Imię i nazwisko: Krystian Jasionek

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	Σ

1

Rozwiązanie zadania musi zmieścić się na jednej kartce. Powinno ono być napisane starannie oraz czytelnie, a wielkość liter nie może być mniejsza niż w tym tekście.

Z ćwiczeń wiemy, że $\frac{|rd(x)-x|}{|x|} \leq 2^{-t}$, a $x = s \cdot m 2^c$, gdzie

$s = sgn(x)$

$m \in [\frac{1}{2}, 1)$

$m_r^t \in [\frac{1}{2}, 1]$

Stąd

$$\frac{|rd(x)-x|}{|x|} \leq 2^{-t}$$

$$\frac{|s m_r^t 2^c - s m 2^c|}{|s m 2^c|} \leq 2^{-t}$$

$$|m_r^t - m| \leq 2^{-t} \cdot m$$, ale $m \in [\frac{1}{2}, 1]$, zatem

$$|m_r^t - m| \leq 2^{-t} \cdot m \leq 2^{-t} \cdot 1$$, stąd

$$|m_r^t - m| \leq 2^{-t}$$

Imię i nazwisko: Krystian Jasionek

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	Σ

2

Rozwiązanie zadania musi zmieścić się na jednej kartce. Powinno ono być napisane starannie oraz czytelnie, a wielkość liter nie może być mniejsza niż w tym tekście.

$x \approx 0$

$$f(x) = \frac{\cos\left(\frac{x}{3}\right) - 1 + \frac{x^2}{18}}{x^4}$$

$$f(0) = \frac{1-1+0}{0} = \frac{0}{0}$$

Rozwińmy $\cos\left(\frac{x}{3}\right)$ w szereg Taylora, $|x| \leq \frac{1}{10}$

$$\cos\left(\frac{x}{3}\right) = 1 - \frac{\left(\frac{x}{3}\right)^2}{2} + \frac{\left(\frac{x}{3}\right)^4}{4!} - \frac{\left(\frac{x}{3}\right)^6}{6!} \dots$$

$\cos\left(\frac{x}{3}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} \cdot \left(\frac{x}{3}\right)^{2n}$, pokażmy, że jest zbieżny z kryterium Leibniza, tzn. że $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ $\quad a_n \geq a_{n+1}$, oraz $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

$$\frac{\left(\frac{x}{3}\right)^{2k}}{(2k)!} \geq \frac{\left(\frac{x}{3}\right)^{2k+2}}{\cancel{(2k+2)!}\ (2k+1)(2k+2)}$$

$\frac{x^2}{(2k+1)(2k+2)9} \leq 1$, ale $|x| \leq \frac{1}{10}$, zatem $|x^2| \leq \frac{1}{100}$, więc nierówność jest spełniona

$\lim_{n\to 0} \frac{0}{3^{2k}(2k)!} \leq \lim_{n\to\infty} \frac{x^{2k}}{3^k(2k)!} \leq \lim_{n\to\infty} \frac{1}{3^{2k}(2k)!}$, zatem $\lim_{k\to\infty} \frac{x^{2n}}{3^n(2k)!} = 0$, zatem szereg jest zbieżny.

z tw. o trzech granicach? Założenie, że $|x| \leq \frac{1}{1}$

$$f(x) = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!\,3^{2n}} - 1 + \frac{x^2}{18}}{x^4}$$

$$f(x) = \frac{\sum_{n=3}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!\,3^{2n}} + 1 - \frac{x^2}{18} + \frac{x^4}{81 \cdot 24} - 1 + \frac{x^2}{18}}{x^4}$$

$$f(x) = \sum_{n=3}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n-4}}{(2n)!\,3^{2n}} + \frac{1}{81 \cdot 24}$$

bo odejmowania bliskich sobie liczb

Możemy zastosować powyższy wzór, by uniknąć utraty cyfr znaczących

$$f(x) = \begin{cases} \sum_{n=3}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n-4}}{(2n)!\,3^{2n}} + \frac{1}{81 \cdot 24} & \text{dla } |x| \leq \frac{1}{10} \\ \frac{\cos\left(\frac{x}{3}\right) - 1 + \frac{x^2}{18}}{x^4} & \text{w p.p.} \end{cases}$$

