

**L6.3.** 1 punkt Sformułuj i udowodnij algorytm Clenshawa obliczania wartości wielomianu

$$w(x) = \frac{1}{2}c_0T_0(x) + c_1T_1(x) + c_2T_2(x) + \dots + c_nT_n(x)$$

w punkcie  $x$ , gdzie  $c_0, c_1, \dots, c_n$  są danymi stałymi, a  $T_n$  oznacza  $n$ -ty wielomian Czebyszewa.

Wzemy  $w(x) = \frac{1}{2}c_0T_0(x) + c_1T_1(x) + \dots + c_nT_n(x)$ . Wzemy, że  $T_0(x) = 1$ ,  $T_1(x) = x$ ,  $T_n(x) = 2xT_{n-1}(x) - T_{n-2}(x)$

Niech  $B_k$  będzie  $k$ -tym wyrazem algorytmu Clenshawa.

Dla  $w(x) = \sum_{k=0}^n b_k T_k(x)$

$B_{n+2}(x) = B_{n+1}(x) = 0$  ← dwa początkowe wyrazy; rekurencyjnie obliczamy od  $B_0$ .

$B_k(x) = 2x B_{k+1}(x) + B_{k+2}(x) + b_k$  dla  $k = n, n-1, \dots, 0 \Rightarrow b_k = B_k - 2x B_{k+1} + B_{k+2}$

Pokażemy, że  $w(x) = \frac{B_0 - B_2}{2}$   $\left[ b_k = B_k - 2x B_{k+1} + B_{k+2} \right]$ . Dla wytychów pomijamy „ $x$ ” w zapisie  $B_k(x)$ .

