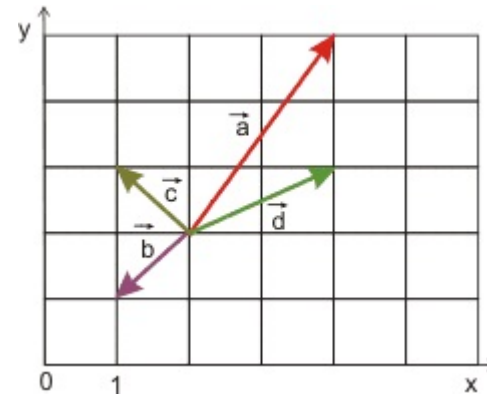


Analiza numeryczna (L). Wykład VIII.
Krzywe Béziera

Paweł Woźny

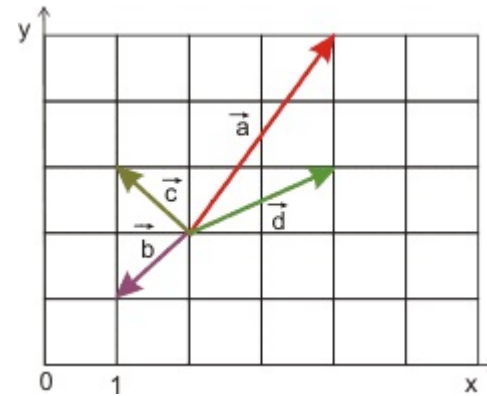
Punkty i wektory

- punkt $-$ punkt = wektor,
- liczba \cdot wektor = wektor,
- wektor \pm wektor = wektor,
- punkt \pm wektor = punkt



Punkty i wektory

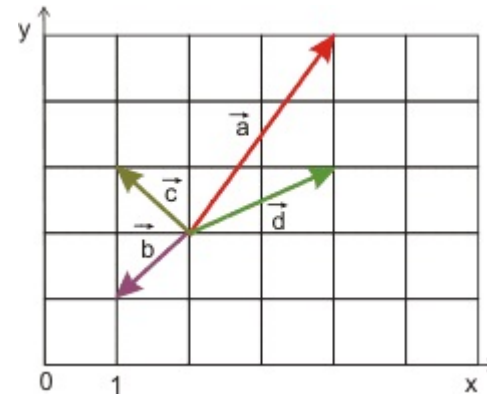
- punkt $-$ punkt = wektor,
- liczba \cdot wektor = wektor,
- wektor \pm wektor = wektor,
- punkt \pm wektor = punkt.



Pytanie. A co z dodawaniem punktów i ich mnożeniem przez liczbę?

Punkty i wektory

- punkt $-$ punkt = wektor,
- liczba \cdot wektor = wektor,
- wektor \pm wektor = wektor,
- punkt \pm wektor = punkt.

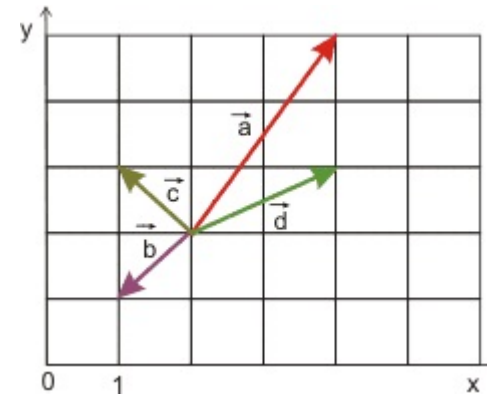


Pytanie. A co z dodawaniem punktów i ich mnożeniem przez liczbę?

- Niech A, B będą punktami na płaszczyźnie

Punkty i wektory

- punkt $-$ punkt = wektor,
- liczba \cdot wektor = wektor,
- wektor \pm wektor = wektor,
- punkt \pm wektor = punkt.

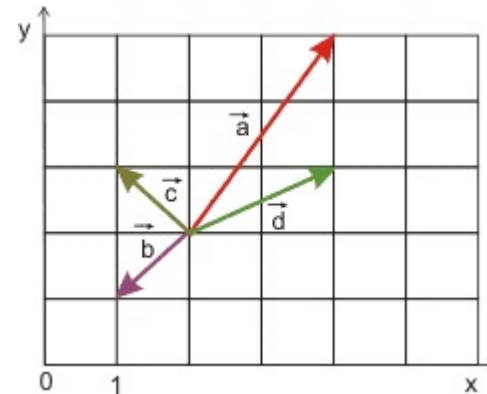


Pytanie. A co z dodawaniem punktów i ich mnożeniem przez liczbę?

- Niech A, B będą punktami na płaszczyźnie.
- $\frac{1}{3}A + \frac{2}{3}B$

Punkty i wektory

- punkt $-$ punkt = wektor,
- liczba \cdot wektor = wektor,
- wektor \pm wektor = wektor,
- punkt \pm wektor = punkt.

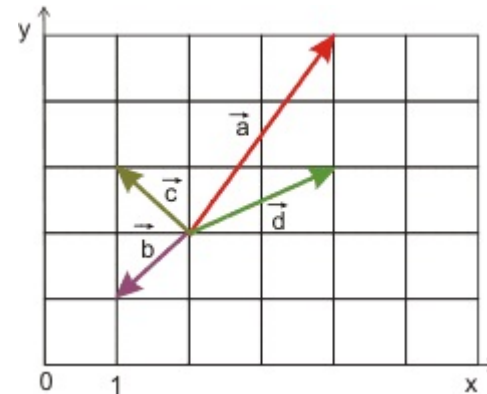


Pytanie. A co z dodawaniem punktów i ich mnożeniem przez liczbę?

- Niech A, B będą punktami na płaszczyźnie.
- $\frac{1}{3}A + \frac{2}{3}B = \left(1 - \frac{2}{3}\right)A + \frac{2}{3}B$

Punkty i wektory

- punkt $-$ punkt = wektor,
- liczba \cdot wektor = wektor,
- wektor \pm wektor = wektor,
- punkt \pm wektor = punkt.

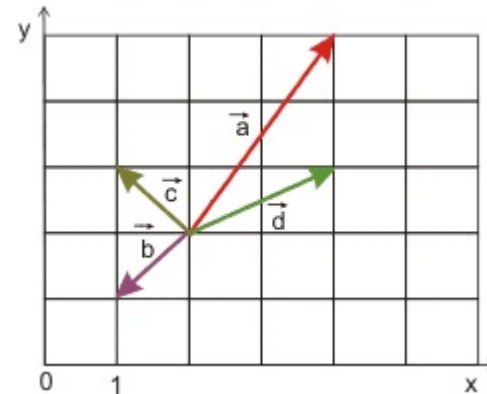


Pytanie. A co z dodawaniem punktów i ich mnożeniem przez liczbę?

- Niech A, B będą punktami na płaszczyźnie.
- $\frac{1}{3}A + \frac{2}{3}B = \left(1 - \frac{2}{3}\right)A + \frac{2}{3}B = A + \frac{2}{3}(B - A)$

Punkty i wektory

- punkt $-$ punkt = wektor,
- liczba \cdot wektor = wektor,
- wektor \pm wektor = wektor,
- punkt \pm wektor = punkt.