Imię i nazwisko: Krystian Jasionek

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	Σ

3

Rozwiązanie zadania musi zmieścić się na jednej kartce. Powinno ono być napisane starannie oraz czytelnie, a wielkość liter nie może być mniejsza niż w tym tekście.

$$S(a,b,c,d) := \frac{b+c+bd}{a(d-1)}$$

```
S:=d-1;   S:=c/S;
S:=b+S;   S:=a/S;
S:=1/S;
Return(S).
```

$$S = d-1 \to S = \frac{c}{d-1} \to S = b + \frac{c}{d-1} = \frac{bd-b+c}{d-1} \to$$

$$\to S = \frac{a}{S} = \frac{a}{\frac{bd-b+c}{d-1}} = \frac{a(d-1)}{bd-b+c} \to S = \frac{1}{S} = \frac{bd-b+c}{a(d-1)}$$

$$\frac{bd-b+c}{a(d-1)} \neq \frac{b+c+bd}{a(d-1)}$$, zatem algorytm nie zwraca poprawnego wyn

$$S = (d-1)(1+\alpha_0) \to \frac{c\,(1+\alpha_1)}{(d-1)(1+\alpha_0)} \to \left(b + \frac{c(1+\alpha_1)}{(d+1)(1+\alpha_0)}\right) \cdot (1+\alpha_2) \to$$

$$\to \frac{a\,(1+\alpha_1)(d+1)(1+\alpha_0)}{(1+\alpha_2)b(d+1) + c(1+\alpha_1)(1+\alpha_2)} \to \frac{(1+\alpha_2)\big((d+1)b + c(1+\alpha_1)\big)(1+\alpha_4)}{\alpha(1+\alpha_1)(d+1)(1+\alpha_0)}$$

Imię i nazwisko: Krystian Jasionek

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	Σ

4

Rozwiązanie zadania musi zmieścić się na jednej kartce. Powinno ono być napisane starannie oraz czytelnie, a wielkość liter nie może być mniejsza niż w tym tekście.

$a>0$ Chcemy policzyć wartość $a^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{a}$

Szukamy x t. że $x = \sqrt[4]{a}$, tzn.

$$x^4 = a$$

$$f(x) = x^4 - a = 0$$

Zastosujmy metodę Newtona do obliczania pierwiastków $f(x)$.

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x)}{f'(x)}$$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^4 - a}{4x_n^3} \leftarrow \text{same operacje } (+,-,\cdot,/).$$

Sprawdźmy, czy metoda jest zbieżna

$x_{n+1} = \Phi(n)$ Zbieżność, gdy $\Phi(\alpha) = \alpha$, $\alpha = \sqrt[4]{a}$

oraz $\Phi'(\alpha) < 1$

$$\Phi(\sqrt[4]{a}) = \sqrt[4]{a} - \frac{(a-a) \to 0}{4(\sqrt[4]{a})^3}$$

$$\Phi(\sqrt[4]{a}) = \sqrt[4]{a} \quad \checkmark$$

$$\Phi'(x) = 1 - \frac{4x^3 \cdot 4x^3 - x^4 \cdot 12x^2 + 12x^2 a}{16 x_n^6}$$

$$\Phi'(x) = 1 - \frac{4x^6 + 12x^2 a}{16x^6}$$

$$\Phi'(\sqrt[4]{a}) = 1 - \frac{a^2 + 12a\sqrt{a}}{16a^2} < 1$$

$$\frac{16a^2 - a^2 - 12a\sqrt{a} - 16a^2}{16a^2} < 0$$

$$(-12a\sqrt{a} - a^2)\, 16a^2 < 0$$

$$-(12a\sqrt{a} + a^2) < 0$$

$$(12a\sqrt{a} + a^2) > 0$$

$$a\sqrt{a}(12 + \sqrt{a}) > 0$$

>0 $\quad \sqrt{a} = -12$ sprzeczne,

zatem $\forall a>0$ $\Phi'(\sqrt[4]{a}) < 1$ $\checkmark$.