$w(x) = \sum_{k=0}^n b_k T_k(x) = \sum_{k=0}^n (B_k - 2x B_{k+1} + B_{k+2}) T_k(x) = \sum_{k=0}^n B_k T_k(x) - 2x \sum_{k=0}^n B_{k+1} T_k(x) + \sum_{k=0}^n B_{k+2} T_k(x)$   
 rozbijamy na trzy sumy i próbujemy zredukować możliwie najwięcej wyrazów  
 $= \frac{1}{2} B_0 T_0(x) + B_1 T_1(x) + B_2 T_2(x) - 2x (B_1 T_0(x) + B_2 T_1(x) + B_3 T_2(x)) + (B_2 T_0(x) + B_3 T_1(x) + B_4 T_2(x) + \dots)$   
 wydejmujemy  $B_2 T_0(x)$  z  $B_2 T_2(x)$  z  $-2x B_2 T_1(x)$  z  $B_3 T_1(x)$  z  $B_4 T_2(x)$  z  $-2x B_3 T_2(x)$  z  $B_4 T_2(x)$  z  $-2x B_4 T_3(x)$  z  $B_5 T_3(x)$  z  $-2x B_5 T_4(x)$  z  $B_6 T_4(x)$  z  $-2x B_6 T_5(x)$  z  $B_7 T_5(x)$  z  $-2x B_7 T_6(x)$  z  $B_8 T_6(x)$  z  $-2x B_8 T_7(x)$  z  $B_9 T_7(x)$  z  $-2x B_9 T_8(x)$  z  $B_{10} T_8(x)$  z  $-2x B_{10} T_9(x)$  z  $B_{11} T_9(x)$  z  $-2x B_{11} T_{10}(x)$  z  $B_{12} T_{10}(x)$  z  $-2x B_{12} T_{11}(x)$  z  $B_{13} T_{11}(x)$  z  $-2x B_{13} T_{12}(x)$  z  $B_{14} T_{12}(x)$  z  $-2x B_{14} T_{13}(x)$  z  $B_{15} T_{13}(x)$  z  $-2x B_{15} T_{14}(x)$  z  $B_{16} T_{14}(x)$  z  $-2x B_{16} T_{15}(x)$  z  $B_{17} T_{15}(x)$  z  $-2x B_{17} T_{16}(x)$  z  $B_{18} T_{16}(x)$  z  $-2x B_{18} T_{17}(x)$  z  $B_{19} T_{17}(x)$  z  $-2x B_{19} T_{18}(x)$  z  $B_{20} T_{18}(x)$  z  $-2x B_{20} T_{19}(x)$  z  $B_{21} T_{19}(x)$  z  $-2x B_{21} T_{20}(x)$  z  $B_{22} T_{20}(x)$  z  $-2x B_{22} T_{21}(x)$  z  $B_{23} T_{21}(x)$  z  $-2x B_{23} T_{22}(x)$  z  $B_{24} T_{22}(x)$  z  $-2x B_{24} T_{23}(x)$  z  $B_{25} T_{23}(x)$  z  $-2x B_{25} T_{24}(x)$  z  $B_{26} T_{24}(x)$  z  $-2x B_{26} T_{25}(x)$  z  $B_{27} T_{25}(x)$  z  $-2x B_{27} T_{26}(x)$  z  $B_{28} T_{26}(x)$  z  $-2x B_{28} T_{27}(x)$  z  $B_{29} T_{27}(x)$  z  $-2x B_{29} T_{28}(x)$  z  $B_{30} T_{28}(x)$  z  $-2x B_{30} T_{29}(x)$  z  $B_{31} T_{29}(x)$  z  $-2x B_{31} T_{30}(x)$  z  $B_{32} T_{30}(x)$  z  $-2x B_{32} T_{31}(x)$  z  $B_{33} T_{31}(x)$  z  $-2x B_{33} T_{32}(x)$  z  $B_{34} T_{32}(x)$  z  $-2x B_{34} T_{33}(x)$  z  $B_{35} T_{33}(x)$  z  $-2x B_{35} T_{34}(x)$  z  $B_{36} T_{34}(x)$  z  $-2x B_{36} T_{35}(x)$  z  $B_{37} T_{35}(x)$  z  $-2x B_{37} T_{36}(x)$  z  $B_{38} T_{36}(x)$  z  $-2x B_{38} T_{37}(x)$  z  $B_{39} T_{37}(x)$  z  $-2x B_{39} T_{38}(x)$  z  $B_{40} T_{38}(x)$  z  $-2x B_{40} T_{39}(x)$  z  $B_{41} T_{39}(x)$  z  $-2x B_{41} T_{40}(x)$  z  $B_{42} T_{40}(x)$  z  $-2x B_{42} T_{41}(x)$  z  $B_{43} T_{41}(x)$  z  $-2x B_{43} T_{42}(x)$  z  $B_{44} T_{42}(x)$  z  $-2x B_{44} T_{43}(x)$  z  $B_{45} T_{43}(x)$  z  $-2x B_{45} T_{44}(x)$  z  $B_{46} T_{44}(x)$  z  $-2x B_{46} T_{45}(x)$  z  $B_{47} T_{45}(x)$  z  $-2x B_{47} T_{46}(x)$  z  $B_{48} T_{46}(x)$  z  $-2x B_{48} T_{47}(x)$  z  $B_{49} T_{47}(x)$  z  $-2x B_{49} T_{48}(x)$  z  $B_{50} T_{48}(x)$  z  $-2x B_{50} T_{49}(x)$  z  $B_{51} T_{49}(x)$  z  $-2x B_{51} T_{50}(x)$  z  $B_{52} T_{50}(x)$  z  $-2x B_{52} T_{51}(x)$  z  $B_{53} T_{51}(x)$  z  $-2x B_{53} T_{52}(x)$  z  $B_{54} T_{52}(x)$  z  $-2x B_{54} T_{53}(x)$  z  $B_{55} T_{53}(x)$  z  $-2x B_{55} T_{54}(x)$  z  $B_{56} T_{54}(x)$  z  $-2x B_{56} T_{55}(x)$  z  $B_{57} T_{55}(x)$  z  $-2x B_{57} T_{56}(x)$  z  $B_{58} T_{56}(x)$  z  $-2x B_{58} T_{57}(x)$  z  $B_{59} T_{57}(x)$  z  $-2x B_{59} T_{58}(x)$  z  $B_{60} T_{58}(x)$  z  $-2x B_{60} T_{59}(x)$  z  $B_{61} T_{59}(x)$  z  $-2x B_{61} T_{60}(x)$  z  $B_{62} T_{60}(x)$  z  $-2x B_{62} T_{61}(x)$  z  $B_{63} T_{61}(x)$  z  $-2x B_{63} T_{62}(x)$  z  $B_{64} T_{62}(x)$  z  $-2x B_{64} T_{63}(x)$  z  $B_{65} T_{63}(x)$  z  $-2x B_{65} T_{64}(x)$  z  $B_{66} T_{64}(x)$  z  $-2x B_{66} T_{65}(x)$  z  $B_{67} T_{65}(x)$  z  $-2x B_{67} T_{66}(x)$  z  $B_{68} T_{66}(x)$  z  $-2x B_{68} T_{67}(x)$  z  $B_{69} T_{67}(x)$  z  $-2x B_{69} T_{68}(x)$  z  $B_{70} T_{68}(x)$  z  $-2x B_{70} T_{69}(x)$  z  $B_{71} T_{69}(x)$  z  $-2x B_{71} T_{70}(x)$  z  $B_{72} T_{70}(x)$  z  $-2x B_{72} T_{71}(x)$  z  $B_{73} T_{71}(x)$  z  $-2x B_{73} T_{72}(x)$  z  $B_{74} T_{72}(x)$  z  $-2x B_{74} T_{73}(x)$  z  $B_{75} T_{73}(x)$  z  $-2x B_{75} T_{74}(x)$  z  $B_{76} T_{74}(x)$  z  $-2x B_{76} T_{75}(x)$  z  $B_{77} T_{75}(x)$  z  $-2x B_{77} T_{76}(x)$  z  $B_{78} T_{76}(x)$  z  $-2x B_{78} T_{77}(x)$  z  $B_{79} T_{77}(x)$  z  $-2x B_{79} T_{78}(x)$  z  $B_{80} T_{78}(x)$  z  $-2x B_{80} T_{79}(x)$  z  $B_{81} T_{79}(x)$  z  $-2x B_{81} T_{80}(x)$  z  $B_{82} T_{80}(x)$  z  $-2x B_{82} T_{81}(x)$  z  $B_{83} T_{81}(x)$  z  $-2x B_{83} T_{82}(x)$  z  $B_{84} T_{82}(x)$  z  $-2x B_{84} T_{83}(x)$  z  $B_{85} T_{83}(x)$  z  $-2x B_{85} T_{84}(x)$  z  $B_{86} T_{84}(x)$  z  $-2x B_{86} T_{85}(x)$  z  $B_{87} T_{85}(x)$  z  $-2x B_{87} T_{86}(x)$  z  $B_{88} T_{86}(x)$  z  $-2x B_{88} T_{87}(x)$  z  $B_{89} T_{87}(x)$  z  $-2x B_{89} T_{88}(x)$  z  $B_{90} T_{88}(x)$  z  $-2x B_{90} T_{89}(x)$  z  $B_{91} T_{89}(x)$  z  $-2x B_{91} T_{90}(x)$  z  $B_{92} T_{90}(x)$  z  $-2x B_{92} T_{91}(x)$  z  $B_{93} T_{91}(x)$  z  $-2x B_{93} T_{92}(x)$  z  $B_{94} T_{92}(x)$  z  $-2x B_{94} T_{93}(x)$  z  $B_{95} T_{93}(x)$  z  $-2x B_{95} T_{94}(x)$  z  $B_{96} T_{94}(x)$  z  $-2x B_{96} T_{95}(x)$  z  $B_{97} T_{95}(x)$  z  $-2x B_{97} T_{96}(x)$  z  $B_{98} T_{96}(x)$  z  $-2x B_{98} T_{97}(x)$  z  $B_{99} T_{97}(x)$  z  $-2x B_{99} T_{98}(x)$  z  $B_{100} T_{98}(x)$  z  $-2x B_{100} T_{99}(x)$  z  $B_{101} T_{99}(x)$  z  $-2x B_{101} T_{100}(x)$  z  $B_{102} T_{100}(x)$  z  $-2x B_{102} T_{101}(x)$  z  $B_{103} T_{101}(x)$  z  $-2x B_{103} T_{102}(x)$  z  $B_{104} T_{102}(x)$  z  $-2x B_{104} T_{103}(x)$  z  $B_{105} T_{103}(x)$  z  $-2x B_{105} T_{104}(x)$  z  $B_{106} T_{104}(x)$  z  $-2x B_{106} T_{105}(x)$  z  $B_{107} T_{105}(x)$  z  $-2x B_{107} T_{106}(x)$  z  $B_{108} T_{106}(x)$  z  $-2x B_{108} T_{107}(x)$  z  $B_{109} T_{107}(x)$  z  $-2x B_{109} T_{108}(x)$  z  $B_{110} T_{108}(x)$  z  $-2x B_{110} T_{109}(x)$  z  $B_{111} T_{109}(x)$  z  $-2x B_{111} T_{110}(x)$  z  $B_{112} T_{110}(x)$  z  $-2x B_{112} T_{111}(x)$  z  $B_{113} T_{111}(x)$  z  $-2x B_{113} T_{112}(x)$  z  $B_{114} T_{112}(x)$  z  $-2x B_{114} T_{113}(x)$  z  $B_{115} T_{113}(x)$  z  $-2x B_{115} T_{114}(x)$  z  $B_{116} T_{114}(x)$  z  $-2x B_{116} T_{115}(x)$  z  $B_{117} T_{115}(x)$  z  $-2x B_{117} T_{116}(x)$  z  $B_{118} T_{116}(x)$  z  $-2x B_{118} T_{117}(x)$  z  $B_{119} T_{117}(x)$  z  $-2x B_{119} T_{118}(x)$  z  $B_{120} T_{118}(x)$  z  $-2x B_{120} T_{119}(x)$  z  $B_{121} T_{119}(x)$  z  $-2x B_{121} T_{120}(x)$  z  $B_{122} T_{120}(x)$  z  $-2x B_{122} T_{121}(x)$  z  $B_{123} T_{121}(x)$  z  $-2x B_{123} T_{122}(x)$  z  $B_{124} T_{122}(x)$  z  $-2x B_{124} T_{123}(x)$  z  $B_{125} T_{123}(x)$  z  $-2x B_{125} T_{124}(x)$  z  $B_{126} T_{124}(x)$  z  $-2x B_{126} T_{125}(x)$  z  $B_{127} T_{125}(x)$  z  $-2x B_{127} T_{126}(x)$  z  $B_{128} T_{126}(x)$  z  $-2x B_{128} T_{127}(x)$  z  $B_{129} T_{127}(x)$  z  $-2x B_{129} T_{128}(x)$  z  $B_{130} T_{128}(x)$  z  $-2x B_{130} T_{129}(x)$  z  $B_{131} T_{129}(x)$  z  $-2x B_{131} T_{130}(x)$  z  $B_{132} T_{130}(x)$  z  $-2x B_{132} T_{131}(x)$  z  $B_{133} T_{131}(x)$  z  $-2x B_{133} T_{132}(x)$  z  $B_{134} T_{132}(x)$  z  $-2x B_{134} T_{133}(x)$  z  $B_{135} T_{133}(x)$  z  $-2x B_{135} T_{134}(x)$  z  $B_{136} T_{134}(x)$  z  $-2x B_{136} T_{135}(x)$  z  $B_{137} T_{135}(x)$  z  $-2x B_{137} T_{136}(x)$  z  $B_{138} T_{136}(x)$  z  $-2x B_{138} T_{137}(x)$  z  $B_{139} T_{137}(x)$  z  $-2x B_{139} T_{138}(x)$  z  $B_{140} T_{138}(x)$  z  $-2x B_{140} T_{139}(x)$  z  $B_{141} T_{139}(x)$  z  $-2x B_{141} T_{140}(x)$  z  $B_{142} T_{140}(x)$  z  $-2x B_{142} T_{141}(x)$  z  $B_{143} T_{141}(x)$  z  $-2x B_{143} T_{142}(x)$  z  $B_{144} T_{142}(x)$  z  $-2x B_{144} T_{143}(x)$  z  $B_{145} T_{143}(x)$  z  $-2x B_{145} T_{144}(x)$  z  $B_{146} T_{144}(x)$  z  $-2x B_{146} T_{145}(x)$  z  $B_{147} T_{145}(x)$  z  $-2x B_{147} T_{146}(x)$  z  $B_{148} T_{146}(x)$  z  $-2x B_{148} T_{147}(x)$  z  $B_{149} T_{147}(x)$  z  $-2x B_{149} T_{148}(x)$  z  $B_{150} T_{148}(x)$  z  $-2x B_{150} T_{149}(x)$  z  $B_{151} T_{149}(x)$  z  $-2x B_{151} T_{150}(x)$  z  $B_{152} T_{150}(x)$  z  $-2x B_{152} T_{151}(x)$  z  $B_{153} T_{151}(x)$  z  $-2x B_{153} T_{152}(x)$  z  $B_{154} T_{152}(x)$  z  $-2x B_{154} T_{153}(x)$  z  $B_{155} T_{153}(x)$  z  $-2x B_{155} T_{154}(x)$  z  $B_{156} T_{154}(x)$  z  $-2x B_{156} T_{155}(x)$  z  $B_{157} T_{155}(x)$  z  $-2x B_{157} T_{156}(x)$  z  $B_{158} T_{156}(x)$  z  $-2x B_{158} T_{157}(x)$  z  $B_{159} T_{157}(x)$  z  $-2x B_{159} T_{158}(x)$  z  $B_{160} T_{158}(x)$  z  $-2x B_{160} T_{159}(x)$  z  $B_{161} T_{159}(x)$  z  $-2x B_{161} T_{160}(x)$  z  $B_{162} T_{160}(x)$  z  $-2x B_{162} T_{161}(x)$  z  $B_{163} T_{161}(x)$  z  $-2x B_{163} T_{162}(x)$  z  $B_{164} T_{162}(x)$  z  $-2x B_{164} T_{163}(x)$  z  $B_{165} T_{163}(x)$  z  $-2x B_{165} T_{164}(x)$  z  $B_{166} T_{164}(x)$  z  $-2x B_{166} T_{165}(x)$  z  $B_{167} T_{165}(x)$  z  $-2x B_{167} T_{166}(x)$  z  $B_{168} T_{166}(x)$  z  $-2x B_{168} T_{167}(x)$  z  $B_{169} T_{167}(x)$  z  $-2x B_{169} T_{168}(x)$  z  $B_{170} T_{168}(x)$  z  $-2x B_{170} T_{169}(x)$  z  $B_{171} T_{169}(x)$  z  $-2x B_{171} T_{170}(x)$  z  $B_{172} T_{170}(x)$  z  $-2x B_{172} T_{171}(x)$  z  $B_{173} T_{171}(x)$  z  $-2x B_{173} T_{172}(x)$  z  $B_{174} T_{172}(x)$  z  $-2x B_{174} T_{173}(x)$  z  $B_{175} T_{173}(x)$  z  $-2x B_{175} T_{174}(x)$  z  $B_{176} T_{174}(x)$  z  $-2x B_{176} T_{175}(x)$  z  $B_{177} T_{175}(x)$  z  $-2x B_{177} T_{176}(x)$  z  $B_{178} T_{176}(x)$  z  $-2x B_{178} T_{177}(x)$  z  $B_{179} T_{177}(x)$  z  $-2x B_{179} T_{178}(x)$  z  $B_{180} T_{178}(x)$  z  $-2x B_{180} T_{179}(x)$  z  $B_{181} T_{179}(x)$  z  $-2x B_{181} T_{180}(x)$  z  $B_{182} T_{180}(x)$  z  $-2x B_{182} T_{181}(x)$  z  $B_{183} T_{181}(x)$  z  $-2x B_{183} T_{182}(x)$  z  $B_{184} T_{182}(x)$  z  $-2x B_{184} T_{183}(x)$  z  $B_{185} T_{183}(x)$  z  $-2x B_{185} T_{184}(x)$  z  $B_{186} T_{184}(x)$  z  $-2x B_{186} T_{185}(x)$  z  $B_{187} T_{185}(x)$  z  $-2x B_{187} T_{186}(x)$  z  $B_{188} T_{186}(x)$  z  $-2x B_{188} T_{187}(x)$  z  $B_{189} T_{187}(x)$  z  $-2x B_{189} T_{188}(x)$  z  $B_{190} T_{188}(x)$  z  $-2x B_{190} T_{189}(x)$  z  $B_{191} T_{189}(x)$  z  $-2x B_{191} T_{190}(x)$  z  $B_{192} T_{190}(x)$  z  $-2x