Matematyka Dyskretna (L)

February 6, 2021

Zadania na egzamin

Powodzenia!

1 Prawdopodobieństwo/Kombinatoryka

1.1 Bolek zabrał na piknik: czereśnie, nektarynkę, kanapkę, piwo, wino, ogórek, mleko i ciastko. Chce ustalić dobrą kolejność spożycia tych wiktuałów. Ile ma różnych możliwości jeśli wiadomo, że piwo i wino nie mogą być pite bezpośrednio po sobie oraz ogórek i mleko nie powinny następować zaraz po sobie?

1.2 Spośród n osób chcemy wybrać trzy drużyny k osobowe. Na ile sposobów możemy to zrobić?

1.3 Na ile sposobów mozna ustawić w ciąg n par osób tak, aby każdy stał obok osoby ze swojej pary?

1.4 W pewnych zawodach sportowych bierze udział 2n sportowców $S_1, S_2, ..., S_{2n}$. Wiadomo dla każdego i, $1 \leq$ i $\leq n$, że sportowiec S_{2i} jest słabszy od sportowca S_{2i-1}. Trzech najlepszych staje na podium: miejsce I, II, III. Ile jest możliwych ustawień na podium?

1.5 Na ile sposobów można ustawić n zer i n jedynek w rząd tak, aby żadne pierwsze $i(i \leq 2n)$ liczb w rzędzie nie zawierało więcej zer niż jedynek.

1.6 Każde pole tablicy 5x5 kolorujemy na niebiesko lub czerwono. Na ile sposobów można to zrobić by nie powstał jednokolorowy wiersz ani jednokolorowa kolumna?

1.7 W pewnym 5-pokojowym mieszkaniu organizowane jest przyjęcie. Każdy z pokoi w mieszkaniu mieści maksymalnie 15 osób. Dla jakiej liczby osób można zagwarantować rozmieszczenie, w którym żadne dwa pokoje nie zawierają tyle samo gości?

1.8 Mamy 15 piłek czerwonych i 15 zielonych. Na każdej z nich zapisujemy jakąś liczbę naturalną z przedziału [1,100]. Żadna z liczb się nie powtarza. Udowodnij, że istnieją dwie pary piłek - zielona plus czerwona, dla których suma liczb napisanych na piłkach jest taka sama. A gdyby piłek było po 14?

1.9 Spośród 8 osób: Ani, Asi, Marzeny, Natalii, Antka, Bolka, Karola i Tadka chcemy utworzyć dwa nierozróżnialne zespoły 4-osobowe. Na ile sposobów możemy to zrobić, jeśli mają być spełnione następujące warunki: Asia musi być w tym samym zespole co Antek lub Bolek, Tadek Antek i Bolek nie mogą być w tym samym zespole, Natalia i Karol nie mogą być w tym samym zespole.

1.10 W przedziale pociągu siedzi sześć osób. Udowodnij, że wsród tych osób są trzy takie, które się albo nawzajem znają albo się nie znają

1.11 Uwaga zadanie z typu pojebanych. Do pałacu pewnego szejka prowadzą dwie aleje: jedna ze wschodu, druga z zachodu. Wynajęty architekt ma za zadanie zaplanować rozmieszczenie 95 palm wzdłuż tych alej. Warunki są dwa: po każdej ze stron (północnej i południowej) każdej alei ma rosnąć przynajmniej 20 palm oraz żadne dwie z czterech w sumie stron nie mogą zawierać dokładnie takie samej liczby palm. Ile jest takich rozmieszczeń? (Palmy są nierozróżnialne)

1.12 W miasteczku Matmazja sygnalizacja świetlna drogowa jest nieco rozregulowana i na każdym sygnalizatorze może świecić zero, jeden, dwa lub trzy ze świateł: czerwony, żółty, zielony. Ile przynajmniej przejść dla pieszych z sygnalizacją świetlną jest w tym mieście, jesli wiadomo, że w każdym momencie przynajmniej 7 sygnalizatorów świeci (lub nie świeci) tak samo?

