1. Zadanie 3.7

1.1. Treść

Macier A rozmiaru $n \times n$ nazywamy macierzą Toeplitza, jeśli jej elementy spełnią równanie $Ai, j] = A[i-1, j-1]$ dla $2 \leqslant i, j \leqslant n$.

[a]Podaj reprezentację macierzy Toeplitza, pozwalającą dodawać dwie takie macierze w czasie On. Podaj algorytm, oparty na metodzie *dziel i zwyciężaj*, mnożenia macierzy Toeplitza przez wektor. Ile operacji arytmetycznych wymaga takie mnożenie?

1.2. a)

Standardowa reprezentacja macierzy nie pozwoliłaby nam uzyskać wystarczająco niskiej złożoności operacji dodawania macierzy, potrzebowalibyśmy $O(n^2)$ operacji. Zauważmy, że tak naprawdę nie potrzebujemy informacji o większości elementów tablicy, ze swojej natury i tak prawie każdy się powtarza kilka razy. Przyjrzyjmy się wierszom tablicy i zauważmy, że każdy kolejny jest poprzednim wierszem, ale przesuniętym o 1 miejsce w prawo. Nowy element znajduje się po skrajnie prawej stronie. W takim razie możemy zapamiętywać jedynie pierwszy wiersz macierzy oraz jej pierwszą kolumnę, bo tylko tam znajdują się elementy unikalne. Łącznie otrzymamy w ten sposób $2n-1$ elementów, zatem dodanie do siebie dwóch takich macierzy będzie można wykonać w czasie $O(n)$.

1.3. Podpunkt b)

Rozpiszmy mnożenie macierzy razy wektor.

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{v} = \begin{vmatrix} A & B \\ C & A \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} v_1 \\ v_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} Av_1 + Bv_2 \\ Cv_1 + Av_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} Av_1 + Bv_2 + (Av_2 - Av_2) \\ Cv_1 + Av_2 + (Av_1 - Av_1) \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} (A+B)v_2 + A(v_1 - v_2) \\ (C+A)v_1 - A(v_1 - v_2) \end{vmatrix}$$

Powyższe przekształcenia sprawiły, że przedstawiliśmy operację mnozenia macierzy przez wektor jako dwa dodawania macierzy, jedno odejmowanie wektór oraz trzy mnożenia mniejszych macierzy przez wektor. Każda z mniejszych macierzy ma wymiar $\frac{n}{2} \times \frac{n}{2}$. Przeanalizujmy dokładniej liczbę operacji dla parzystych i nieparzystych wartości n.

1.3.1. Liczba operacji dla parzystego n

1. $(A+B) = n-1$
2. $(C+A) = n-1$
3. $v_2(A+B) = T(\frac{n}{2})$
4. $v_1(C+B) = T(\frac{n}{2})$
5. $v_1 - v_2 = \frac{n}{2}$
6. $A(v_1 - v_2) = T(\frac{n}{2})$
7. $(A+B)v_2 + A(v_1 - v_2) = \frac{n}{2}$
8. $(C+A)v_1 - A(v_1 - v_2) = \frac{n}{2}$

Łącznie otrzymujemy $\frac{7n-4}{2} + 3T(\lfloor\frac{n}{2}\rfloor)$ operacji. Spróbujmy zastosować *uniwersalne twierdzenie o rekurencji*, podane na wykładzie.

Twierdzenie 1 *Niech $a, b, c \in \mathcal{N}$. Rozwiązaniem równania rekurencyjnego*

$$T(n) = \begin{cases} b & \textit{dla } n = 1 \\ aT(n/c) + bn & \textit{dla } n > 1 \end{cases}$$

dla n będących potęgą liczby c jest

$$T(n) = \begin{cases} \Theta(n) & \textit{jeżeli } a < c, \\ \Theta(n \log n) & \textit{jeżeli } a = c, \\ \Theta(n^{\log_c a}) & \textit{jeżeli } a > c \end{cases}$$

Rysunek 1. Twierdzenie o rekurencji uniwersalnej

W naszym przypadku $a < c$, zatem liczba wykonanych operacji może zostać opisana jako $\Theta(n^{log_2 3})$.

1.3.2. Nieparzyste n

Wyszczególnijmy jeden wiersz i jedną kolumnę, niech będą to wiersz $[B']$ oraz kolumna $[A', B', C']$. Rozpiszmy iloczyn, podobnie jak wcześniej.

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{v} = \begin{vmatrix} A & A^{'} & B \\ & B' & \\ C & C^{'} & A \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} Av_1 + A^{'}v_2 + Bv_3 \\ B^{'}v \\ Cv_1 + C^{'}v_2 + Av_3 + \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} Av_1 + A^{'}v_2 + Bv_3 + (Av_3 - Av_3) \\ B^{'}v \\ Cv_1 + C^{'}v_2 + Av_2 + (Av_1 - Av_1) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} (A+B)v_3 + A^{'}v_2 + (v_1 - v_3)A \\ B^{'}v \\ (A+C)v_1 + C^{'}v_2 - (v_1 - v_2)A \end{vmatrix}$$

1.4. Liczba operacji dla nieparzystego n

Obliczmy liczbę operacji

1. Dodawanie macierzy A, B i C sprowadza się do dodawania macierzy Toeplitza rozmiary $\frac{n-1}{2} \times \frac{n-1}{2}$, czyli zajmie to $2n - 4$ operacji)
2. Odejmowanie wektorów długości $\frac{n-1}{2}$ daje $\frac{n-1}{2}$ operacji
3. Obliczanie trzech mnożeń macierzy Toeplitza rozmiarów $\frac{n-1}{2} \times \frac{n}{2}$ przez wektor, co daje $3T(\lfloor \frac{n}{2} \rfloor)$
4. Dwukrotnie mnożymy dwa wektory długości $\frac{n-1}{2}$ przez skalar, co daje $n - 1$ operacji
5. Sumowanie wyników, czyli sumowanie wektorów długości $\frac{n-1}{2}$, zatem $2n - 2$ operacji

Łącznie otrzymujemy $\frac{15n-17}{2} + 3T(\lfloor \frac{n}{2} \rfloor)$. Wykorzystanie twierdzenia o rekursji uniwersalenej ponownie daje nam możliwość wyznaczenia liczby operacji w tym przypadku na $\Theta(n^{log_2 3})$.

1.5. Podsumowanie ilości operacji

Całość ostatecznie możemy zapisać jako:

$$T(n) = \begin{cases} 1 & \text{gdy } n = 1 \\ \theta(n^{log_2 3}) & \text{wpp.} \end{cases}$$