B_{192} T_{191}(x)$  z  $B_{193} T_{191}(x)$  z  $-2x B_{193} T_{192}(x)$  z  $B_{194} T_{192}(x)$  z  $-2x B_{194} T_{193}(x)$  z  $B_{195} T_{193}(x)$  z  $-2x B_{195} T_{194}(x)$  z  $B_{196} T_{194}(x)$  z  $-2x B_{196} T_{195}(x)$  z  $B_{197} T_{195}(x)$  z  $-2x B_{197} T_{196}(x)$  z  $B_{198} T_{196}(x)$  z  $-2x B_{198} T_{197}(x)$  z  $B_{199} T_{197}(x)$  z  $-2x B_{199} T_{198}(x)$  z  $B_{200} T_{198}(x)$  z  $-2x B_{200} T_{199}(x)$  z  $B_{201} T_{199}(x)$  z  $-2x B_{201} T_{200}(x)$  z  $B_{202} T_{200}(x)$  z  $-2x B_{202} T_{201}(x)$  z  $B_{203} T_{201}(x)$  z  $-2x B_{203} T_{202}(x)$  z  $B_{204} T_{202}(x)$  z  $-2x B_{204} T_{203}(x)$  z  $B_{205} T_{203}(x)$  z  $-2x B_{205} T_{204}(x)$  z  $B_{206} T_{204}(x)$  z  $-2x B_{206} T_{205}(x)$  z  $B_{207} T_{205}(x)$  z  $-2x B_{207} T_{206}(x)$  z  $B_{208} T_{206}(x)$  z  $-2x B_{208} T_{207}(x)$  z  $B_{209} T_{207}(x)$  z  $-2x B_{209} T_{208}(x)$  z  $B_{210} T_{208}(x)$  z  $-2x B_{210} T_{209}(x)$  z  $B_{211} T_{209}(x)$  z  $-2x B_{211} T_{210}(x)$  z  $B_{212} T_{210}(x)$  z  $-2x B_{212} T_{211}(x)$  z  $B_{213} T_{211}(x)$  z  $-2x B_{213} T_{212}(x)$  z  $B_{214} T_{212}(x)$  z  $-2x B_{214} T_{213}(x)$  z  $B_{215} T_{213}(x)$  z  $-2x B_{215} T_{214}(x)$  z  $B_{216} T_{214}(x)$  z  $-2x B_{216} T_{215}(x)$  z  $B_{217} T_{215}(x)$  z  $-2x B_{217} T_{216}(x)$  z  $B_{218} T_{216}(x)$  z  $-2x B_{218} T_{217}(x)$  z  $B_{219} T_{217}(x)$  z  $-2x B_{219} T_{218}(x)$  z  $B_{220} T_{218}(x)$  z  $-2x B_{220} T_{219}(x)$  z  $B_{221} T_{219}(x)$  z  $-2x B_{221} T_{220}(x)$  z  $B_{222} T_{220}(x)$  z  $-2x B_{222} T_{221}(x)$  z  $B_{223} T_{221}(x)$  z  $-2x B_{223} T_{222}(x)$  z  $B_{224} T_{222}(x)$  z  $-2x B_{224} T_{223}(x)$  z  $B_{225} T_{223}(x)$  z  $-2x B_{225} T_{224}(x)$  z  $B_{226} T_{224}(x)$  z  $-2x B_{226} T_{225}(x)$  z  $B_{227} T_{225}(x)$  z  $-2x B_{227} T_{226}(x)$  z  $B_{228} T_{226}(x)$  z  $-2x B_{228} T_{227}(x)$  z  $B_{229} T_{227}(x)$  z  $-2x B_{229} T_{228}(x)$  z  $B_{230} T_{228}(x)$  z  $-2x B_{230} T_{229}(x)$  z  $B_{231} T_{229}(x)$  z  $-2x B_{231} T_{230}(x)$  z  $B_{232} T_{230}(x)$  z  $-2x B_{232} T_{231}(x)$  z  $B_{233} T_{231}(x)$  z  $-2x B_{233} T_{232}(x)$  z  $B_{234} T_{232}(x)$  z  $-2x B_{234} T_{233}(x)$  z  $B_{235} T_{233}(x)$  z  $-2x B_{235} T_{234}(x)$  z  $B_{236} T_{234}(x)$  z  $-2x B_{236} T_{235}(x)$  z  $B_{237} T_{235}(x)$  z  $-2x B_{237} T_{236}(x)$  z  $B_{238} T_{236}(x)$  z  $-2x B_{238} T_{237}(x)$  z  $B_{239} T_{237}(x)$  z  $-2x B_{239} T_{238}(x)$  z  $B_{240} T_{238}(x)$  z  $-2x B_{240} T_{239}(x)$  z  $B_{241} T_{239}(x)$  z  $-2x B_{241} T_{240}(x)$  z  $B_{242} T_{240}(x)$  z  $-2x B_{242} T_{241}(x)$  z  $B_{243} T_{241}(x)$  z  $-2x B_{243} T_{242}(x)$  z  $B_{244} T_{242}(x)$  z  $-2x B_{244} T_{243}(x)$  z  $B_{245} T_{243}(x)$  z  $-2x B_{245} T_{244}(x)$  z  $B_{246} T_{244}(x)$  z  $-2x B_{246} T_{245}(x)$  z  $B_{247} T_{245}(x)$  z  $-2x B_{247} T_{246}(x)$  z  $B_{248} T_{246}(x)$  z  $-2x B_{248} T_{247}(x)$  z  $B_{249} T_{247}(x)$  z  $-2x B_{249} T_{248}(x)$  z  $B_{250} T_{248}(x)$  z  $-2x B_{250} T_{249}(x)$  z  $B_{251} T_{249}(x)$  z  $-2x B_{251} T_{250}(x)$  z  $B_{252} T_{250}(x)$  z  $-2x B_{252} T_{251}(x)$  z  $B_{253} T_{251}(x)$  z  $-2x B_{253} T_{252}(x)$  z  $B_{254} T_{252}(x)$  z  $-2x B_{254} T_{253}(x)$  z  $B_{255} T_{253}(x)$  z  $-2x B_{255} T_{254}(x)$  z  $B_{256} T_{254}(x)$  z  $-2x B_{256} T_{255}(x)$  z  $B_{257} T_{255}(x)$  z  $-2x B_{257} T_{256}(x)$  z  $B_{258} T_{256}(x)$  z  $-2x B_{258} T_{257}(x)$  z  $B_{259} T_{257}(x)$  z  $-2x B_{259} T_{258}(x)$  z  $B_{260} T_{258}(x)$  z  $-2x B_{260} T_{259}(x)$  z  $B_{261} T_{259}(x)$  z  $-2x B_{261} T_{260}(x)$  z  $B_{262} T_{260}(x)$  z  $-2x B_{262} T_{261}(x)$  z  $B_{263} T_{261}(x)$  z  $-2x B_{263} T_{262}(x)$  z  $B_{264} T_{262}(x)$  z  $-2x B_{264} T_{263}(x)$  z  $B_{265} T_{263}(x)$  z  $-2x B_{265} T_{264}(x)$  z  $B_{266} T_{264}(x)$  z  $-2x B_{266} T_{265}(x)$  z  $B_{267} T_{265}(x)$  z  $-2x B_{267} T_{266}(x)$  z  $B_{268} T_{266}(x)$  z  $-2x B_{268} T_{267}(x)$  z  $B_{269} T_{267}(x)$  z  $-2x B_{269} T_{268}(x)$  z  $B_{270} T_{268}(x)$  z  $-2x B_{270} T_{269}(x)$  z  $B_{271} T_{269}(x)$  z  $-2x B_{271} T_{270}(x)$  z  $B_{272} T_{270}(x)$  z  $-2x B_{272} T_{271}(x)$  z  $B_{273} T_{271}(x)$  z  $-2x B_{273} T_{272}(x)$  z  $B_{274} T_{272}(x)$  z  $-2x B_{274} T_{273}(x)$  z  $B_{275} T_{273}(x)$  z  $-2x B_{275} T_{274}(x)$  z  $B_{276} T_{274}(x)$  z  $-2x B_{276} T_{275}(x)$  z  $B_{277} T_{275}(x)$  z  $-2x B_{277} T_{276}(x)$  z  $B_{278} T_{276}(x)$  z  $-2x B_{278} T_{277}(x)$  z  $B_{279} T_{277}(x)$  z  $-2x B_{279} T_{278}(x)$  z  $B_{280} T_{278}(x)$  z  $-2x B_{280} T_{279}(x)$  z  $B_{281} T_{279}(x)$  z  $-2x B_{281} T_{280}(x)$  z  $B_{282} T_{280}(x)$  z  $-2x B_{282} T_{281}(x)$  z  $B_{283} T_{281}(x)$  z  $-2x B_{283} T_{282}(x)$  z  $B_{284} T_{282}(x)$  z  $-2x B_{284} T_{283}(x)$  z  $B_{285} T_{283}(x)$  z  $-2x B_{285} T_{284}(x)$  z  $B_{286} T_{284}(x)$  z  $-2x B_{286} T_{285}(x)$  z  $B_{287} T_{285}(x$