1.13 Do każdego z trzech przedziałów pewnego wagonu wsiada dokładnie 5 podróżnych. W każdym przedziale jest 8 miejsc numerowanych od 1 do 8. Na ile sposobów mogą usiąść owi pasażerowie, aby w żadnych dwóch przedziałach nie były zajęte dokładnie te same piątki siedzeń?

1.14 W pewnej grupie muzykujących osób jedna gra na fortepianie, harfie i skrzypcach druga na kontrabasie, harfie i wiolonczeli trzecia na skrzypcach czwarta na wiolonczeli i piąta na skrzypcach i wiolonczeli. Chcieliby zagrać utwór na fortepian, skrzypce, wiolonczelę, kontrabas i harfę. Czy uda im się dobrać skład?

1.15 Z macierzy nxn usuwamy część nad przekątną otrzymując macierz "schodkową". Na ile sposobów można ją podzielić na n prostokątów?

1.16 Pewną grupę 24 osób składającą się z 12 kibiców drużyny A i 12 drużyny B chcemy rozmieścić w czterech przedziałach 6 osobowych o numerach 1-4. Rozmieszczenia wewnątrz przedziałów są nieistotne.
a) na ile sposobów możemy to zrobić aby w żadnym przedziale nie było tyle samo kibiców drużyny A co kibiców B?
b) ile jest rozmieszczeń w których sumaryczna liczba w przedziałach 1 i 2 kibiców A nie jest taka sama jak kibiców B?

1.17 Na ile sposobów można ułożyć bukiet składający się z 15 kwiatków, jeśli do dyspozycji mamy tulipany, róże, stokrotki, niezapominajki i piwonie? Wszystkich rodzajów kwiatków jest po 15, kwiatki jednego typu są nierozróżnialne. Bukietów, w których występują inaczej rozmieszczone takie same kwiatki nie traktujemy jako różne.

2 Zasada szufladkowa Dirichleta

2.1 Zaznaczono k punktów kratowych w przestrzeni trójwymiarowej (czyli punktów o trzech współrzędnych całkowitoliczbowych). Dla jakiej liczby k będziemy mieć gwarancję, że środek odcinka łączącego pewne dwa sposrów tych punktów jest także punktem kratowym?

2.2 Na ile sposobów można wrzucić n kulek do k szuflad tak, aby w każdej szufladzie była parzysta ilość kulek?

2.3 Danych jest 12 róznych liczb dwucyfrowych. Wykaż, że wśrod nich istnieją takie dwie których różnica jest liczbą dwucyfrową o jednakowych cyfrach.

2.4 Dana jest tablica 15×15 mająca 15×15 pól. Każde pole malujemy na niebiesko, zielono lub czerwono. Pokaż, że jakkolwiek byśmy nie pomalowali tablicy, zawsze znajdą się dwa rzędy o takiej samej liczbie pól w którymś z kolorów.

2.5 Ile rozwiązań wśród liczb naturalnych ma równanie $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 7$, jeśli dodatkowo $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \leq 20$?

3 Funkcje tworzące

3.1 Podaj funkcję tworzącą dla ciągu $(0, 0, 0, 1, 3, 7, 15, 31, ...$

3.2 Podaj funkcję tworzącą dla ciągu $(0, 0, 0, \frac{1}{2}, 3, \frac{1}{4}, 9, \frac{1}{8}, 27, ...)$.

3.3 Podaj funkcję tworzącą dla ciągu $a_n = \binom{n}{2}$.

3.4 Podaj funkcję tworzącą dla ciągu $a_n = (1,0,0,\pi,0,0,\pi^2,0,0,\pi^3,...)$

3.5 Podaj funkcję tworzącą dla ciągu $a_n = (0,0,1 * 2^1, 0,0,2 * 2^2,0,0,3 * 2^3,...)$.

3.6 Podaj funkcję tworzącą dla ciągu $a_n = 1+2+...+2^n + (-\sqrt{2})^n$

3.7 Podaj funkcję tworzącą dla ciągu $a_i = i2^i$.

4 Kongruencja

4.1 Rozwiąż układ kongruencji

$$\begin{cases} x \equiv 2 \pmod 3 \\ x \equiv 3 \pmod 4 \\ x \equiv 4 \pmod 5 \end{cases}$$