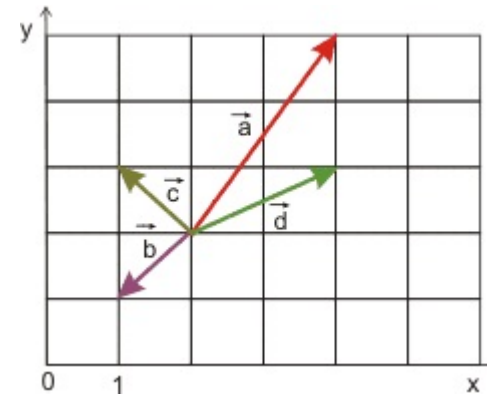


Pytanie. A co z dodawaniem punktów i ich mnożeniem przez liczbę?

- Niech A, B będą punktami na płaszczyźnie.
- $\frac{1}{3}A + \frac{2}{3}B = \left(1 - \frac{2}{3}\right)A + \frac{2}{3}B = A + \frac{2}{3}(B - A) \quad \Leftarrow \quad \boxed{\text{punkt} + \text{wektor} = \text{punkt}}$

Punkty i wektory

- punkt — punkt = wektor,
- liczba \cdot wektor = wektor,
- wektor \pm wektor = wektor,
- punkt \pm wektor = punkt.

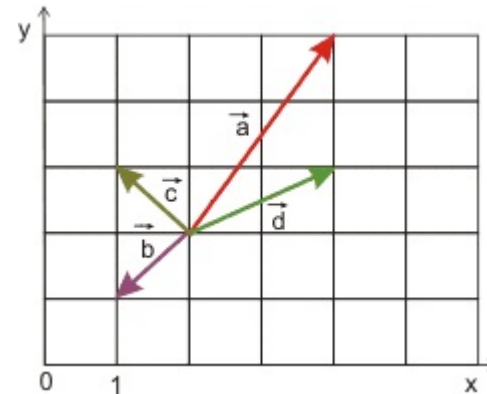


Pytanie. A co z dodawaniem punktów i ich mnożeniem przez liczbę?

- Niech A, B będą punktami na płaszczyźnie.
- $\frac{1}{3}A + \frac{2}{3}B = \left(1 - \frac{2}{3}\right)A + \frac{2}{3}B = A + \frac{2}{3}(B - A) \quad \Leftarrow \quad \boxed{\text{punkt} + \text{wektor} = \text{punkt}}$
- $9A - 8B$

Punkty i wektory

- punkt — punkt = wektor,
- liczba \cdot wektor = wektor,
- wektor \pm wektor = wektor,
- punkt \pm wektor = punkt.

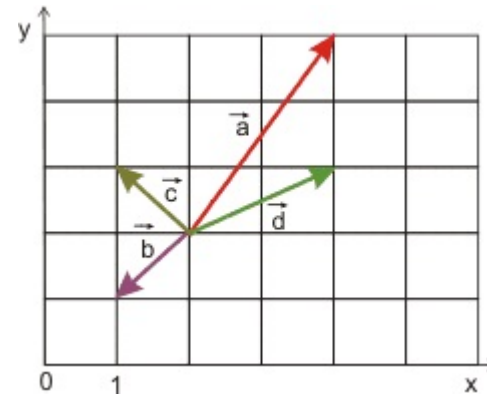


Pytanie. A co z dodawaniem punktów i ich mnożeniem przez liczbę?

- Niech A, B będą punktami na płaszczyźnie.
- $\frac{1}{3}A + \frac{2}{3}B = \left(1 - \frac{2}{3}\right)A + \frac{2}{3}B = A + \frac{2}{3}(B - A) \quad \Leftarrow \quad \boxed{\text{punkt} + \text{wektor} = \text{punkt}}$
- $9A - 8B = 9A + (1 - 9)B$

Punkty i wektory

- punkt — punkt = wektor,
- liczba \cdot wektor = wektor,
- wektor \pm wektor = wektor,
- punkt \pm wektor = punkt.

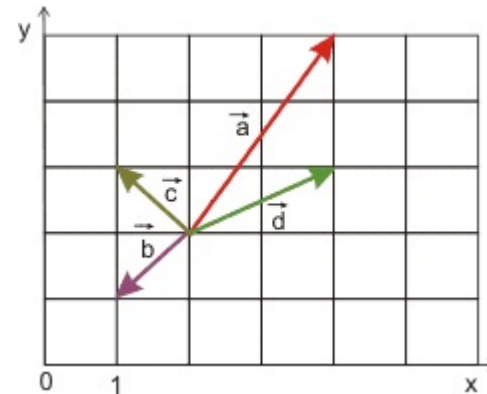


Pytanie. A co z dodawaniem punktów i ich mnożeniem przez liczbę?

- Niech A, B będą punktami na płaszczyźnie.
- $\frac{1}{3}A + \frac{2}{3}B = (1 - \frac{2}{3})A + \frac{2}{3}B = A + \frac{2}{3}(B - A) \quad \Leftarrow \quad \boxed{\text{punkt} + \text{wektor} = \text{punkt}}$
- $9A - 8B = 9A + (1 - 9)B = B + 9(A - B) \quad \Leftarrow \quad \boxed{\text{punkt} + \text{wektor} = \text{punkt}}$

Punkty i wektory

- punkt — punkt = wektor,
- liczba \cdot wektor = wektor,
- wektor \pm wektor = wektor,
- punkt \pm wektor = punkt.

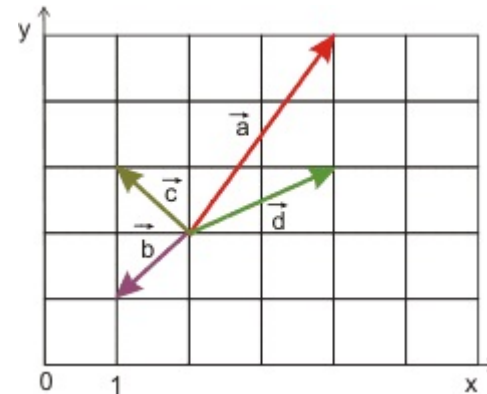


Pytanie. A co z dodawaniem punktów i ich mnożeniem przez liczbę?

- Niech A, B będą punktami na płaszczyźnie.
- $\frac{1}{3}A + \frac{2}{3}B = (1 - \frac{2}{3})A + \frac{2}{3}B = A + \frac{2}{3}(B - A) \quad \Leftarrow \quad \boxed{\text{punkt} + \text{wektor} = \text{punkt}}$
- $9A - 8B = 9A + (1 - 9)B = B + 9(A - B) \quad \Leftarrow \quad \boxed{\text{punkt} + \text{wektor} = \text{punkt}}$
- $2A + 3B = ???$

Punkty i wektory

- punkt — punkt = wektor,
- liczba \cdot wektor = wektor,
- wektor \pm wektor = wektor,
- punkt \pm wektor = punkt.



Pytanie. A co z dodawaniem punktów i ich mnożeniem przez liczbę?

- Niech A, B będą punktami na płaszczyźnie.
- $\frac{1}{3}A + \frac{2}{3}B = (1 - \frac{2}{3})A + \frac{2}{3}B = A + \frac{2}{3}(B - A) \quad \Leftarrow \quad \boxed{\text{punkt} + \text{wektor} = \text{punkt}}$
- $9A - 8B = 9A + (1 - 9)B = B + 9(A - B) \quad \Leftarrow \quad \boxed{\text{punkt} + \text{wektor} = \text{punkt}}$
- $2A + 3B = ??? \quad \Leftarrow \quad \boxed{\text{Problem, bo } 2 + 3 \neq 1}$

Punkty i wektory

Pytanie. A co z dodawaniem punktów i ich mnożeniem przez liczbę?