L6.1. 1 punkt Uzasadnij, że schemat Hornera jest algorytmem numerycznie poprawnym.

Weźmy dowolny wielomian  $W(x)$ ; przeprowadźmy na nim schemat Hornera.

$$W(x) = \alpha_n x^n + \alpha_{n-1} x^{n-1} + \dots + \alpha_1 x + \alpha_0$$

$$\hat{W}(x) = ((\dots (\alpha_n \times (1+\delta_n)(1+\varepsilon_n) + \alpha_{n-1})(1+\varepsilon_{n-1}) \times (1+\delta_{n-1}) + \alpha_{n-2}) \dots) (1+\varepsilon_1) \times (1+\delta_1) + \alpha_0 (1+\varepsilon_0)(1+\delta_0))$$

$(1+\delta_i)$  – błąd przy i-tym mnożeniu

$(1+\varepsilon_i)$  – błąd przy i-tym odstawianiu

$$(1+\varepsilon_n) = (1+\delta_0) = 1$$

Zobaczmy jak duży jest błąd. Wy mnożymy nawiasy do postaci normowanej wielomianu.

$$\hat{W}(x) = \alpha_n x^n (1+\delta_n)(1+\varepsilon_n)(1+\varepsilon_{n-1}) \dots (1+\varepsilon_0)(1+\delta_0) + \alpha_{n-1} x^{n-1} (1+\delta_{n-1})(1+\varepsilon_{n-1})(1+\delta_{n-2}) \dots + \alpha_0 (1+\varepsilon_0)(1+\delta_0)$$

$$\hat{W}(x) = \sum_{i=0}^n \alpha_i x^i \prod_{j=0}^i (1+\varepsilon_j)(1+\delta_j), \text{ mamy że } |\varepsilon_i|, |\delta_i| \leq 2^{-t}, \text{ zatem możemy powiedzieć}$$

$$1+\varepsilon_i = \prod_{j=0}^i (1+\varepsilon_j)(1+\delta_j), \text{ gdzie z t.v. o kumulacji błędów, gdzie } (1+\delta_0) = 1+\varepsilon_n = 1$$

$$|\varepsilon_i| \leq 1 + 2^{-t}, \text{ zatem}$$

$$\hat{W}(x) = \sum_{i=0}^n x^i \hat{\alpha}_i, \text{ gdzie } \hat{\alpha}_i = \alpha_i (1+\varepsilon_i) \text{ oraz } |\varepsilon_i| \leq 2^{-t} 2^i, \text{ gdyż mamy m.ł.}$$

zobaczmy wynik dla m.ł. zobaczmy dla danych. Zatem schemat Hornera jest numerycznie poprawny.

L6.3. 1 punkt Sformułuj i udowodnij algorytm Clenshawa obliczania wartości wielomianu

$$w(x) = \frac{1}{2} c_0 T_0(x) + c_1 T_1(x) + c_2 T_2(x) + \dots + c_n T_n(x)$$

w punkcie  $x$ , gdzie  $c_0, c_1, \dots, c_n$  są danymi stałymi, a  $T_n$  oznacza  $n$ -ty wielomian Czebyszewa.

$$\text{Weźmy } w(x) = \frac{1}{2} c_0 T_0(x) + c_1 T_1(x) + \dots + c_n T_n(x). \text{ Wiemy, że } T_0(x) = 1, T_1(x) = x$$

$$T_n(x) = 2x T_{n-1}(x) - T_{n-2}(x)$$

Niech  $B_k$  będzie  $k$ -tym wyrazem algorytmu Clenshawa.

$$\text{Dla } W(x) = \sum_{k=0}^n b_k T_k(x)$$

$$B_{n+1} = B_{n+1} = 0$$

$$B_k = 2x B_{k+1} - B_{k+2} + b_k \text{ dla } k = n, n-1, \dots, 0$$

$$\text{Pokażemy, że } W(x) = \frac{B_0 - B_2}{2} \quad \left[ b_k = B_k - 2x B_{k+1} + B_{k+2} \right]$$

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^n B_k T_k(x) &= \left( \sum_{k=0}^n (B_k - 2 \times B_{k+1} + B_{k+2}) \right) \cdot T_k(x) = \sum_{k=0}^n B_k T_k(x) - 2 \sum_{k=0}^n B_{k+1} T_k(x) + \sum_{k=0}^n B_{k+2} T_k(x) = \\
&= \frac{1}{2} B_0 T_0(x) + B_1 T_1(x) + B_2 T_2(x) - 2 \times B_1 T_0(x) + \frac{1}{2} B_2 T_0(x) + 2 B_2 T_1(x) + \sum_{k=3}^n B_k T_k(x) - 2 \times \sum_{k=2}^{n-1} B_{k+1} T_k(x) + \sum_{k=1}^{n-2} B_{k+2} T_k(x) - 2 \times B_{n+1} T_n(x) + B_{n+2} T_n(x) + B_{n+1} T_n(x) = \\
&= \frac{1}{2} B_0 T_0(x) + B_1 T_1(x) - \times B_1 T_0(x) + \frac{1}{2} B_2 T_0(x) + \sum_{k=3}^n B_k T_k(x) - 2 \times \sum_{k=3}^n B_k T_{k-1}(x) + \sum_{k=3}^n B_k T_{k-2}(x) - 2 \times B_2 T_1(x) + B_2 T_2(x) = \\
&= \frac{1}{2} B_0 T_0(x) + B_1 T_1(x) - \times B_1 T_0(x) + \frac{1}{2} B_2 T_0(x) + \underbrace{\sum_{k=3}^n B_k (T_k(x) - 2 \times T_{k-1}(x) + T_{k-2}(x))}_{=0} - 2 \times B_2 T_1(x) + B_2 T_2(x) = \\
&= \frac{1}{2} B_0 T_0(x) + B_1 T_1(x) - \times B_1 T_0(x) + B_2 T_2(x) - 2 \times B_2 T_1(x) + \frac{1}{2} B_2 T_0(x) = \\
&= \frac{1}{2} B_0 + B_1 T_1(x) - \times B_1 + \cancel{2 \times B_2 T_1(x)} - B_2 = \cancel{2 \times B_2 T_1(x)} + \frac{1}{2} B_2 = \\
&= \frac{1}{2} B_0 - \frac{1}{2} B_2 = \frac{B_0 - B_2}{2}
\end{aligned}$$

Zatem wystarczy obliczyć  $B_0$  oraz  $B_2$  znając wartości  $x$ , by policzyć wartości  $W(x)$ .