4.2 Rozwiąż układ kongruencji.

$$\begin{cases} x \equiv 1 \pmod 2 \\ x \equiv 2 \pmod 5 \\ x \equiv 1 \pmod{11} \end{cases}$$

4.3 Oblicz $27^{162} \pmod{41}$.

4.4 Oblicz resztę z dzielenia 33^{35} przez 21. Pozdrawiam robiących coś innego niż grafy. Dla was wskazóweczka: warto skorzystać z chińskiego twierdzenia o resztach.

5 Algorytm Euklidesa

5.1 Oblicz $NWD(7, 19)$ oraz całkowite liczby x, y takie, że $7x + 19y = NWD(7, 19)$.

5.2 Oblicz $NWD(17, 60)$ oraz całkowite liczby x, y takie, że $60x + 17y = NWD(60, 17)$.

5.3 Oblicz $NWD(30, 19)$ oraz całkowite liczby x, y, takie że $30x + 19y = NWD(30, 19)$.

6 Anihilatory (Ventus, nie zapominaj o nas!)

6.1 Znajdź ogólną postać rozwiązania następującego równania rekurencyjnego za pomocą anihilatorów:

$a_{n+2} = 2a_{n+1} - a_n + n3^n - 1$, gdy $a_0 = a_1 = 0$.

6.2 Znajdź ogólną postać rozwiązania następującego równania rekurencyjnego za pomocą anihilatorów:

$a_{n+2} = 4a_{n+1} - 3a_n + n3^n - 1$, gdy $a_0 = a_1 = 0$.

6.3 Znajdź ogólną postać rozwiązania następującego równania rekurencyjnego za pomocą anihilatorów:

$a_{n+2} = 7a_{n+1} - 10a_n + 7n2^n - 1$, gdy $a_0 = a_1 = 0$.

6.4 Znajdź ogólną postać rozwiązania następującego równania rekurencyjnego za pomocą anihilatorów:
$a_{n+2} = 2a_{n+1} - a_n + 5^{2n}$, gdy $a_0 = a_1 = 0$.
Podaj układ równań, który muszą spełnić stałe występujące we wzorze określającym ciąg.

6.5 Znajdź ogólną postać rozwiązania następującego równania rekurencyjnego za pomocą anihilatorów:

$a_{n+2} = \frac{3}{2}a_{n+1} - \frac{1}{2}a_n + \frac{n}{2^n}$, gdy $a_0 = a_1 = 0$.

6.6 Znajdź ogólną postać rozwiązania następującego równania rekurencyjnego za pomocą anihilatorów:

$a_{n+2} = 5a_{n+1} - 6a_n + \frac{\binom{n}{2}}{2^n}$, gdy $a_0 = a_1 = 0$.

6.7 Znajdź ogólną postać rozwiązania następującego równania rekurencyjnego za pomocą anihilatorów:

$a_{n+1} = -a_n + \frac{n}{e^n}$, gdy $a_0 = a_1 = 0$.

Podaj układ równań, które muszą spełniać stałe występujące we wzorze określającym ciąg.

7 Liczby Catalana

7.1 Na ile sposobów można ułożyć wieżę składającą się z n klocków niebieskich i n żółtych tak, aby na żadnej wysokości liczba klocków żółtych nie przewyższała liczby klocków niebieskich?

8 Grafy :(

8.1 Ile jest nieidentycznych grafów nieskierowanych prostych (bez pętli i krawędzi równoległych) o wierzchołkach $1, 2, ..., n$, których liczba krawędzi wynosi dokładnie k?

8.2 Mamy $2n$ uczniów, z których każdy ma przynajmniej n przyjaciół. Pokaż, że można ich usadzić w ławkach tak, by każdy z nich siedział z przyjacielem. Pokaż też, że jeśli $n > 1$, to może być to zrobione na co najmniej dwa sposoby.