Punkty i wektory

Pytanie. A co z dodawaniem punktów i ich mnożeniem przez liczbę?

- Niech W_0, W_1, \dots, W_n będą punktami na płaszczyźnie

Punkty i wektory

Pytanie. A co z dodawaniem punktów i ich mnożeniem przez liczbę?

- Niech W_0, W_1, \dots, W_n będą punktami na płaszczyźnie.
- Niech $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n$ będą takimi liczbami rzeczywistymi, że $\alpha_0 + \alpha_1 + \dots + \alpha_n = 1$

Punkty i wektory

Pytanie. A co z dodawaniem punktów i ich mnożeniem przez liczbę?

- Niech W_0, W_1, \dots, W_n będą punktami na płaszczyźnie.
- Niech $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n$ będą takimi liczbami rzeczywistymi, że $\alpha_0 + \alpha_1 + \dots + \alpha_n = 1$.
- Wyrażenie

$$\alpha_0 W_0 + \alpha_1 W_1 + \dots + \alpha_n W_n$$

nazywamy kombinacją barycentryczną punktów

Punkty i wektory

Pytanie. A co z dodawaniem punktów i ich mnożeniem przez liczbę?

- Niech W_0, W_1, \dots, W_n będą punktami na płaszczyźnie.
- Niech $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n$ będą takimi liczbami rzeczywistymi, że $\alpha_0 + \alpha_1 + \dots + \alpha_n = 1$.
- Wyrażenie

$$\alpha_0 W_0 + \alpha_1 W_1 + \dots + \alpha_n W_n$$

nazywamy kombinacją barycentryczną punktów i utożsamiamy z punktem postaci

$$\underbrace{W_0}_{\text{punkt}} + \underbrace{\alpha_1(W_1 - W_0) + \alpha_2(W_2 - W_0) + \dots + \alpha_n(W_n - W_0)}_{\text{wektor}}$$

Punkty i wektory

Pytanie. A co z dodawaniem punktów i ich mnożeniem przez liczbę?

- Niech W_0, W_1, \dots, W_n będą punktami na płaszczyźnie.
- Niech $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n$ będą takimi liczbami rzeczywistymi, że $\alpha_0 + \alpha_1 + \dots + \alpha_n = 1$.
- Wyrażenie

$$\alpha_0 W_0 + \alpha_1 W_1 + \dots + \alpha_n W_n$$

nazywamy kombinacją barycentryczną punktów i utożsamiamy z punktem postaci

$$\underbrace{W_0}_{\text{punkt}} + \underbrace{\alpha_1(W_1 - W_0) + \alpha_2(W_2 - W_0) + \dots + \alpha_n(W_n - W_0)}_{\text{wektor}}.$$

Fakt. Kombinacja barycentryczna punktów określona jest jednoznacznie

Punkty i wektory

Pytanie. A co z dodawaniem punktów i ich mnożeniem przez liczbę?

- Niech W_0, W_1, \dots, W_n będą punktami na płaszczyźnie.
- Niech $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n$ będą takimi liczbami rzeczywistymi, że $\alpha_0 + \alpha_1 + \dots + \alpha_n = 1$.
- Punkt $W := \alpha_0 W_0 + \alpha_1 W_1 + \dots + \alpha_n W_n$.

Fakt. Kombinacja barycentryczna punktów określona jest jednoznacznie

Punkty i wektory

Pytanie. A co z dodawaniem punktów i ich mnożeniem przez liczbę?

- Niech W_0, W_1, \dots, W_n będą punktami na płaszczyźnie.
- Niech $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n$ będą takimi liczbami rzeczywistymi, że $\alpha_0 + \alpha_1 + \dots + \alpha_n = 1$.
- Punkt $W := \alpha_0 W_0 + \alpha_1 W_1 + \dots + \alpha_n W_n$.

Fakt. Kombinacja barycentryczna punktów określona jest jednoznacznie.

Fakt. Jeśli $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n \geq 0$, to punkt W znajduje się w otoczce wypukłej punktów W_0, W_1, \dots, W_n ,

$$W \in \text{conv}\{W_0, W_1, \dots, W_n\}$$

Wielomiany Bernsteina

- Wielomiany Bernsteina

$$B_k^n(x) := \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \quad (k = 0, 1, \dots, n; n \in \mathbb{N})$$

Wielomiany Bernsteina

- Wielomiany Bernsteina

$$B_k^n(x) := \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \quad (k = 0, 1, \dots, n; n \in \mathbb{N}).$$

- Używając wielomianów B_k^n , Bernstein podaje w roku 1912 prosty i konstruktywny dowód aproksymacyjnego twierdzenia Weierstrassa.

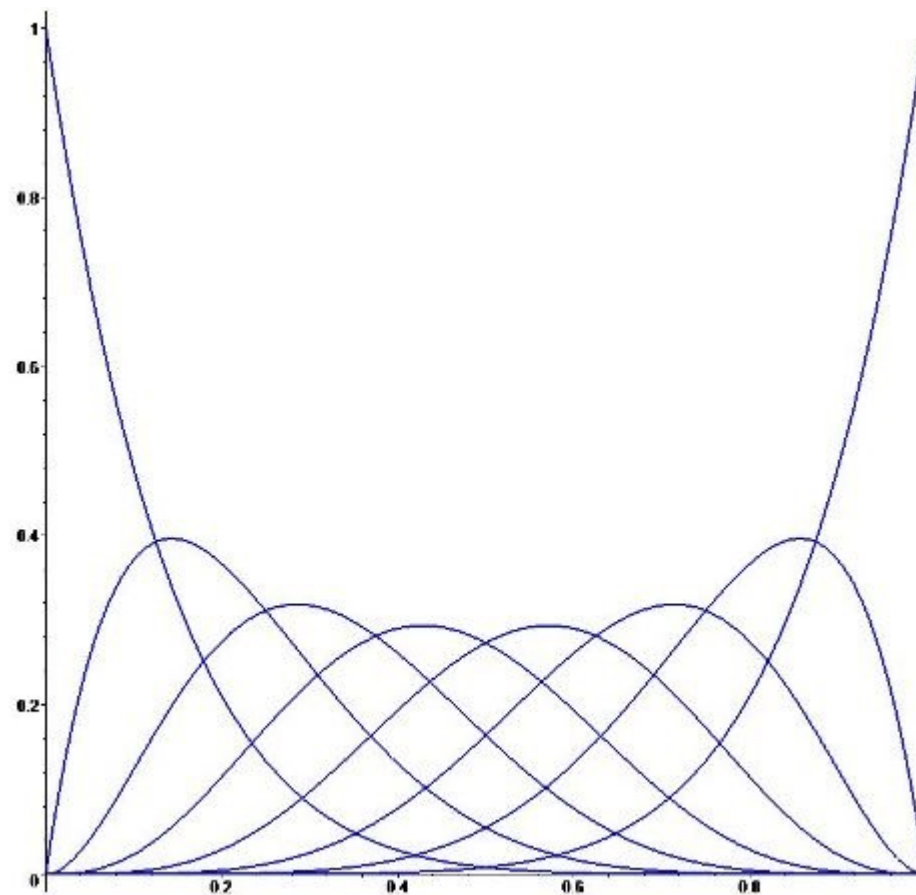


S. N. Bernstein (1880–1968)

Wielomiany Bernsteina

- Wielomiany Bernsteina (1912)

$$B_k^n(x) := \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \quad (k = 0, 1, \dots, n; n \in \mathbb{N}).$$



$$\Leftarrow B_k^7(x), x \in [0, 1]$$

Wielomiany Bernsteina

- Wielomiany Bernsteina (1912)

$$B_k^n(x) := \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \quad (k = 0, 1, \dots, n; n \in \mathbb{N}).$$

- Dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$ oraz $x \in \mathbb{R}$ zachodzi

$$B_0^n(x) + B_1^n(x) + \dots + B_{n-1}^n(x) + B_n^n(x) = 1$$

Krzywe Béziera

- Niech dane będą punkty $\mathbf{W}_k \in \mathbb{E}^2$ ($k = 0, 1, \dots, n$)

Krzywe Béziera

- Niech dane będą punkty $\mathbf{W}_k \in \mathbb{E}^2$ ($k = 0, 1, \dots, n$).
- Krzywą parametryczną postaci

$$\mathbf{P}(t) := B_0^n(t)\mathbf{W}_0 + B_1^n(t)\mathbf{W}_1 + \dots + B_n^n(t)\mathbf{W}_n \quad (0 \leq t \leq 1)$$

nazywamy krzywą Béziera stopnia n

Krzywe Béziera

- Niech dane będą punkty $\mathbf{W}_k \in \mathbb{E}^2$ ($k = 0, 1, \dots, n$)
- Krzywą parametryczną postaci

$$\mathbf{P}(t) := B_0^n(t)\mathbf{W}_0 + B_1^n(t)\mathbf{W}_1 + \dots + B_n^n(t)\mathbf{W}_n \quad (0 \leq t \leq 1)$$

nazywamy krzywą Béziera stopnia n , a punkty \mathbf{W}_k – jej punktami kontrolnymi

Krzywe Béziera

- Niech dane będą punkty $\mathbf{W}_k \in \mathbb{E}^2$ ($k = 0, 1, \dots, n$)
- Krzywą parametryczną postaci

$$\mathbf{P}(t) := B_0^n(t)\mathbf{W}_0 + B_1^n(t)\mathbf{W}_1 + \dots + B_n^n(t)\mathbf{W}_n \quad (0 \leq t \leq 1)$$

nazywamy krzywą Béziera stopnia n , a punkty \mathbf{W}_k – jej punktami kontrolnymi.

- Zauważmy, że $\mathbf{P}(t)$ (t – dowolne) jest kombinacją barycentryczną punktów kontrolnych

Krzywe Béziera

- Niech dane będą punkty $\mathbf{W}_k \in \mathbb{E}^2$ ($k = 0, 1, \dots, n$)
- Krzywą parametryczną postaci

$$\mathbf{P}(t) := B_0^n(t)\mathbf{W}_0 + B_1^n(t)\mathbf{W}_1 + \dots + B_n^n(t)\mathbf{W}_n \quad (0 \leq t \leq 1)$$

nazywamy krzywą Béziera stopnia n , a punkty \mathbf{W}_k – jej punktami kontrolnymi.

- Zauważmy, że $\mathbf{P}(t)$ (t – dowolne) jest kombinacją barycentryczną punktów kontrolnych – czyli punktem na płaszczyźnie,

$$\mathbf{P} : [0, 1] \rightarrow \text{punkt w } \mathbb{E}^2$$

Krzywe Béziera

- Niech dane będą punkty $W_k \in \mathbb{E}^2$ ($k = 0, 1, \dots, n$)
- Krzywą parametryczną postaci

$$P(t) := B_0^n(t)W_0 + B_1^n(t)W_1 + \dots + B_n^n(t)W_n \quad (0 \leq t \leq 1)$$

nazywamy krzywą Béziera stopnia n , a punkty W_k – jej punktami kontrolnymi.

- Zauważmy, że $P(t)$ (t – dowolne) jest kombinacją barycentryczną punktów kontrolnych – czyli punktem na płaszczyźnie,

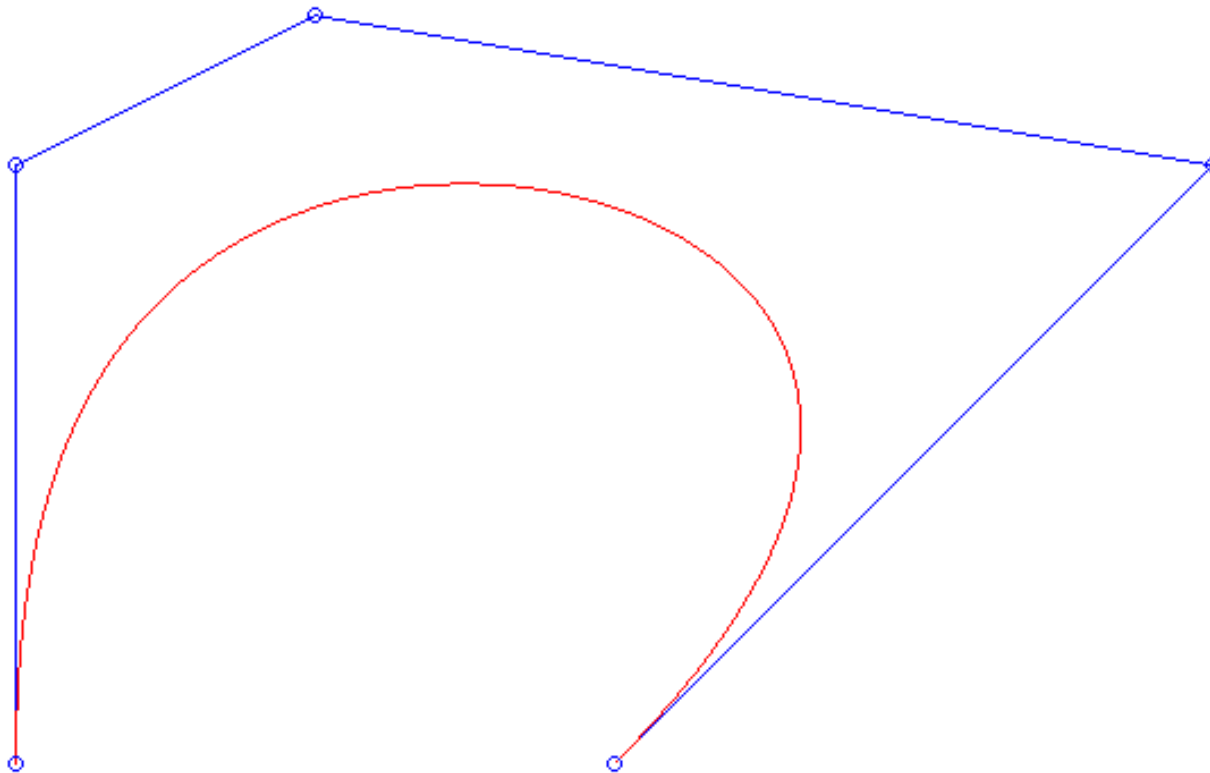
$$P : [0, 1] \rightarrow \text{punkt w } \mathbb{E}^2.$$

- Podstawowe własności

$$P(0) = W_0, \quad P(1) = W_n, \quad P([0, 1]) \subset \text{conv}\{W_0, W_1, \dots, W_n\},$$

