Oznaczenie: $X \sim U[a,b]$ oznacza, że zmienna losowa X podlega rozkładowi jednostajnemu na przedziale $[a,b]$. Innymi słowy: $f_X(x) = \frac{1}{b-a}$, dla $x \in [a,b]$.

5. Załóżmy, że $X \sim U[0,1]$ i niech $Y = X^n$. Udowodnić, że $f_Y(y) = \frac{y^{1/n-1}}{n}$, dla $0 \leqslant y \leqslant 1$.

$X \sim U[0,1] \iff f_X(x) = \frac{1}{1-0} = 1$

$Y = X^n$

Definicja 1. *Niech X będzie zmienną losową. Dystrybuantą $F_X(t)$ nazywamy funkcję określoną jako $F_X(t) = P(X < t)$.*

Jeżeli wiadomo o jakiej zmiennej losowej mówimy, to używamy oznaczenia $F(t)$. W wypadku dyskretnym $F_X(t) = \sum_{x_i < t} p_i$, w wypadku zmiennej typu ciągłego $F_X(t) = \underbrace{\int_{-\infty}^{t} f(x)\,dx}$. ← czyli gęstość to pochodna dystrybuanty

$F_Y(t) = P(Y < t) = P(X^n < t) = P(X < \sqrt[n]{t})$

$F_Y(y) = F_X(\sqrt[n]{y}) = \int_{-\infty}^{\sqrt[n]{y}} 1\,dx = [x]_0^{\sqrt[n]{y}} = \sqrt[n]{y}$

$\to$ bo $x \in [0,1]$

Twierdzenie 1.
Funkcja $f(x)$ jest całkowalna na zbiorze $\mathbb{R}$. Niech $F(t) = \int_{-\infty}^{t} f(x)\,dx$. Jest wówczas:

(a) funkcja $F(t)$ jest ciągła w $\mathbb{R}$,
(b) funkcja $F(t)$ jest różniczkowalna w każdym punkcie t ciągłości funkcji $f(t)$, i w tychże punktach jest $F'(t) = f(t)$.

Z czysto praktycznego (obliczeniowego) punktu widzenia interesuje nas podpunkt (b).

Z twierdzenia 1 mamy, że $f_Y(y) = (\sqrt[n]{y})' = (y^{\frac{1}{n}})' = \underbrace{\frac{1}{n} y^{\frac{1}{n}-1}}$