MDL Lista 4 Krystian Jasionek

1. 1. Oblicz dwie ostatnie cyfry w rozwinięciu dziesiętnym liczby 71^{71}.

$71^{71} = ?$

$71^0 = 1$

$71^1 = 71$

$71^2 = 5041$

$71^3 = 357911$

$71^4 = 25411681$

$71^5 = 1804229351$

21

$71^6 = \ldots\ldots$

$71^7 = \ldots\ldots$

71 jest liczbą pierwszą

$71 = (7 \cdot 10 + 1)$

$(7 \cdot 10 + 1)^{71}$

z dwumianu Newtona

$$(7 \cdot 10 + 1)^{71} = \binom{71}{0} 7^{71} \cdot 10^{71} \cdot 1^0 + \binom{71}{1} (7 \cdot 10)^{70} \cdot 1^1 + \ldots + \underbrace{\binom{71}{69} (7 \cdot 10)^2 \cdot 1^{69}}_{\leqslant 100} + \underbrace{\binom{71}{70} (7 \cdot 10)^1 \cdot 1^{70}}_{\leqslant 10} + \underbrace{\binom{71}{71} (7 \cdot 10)^0 \cdot 1^{71}}_{=1} =$$

$$= \ldots\ldots + \underbrace{2485 \cdot 49 \cdot 100 \cdot 1}_{\text{zapis tej liczby na ostatnich dwóch miejscach ma zera, więc nie wpłyną one na wynik, podobnie jak w przypadku poprzednich wyrazów dwumianu}} + \underbrace{71 \cdot 70 \cdot 1}_{=4970} + \underbrace{1 \cdot 1 \cdot 1}_{=1}$$

⇓

stąd wynika, że ostatnie dwie cyfry liczby 71^{71} to 7 oraz 1.

3. **3.** Wykaż, że jeśli $2^n - 1$ jest liczbą pierwszą, to n jest liczbą pierwszą.

Niech 2^n-1 będzie liczbą pierwszą. Załóżmy, że n nie jest liczbą pierwszą, tzn. $\exists a,b>1$ $n=ab$. Wtedy $2^n-1 = 2^{ab}-1 = (2^a-1)(2^{a(b-1)} + 2^{a(b-2)} + \dots + 2^a + 1)$, a stąd wynika, że $2^n-1 = 2^{ab}-1$ dzieli się przez 2^a-1, czyli nie jest liczbą pierwszą. Otrzymaliśmy sprzeczność, zatem n musi być liczbą pierwszą. $\boxtimes$

4. **4.** Wykaż, że jeśli $a^n - 1$ jest liczbą pierwszą, to $a = 2$. Działa dla $n > 1$.

Niech a^n-1 będzie pierwsze. Załóżmy, że $a \neq 2$. Wtedy $(a^n-1) = (a-1)(a^{n-1} + a^{n-2} + \dots + a + 1)$, ale $a \neq 2$, zatem $(a-1) \neq 1$, a stąd wynika, że a^n-1 dzieli się przez $(a-1)$, zatem a^n-1 nie jest pierwsze. Otrzymaliśmy sprzeczność, zatem $a=2$. $\boxtimes$

5. **5.** Wykaż, że jeśli $2^n + 1$ jest liczbą pierwszą, to n jest potęgą liczby 2.

Niech 2^n+1 będzie pierwsze. Załóżmy że n nie jest potęgą liczby 2, tzn. $n \neq 2^p$. Wtedy $n = \alpha\beta$, gdzie α jest liczbą nieparzystą >2, $\beta \geq 1$. Wiemy, że $(a-b) \mid (a^r - b^r)$, ponieważ

$\leftarrow$ - nieparzyste >2
$\beta \geq 1$

$(a^r - b^r) = \boxed{(a-b)}(a^{r-1} + a^{r-2}b + a^{r-3}b^2 + \dots + b^{r-1}) = (a-b)\left(\sum_{i=0}^{r-1} a^{r-1-i} b^i\right)$

Weźmy $a = 2^n = 2^{\alpha\beta}$ oraz $b=-1$. Wtedy wiemy, że $(2^{\alpha\beta}+1)$ jest podzielne przez $(2^\beta + 1)$. Ale $2^{\alpha\beta}+1 = 2^n+1$ jest liczbą pierwszą, zatem mamy sprzeczność. Czyli n jest potęgą liczby 2. $\boxtimes$

8. 8. Wykaż, że dwie kolejne liczby Fibonacciego są względnie pierwsze.
Wskazówka: Skorzystaj z algorytmu Euklidesa.