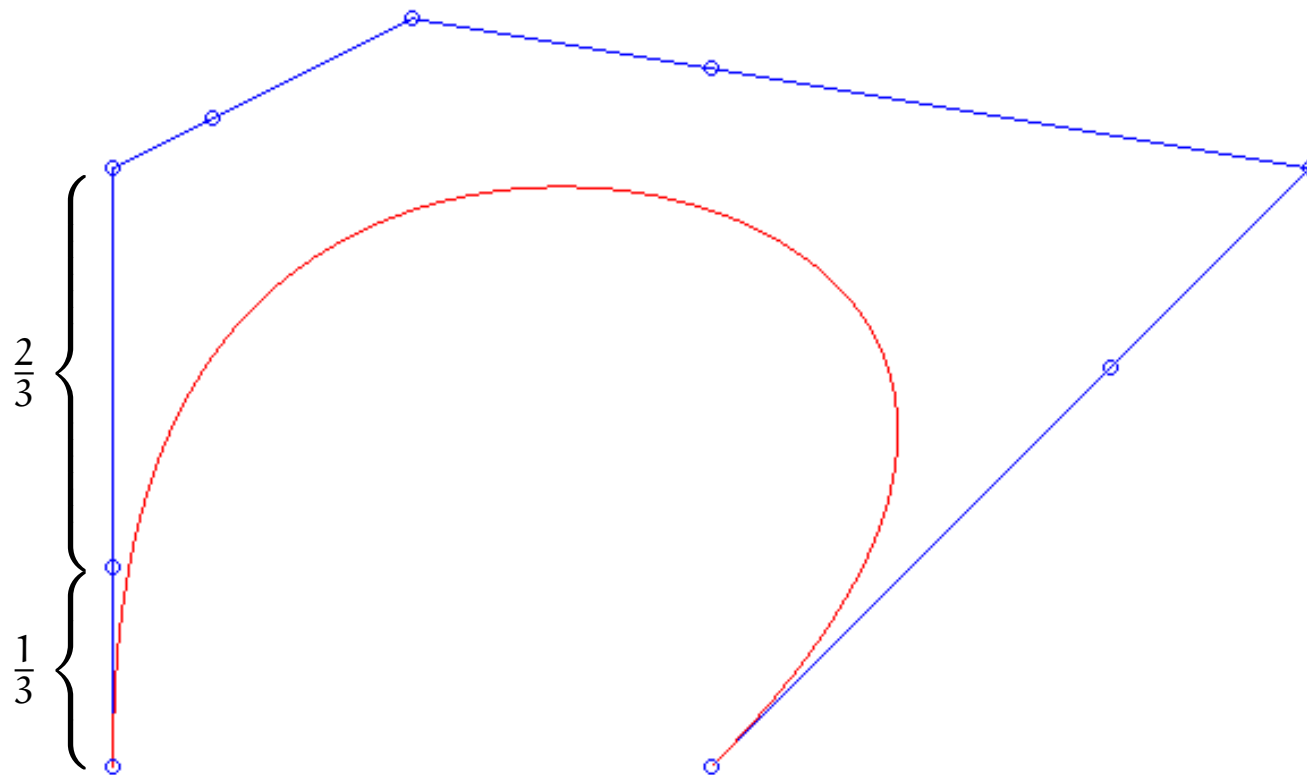
$$P'(0) = n(W_1 - W_0), \quad P'(1) = n(W_n - W_{n-1})$$

Algorytm de Casteljau – interpretacja geometryczna



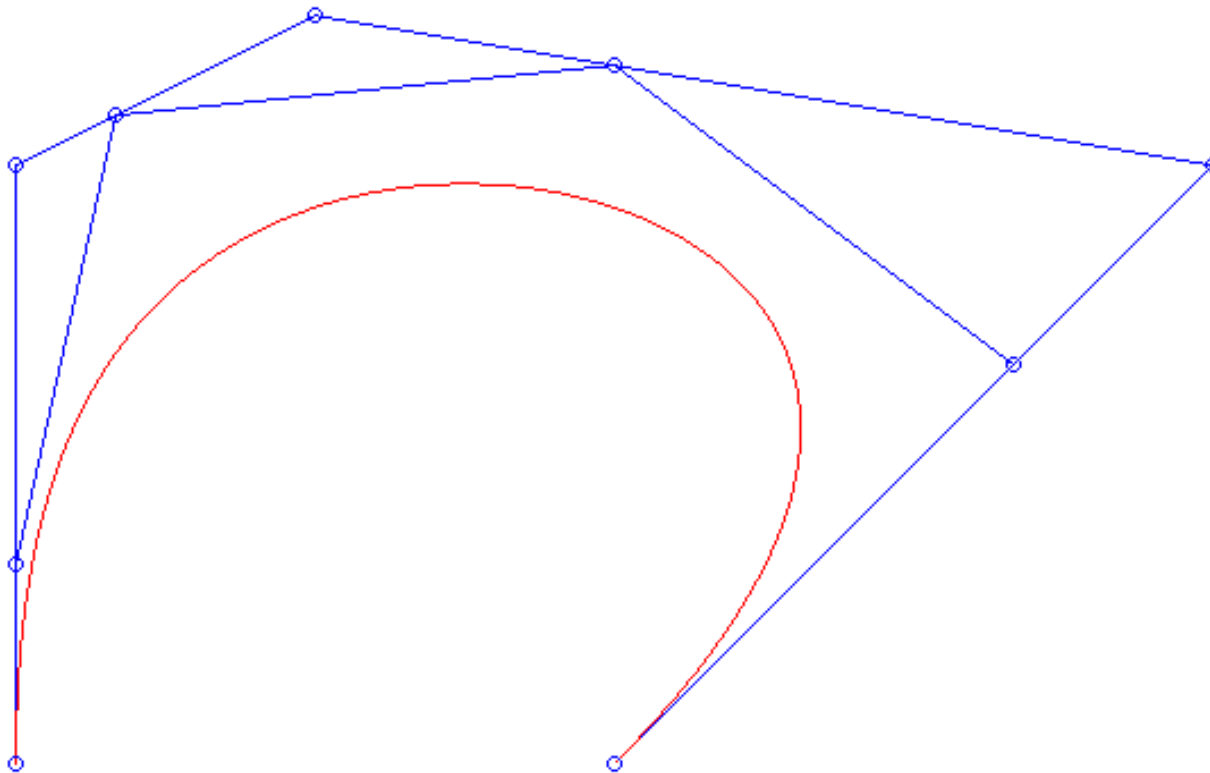
Jak wyznaczyć punkt na krzywej Béziera? Na przykład $P(1/3) = ?$