Czyli metoda jest zbieżna, warunkiem stopu będzie po prostu ustalenie takiego ε, aby $|x_{n+1} - \alpha| < \varepsilon$, od pewnego n.

Imię i nazwisko: Krystian Jasionek

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	Σ

5

Rozwiązanie zadania musi zmieścić się na jednej kartce. Powinno ono być napisane starannie oraz czytelnie, a wielkość liter nie może być mniejsza niż w tym tekście.

a)

x_k	-2	-1	1	2
y_k	2	0	2	0

$$\begin{array}{r|l}
-2 & 2 \\
-1 & 0 \to \frac{-2}{1} = -2 \\
1 & 2 \to \frac{2}{2} = 1 \to \frac{3}{3} = 1 \\
2 & 0 \to \frac{-2}{1} = -2 \to \frac{-3}{3} = -1 \to \frac{-2}{4} = -\frac{1}{2}
\end{array}$$

$$N(x) = 2 - 2(x-2) + 1(x+1)(x+2) - \frac{1}{2}(x-1)(x+1)(x+2)$$

b)

x_k	-2	-1	1	2
y_k	4	2	6	2

$$\begin{array}{r|l}
-2 & 4 \\
-1 & 2 \to \frac{-2}{1} = -2 \\
1 & 6 \to \frac{4}{2} = 2 \to \frac{4}{3} \\
2 & 2 \to \frac{-4}{1} = -4 \to \frac{-6}{3} = -2 \to \frac{-10}{3} \cdot \frac{1}{4} = -\frac{5}{6}
\end{array}$$

$$N(x) = 4 - 2(x+2) + \frac{4}{3}(x+2)(x+1) - \frac{5}{6}(x+2)(x+1)(x-1)$$

Imię i nazwisko: Krystian Jasionek

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	Σ

6

Rozwiązanie zadania musi zmieścić się na jednej kartce. Powinno ono być napisane starannie oraz czytelnie, a wielkość liter nie może być mniejsza niż w tym tekście.

$$\max_{x \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]} |f(x) - L_n(x)| \leqslant 5 \cdot 10^{-2}.$$

Zastosujemy oszacowanie z wykładu dla węzłów Czebyszewa

$$\max |f(x) - L_n(x)| \leqslant \max \left| \frac{f^{(n+1)}(\eta)}{(n+1)!} \right| \cdot \frac{1}{2^n} \leqslant 10^{-16}$$

$$f(x) = \cos^2(2x)$$

$$f'(x) = 2\cos(2x) \cdot (-\sin(2x)) \cdot 2 = -2\sin(4x)$$

$$f''(x) = 2 \cdot 4 \cdot (-\cos(4x)) = -8\cos(4x)$$

$$f'''(x) = 8 \cdot \sin(4x) \cdot 4 = 32\sin(4x)$$

$$f^{(4)}(x) = 128\cos(4x)$$

f(x) rozwijamy w szereg Taylora wokół 0

$$f(x) = \frac{-2 \cdot \sin(0)}{1!} \cdot x - \frac{8\cos(0)}{2} \cdot x^2 + \frac{32\sin(0)}{6} \cdot x^3 + \frac{128 \cancel{\cos(4\eta)}}{24} x, \quad \eta \in [-\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}]$$

$$f(x) = -4x^2 + \frac{128\cos(4\eta)}{24} \cancel{x}^4$$

$$f^{(n)}(x) \approx 0 \quad \text{dla } n > 4$$

$$f^{n}(x) = 2 \cos^{(n)}(4\cancel{x})$$