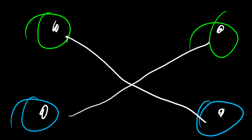
6. Dla każdego $n > 1$ skonstruuj graf dwudzielny na $2n$ wierzchołkach i uporządkowanie tych wierzchołków, dla których algorytm sekwencyjny używa n kolorów.

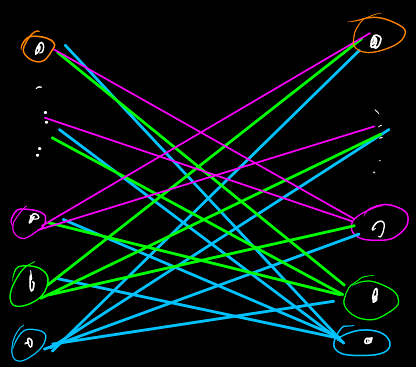
Skonstruujemy opisany w zadaniu graf dwudzielny $G = (V_1 \cup V_2, E)$. Zrobimy to, działając podobnie do algorytmu sekwencyjnego, ale w odwrotnej kolejności – kolorujemy wierzchołki, by ustawić je w ciąg. Konstrukcję grafu dwudzielnego będziemy przeprowadzać iteracyjnie. Zaczynamy od $n=2$, gdzie kolorujemy odpowiadające sobie (na rysunku leżące obok siebie) wierzchołki z obu zbiorów na ten sam kolor. W każdym kolejnym kroku dodajemy parę wierzchołków do grafu, umieszczając je w osobnych zbiorach. Każdy wierzchołek w grafie łączymy krawędziami z tymi, które mają inny kolor.



– konstrukcja grafu dla $n=2$

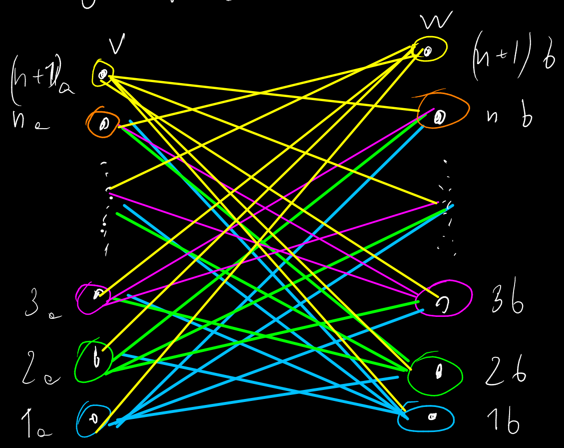
Dla dowolnego $n+1$ konstrukcja dla grafu wygląda następująco:

Bierzemy graf dwudzielny dla n



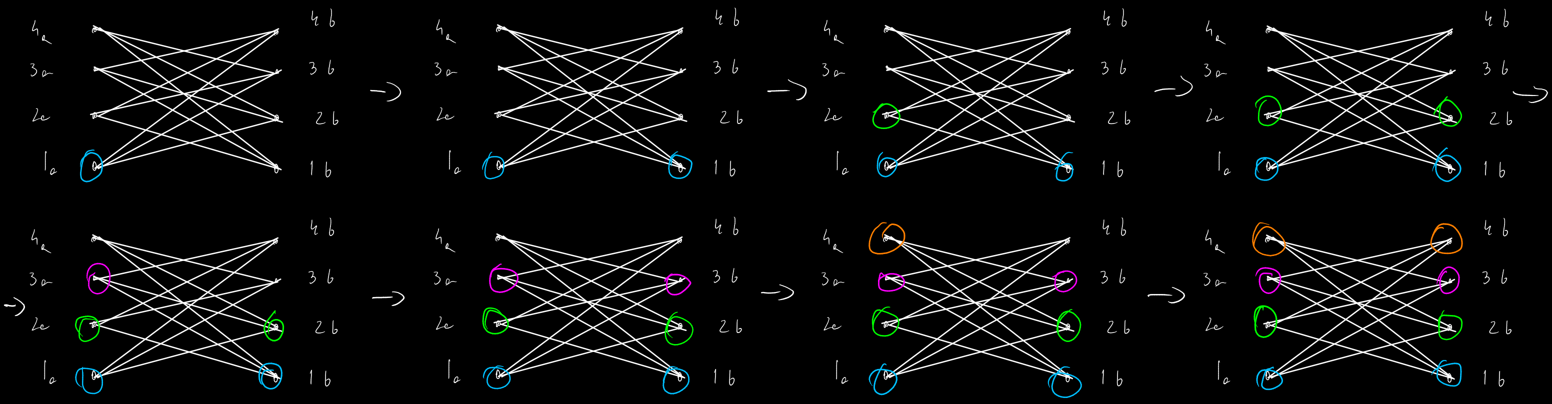
– graf dla n

i dodajemy do niego parę wierzchołków v, w i kolorujemy je na nowy kolor.



W ten sposób utworzyliśmy graf dwudzielny (rozłączne zbiory wierzchołków wyznaczają lewą i prawą kolumnę na rysunku) o $2n$ wierzchołkach. Teraz wystarczy ustawić wierzchołki w ciąg $(1a, 1b, 2a, 2b \dots na, nb)$ i wykonać na nich algorytm kolorowania sekwencyjnego. Możemy zaobserwować, że algorytm pokoloruje wierzchołki w taki sposób, w jaki pokolorowaliśmy je przy konstrukcji grafu, zatem na n kolorów.

Przykład działania algorytmu dla $n=4$. Ciąg wierzchołków to $([1a, 1b, 2a, 2b, 3a, 3b, 4a, 4b])$.



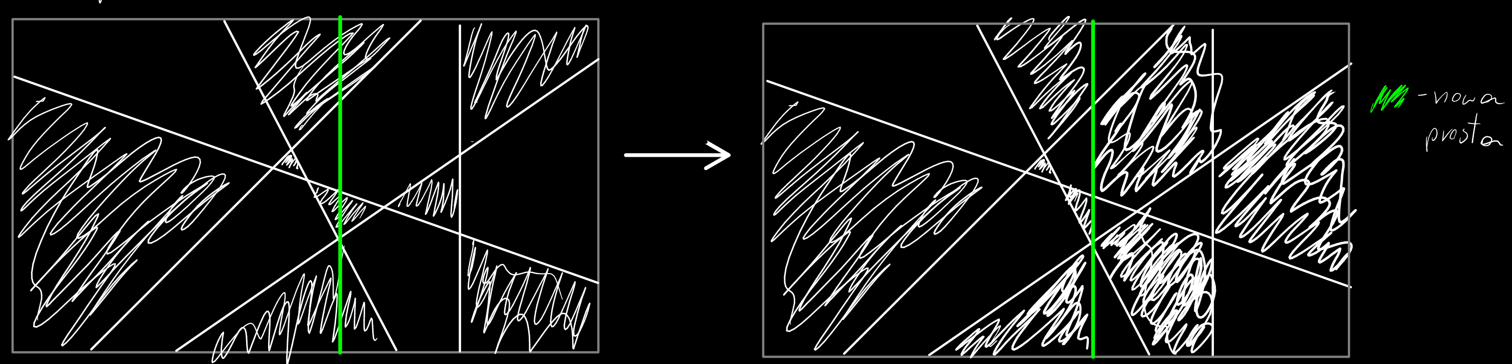
7. Na płaszczyźnie narysowano skończoną liczbę przecinających się prostych (nieskończonych). Wykaż, że utworzone obszary mogą być pomalowane dwoma kolorami tak, że żadne dwa obszary mające wspólny odcinek („dłuższy” od punktu) nie są pomalowane tym samym kolorem.

Przeprowadzimy dowód indukcyjny.

Podstawa) Podzielmy płaszczyznę jedną prostą i otrzymane obszary pokolorujmy odpowiednio na biało i czarno. Spełniliśmy tezę dla tego przypadku.

