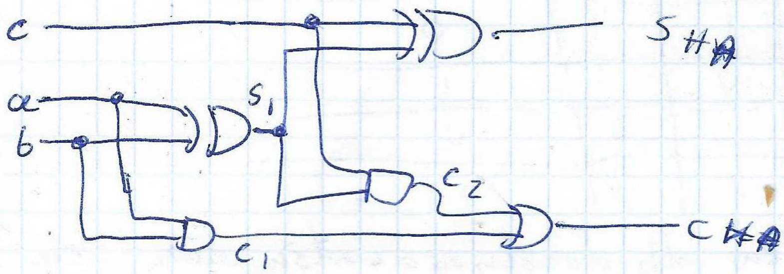
Zad 1. Sumator pełny (Karnaugh)

$s_k = a \oplus b \oplus c$

$c_k = ab + ac + bc$

Sumator pełny (Half Adder)



$$S_{HA} = c \oplus s_1 = c \oplus (a \oplus b)$$

$$C_{HA} = c_1 + c_2 = (ab) + (s_1 c) = ab + c\,(a \oplus b)$$

a	b	c	C_{HA}	$a \oplus b$	C_K	S_K	S_{HA}
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0	1	1
0	1	0	0	1	0	1	1
0	1	1	1	1	1	0	0
1	0	0	0	1	0	1	1
1	0	1	1	1	1	0	0
1	1	0	1	0	1	0	0
1	1	1	1	0	1	1	1

Zatem dla dowolnego wartościowania a, b, c $S_{HA} = S_K$ oraz $C_K = C_{HA}$, czyli sumatory są sobie równoważne.

Zad 2. Pokażemy, że $c_k = a_k \oplus b_k \oplus s_k$ przy sumowaniu liczb binarnych za pomocą tabeli wartości logicznych.

a_k	b_k	c_k	s_k	$a_k \oplus b_k$	$a_k \oplus b_k \oplus s_k$
0	0	0	0	0	0
0	0	1	1	0	1
0	1	0	1	1	0
0	1	1	0	1	1
1	0	0	1	1	0
1	0	1	0	1	1
1	1	0	0	0	0
1	1	1	1	0	1

Wartości s_k znamy z wykładu.

Zatem dla dowolnego wartościowania $c_k = a_k \oplus b_k \oplus s_k$

Zad 3.

$g_k = a_k b_k$ - jedna bramka AND

$p_k = a_k + b_k$ - jedna bramka OR

$s_k = a_k \oplus b_k \oplus c_k$ - jedna bramka XOR

Musimy sprawdzić ilość bramek dla każdego c_n, $n \in [1,8]$. Stosujemy wzór

$$c_n = \sum_{i=-1}^{n-1} g_i \prod_{j=i+1}^{n-1} p_j, \quad \cancel{c_0 = g_0}$$

$c_1 = (g_{-1} p_0) + g_0$ - 2 bramki

$c_2 = (g_{-1} p_0 p_1) + (g_0 p_1) + g_1$ - $2 + 1 = 3$ bramki

$c_3 = (g_{-1} p_0 p_1 p_2) + (g_0 p_1 p_2) + (g_1 p_2) + g_2$ ~~5 bramek~~ - 4 bramki

$c_4 = [(g_{-1} p_0 p_1 p_2 p_3) + (g_0 p_1 p_2 p_3) + (g_1 p_2 p_3) + (g_2 p_3) + g_3]$ - $4 + 2 + \cancel{11} = 8$ bramek

$c_5 = \cancel{c_3 p_4 + g_4}\ [(g_{-1} p_0 p_1 p_2 p_3 p_4) + (g_0 p_1 p_2 p_3 p_4) + (g_1 p_2 p_3 p_4) + (g_2 p_3 p_4) + (g_3 p_4) + g_4]$

~~$4 + 2 + 2 + 1 = 9$ bramek~~

$c_6 = [(g_{-1} p_0 p_1 p_2 p_3 p_4 p_5) + (g_0 p_1 p_2 p_3 p_4 p_5) + (g_1 p_2 p_3 p_4 p_5) + (g_2 p_3 p_4 p_5) + (g_3 p_4 p_5) + (g_4 p_5) + g_5]$

~~$4 + 3 + 2 + 2 + 1 = 13$ bramek~~

$c_7 = (g_{-1} p_0 p_1 p_2 p_3 p_4 p_5 p_6) + (g_0 p_1 p_2 p_3 p_4 p_5 p_6) + (g_1 p_2 p_3 p_4 p_5 p_6) + (g_2 p_3 p_4 p_5 p_6) + (g_3 p_4 p_5 p_6 + g_4 p_5 p_6 + g_5 p_6 + g_6)$

$c_8 = (g_{-1} p_0 p_1 p_2 p_3 p_4 p_5 p_6 p_7 + g_0 p_1 p_2 p_3 p_4 p_5 p_6 p_7 + g_1 p_2 p_3 p_4 p_5 p_6 p_7 + (g_2 p_3 p_4 p_5 p_6 p_7) + (g_3 p_4 p_5 p_6 p_7) + g_4 p_5 p_6 p_7 + g_5 p_6 p_7 + g_6 p_7 + g_7)$

~~$c_7 = 4 + 2 + 3 + 3 + 3 + 1 + 1 = 17$ bramek~~

~~$c_8 = 4 + 2 + 3 + 3 + 3 + 4 + 1 + 1 = 21$~~

~~W sumie $8 + 8 + 8 + 21 + 17 + 13 + 9 + 7 + 4 + 3 + 2$~~