**L6.4.** [2 punkty] Niech  $T_n$  ( $n = 0, 1, \dots$ ) oznacza  $n$ -ty wielomian Czebyszewa.

- Podaj postać potęgową wielomianu  $T_6$ .
- Jakimi wzorami wyrażają się współczynniki wielomianu  $T_n$  przy  $x^n$  i  $x^{n-1}$ ?
- Korzystając z faktu, że dla dowolnego  $x$  z przedziału  $[-1, 1]$   $n$ -ty ( $n \geq 0$ ) wielomian Czebyszewa wyraża się wzorem  $T_n(x) = \cos(n \arccos x)$ :
  - sprawdź, że  $|T_n(x)| \leq 1$  ( $-1 \leq x \leq 1$ ;  $n \geq 0$ );
  - wyznacz wszystkie punkty ekstremalne  $n$ -tego wielomianu Czebyszewa, tj. rozwiązania równania  $|T_n(x)| = 1$ ;
  - udowodnij, że wielomian Czebyszewa  $T_{n+1}$  ( $n \geq 0$ ) ma  $n+1$  zer rzeczywistych, pojedynczych, leżących w przedziale  $(-1, 1)$ .

$$a) \quad T_0 = 1 \quad T_1 = x \quad T_n = 2x T_{n-1}(x) - T_{n-2}(x)$$

$$T_2(x) = 2x T_1 - T_0 = 2x^2 - 1$$

$$T_3 = 2x T_2 - T_1 = 4x^3 - 3x$$

$$T_4 = 2x T_3 - T_2 = 8x^4 - 6x^2 - 2x^2 + 1 = 8x^4 - 8x^2 + 1$$

$$T_5 = 2x T_4 - T_3 = 16x^5 - 16x^3 + 2x - 4x^3 + 3x = 16x^5 - 20x^3 + 5x$$

$$T_6 = 2x T_5 - T_4 = 32x^6 - 40x^4 + 10x^2 + 10x^2 - 8x^4 + 8x^2 - 1 = 32x^6 - 48x^4 + 18x^2 - 1$$

$$b) \quad \text{Pokażemy, że } T_n(x) = 2^{n-1} x^n + O(x^{n-1}) + Q(x) \text{ przy indukcji, dla } n \geq 1.$$

$$\text{Podstawiamy: } T_1 = x = x^1 \cdot 2^0 + O(x^0) \quad \checkmark \quad T_2 = 2x^2 - 1 = 2^1 x^2 + O(x^1) \quad \checkmark$$

$$\text{Kroki: Zatem, że dla } n \leq n \quad T_{n+1}(x) = 2^{n+1} x^{n+1} + O(x^n) + Q(x). \text{ Pokażemy, że wystarczy}$$

teraz jest spełnione dla  $n+1$ .

$$T_{n+1} = 2x T_n - T_{n-1} \stackrel{\text{z założ. i ind.}}{=} 2x(x^n \cdot 2^{n-1} + O(x^{n-1}) + Q(x)) - (x^{n-1} \cdot 2^{n-2} + O(x^{n-2}) + Q(x))$$

$$T_{n+1} = x^{n+1} 2^n + O(x^n) + Q(x) - x^{n-1} 2^{n-2} + O(x^{n-2}) + Q'(x) \quad \checkmark$$

$$c) \quad \text{Dla } x \in [-1, 1], n \geq 0 \quad T_n(x) = \cos(n \arccos x)$$

$$i) \quad \text{Pokażemy, że } |T_n(x)| \leq 1.$$

$$\text{Zauważmy, że } -1 \leq \cos(n \cdot \arccos(x)) \leq 1, \text{ zatem } |T_n(x)| \leq 1.$$

$$ii) \quad |T_n(x)| = |\cos(n \arccos(x))|$$

$$\stackrel{''}{=} \cos(n \arccos(x)) = 1 \quad \vee \quad \cos(n \arccos(x)) = -1$$

$$\stackrel{''}{=} n \cdot \arccos(x) = 0 + 2k\pi$$

$$\arccos(x) = \frac{2k\pi}{n}$$

$$x = \cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right)$$

$$\stackrel{''}{=} n \cdot \arccos(x) = \pi + 2k\pi$$

$$\arccos(x) = \frac{\pi + 2k\pi}{n}$$

$$x = \cos\left(\frac{\pi + 2k\pi}{n}\right), \text{ zatem } x = \cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)$$

$$ii) T_{n+1}(x) = \cos((n+1)\arccos(x)) = 0, x \in (-1, 1)$$

$$\Downarrow$$

$$\forall k \in \{0, \dots, n\} \arccos(x) = \frac{\pi}{2} + k\pi$$

$$\arccos(x) = \frac{\pi + 2k\pi}{2n+2}$$

$x = \cos\left(\frac{\frac{\pi}{2} + k\pi}{n+1}\right)$ , ale zauważmy, że wszystkie wartości cosinusa leżą między  $-1$  i  $1$ , poza tym ponieważ

mamy powtórzenia. Stąd chcemy, żeby

$$0 < \frac{\frac{\pi}{2} + k\pi}{n+1} \leq \pi$$

$$0 < \frac{1}{2} + k \leq n+1$$

$$0 < k \leq n + \frac{1}{2}$$

$$0 < k \leq n, \text{ gdyż mamy co najmniej } n+1 \text{ rozróżnień oraz}$$

co najmniej  $n+1$  rozróżnień, bo  $T_{n+1}(x)$  jest wielomianem stopnia  $n+1$ . Głównie  $n+1$  rozróżnień,

Nieostrożny wartości  $-1$  oraz  $1$ , bo

$$\frac{\frac{\pi}{2} + k\pi}{n+1} \notin \mathbb{Z} \cdot \cos\left(\frac{\frac{\pi}{2} + k\pi}{n+1}\right) \in [-1, 1],$$

zatem  $x \in (-1, 1)$ .

**L6.8.** 1 punkt Niech będzie  $f(x) = 2020x^5 + 1977x^4 - 1410x^3 + 1945x - 1791$ .

(a) Wyznacz wielomian stopnia  $\leq 5$  interpolujący funkcję  $f$  w punktach  $-2020, -1945, -1410, 966, 1791, 2020$ .