8.3 Niech R_k oznacza graf którego zbiór wierzchołków tworzą wszystkie k-elementowe ciągi zer i jedynek i dwa wierzchołki są sąsiednie wtedy i tylko wtedy, gdy odpowiadające im ciągi różnią się na dokładnie dwóch współrzędnych. Dla jakich k graf R_k jest dwudzielny? Odpowiedź uzasadnij.

8.4 Określ złożoność operacji policzenia liczby krawędzi grafu G dla reprezentacji macierzowej i listowej.

8.5 Czy graf prosty, planarny bez trójkątów jest 4-kolorowalny? Wskazówka: Czy można pokazać, że taki graf zawsze ma wierzchołek o stopniu co najwyżej 4?

8.6 Dany jest turniej T. Pokaż, że w T istnieje cykl wtedy i tylko wtedy gdy istnieje cykl długosci 3.

8.7 Udowodnij, że w każdym dwukolorowaniu krawędziowym grafu pełnego K_n istnieje jednokolorowe drzewo spinające.

8.8 Podaj algorytm znajdujący liczbę spójnych składowych w grafie.

8.9 Niech Q_n oznacza graf, którego zbiór wierzchołków tworzą wszystkie k-elementowe ciągi zer i jedynek i dwa wierzchołki są sąsiednie wtedy i tylko wtedy gdy odpowiadające im ciągi różnią się na dokładnie jednej współrzędnej. Dla jakich k graf Q_k jest eulerowski? Dla jakich Q_k graf jest hamiltonowski?

8.10 Ile różnych cykli Hamiltona ma klika n-wierzchołkowa? A ile pełny graf dwudzielny $G = (A \cup B)$ taki, że $|A| = |B| = n$?
Cykle (1, 2, 3, 1), (2, 3, 1, 2), (3, 2, 1, 3) wszystkie oznaczają ten sam cykl Hamiltona w grafie K_3.

8.11 Narysuj wszystkie nieizomorficzne grafy proste o 6 wierzchołkach i 6 krawędziach.

8.12 Kiedy graf pełny trójdzielny $G = (A = A_1 \cup A_2 \cup A_3, E)$, w którym każdy wierzchołek z A_i jest połączony z każdym wierzchołkiem z $A \backslash A_i$ oraz $|A_1| =|A_2| =$ n, $|A_3| =$ m zawiera cykl Hamiltona/Eulera?

8.13 Każdą krawędź kliki K_{17} pomalowano na czerwono, zielono albo niebiesko. Pokaż, że w ten sposób powstał przynajmniej jeden trójkąt (K_3) o bokach jednego koloru.
Wskazówka: Na wykładzie pokazane było, że jeśli pomalujemy każdą krawędź kliki K_6 na niebiesko albo czerwono to powstanie przynajmniej jeden jednobarwny trojkąt.

8.14 Oblicz liczbę różnych grafów prostych skierowanych o n wierzchołkach bez wierzchołków izolowanych. Dwa grafy są różne jesli istnieją dwa wierzchołki v_i, v_j, które w jedynm grafie są połączone krawędzią, a w drugim nie.

8.15 Pokaż, że dla dowolnego grafu $G = (V, E)$ zachodzi $\chi(G)\chi(\bar{G}) \geq n =$ |V|, gdzie $\chi(G)$ oznacza liczbę chromatyczną G,czyli minimalną liczbę kolorów, jaką można pokolorować G, a $\bar{G}$ oznacza dopełnienie grafu G.

8.16 nk studentów, przy czym $n, k \geq 2$, jest podzielonych na n towarzystw po k osób i na k kół naukowych po n osób każde. Wykaż, że da się wysłać delegację $2n$ osób tak, by każde towarzystwo i każde koło naukowe było reprezentowane. Jeden student może reprezentować jedno towarzystwo albo jedno koło.

