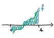
Analiza numeryczna (L)
13.01.2021 r.

Powtórka

- przybliżać wartości $\int_a^b f(x)dx$ (f - ciągła)

$\underbrace{w\text{ - prosta do scałkowania funkcja (np. wielomian)} + w(x) \approx f(x),\ x \in [a,b]}$

$$I(f) := \int_a^b f(x)dx \overset{!!}{\approx} \int_a^b w(x)dx$$



- kwadratura liniowa

$$Q_n(f) := \sum_{k=0}^{n} A_k^{(n)} f(x_k^{(n)})$$

$A_k^{(n)}$ ← współczynniki; $x_k^{(n)}$ ← węzły (parami różne)

CEL: Tak dobrać współczynniki i węzły (uniwersalne), aby

$$I(f) \approx Q_n(f)$$

dla funkcji f z szerokiej klasy

- kwadratury interpolacyjne

POMYSŁ: Funkcję podcałkową zastępujemy jej wielomianem interpolacyjnym dla ustalonych węzłów $x_0, x_1, \ldots, x_n$

$$L_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \left(\lambda_k(x)\right) f(x_k)$$

$$\lambda_k(x) := \prod_{\substack{i=0\\ i\neq k}}^{n} \frac{x - x_i}{x_k - x_i}$$

$$\Downarrow$$

$$Q_n(f) := \int_a^b L_n(x)\,dx = \sum_{k=0}^{n} \underbrace{\left(\int_a^b \lambda_k(x)\,dx\right)}_{\text{współczynniki}} \cdot f(x_k)$$

← kwadratura liniowa

- błąd kwadratury interpolacyjnej
- rząd kwadratury

$$\text{rząd}(Q_n) = r \iff \forall_{w \in \Pi_{r-1}}\ Q_n(w) = I(w)$$

(inaczej: błąd kwadratury $= 0$)

$$\exists_{v \in \Pi_r \setminus \Pi_{r-1}}\ Q_n(v) \neq I(v)$$

(inaczej: błąd kwadratury $\neq 0$)

TW

$$\text{rząd}(Q_n) \leq 2n+2$$

$$\text{rząd}(Q_n) \geq n+1 \Rightarrow Q_n \text{ - kwadratura interpolacyjna}$$

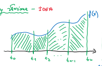
- kwadratury Newtona - Cotesa + ich błąd + rząd
  - kwadratury interpolacyjne dla węzłów równoodległych

$$\boxed{x_k := a + k\cdot h,\quad h := \frac{b-a}{n}\quad (0 \leq k \leq n)}$$

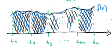
- wzór trapezów ($n=1$)
- wzór Simpsona ($n=2$)

Wykład 12. Kwadratury złożone. Metoda Romberga. Kwadratury Gaussa.

Kwadratury złożone - IDEA



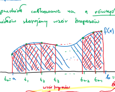
$$\boxed{\int_{t_0}^{t_n} f(x)\,dx = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{t_k}^{t_{k+1}} f(x)\,dx}$$



→ Dzielimy przedział całkowania na części (małe, w których funkcja zbytnio się nie zmienia) i stosujemy prostą kwadraturę w każdym z podprzedziałów

Złożony wzór trapezów

Dzielimy przedział całkowania na n równych części i w każdym z podprzedziałów stosujemy wzór trapezów



$$h := \frac{b-a}{n}$$

← odległość pomiędzy kolejnymi węzłami

$$\int_{t_k}^{t_{k+1}} f(x)dx = \underbrace{\frac{h}{2}\left[f(t_k) + f(t_{k+1})\right]}_{\text{wzór trapezów}} \underbrace{- \frac{h^3}{12} f''(\eta_k)}_{\text{błąd wzoru trapezów}},\quad \eta_k \in (t_k, t_{k+1}),\ f \in C^2[t_k, t_{k+1}]$$

$$I(f) = \int_a^b f(x)dx = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{t_k}^{t_{k+1}} f(x)dx =: T_n(f) + R_n^T(f)$$

$T_n(f)$ ← złożony wzór trapezów; $R_n^T(f)$ ← błąd złożonego wzoru trapezów

$$T_n(f) := h \sum_{k=0}^{n}{}'' f(t_k)$$

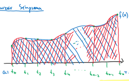
Przypomnienie: $\sum_{k=0}^{m}{}'' a_k := \frac{a_0}{2} + a_1 + a_2 + \ldots + a_{m-1} + \frac{a_m}{2}$

$$R_n^T(f) := -\frac{h^3}{12} \boxed{\sum_{k=0}^{n-1} f''(\eta_k)} \overset{!}{=} -n\frac{h^3}{12} f''(\eta),\quad \eta \in (a,b)$$

jeśli $f \in C^2[a,b]$

$$= -(b-a)\frac{h^2}{12} f''(\eta) \text{ "}= O\left(\frac{1}{n^2}\right)\text{"}$$

Złożony wzór Simpsona



Dzielimy przedział całkowania na n równych części (z tym, że $n = 2m$ - liczba parzysta) i w każdym z podprzedziałów $[t_{2k}, t_{2k+2}]$ stosujemy wzór Simpsona.

$$h = \frac{b-a}{n}$$

n - parzyste, $n = 2m$

$$\int_{t_{2k}}^{t_{2k+2}} f(x)dx = \underbrace{\frac{h}{3}\left[f(t_{2k}) + 4f(t_{2k+1}) + f(t_{2k+2})\right]}_{\text{wzór Simpsona}} \underbrace{- \frac{h^5}{90} f^{(4)}(\alpha_k)}_{\text{błąd wzoru Simpsona}},$$

$$\alpha_k \in (t_{2k}, t_{2k+2}),\quad f \in C^4[t_{2k}, t_{2k+2}]$$

$$\Downarrow$$

$$\int_{t_0}^{t_n} f(x)dx = \sum_{k=0}^{m-1} \int_{t_{2k}}^{t_{2k+2}} f(x)dx =: S_n(f) + R_n^S(f)$$