(b) Wyznacz wielomian drugiego stopnia, interpolujący funkcję  $f$  w punktach  $-1, 0, 1$ .

a) Wiemy, że rozmiar interpolacji Lagrange'a jest jednoznacznie idla  $n$  punktów dostajemy wielomian interpolujący  $n$ -stopnia. Stąd szukamy wielomianu

$$L_6(x) = f(x)$$

$$b) \begin{array}{c|cc|c} x & -1 & 0 & 1 \\ \hline y & -2369 & -1791 & 2741 \end{array}$$

$$\lambda_0 = \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} = \frac{(x-0)(x-1)}{(-1-0)(-1-1)} = \frac{1}{2}(x-0)(x-1)$$

$$\lambda_1 = \frac{(x+1)(x-1)}{1(-1)} = -(x+1)(x-1)$$

$$\lambda_2 = \frac{(x+1)x}{(1+1)1} = \frac{(x+1)x}{2}$$

$$L_3(x) = -\frac{2369}{2}(x-1)x + 1791(x+1)(x-1) + 2741\frac{(x+1)x}{2}$$

$$L_3(x) = -\frac{2369}{2}x^2 + \frac{2369}{2}x + 1791x^2 - 1791 + \frac{2741}{2}x^2 + \frac{2741}{2}x$$

$$L_3(x) = 1977x^2 + 2535x - 1791$$

**L6.7.** 1 punkt Podaj postać Lagrange'a wielomianu interpolacyjnego dla danych

$x_k$	0	1	2	3
$y_k$	-3	-2	0	4
	0	2	6	-10

$$\lambda_0 = \frac{(x+2)(x+4)}{(-1)(-3)(-7)}$$

$$\lambda_1 = \frac{(x+3)(x-4)}{1(-2)(-6)}$$

$$\lambda_2 = \frac{(x+3)(x+2)(x-4)}{3 \cdot 2 \cdot (-4)}$$

$$\lambda_3 = \frac{(x+3)(x+2)x}{7 \cdot 6 \cdot 4}$$

$$L_n(x) = \sum_{k=0}^n y_k \lambda_k$$

$$\lambda_k = \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq k}}^n \frac{(x-x_i)}{(x_k-x_i)}$$

$$L_3(x) = 0 + 2 \frac{(x+3)(x-4)}{(-2)(-6)} + 6 \frac{(x+3)(x+2)(x-4)}{3 \cdot 2 \cdot (-4)} - 10 \frac{(x+3)(x+2)x}{7 \cdot 6 \cdot 4}$$

Według zbioru punktów  $(x_0, y_0), (x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$ . Pokażmy, że istnieje dla niego rozwiązanie zad. interpolacyjnego.

$$l_i(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$$

$$l_i(x_i) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n \frac{x_i - x_j}{x_i - x_j} = 1$$

$$l_i(x_k) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n \frac{x_k - x_j}{x_i - x_j} = 0, \text{ bo istnieje } k=j$$

Mamy zatem punkty

	$x_0$	$x_1$		$x_n$	
$y_0 \lambda_0(x)$	$y_0$	0	...	0	
$y_1 \lambda_1(x)$	0	$y_1$	0	...	0
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$
$y_n \lambda_n(x)$	0	0	...	0	$y_n$

Uwielamy też, że  $l_i$  jest wielomianem stopnia  $\leq n$ , bo jest iloczynem  $n$  czynników  $(x - x_j)$ .

Wtedy z wielomianów  $l_i$  systemem wznow interpolacyjny o punkcie  $x_i$ , u pozostałych są zerowe i nieupływają na wyz.

Zatem mamy

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^n y_i l_i(x) \text{ spełnia wszystkie warunki interpolacji.}$$

Zatem tak  $L_n(x)$  istnieje.

Pokażmy, że jest jedyny. Zauważmy, że istnieje takie  $W(x), Q(x)$  - wielomiany co najwyżej  $n$ -tego stopnia, t.j. dla  $i = 0, 1, \dots, n$   $W(x_i) = Q(x_i)$ , będące rozwiązaniem zadania interpolacyjnego dla pewnej funkcji.

Wtedy możemy wskazać  $D(x)$  t.j.

$$D(x) = W(x) - Q(x) \quad \text{Wtedy, że } D(x) \text{ - wielomian co najwyżej } n\text{-tego stopnia, bo jest różnicą wielomianów } \leq n, n\text{-tego stopnia.}$$

W szczególności  $D(x_i) = W(x_i) - Q(x_i) = 0$ . Stąd możemy powiedzieć, że  $D(x)$  ma co najmniej  $n+1$  pierwiastków, ale jest wielomianem co najwyżej  $n$ -tego stopnia, zatem

$$D(x) = 0, \text{ czyli}$$

$$W(x) = Q(x)$$

L6.5. 2 punkty Wykaż, że dla dowolnych  $k, l \in \mathbb{N}$  oraz  $x \in \mathbb{R}$  zachodzi

$$T_{kl}(x) = T_k(T_l(x)).$$

Wykorzystaj podaną zależność do opracowania **szybkiego algorytmu** wyznaczania wartości wielomianu Czebyszewa **wysokiego** stopnia niebędącego liczbą pierwszą.

Uzór  $T(n) = \cos(n \arccos(x))$  określa tylko dla  $|x| \leq 1$ . Wyznaczymy wzór dla pozostałych.

$$T_{n+2}(x) = 2x T_{n+1}(x) - T_n(x), \quad T_0(x) = 1, \quad T_1(x) = x$$

$$y^2 - 2xy - 1 = 0$$

$$y_1 = \frac{2x - \sqrt{4x^2 - 4}}{2}, \quad y_2 = \frac{2x + \sqrt{4x^2 - 4}}{2}$$

$$y_1 = x - \sqrt{x^2 - 1}, \quad y_2 = x + \sqrt{x^2 - 1}$$

$$T_n = \alpha (x - \sqrt{x^2 - 1})^n + \beta (x + \sqrt{x^2 - 1})^n$$

$$\begin{cases} 1 = \alpha (x - \sqrt{x^2 - 1})^0 + \beta (x + \sqrt{x^2 - 1})^0 \\ x = \alpha (x - \sqrt{x^2 - 1})^1 + \beta (x + \sqrt{x^2 - 1})^1 \end{cases} \Rightarrow \beta = 1 - \alpha$$

$$x = \alpha x - \alpha \sqrt{x^2 - 1} + x + \sqrt{x^2 - 1} \Rightarrow \alpha \sqrt{x^2 - 1} = \sqrt{x^2 - 1}$$

$$2\alpha \sqrt{x^2 - 1} = \sqrt{x^2 - 1}$$

$$\alpha = \frac{1}{2}, \quad \beta = \frac{1}{2}$$

$$T_n = \begin{cases} \frac{(x + \sqrt{x^2 - 1})^n + (x - \sqrt{x^2 - 1})^n}{2}, & |x| \geq 1 \\ \cos(n \arccos(x)), & |x| \leq 1 \end{cases}$$

Możemy przedstawić  $\frac{(x + \sqrt{x^2 - 1})^n + (x - \sqrt{x^2 - 1})^n}{2}$  inaczej.

$$\text{Dla } x \geq 1 \quad x = \cosh(\theta) \Rightarrow \theta = \cosh^{-1}(x)$$

$$\begin{aligned} \cosh^2(\theta) - \sinh^2(\theta) &= 1 \quad T_n(\cosh(\theta)) = \frac{(\cosh(\theta) + \sqrt{\cosh^2(\theta) - 1})^n + (\cosh(\theta) - \sqrt{\cosh^2(\theta) - 1})^n}{2} \\ T_n(\cosh(\theta)) &= \frac{(\cosh(\theta) + \sinh(\theta))^n + (\cosh(\theta) - \sinh(\theta))^n}{2} \\ \cosh(\theta) &= \frac{e^\theta + e^{-\theta}}{2} \quad \sinh(\theta) = \frac{e^\theta - e^{-\theta}}{2} \\ T_n(\cosh(\theta)) &= \frac{\left(\frac{e^\theta + e^{-\theta}}{2}\right)^n + \left(\frac{e^\theta - e^{-\theta}}{2}\right)^n}{2} = \frac{e^{\theta n} + e^{-\theta n}}{2} \\ T_n(\cosh(\theta)) &= \cosh(\theta n) = \cosh(n \cosh^{-1}(x)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Dla } x \leq -1 \quad x &= -\cosh(\theta) \Rightarrow \theta = \operatorname{arccosh}(-x) \\ T_n(-\cosh(\theta)) &= \frac{(-\cosh(\theta) + \sinh(\theta))^n + (-\cosh(\theta) - \sinh(\theta))^n}{2} \\ T_n(-\cosh(\theta)) &= (-1)^n \left( \frac{e^{-\theta} + e^\theta}{2} \right) = (-1)^n \cosh(\theta n) \\ T_n(-\cosh(\theta)) &= (-1)^n \cosh(n \operatorname{arccosh}(-x)) \end{aligned}$$