Algorytm de Casteljau – interpretacja geometryczna



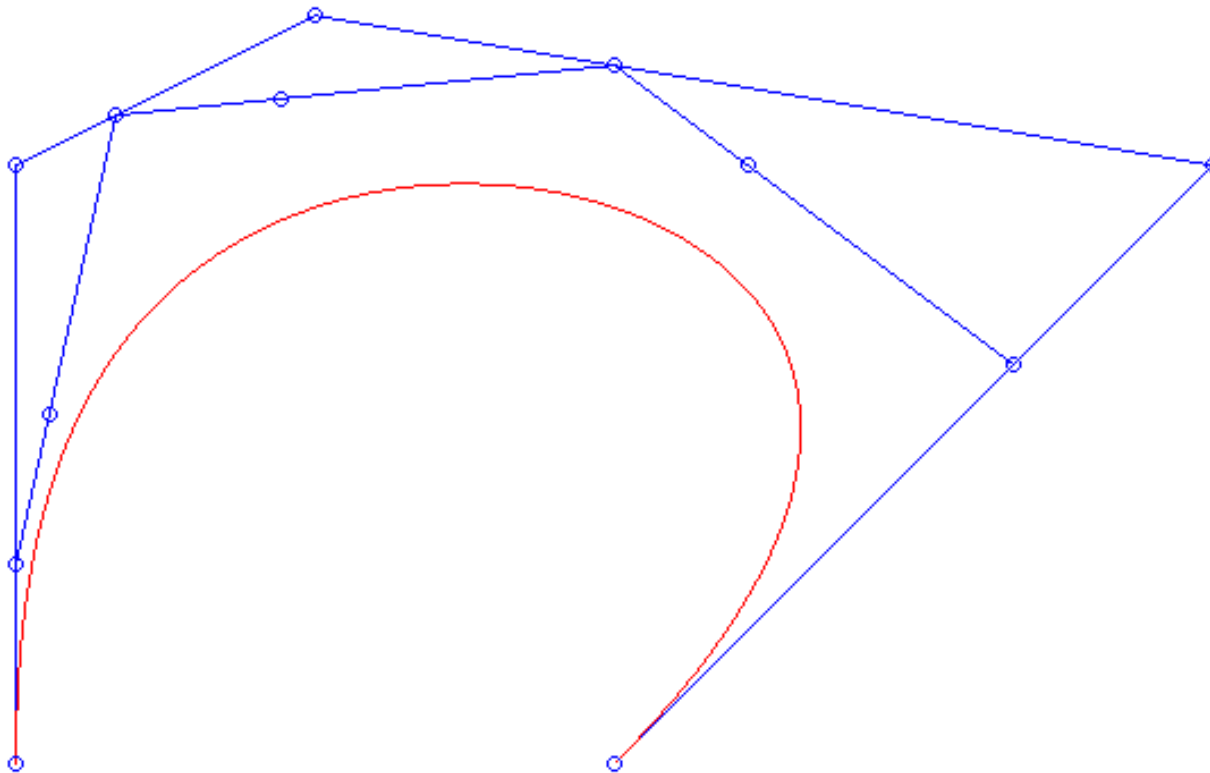
Jak wyznaczyć punkt na krzywej Béziera? Na przykład $P(1/3) = ?$

Algorytm de Casteljau – interpretacja geometryczna



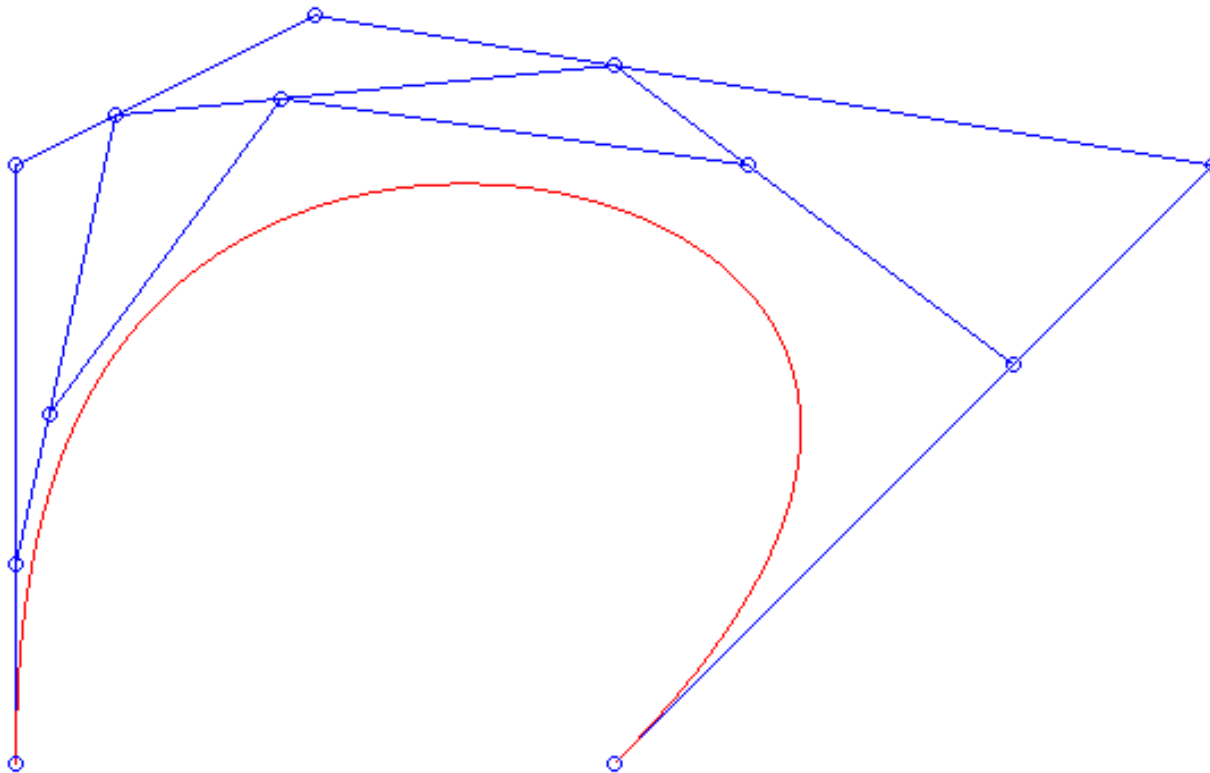
Jak wyznaczyć punkt na krzywej Béziera? Na przykład $P(1/3) = ?$

Algorytm de Casteljau – interpretacja geometryczna



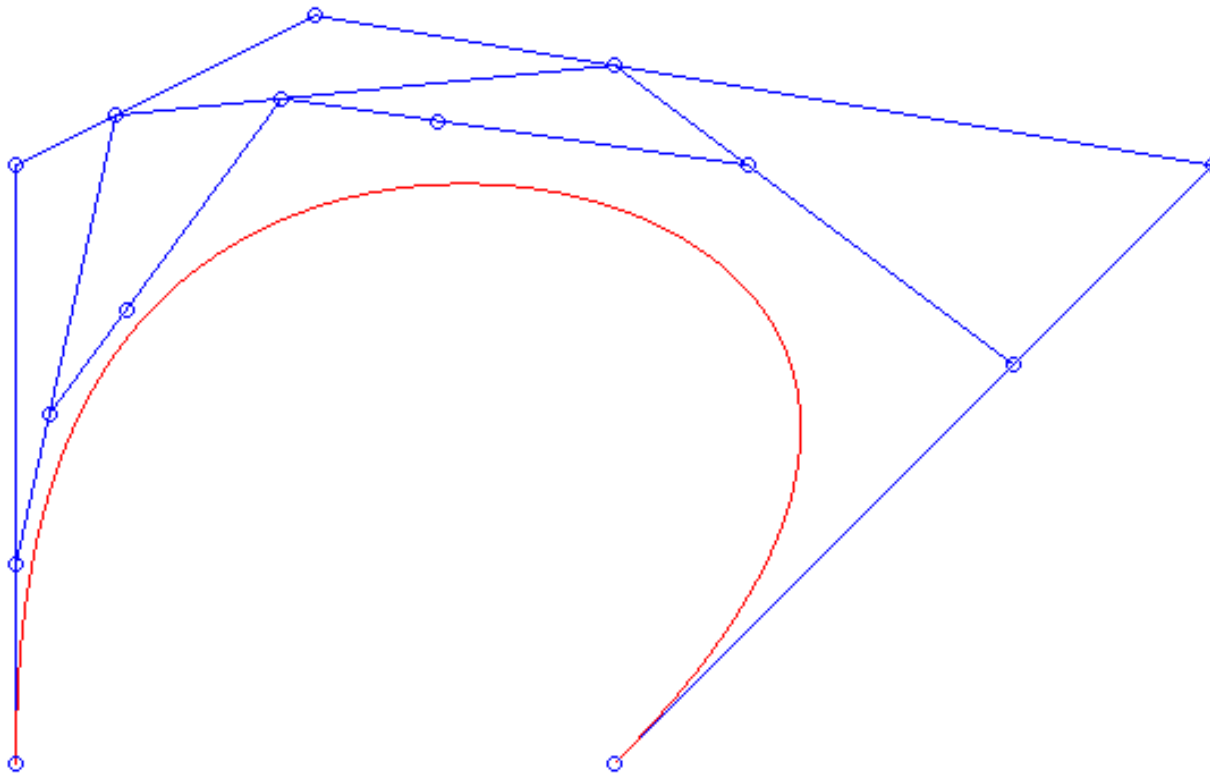
Jak wyznaczyć punkt na krzywej Béziera? Na przykład $P(1/3) = ?$