$S_n(f)$ ← złożony wzór Simpsona; $R_n^S(f)$ ← błąd złożonego wzoru Simpsona

$$S_n(f) := \frac{h}{3}\left(2\sum_{k=0}^{m}{}'' f(t_{2k}) + 4\sum_{k=1}^{m} f(t_{2k-1})\right)$$

$$R_n^S(f) := -(b-a)\frac{h^4}{180} f^{(4)}(\alpha) \text{ "}= O\left(\frac{1}{n^4}\right)\text{"}$$

$\alpha \in (a,b)$

TW Jeśli $f \in C[a,b]$, to

$$\lim_{n\to\infty} T_n(f) = I(f) = \int_a^b f(x)dx$$

$$\lim_{n\to\infty} S_n(f) = I(f) = \int_a^b f(x)dx$$

Nietrudno sprawdzić, że

Wzrastający przykład

n	cyfry T_{2n}	cyfry S_{2n}
10	7	13
11	7	13
12	8	15
13	8	16
14	8	18
15	9	19

?

$$S_n(f) = \frac{4T_n(f) - 1T_m(f)}{4 - 1}\quad (n = 2m)$$

← związek pomiędzy złożonym wzorem Simpsona a złożonym wzorem trapezów

Przyspieszanie zbieżności

Metoda Romberga

Niech będzie $n = 2^k$ ($k = 0,1,2,\ldots$) i niech

$$h_k := \frac{b-a}{2^k},\quad x_i^{(k)} := a + ih_k\quad (i = 0,1,\ldots,2^k)$$

$$T_{0k} := T_{2^k}(f) = h_k \sum_{i=0}^{2^k}{}'' f(x_i^{(k)}).$$

Wprowadzamy wielkości T_{mk} ($k = 0,1,\ldots;\ m = 1,2,\ldots$) następującym wzorem:

$$T_{mk} = \frac{4^m T_{m-1,k+1} - 1\cdot T_{m-1,k}}{4^m - 1}$$

← metoda (wzór) Romberga

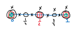
złożony wzór trapezów $T_{2^n}(f)$

$$\begin{array}{lllll}
T_{00} & & & & \\
T_{01} & T_{10} & & & \\
T_{02} & T_{11} & T_{20} & & \\
T_{03} & T_{12} & T_{21} & T_{30} & \\
T_{04} & T_{13} & T_{22} & T_{31} & T_{40} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ldots
\end{array}$$

← tablica Romberga

największy koszt obliczeniowy

Możliwe są oszczędności



Własności elementów tablicy Romberga:

- $T_{mk} = I(f) - c_m h_k^{2m+2} - \ldots$
- $T_{mk} = \sum_{j=0}^{2^{m+k}} A_j^{(n)} f(x_j^{(m+k)})$ (współczynniki $A_j^{(n)} > 0$)
- $T_{m0}, T_{m1}, T_{m2}, \ldots$ to kwadratury rzędu $2m+2$
- $$\lim_{k\to\infty} T_{mk} = \lim_{m\to\infty} T_{mk} = I(f) = \int_a^b f(x)dx$$

Informacja o kwadraturach Gaussa

Pytanie

Jak w wypadku kwadratury liniowej

$$Q_n(f) := \sum_{k=0}^{n} A_k^{(n)} f(x_k^{(n)})$$

dobrać współczynniki $A_k^{(n)}$ i węzły $x_k^{(n)}$, aby jej rząd był możliwie największy czyli wynosił $2n+2$?

Nie jest to proste. Na pewno kwadratura ta musi być interpolacyjna, tzn. jej współczynniki wyrażają się wzorem

$$A_k^{(n)} = \int_a^b \left(\prod_{\substack{i=0\\ i\neq k}}^{n} \frac{x - x_i^{(n)}}{x_k^{(n)} - x_i^{(n)}}\right) dx,$$

a to oznacza, że wystarczy skupić się na odpowiednim doborze węzłów ← TRUDNE

Twierdzenie

Przyjmijmy $[a,b] = [-1,1]$. Wtedy węzły $x_0^{(n)}, x_1^{(n)}, \ldots, x_n^{(n)}$ kwadratury mającej rząd równy $2n+2$ są miejscami zerowymi tzw. $(n+1)$-szego wielomianu Legendre'a P_{n+1}. Wielomiany te spełniają następujący związek rekurencyjny:

$$(*)\ \begin{cases} P_0(x) \equiv 1, \quad P_1(x) \equiv x \\ P_k(x) = \frac{2k-1}{k} x P_{k-1}(x) - \frac{k-1}{k} P_{k-2}(x) \quad (k \geq 2). \end{cases}$$

Uwagi

1. Korzystając z rekurencji $(*)$ możemy wyznaczyć dowolny wielomian Legendre'a.
2. Nie ma jawnych wzorów dla miejsc zerowych P_{n+1}, ale można znajdować je w sposób numeryczny.
3. Miejsca zerowe te zostały już dawno obliczone z dużą dokładnością i są stablicowane, tak samo jak odpowiednie współczynniki A_n^k.

Kwadratura Gaussa-Legendre'a →

$$\boxed{Q_n^{GL}(f) := \sum_{k=0}^{n} A_k^{(n)} f(x_k^{(n)})}$$

$x_k^{(n)}$ ← miejsca zerowe wielomianu P_{n+1}