

Imię i nazwisko: Krystian Jasionek

1	2	3	4	5	6	7							Σ
---	---	---	---	---	---	---	--	--	--	--	--	--	---

4

Rozwiązanie zadania musi zmieścić się na jednej kartce. Powinno ono być napisane starannie oraz czytelnie, a wielkość liter nie może być mniejsza niż w tym tekście.

$a > 0$ Chcemy poligdy o wartości $a^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{a}$

Śledząc x t. że $x = \sqrt[4]{a}$, tzn.

$$x^4 = a$$

$$f(x) = x^4 - a = 0$$

Zastosujemy metodę Newtona do obliczania pierwiastków $f(x)$.

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x)}{f'(x)}$$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^4 - a}{4x_n^3} \leftarrow \text{same opierze } (+, -, \cdot, /).$$

Sprowadzamy metodę do zbliżenia

$$x_{n+1} = \Phi(x_n)$$

Zbliżenie, gdy $\Phi(x) = \alpha$, $\alpha = \sqrt[4]{a}$

$$\text{oraz } \Phi'(x) < 1$$

$$\Phi(\sqrt[4]{a}) = \sqrt[4]{a} - \frac{(a-a)}{4(\sqrt[4]{a})^3} \rightarrow 0$$

$$\Phi(\sqrt[4]{a}) = \sqrt[4]{a} \quad \checkmark$$

$$\Phi'(x) = 1 - \frac{4x^3 \cdot 4x^3 - x^4 \cdot 12x^2 + 12x^2 a}{16x^6}$$

$$\Phi'(x) = 1 - \frac{4x^6 + 12x^2 a}{16x^6}$$

$$\Phi'(\sqrt[4]{a}) = 1 - \frac{a^2 + 12a\sqrt[4]{a}}{16a^2} < 1$$

Gdy metoda jest zbliżeniowa, warunkiem

$$\frac{16a^2 - a^2 - 12a\sqrt[4]{a} - 16a^2}{16a^2} < 0$$

stopu będzie prosto ustalone tzn. ϵ aby

$$|x_{n+1} - \alpha| < \epsilon, \text{ od pewnego } n.$$

$$(12a\sqrt[4]{a} - a^2) 16a^2 < 0$$

$$-(12a\sqrt[4]{a} + a^2) < 0$$

$$(12a\sqrt[4]{a} + a^2) > 0$$

$$a\sqrt[4]{a}(12 + \sqrt[4]{a}) > 0$$

$$\downarrow \quad \downarrow$$

$$\sqrt[4]{a} = -12 \text{ sprzeczne,}$$

$$\text{zatem } \forall a > 0 \quad \Phi'(\sqrt[4]{a}) < 1 \quad \checkmark$$