Pokażemy, że  $T_{nk}(x) = T_n(T_k(x))$

(1)  $|x| \leq 1$

$$\begin{aligned} T_n(T_k(x)) &= \cos(n \arccos(\underbrace{\cos(k \arccos(x))}_{\in [-1, 1]})) \\ &= \cos(nk \arccos(x)) = T_{nk}(x) \quad \checkmark \end{aligned}$$

(2)  $x \geq 1$

$$\begin{aligned} T_n(T_k(x)) &= \cosh(n \cosh^{-1}(\underbrace{\cosh(k \cosh^{-1}(x))}_{\in [1, +\infty]})) \\ &= \cosh(nk \cosh^{-1}(x)) = T_{nk}(x) \quad \checkmark \end{aligned}$$

(3)  $x \leq -1$

$$T_k(x) = (-1)^k \cosh(k \cosh^{-1}(-x))$$

$$\text{Uwaga, że } T_n(x) = (-1)^n T_n(x)$$

Zmiana znaku

$$T_n(-x) = (-1)^n T_n(x)$$

I  $k$ -parzyste

$$-x \geq 1$$

$$T_n(T_k(x)) = \cosh(n \cosh^{-1}(\underbrace{\cosh(k \cosh^{-1}(-x))}_{\in [1, +\infty]}))$$

$\rightarrow k$  parzyste

$$= \cosh(nk \cosh^{-1}(-x)) = T_{nk}(-x) = (-1)^{nk} T_{nk}(x) = T_{nk}(x) \quad \checkmark$$

II  $k$ -nieparzyste

$$\begin{aligned} T_n(T_k(x)) &= (-1)^n \cosh(n \cosh^{-1}(-\underbrace{(-1)^k \cosh(k \cosh^{-1}(-x))}_{\text{k nieparzyste}})) \\ &= (-1)^n \cosh(n \cosh^{-1}(\cosh(k \cosh^{-1}(-x)))) \end{aligned}$$

$$= (-1)^n (\cosh(\ln k \cosh^{-1}(-x)))$$

$$= (-1)^n T_{nk}(-x) = (-1)^n (-1)^{nk} T_{nk}(x)$$

$$= (-1)^{n(1+k)} T_{nk}(x)$$

$$= T_{nk}(x) \quad \checkmark$$

Szkie algorytm.

Dla dużych  $n$  przybliżenie  $T_n(x)$  możemy wybrać  $n$  na czynnik pierwsze.

Mamy wtedy  $T_n(x) = T_{p_1}(T_{p_2} \dots T_{p_i}(x) \dots)$ , gdzie  $p_i$  to małe pierwsze. Wtedy

możemy oszacować złożoność tego algorytmu. W najgorszym przypadku  $n$  to liczba

pierwsza, wtedy mamy złożoność takiego jak dla rekurencyjnego algorytmu. Inaczej najgorszy przypadek jest, gdy  $n = 2^p$ , gdzie  $p$  to liczba pierwsza. Wtedy mamy

$T_2(T_p(x))$ . Mamy wtedy obliczenia  $T_m(x)$  dla najniższych możliwych  $m$ . Oznaczamy to domową wersją tego przypadku

jedno

$$\sqrt{n} + \log_2 n \cdot \phi^{\frac{n}{2}}$$

wyrażenie  
drzewa przeszukiwania

ilość  
zajmujących

złożoność  
obliczenia  $T$  dla  
domowego przypadku  
zajmujących

Złożoność całego algorytmu to  $O(\phi^n)$ .

$$\log_2 n \cdot \phi^{\frac{n}{2}} \leq \phi^n / \phi^{\frac{n}{2}}$$

$\log_2 n \leq \phi^{\frac{n}{2}}$ , zatem  
jest to algorytm szybszy.

**n = 26**

**x = 1.5**

**Fast: 36840651123.5**

**Calls: 761**

**Slow: 36840651123.5**

**Calls: 392835**

**L6.9. 1 punkt** Wykaż, że dla wielomianów

$$\lambda_k(x) := \prod_{j=0, j \neq k}^n \frac{x - x_j}{x_k - x_j} \quad (k = 0, 1, \dots, n)$$

zachodzi

$$\text{a) } \sum_{k=0}^n \lambda_k(x) \equiv 1, \quad \text{b) } \sum_{k=0}^n \lambda_k(0) x_k^j = \begin{cases} 1 & (j=0), \\ 0 & (j=1, 2, \dots, n). \end{cases}$$

a) Weźmy funkcję  $f(x) = 1$ , wtedy mamy  $W(x) = \sum_{k=0}^n y_k \lambda_k(x)$ , gdzie  $y_k = f(x_k)$ . Wiemy, że  $\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = 1$ , zatem  $W(x) = \sum_{k=0}^n \lambda_k(x)$ . Mamy  $f(x)$  - wielomian 0-tego stopnia i  $n+1$  punktów.

czyli z jednoznaczności rezultatu zbudowania interpolacyjnego  $W(x) \equiv 1$ , zatem  $\sum_{k=0}^n \lambda_k(x) \equiv 1$ .

b) Weźmy funkcję  $f(x)$  i  $n+1$  punktów  $x_0 \dots x_n$ . Wtedy  $W_n(x)$  - wielomian interpolujący  $f$   $n$ -tego stopnia. Rozpatujemy dwa przypadki.

z jednoznaczności rezultatu zbudowania interpolacyjnego

1°  $f = 1 \dots n$ . Weźmy  $f(x) = x^i$ . Wtedy mamy  $W_n(x) = \sum_{k=0}^n \lambda_k y_k = \sum_{k=0}^n \lambda_k f(x_k) = \sum_{k=0}^n \lambda_k x_k^i = f(x)$ . Stąd

$$x^i = \sum_{k=0}^n x_k^i \lambda_k, \text{ uogólniamy dla } x=0$$

$$0 = \sum_{k=0}^n x_k^i \lambda_k(0)$$

$x=0$  to pewien zero zbioru albo polynomu, w obu przypadkach jest równy 1.

2°  $j=0$ . Weźmy  $f(x) = 1$ .  $f$  to wielomian 0 stopnia, więc dla  $n+1$  punktów  $x_0, \dots, x_n$  z jednoznaczności - 1 -

$$W_n(x) = f(x) = \sum_{k=0}^n \lambda_k y_k = \sum_{k=0}^n \lambda_k f(x_k) = \sum_{k=0}^n \lambda_k 1, \text{ stąd}$$

$$f(0) = 1 = \sum_{k=0}^n x_k^0 \lambda_k(0)$$