Algorytm de Casteljau – interpretacja geometryczna



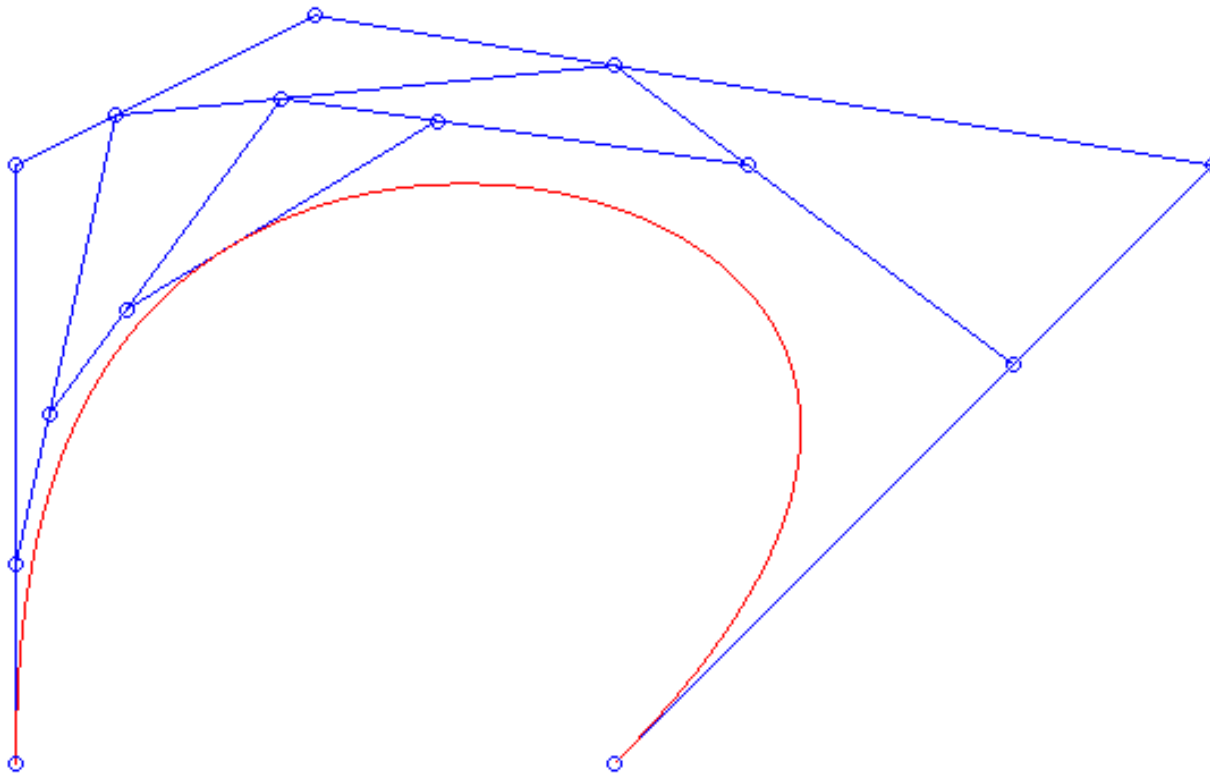
Jak wyznaczyć punkt na krzywej Béziera? Na przykład $P(1/3) = ?$

Algorytm de Casteljau – interpretacja geometryczna



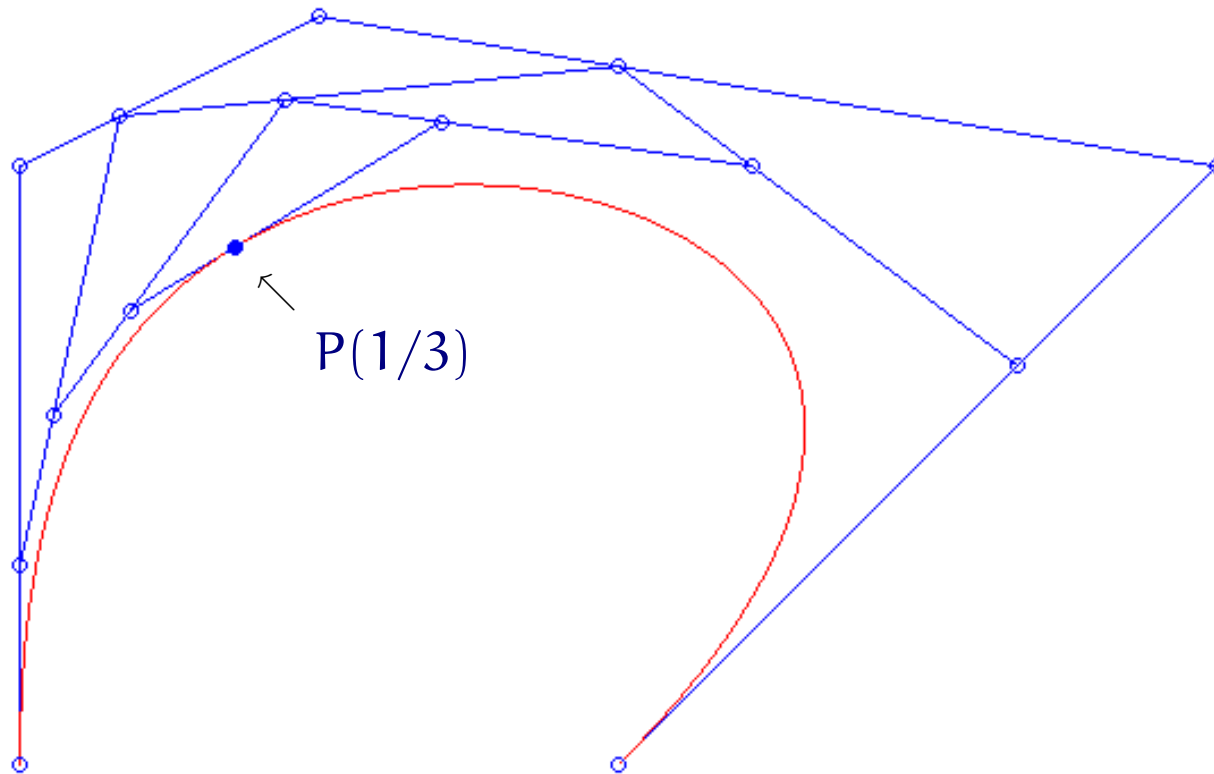
Jak wyznaczyć punkt na krzywej Béziera? Na przykład $P(1/3) = ?$