8.17 W grafie spójnym $G = (V, E)$ o nieujemnych wagach na krawędziach chcemy znaleźć drzewo rozpinające, które zawiera dwie wyróżnione krawędzie e_1 i e_2 i ma możliwie najmniejszą sumaryczną wagę. Skonstruuj algorytm który je policzy i OCZYWIŚCIE uzasadnij jego poprawność. A gdyby krawędzi, które muszą się znaleźć w drzewie rozpinającym było więcej?

8.18 Niech $G = (V, E)$ oznacza graf, w którym $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7, v_8\}$ i E $= \{(v_1, v_2), (v_2, v_3), (v_4, v_5), (v_5, v_6), (v_1, v_7), (v_7, v_6), (v_6, v_8), (v_8, v_1)(v_3, v_8), (v_4, v_7)\}$ Czy G jest dwudzielny? Jeśli nie jest to znajdź jego podgraf dwudzielny o największej liczbie krawędzi. Udowodnij, że podany graf jest podgrafem dwudzielnym o maksymalnej liczbie krawędzi. Czy G zawiera cykl Hamiltona i Eulera, jeżeli nie zawiera któregoś z tych cykli to ile minimalnie krawędzi trzeba dodać aby powstały graf był hamiltonowski/eulerowski? (zajebałem się spisując to zadanie)

8.19 Niech H oznacza graf o wierzchołkach {1, 2, ..., 15}, w którym wierzchołki i i j są połączone krawędzią jeśli $NWD(i, j) > 1$. Znajdź optymalne kolorowanie wierzchołkowe H. Potrzebne uzasadnienie.

8.20 Krawędzie pewnego grafu G pokolorowano na czerwono i niebiesko. Kiedy graf ten zawiera drzewo rozpinające niemonochromatyczne?

8.21 Niech T będzie turniejem na n wierzchołkach, w którym dla każdego $k, 1 \leq k \leq n - 1$ istnieje wierzchołek o stopniu wyjściowym k. Pokaż, że każdy taki turniej zawiera przeplataną ścieżkę Hamiltona. Ścieżka Hamiltona $v_1, v_2, v_3, ..., v_n$ jest przeplatana jeśli dla każdego $k, 2 \leq k \leq n-1$ zachodzi: T_n zawiera krawędź (v_{k-1}, v_k) wtw gdy T_n zawiera krawędź (v_{k+1}, v_k).

8.22 n studentów należy do k róznych kół. Każdy student może należeć do dowolnej liczby kół. Rektor chciałby wyznaczyć reprezentację w której każde koło reprezentowane jest przez jednego ze studentów oraz liczba dziewczyn w reprezentacji jest równa liczbie chłopaków i wynosi $k/2$. Skonstruuj algorytm, który taką reprezentację znajduje. Wskazówka: przydatne mogą być przepływy (czymkolwiek to kurwa jest)

8.23 Ile co najwyżej krawędzi ma n-wierzchołkowy graf prosty, planarny bez trójkątów?

8.24 Podaj algorytm znajdowania w drzewie dwóch najbardziej oddalonych wierzchołków. Uzasadnij jego poprawność i oszacuj złożoność czasowa i zrób fikołka na koniec.

8.25 Drabina rzędu n jest to graf skierowany $G = (V, E)$ taki, że $V = \{t_1, b_1, ..., t_n, b_n\}$ i $E = \{(t_i, t_{i+1}) : 1 \leq i < n\} \cup \{(b_i, b_{i+1}) : 1 \leq i < n\} \cup \{(t_i, b_i) :\leq i \leq n\}$. Wyznacz d_n liczbę różnych drzew spinających drabiny rzędu n.(Rok 2017 poprawka 2 warto sprawdzić czy jest dobrze przepisane.)

8.26 Niech $G_n = (V, E)$ oznacza n-wierzchołkowy graf, w którym $V = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$ i $E = \{(v_i, v_j)\ \ : i - j$ nie jest podzielne przez $3\}$. Dla każdego naturalnego n $>$ 2 znajdź optymalne kolorowanie wierzchołkowe G_n potrzebne uzasadnienie.

8.27 Dla jakich n graf G_n z zadania 1 posiada cykl Eulera? A dla jakich n jest on dwudzielny?

8.28 Krawędzie spójnego grafu G mają nieujemne wagi. Podaj algorytm, który sprawdza czy G posiada dwa rózne minimalne drzewa spinające?