Krok) Załóżmy, że można pokolorować obszary płaszczyzny podzielonej n prostymi na dwa kolory, tak jak opisano w treści zadania. Pokażmy, że wtedy możemy pokolorować w taki sposób płaszczyznę podzieloną $n+1$ prostymi.

Weźmy płaszczyznę podzieloną n prostymi i pokolorowaną na biało i czarno tak, by sąsiednie obszary były różnego koloru. Przetnijmy tę płaszczyznę nową prostą. Zauważmy, że teza jest spełniona dla obszarów leżących po jednej stronie nowej prostej, jednak każdy obszar, przez który przeszła nowa prosta zostaje podzielony na dwa sąsiednie, mające ten sam kolor. Ten problem możemy łatwo wyeliminować.



Skorzystajmy z faktu, że teza jest spełniona dla części płaszczyzny po jednej i drugiej stronie nowej prostej z osobna. To oznacza, że możemy odwrócić kolorowanie po jednej ze stron tej prostej i teza nadal pozostanie spełniona dla tej strony. Zauważmy jednak, że w ten sposób pozbyliśmy się problemu opisanego wyżej – sąsiednie obszary, powstałe przez przecięcie starych obszarów przez nową prostą nie mają już tego samego koloru. Zatem można pokolorować w ten sposób płaszczyznę przeciętą $n+1$ prostymi. ∎

8. Mamy $2n$ uczniów, z których każdy ma przynajmniej n przyjaciół. Pokaż, że można ich usadzić w n ławkach tak, by każdy z nich siedział z przyjacielem. Pokaż też, że jeśli $n > 1$, to może być to zrobione na co najmniej dwa sposoby.

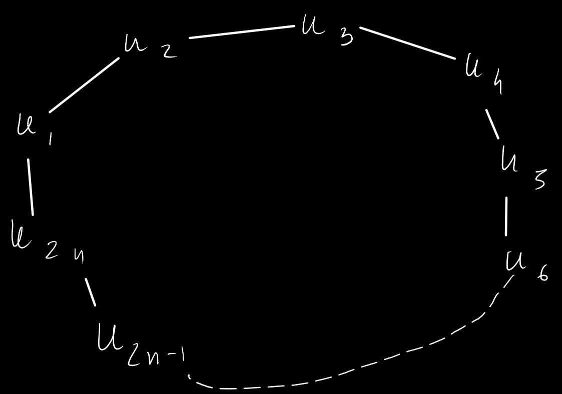
Dla $n=1$ mamy 2 przyjaciół, wystarczy usadowić ich na jednej ławce.

Dla $n>1$ przeprowadzimy inne rozumowanie. Rozważmy graf $G=(V,E)$, gdzie wierzchołki to uczniowie, a krawędzie między nimi oznaczają, że się przyjaźnią. Zauważmy, że mamy $2n \geq 4$ uczniów oraz każdy z nich ma co najmniej n przyjaciół, w szczególności $\forall (v,u) \in E \ deg(v)+deg(u) \geq n+n \geq 2n$. Zatem spełnione jest następujące twierdzenie Ore'a, czyli graf zawiera cykl Hamiltona.

Twierdzenie Ore'a

Jeśli $G=(V,E)$ jest grafem prostym o co najmniej trzech wierzchołkach i takim, że dla każdych dwóch wierzchołków u i v niepołączonych krawędzią zachodzi $deg(u)+deg(v) \geq |V|$, to G zawiera cykl Hamiltona.

Cykl ten wygląda w podobny co na rysunku sposób (krawędzie są między przyjaciółmi):

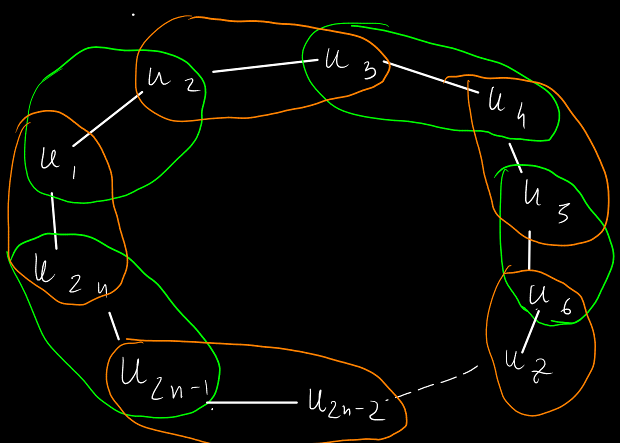


Zauważmy, że mamy parzystą liczbę wierzchołków, zatem możemy podzielić sąsiadów w pary na dwa sposoby:

1° Sadzamy w pierwszej ławce u_1 i u_2, w drugiej u_3 i u_4 itd. aż do u_{2n-1} i u_{2n} w ostatniej.

2° Sadzamy w pierwszej ławce u_{2n} i u_1, w drugiej u_2, u_3, itd. aż do u_{2n-2} i u_{2n-1} w ostatniej.

Takie rozsadzenie zapewnia, że w jednej ławce siedzą przyjaciele (bierzemy sąsiadów na cyklu Hamiltona w grafie G) i posadzimy wszystkich uczniów. Możemy zilustrować ten sposób porozsadzania uczniów:

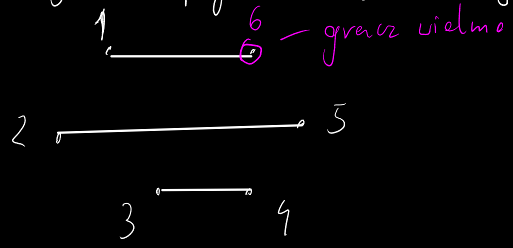


Zatem udało nam się pokazać, że dla $n \geq 1$ możemy posadzić $2n$ uczniów w sposób opisany w zadaniu, a dla $n>1$ zrobić to na co najmniej dwa sposoby.

9. Naszym zadaniem jest zorganizowanie turnieju szachowego między n zawodnikami. W ciągu ilu najmniej dni można zorganizować ten turniej, jeśli każda para zawodników musi rozegrać partię i żaden zawodnik nie może grać dwukrotnie w ciągu jednego dnia? Odpowiedź uzasadnij pokazując jak uzyskać optymalne rozłożenie.

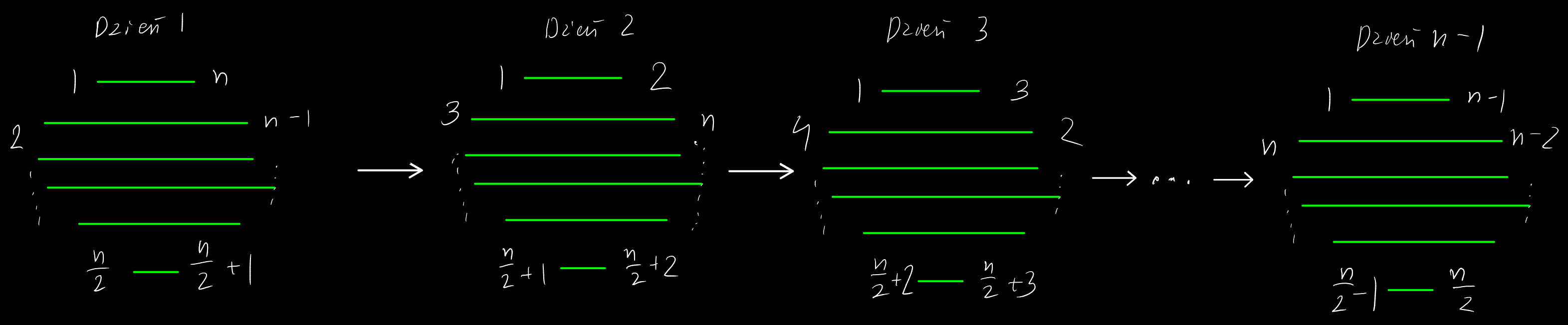
Minimalnie może to zająć n-1 dni, bo każdy musi zagrać z każdym i każdy gra raz dziennie, więc stąd n-1 gier.