$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ – n-ta liczba Fibonacciego

Pokażemy, że $F_n \perp F_{n+1} \iff nwd(F_n, F_{n+1}) = 1$

Dowód przeprowadzimy indukcyjnie.

I podstawa: $n = 0$ $F_0 = 1$ $F_1 = 1$

$nwd(F_0, F_1) = 1$, więc $F_0 \perp F_1$

$n = 1$ $F_1 = 1$ $F_2 = 2$

$nwd(F_1, F_2) = 1$, zatem $F_1 \perp F_2$

II krok indukcyjny

Załóżmy, że teza jest spełniona dla n ($F_n \perp F_{n+1}$) i pokażmy, że wtedy $F_{n+1} \perp F_{n+2}$

$$nwd(F_{n+1}, F_{n+2}) = nwd(F_{n+1}, F_{n+1} + F_n)$$

Lemat: $nwd(a, b) = nwd(a, a+b)$, dla $a > b$

Niech $a > b > 0$. Wykonujemy jeden krok algorytmu Euklidesa. Wtedy

$$nwd(a, a+b) = nwd(a+b, a) = nwd(a, (a+b) \bmod a) =$$

$$= nwd(a, ((a \bmod a + b \bmod a) \bmod a)) =$$

$$= nwd(a, b) \ \blacksquare$$

Lemat: $nwd(a, b) = nwd(a, a+b)$

Jeśli $nwd(a, b) = d$, wtedy istnieją takie x, y, że $a = dx$, $b = dy \wedge x \perp y$

$a + b = dx + dy = d(x+y)$, więc $d \mid a+b$

Zatem d jest dzielnikiem a oraz $a+b$. Sprawdźmy, czy największym.

$(x+y) \mid a+b \wedge x \mid a \wedge y \mid b$, dodatkowo $x \perp y$ (bo $nwd(a,b) = d$). Ale wtedy

$x + y = x(1 + \frac{y}{x})$, gdzie $\frac{y}{x} \notin \mathbb{Z}$. Stąd $x \perp (x+y)$, zatem $nwd(a, a+b) = d$ $\blacksquare$

Nie mam pewności co do poprawności dowodu tego lematu, dlatego reszta dowodu opiera się na lemacie wykorzystującym algorytm Euklidesa.

$F_n < F_{n+1}$, $\forall n > 0$

Skoro $nwd(F_{n+1}, F_n + F_{n+1}) = nwd(F_n, F_{n+1}) = 1$

zatem $nwd(F_{n+1}, F_{n+2}) = 1$, czyli $\forall n \in \mathbb{N}$ $F_n \perp F_{n+1}$. $\blacksquare$

11. 11. Każdy punkt płaszczyzny pomalowano na jeden z dwóch kolorów: pistacjowy lub morelowy. Pokaż, że na tej płaszczyźnie istnieje prostokąt o wierzchołkach takiego samego koloru.

Podzielmy płaszczyznę w poziomie trzema liniami i 9-ma liniami w pionie. W ten sposób otrzymamy trójki punktów, w których (z zasady szufladkowej Dirichleta) dwa są tego samego koloru. Trójki mogą być pokolorowane na $2^3 = 8$ możliwych sposobów. Ale mamy 9 takich trójek, wtedy 2 z nich tworzą punkty o tej samej permutacji kolorów. Wybierzmy dwa punkty o tym samym kolorze z jednej z tych trójek i analogicznie dwa punkty z drugiej. W ten sposób otrzymamy prostokąt o wszystkich wierzchołkach tego samego koloru.

Przykład