8.29 Pokaż, że dla każdego nieparzystego naturalnego n istnieje turniej n-wierzchołkowy, w którym każdy wierzchołek jest królem. Wierzchołek jest królem jeśli można z niego dojść do każdego innego wierzchołka w grafie po ścieżce skkierowanej o długości co najwyżej 2.

8.30 n studentów lat I-III należy do k różnych kół. Każdy student może należeć do dowolnej liczby kół. Rektor chciałby wyznaczyć reprezentację, w której każde koło reprezentowane jest przez jednego ze studentów oraz liczba studentów w reprezentacji każdego roku jest taka sama i wynosi k/3. Skonstruuj algorytm, który taką reprezentację znajduję. Wskazówka: Skorzystaj z przepływów XD

8.31 Dowolny graf nieskierowany G można przerobić na skierowany nadając (jedno z dwóch) skierowanie każdej krawędzi. Graf skierowany H powstały w ten sposób nazywamy orientacją G. Pokaż, że dla każdego grafu nieskierowanego G istnieje orientacja H taka, że dla każdego wierzchołka $v \in H$ zachodzi $|deg^+(v) - deg^-(v)| \leq 1$, gdzie $deg^+(v), deg^-(v)$ oznaczają stopień wyjściowy i wejściowy v. Wskazówka zbuduj cykl eulera w pewnym rozszerzeniu G

8.32 Niech G=(V,E) oznacza graf, w którym $V = \{a_1, a_2, ..., a_n, b_1, b_2, ..., b_n\}$, wierzchołki $a_1, a_2, ..., a_n$ są połączone w cykl (tzn. dla każdego i, $1 \leq i < n$ wierzchołki a_i i a_{i+1} są połączone krawędzią oraz krawędzią są połączone a_1 i a_n), wierzcholki $b_1, b_2, ..., b_n$ również połączone są w cykl oraz każdy wierzchołek a_i jest połączony z każdym wierzchołkiem b_j. Znajdź optymalne kolorowanie wierzchołkowe G. Potrzebne uzasadnienie.

8.33 Niech G bedzie grafem spójnym o m krawędziach. Dla każdej krawędzi e tego grafu mamy zadaną liczbę p_e oznaczającą wymaganą liczbę przejść tą krawędzią. Opracuj algorytm, który albo orzeka istnienie trasy w grafie G, w której każda krawędź jest strawersowana dokładnie p_e razy, albo stwierdza, że taka trasa nie istnieje. Punkt startu trasy nie musi być taki sam jak mety.

8.34 Krawędzie pewnego grafu spójnego G niezawierającego pętli ani krawędzi równoległych pokolorowano na czerwono zielono i niebiesko. G ma przynajmniej 4 krawędzie oraz przynajmniej jedną krawędź każdego z trzech kolorów. Czy graf ten w każdym przypadku zawiera drzewo rozpinające? A gdyby kolorów było cztery i G był dodatkowo dwudzielny czy zawsze zawierałby drzewo rozpinające zawierające przynajmniej jedną krawędź każdego z czterech kolorów? Czy dwudzielność jest potrzebna?

8.35 Organizowany jest turniej n osób w którym każdy gra z każdym. Każda rozgrywka kończy się wygraną dokładnie jednej z osób nie ma remisów. Wynik turnieju to graf pełny skierowany na n wierzchołkach w którym krawędź skierowana z u do v oznacza wygrana u z v. Czy możliwy jest wynik turnieju w którym róznica liczby wygranych dwóch dowolnych osób jest niewiększa od 1? Ogólniej czy dla każdego ciągu n liczb całkowitych dodatnich $a_1, a_2, ..., a_n$ takiego, że $\sum_{i=1}^{n} a_i = \binom{n}{2}$ istnieje wynik turnieju taki, że osoba i wygrała dokładnie a_i pojedynków. W obu przypadakch pokaż algorytm znajdowania takiego rozkładu o ile istnieje. Wskazówka: A jakże, przydatne będą przepływy.