Narysujmy graf, w którym wierzchołki to zawodnicy, a krawędź między nimi oznacza, że danego dnia grają mecz. Zauważmy, że dany wierzchołek musi mieć dokładnie jedną krawędź, inaczej któryś zawodnik grałby więcej niż raz dziennie lub nie grałby w ciągu tego dnia, a wtedy rozłożenie nie byłoby optymalne, ponieważ niepotrzebnie przedłużalibyśmy turniej. Kolejną obserwacją jest to, że liczba zawodników może być nieparzysta. By ułatwić reprezentację graficzną rozwiązania, wprowadźmy wtedy fikcyjnego zawodnika, który będzie „grał" z niesparowanym uczestnikiem. Graf meczy dla pewnego dnia przy $n = 5$ graczach wyglądałby następująco:



Mając takie założenia możemy już ustalić optymalną kolejność meczy, by turniej trwał minimalną liczbę dni. Wystarczy rozmieścić graczy w n-kąt (dla n nieparzystego w $n+1$-kąt) i postawić krawędzie między graczami na wierzchołkach leżących na tej samej wysokości (jak na rysunku wyżej).

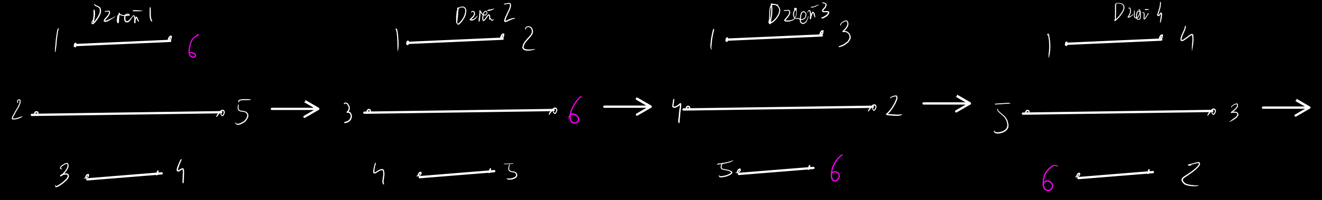
Chcemy sprawdzić w ile minimalnie dni możemy przeprowadzić taki turniej, by każdy zagrał z każdym. W tym celu wykorzystajmy naszą reprezentację grafem. Ustalmy pozycję pierwszego gracza, wszyscy pozostali będą przesuwać się o jedną pozycję zgodnie z ruchem wskazówek zegara w kolejnych dniach.

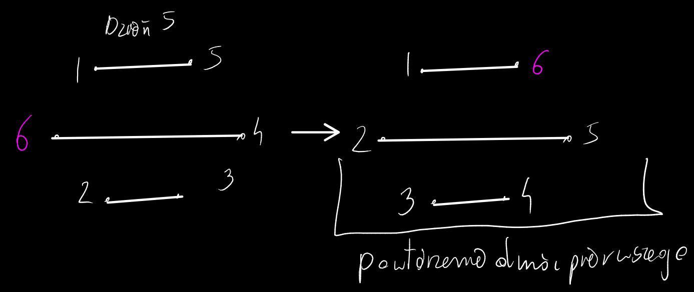


Zauważmy, że w ten sposób po $n-1$ obrotach wygenerujemy wszystkie pary zawodników, bez powtórzeń, bo każde takie ustawienie wierzchołków jest unikalne w obrębie jednego pełnego obrotu. Kolejny n-ty obrót powróciłby do początkowego ustawienia wierzchołków. Formalniej, możemy wziąć dowolną parę wierzchołków w tym grafie i zauważyć, że są od siebie oddalone o $k < \frac{n}{2}$ obrotów. Zauważmy też, że w każdym momencie dla dowolnej wartości k istnieje para oddalona o k leżąca na krańcach poziomej krawędzi grafu, nazwijmy takie ustawienie pozycją k-odległą, np. pierwszego dnia na pozycji 3-odległej leży 2 i $n-1$ zawodnik. W każdym dniu na danej pozycji pojawi się inna para odległa o 2, np. drugiego dnia na pozycji 3-odległej leży 3 i n zawodnik. Dla każdego $k < \frac{n}{2}$ mamy dokładnie $n-1$ par odległych o k. W czasie $n-1$ dni każda taka para leży na innej pozycji k-odległej, zatem takie pary są pomieszane. Stąd wiemy, że dla każdego k w ciągu $n-1$ dni pojawiły się wszystkie pary zawodników. Zatem każdy zawodnik musiał grać z każdym innym.

