

Cele:

$1200x_1 + 900x_2 + 1500x_3 \geq 12500$

$5x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 40$

$500x_1 + 700x_2 + 800x_3 \leq 5500$

min $z_1 + y_2 + z_2 + y_3$

$1200x_1 + 900x_2 + 1500x_3 - 12500 = y_1 - z_1$

$5x_1 + 3x_2 + 4x_3 - 40 = y_1 - z_1$

$500x_1 + 700x_2 + 800x_3 - 5500 = y_3 - z_3$

$x_1, x_2, x_3, y_1, z_1, y_2, z_2, y_3, z_3 \geq 0$

V. Sformułuj problem programowania liniowego, który pozwoli na uzyskanie parametrów a,b ≥ 0 funkcji liniowej y = ax + b (a, b ≥ 0), które zminimalizują sumę odchyłek dla dwóch rzeczywistych obserwacji (x_i, y_i): (1, 3) oraz (3, 8).

min $y_1 + z_1 + y_2 + z_2$

$1a + b - 3 = y_1 - z_1$ (dla punktu (1,3))

$3a + b - 8 = y_2 - z_2$ (dla punktu (3,8))

$a, b, y_1, z_1, y_2, z_2 \geq 0$

VI. Dany jest następujący problem programowania ilorazowego. Dokonaj jego linearyzacji.

$$\min/\max \frac{c^T x + c_0}{d^T x + d_0}$$

p.o. $Ax\{\geq = \leq\}b$

$x \geq 0$

$d^T x + d_0 > 0$

max $(2x_1 + 4x_2 + 6)/(x_1 + x_2 + 2)$

p.o. $x_1 + 3x_2 \leq 15$

$x_1 + 3x_2 \geq 9$

$x_1 \geq 1.5$

$x_2 \geq 1.5$

$x_1, x_2 \geq 0$

Nowe zmienne :

$$u_0 = \frac{1}{d^T x + d_0}$$

$$u_j = \frac{x_j}{d^T x + d_0},\ j = 1,\ldots,n$$

$u_0 = 1 / (x_1 + x_2 + 2)$

$u_1 = x_1 / (x_1 + x_2 + 2)$

$u_2 = x_2 / (x_1 + x_2 + 2)$

Odczytanie rozwiązania:

$x_1 = u_1 / u_0$

$x_2 = u_2 / u_0$

Zapis problemu liniowego:

$$\min/\max c^T u + c_0 u_0$$

p.o. $d^T u + d_0 u_0 = 1$

$Au\{\geq = \leq\}bu_0$

$u \geq 0,\ u_0 \geq 0$

max $2u_1 + 4u_2 + 6u_0$

$u_1 + u_2 + 2u_0 = 1$

$u_1 + 3u_2 \leq 15u_0$

$u_1 + 3u_2 \geq 9u_0$

$u_1 \geq 1.5u_0$

$u_2 \geq 1.5u_0$

$u_0 \geq 0$ (spr. czy $u_0 > 0$)

$u_1, u_2 \geq 0$