4. Wykazać, że $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$. (Wsk.: W zadaniu 1.3 dokonać podstawienia $t = x^2/2$ i porównać z zadaniem 1.6)

3. **Funkcją Γ-Eulera** nazywamy wartość całki:

$$\Gamma(p) = \int_0^\infty t^{p-1} e^{-t}\, dt, \quad p > 0.$$

$$\Gamma\left(\tfrac{1}{2}\right) = \int_0^\infty t^{-\frac{1}{2}} e^{-t}\, dt = \left| \begin{matrix} t = \frac{x^2}{2} \\ dt = \frac{2x}{2} = x\,dx \end{matrix} \right| = \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{\frac{x^2}{2}}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}} x\, dx = \int_0^\infty \frac{\sqrt{2}}{\cancel{x}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}} \cancel{x}\, dx = \sqrt{2} \int_0^\infty e^{-\frac{x^2}{2}} dx.$$

Z zad 1.6 mamy, że

6. **(2p.)** Niech $I = \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{-\frac{x^2}{2}\right\} dx$. Mamy $I^2 = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{-\frac{x^2+y^2}{2}\right\} dy\, dx$. Stosując podstawienie $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$, wykazać, że $I^2 = 2\pi$.

Skoro $I^2 = 2\pi$, to $I = \sqrt{2\pi}$, zatem $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \sqrt{2\pi}$.

Zauważmy, że $e^{-\frac{x^2}{2}}$ jest funkcją symetryczną względem 0, tzn. $e^{-\frac{x^2}{2}} = e^{-\frac{(-x)^2}{2}}$, czyli zachodzi $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = 2\int_0^\infty e^{-\frac{x^2}{2}} dx$. Stąd mamy, że $I = 2\int_0^\infty e^{-\frac{x^2}{2}} dx$, ale wiemy, że $I = \sqrt{2\pi}$, czyli $2\int_0^\infty e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \sqrt{2\pi} \Rightarrow \int_0^\infty e^{-\frac{x^2}{2}} = \frac{\sqrt{2\pi}}{2}$.

$$\Gamma\left(\tfrac{1}{2}\right) = \sqrt{2} \int_0^\infty e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2\pi}}{2} = \frac{2\sqrt{\pi}}{2} = \sqrt{\pi} \quad \blacksquare$$