Można więc stwierdzić, że minimalna liczba dni, by zorganizować taki turniej dla n zawodników to $n-1$ dni dla parzystych n i n dni dla nieparzystych.

Powyżej przykład doboru par dla $n = 5$ zawodników. 6 to gracz widmo, krawędź do niego oznacza, że dany zawodnik nie gra.





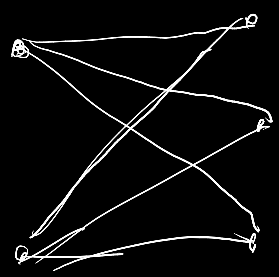
Każdy zagrał z każdym po 5 dniach.

Jeśli graczy jest nieparzysta ilość, to zauważmy, że każdy musi raz nie grać. Jeśli każdy raz nie gra, to jeden dzień spędził nie grając, więc minimalnie potrzeba n dni.

10. Podaj przykład grafu pokazujący, że założenie $deg(v) \geq n/2$ w twierdzeniu Diraca nie może być zastąpione słabszym założeniem $deg(v) \geq (n-1)/2$.

Weźmy graf, który spełnia $deg(v) \geq (n-1)/2$.

$n = 5 \qquad deg(v) \geq \frac{4}{2} = 2 \qquad G = (V_1 \cup V_2, E)$



Ten graf nie spełnia warunku koniecznego na istnienie cyklu Hamiltona, tzn. jest dwudzielny, ale $|V_1| \neq |V_2|$, zatem go nie zawiera, ale spełnia słabsze założenie tw. Diraca. Udowodniliśmy więc, że nie możemy zastąpić tym założeniem założenia z tw. Diraca.

12. Pokaż, że dla dowolnego grafu $G = (V, E)$ zachodzi $\chi(G)\chi(\bar{G}) \geq n = |V|$, gdzie $\chi(G)$ oznacza liczbę chromatyczną G, czyli minimalną liczbę kolorów, jaką można pokolorować G, a $\bar{G}$ oznacza dopełnienie grafu G.

Weźmy dowolny graf $G = (V, E)$. Skoro ma on liczbę chromatyczną $\chi(G)$, to zauważmy, że $\chi(G) \geq \omega(G)$, gdzie $\omega(G)$ to wielkość największej kliki zawartej w G. Wiemy, że gdy wierzchołki mają ten sam kolor, to nie ma między nimi krawędzi. Weźmy zatem największy zbiór wierzchołków o tym samym kolorze w G. Zauważmy, że skoro nie było między nimi żadnych krawędzi w G, to tworzą klikę w $\bar{G}$ i jest to największa klika. Wiemy, że $\chi(\bar{G}) \geq \omega(\bar{G})$. Zauważmy też, że największa klika w $\bar{G}$ musi zawierać co najmniej $\frac{n}{\chi(G)}$ wierzchołków, jest to przypadek, gdy na każdy kolor pokolorowano tyle samo wierzchołków. Zatem $\chi(\bar{G}) \geq \omega(\bar{G}) \geq \frac{n}{\chi(G)}$. Możemy zapisać równoważnie $\chi(G) \cdot \chi(\bar{G}) \geq \chi(G) \cdot \frac{n}{\chi(G)} = n$, co chcieliśmy pokazać.

11. Niech G będzie grafem spójnym nieskierowanym o n wierzchołkach takim, że dla każdej pary wierzchołków u, v niepołączonych krawędzią zachodzi: $deg(u) + deg(v) \geq n - 1$. Czy taki graf zawsze zawiera ścieżkę Hamiltona?

Twierdzenie Orego!