

10.6.

Uważamy dowolne niepusty zbiór $n \in \mathbb{N}$ kolejnych n liczb ~~naturalnych~~ całkowitych.
 Uważamy, że każda taka liczba $m_i = k_i n + r_i$, $k_i \in \mathbb{Z}$.

~~$$\sum_{i=0}^{n-1} m_i = \sum_{i=0}^{n-1} (k_i n + r_i)$$~~

Zauważamy, że skoro m_0, m_1, \dots, m_{n-1} to kolejne n liczb całkowitych, to r_i - reszta z dzielenia m_i przez n - pojawiają się wszystkie możliwe n wartości $0, 1, \dots, n-1$.

Zauważamy, że $\sum_{i=0}^{n-1} r_i = \frac{0+n-1}{2} \cdot n = \frac{(n-1)n}{2}$ (bo ciąg r_i to ciąg $0, 1, 2, \dots, n-1$).

Pokażemy, że suma $m_0 + m_1 + \dots + m_{n-1}$ jest podzielna przez n .

$$\sum_{i=0}^{n-1} m_i = \sum_{i=0}^{n-1} k_i n + r_i = n \sum_{i=0}^{n-1} k_i + \sum_{i=0}^{n-1} r_i = n \sum_{i=0}^{n-1} k_i + \frac{(n-1)n}{2} = n \left(\sum_{i=0}^{n-1} k_i + \frac{n-1}{2} \right)$$

Zatem ta suma jest podzielna przez n .