Algorytm de Casteljau – interpretacja geometryczna



Jak wyznaczyć punkt na krzywej Béziera? Na przykład $P(1/3) = ?$

Algorytm de Casteljau – interpretacja geometryczna



Algorytm de Casteljau

- Niech dana będzie krzywa Béziera $P(t)$ o punktach kontrolnych $W_k \in \mathbb{E}^2$ ($0, 1, \dots, n$) oraz liczba $t \in [0, 1]$

Algorytm de Casteljau

- Niech dana będzie krzywa Béziera $P(t)$ o punktach kontrolnych $W_k \in \mathbb{E}^2$ ($0, 1, \dots, n$) oraz liczba $t \in [0, 1]$.
- (Algorytm de Casteljau) Niech wielkości $W_k^{(i)}$ ($i = 0, 1, \dots, n; k = 0, 1, \dots, n - i$) będą określone w następujący sposób rekurencyjny:

$$W_k^{(0)} := W_k \quad (k = 0, 1, \dots, n),$$

$$W_k^{(i)} := (1 - t)W_k^{(i-1)} + tW_{k+1}^{(i-1)} \quad (i = 1, 2, \dots, n; k = 0, 1, \dots, n - i)$$

Algorytm de Casteljau

- Niech dana będzie krzywa Béziera $P(t)$ o punktach kontrolnych $W_k \in \mathbb{E}^2$ ($0, 1, \dots, n$) oraz liczba $t \in [0, 1]$.
- (Algorytm de Casteljau) Niech wielkości $W_k^{(i)}$ ($i = 0, 1, \dots, n$; $k = 0, 1, \dots, n - i$) będą określone w następujący sposób rekurencyjny:

$$W_k^{(0)} := W_k \quad (k = 0, 1, \dots, n),$$

$$W_k^{(i)} := (1 - t)W_k^{(i-1)} + tW_{k+1}^{(i-1)} \quad (i = 1, 2, \dots, n; k = 0, 1, \dots, n - i).$$

- Wtedy $P(t) = W_0^{(n)}$

Algorytm de Casteljau

- Niech dana będzie krzywa Béziera $P(t)$ o punktach kontrolnych $W_k \in \mathbb{E}^2$ ($0, 1, \dots, n$) oraz liczba $t \in [0, 1]$.
- (Algorytm de Casteljau) Niech wielkości $W_k^{(i)}$ ($i = 0, 1, \dots, n$; $k = 0, 1, \dots, n - i$) będą określone w następujący sposób rekurencyjny:

$$W_k^{(0)} := W_k \quad (k = 0, 1, \dots, n),$$

$$W_k^{(i)} := (1 - t)W_k^{(i-1)} + tW_{k+1}^{(i-1)} \quad (i = 1, 2, \dots, n; k = 0, 1, \dots, n - i).$$

- Wtedy $P(t) = W_0^{(n)}$.
- Złożoność algorytmu: $O(n^2)$

Algorytm de Casteljau

- Niech dana będzie krzywa Béziera $P(t)$ o punktach kontrolnych $W_k \in \mathbb{E}^2$ ($0, 1, \dots, n$) oraz liczba $t \in [0, 1]$.
- (Algorytm de Casteljau) Niech wielkości $W_k^{(i)}$ ($i = 0, 1, \dots, n$; $k = 0, 1, \dots, n - i$) będą określone w następujący sposób rekurencyjny:

$$W_k^{(0)} := W_k \quad (k = 0, 1, \dots, n),$$

$$W_k^{(i)} := (1 - t)W_k^{(i-1)} + tW_{k+1}^{(i-1)} \quad (i = 1, 2, \dots, n; k = 0, 1, \dots, n - i).$$

- Wtedy $P(t) = W_0^{(n)}$.
- Złożoność algorytmu: $O(n^2)$.
- Czy można szybciej?

Algorytm de Casteljau

- Niech dana będzie krzywa Béziera $P(t)$ o punktach kontrolnych $W_k \in \mathbb{E}^2$ ($0, 1, \dots, n$) oraz liczba $t \in [0, 1]$.
- (Algorytm de Casteljau) Niech wielkości $W_k^{(i)}$ ($i = 0, 1, \dots, n$; $k = 0, 1, \dots, n - i$) będą określone w następujący sposób rekurencyjny:

$$W_k^{(0)} := W_k \quad (k = 0, 1, \dots, n),$$

$$W_k^{(i)} := (1 - t)W_k^{(i-1)} + tW_{k+1}^{(i-1)} \quad (i = 1, 2, \dots, n; k = 0, 1, \dots, n - i).$$

- Wtedy $P(t) = W_0^{(n)}$.
- Złożoność algorytmu: $O(n^2)$.
- Czy można szybciej?

Tak!

Algorytm de Casteljau

- Niech dana będzie krzywa Béziera $P(t)$ o punktach kontrolnych $W_k \in \mathbb{E}^2$ ($0, 1, \dots, n$) oraz liczba $t \in [0, 1]$.
- (Algorytm de Casteljau) Niech wielkości $W_k^{(i)}$ ($i = 0, 1, \dots, n$; $k = 0, 1, \dots, n - i$) będą określone w następujący sposób rekurencyjny:

$$W_k^{(0)} := W_k \quad (k = 0, 1, \dots, n),$$

$$W_k^{(i)} := (1 - t)W_k^{(i-1)} + tW_{k+1}^{(i-1)} \quad (i = 1, 2, \dots, n; k = 0, 1, \dots, n - i).$$

- Wtedy $P(t) = W_0^{(n)}$.
- Złożoność algorytmu: $O(n^2)$.
- Czy można szybciej?

Tak! \Rightarrow Schemat Hornera

Algorytm de Casteljau

- Niech dana będzie krzywa Béziera $P(t)$ o punktach kontrolnych $W_k \in \mathbb{E}^2$ ($0, 1, \dots, n$) oraz liczba $t \in [0, 1]$.
- (Algorytm de Casteljau) Niech wielkości $W_k^{(i)}$ ($i = 0, 1, \dots, n$; $k = 0, 1, \dots, n - i$) będą określone w następujący sposób rekurencyjny:

$$W_k^{(0)} := W_k \quad (k = 0, 1, \dots, n),$$

$$W_k^{(i)} := (1 - t)W_k^{(i-1)} + tW_{k+1}^{(i-1)} \quad (i = 1, 2, \dots, n; k = 0, 1, \dots, n - i).$$

- Wtedy $P(t) = W_0^{(n)}$.
- Złożoność algorytmu: $O(n^2)$.
- Czy można szybciej?

Tak! \Rightarrow Schemat Hornera $\Rightarrow P(t)$ obliczamy w czasie $O(n)$

Trochę historii



Pierre Bézier (1910–1999)



Paul de Casteljaou (ur. 1930)



Trochee istorii

Remarque 1 - Le point L peut être extérieur à A
des arcs
Dana, le c
La constr
elle est

Remarque

$P = \lambda^3 A + 3\lambda^2 \mu I$

$\lambda = 1 - \mu$

$A (1.3\mu + 3\mu^2)$

$B (3\mu - 6\mu^2)$

$+ C (3\mu^2)$

$+ D (1)$

$P = OA - 3\mu \cdot AB$

pour 4° degré: $E, h) = 6C - 4B + A$ $(D - 3C + 3B - A)$



Paul de Casteljau (ur. 1930)