8.36 Kwadratem łacińskim nazywamy kwadrat n x n, w którym na każdym polu stoi liczba ze zbioru {1,2,...,n} tak, że w każdej kolumnie oraz w każdym wierszu jest po jednej z liczb {1,2,...,n}. Prostokątem łacińskim nazywamy prostokąt o n kolumnach i m wierszach, $1 \leq m \leq n$, w którym na każdym polu stoi liczba ze zbioru $\{1, 2, , ..., n\}$ tak, że w każdym wierszu każdy z liczb $\{1, 2, ..., n\}$ wystepują dokładnie raz oraz w każdej kolumnie co najwyżej raz. Czy każdy prostokąt łaciński o m < n wierszach można rozszerzyć o jeden wiersz? Wskazówka: przydatne okażą sie skojarzenia.

8.37 Kiedy

(a) graf pełny K_n, $n \geq 3$,

(b) graf pełny dwudzielny $K_{n,m}$, $n, m \geq 2$ ($K_{n,m} = (A, E)$, gdzie $|A| = n$, $|B| = m$ oraz każdy wierzchołek z A jest połączony z każdym wierzchołkiem z B,

(c) graf prosty o ciągu stopni $(2, 2, 2, 2, 2)$,

jest grafem eulerowskim/hamiltonowskim?

8.38

Zbiór wierzchołków jest *niezależny* w grafie G, jeśli żadne dwa wierzchołki nie są w nim połączone krawędzią. Zbiór wierzchołków jest *pokryciem wierzchołkowym* grafu G, jeśli każda krawędź ma przynajmniej jeden z końców w tym zbiorze. Niech $\alpha(G)$ i $\beta(G)$ oznaczają odpowiednio moc największego zbioru niezależnego G i moc najmniejszego pokrycia wierzchołkowego G. Pokaż, że $\alpha(G) + \beta(G) = n$, gdzie N to liczba wierzchołków grafu G. Pokaż, jak obliczyć $\alpha(G)$, gdy G jest dwudzielny.

8.39 nk studentów, przy czym $k \geq 2$, jest podzielonych na n towarzystw po k osób i na n kół po k osób każde. Wykaż, że da się wysłać delegację $2n$ osób tak, by każde towarzystwo i każde koło naukowe było reprezentowane. Jeden student może reprezentować jedno towarzystwo albo jedno koło.

8.40 W grafie pełnym K_n dokładnie n krawędzi ma wagę 1, pozostałe zaś 2. Jaka jest maksymana waga minimalnego drzewa rozpinającego w tym grafie? Dla jakich rozłożeń wag osiągnęte jest maksimum?

9 Funkcja modulo

9.1 Udowodnij, że dla dowolnych $n, m \in N$ zachodzi:
(a) $n^2 \not\equiv_3 2$
(b) $n^2 + m^2 \equiv_3 0 \implies n \equiv_3 0 \land m \equiv_3 0$.

9.2 Znajdź dwie ostatnie cyfry liczby AA^{C1} zapisanej w systemie czternastkowym. W systemie czternastkowym cyfra A ma wartość 10, B-11, itd.

10 Podzielność

10.1 Pokaż, że jeśli $n \in N$ jest podzielne przez 5, to n-ta liczba Fibonacciego F_n również.

10.2 Pokaż że istnieją dwie potęgi 3, których róznica jest podzielna przez 2019.

10.3 Udowodnij, że dla każdego naturalnego n $30|n^9 - n$.

10.4 Wykaż, że dla każdej liczby naturalnej n istnieje liczba podzielna przez n, której zapis dziesiętny złożony jest tylko z zer i siódemek.

10.5 Wykaż, że liczba $53^{33} - 33^{33}$ jest podzielna przez 10.

10.6 Udowodnij, że dla każdego nieparzystego naturalnego n zachodzi: suma dowolnych n kolejnych liczb całkowitych jest podzielna przez n.

11 Dzielniki

11.1 Ile dzielników ma liczba 720?