MDL Lista 5 Krystian Jasionek

1. Ile jest podzbiorów zbioru n kolejnych liczb naturalnych, w których nie występują dwie kolejne liczby?

Przyjrzyjmy się kilku pierwszym takim podzbiorom.

$n=0: \ |\{\emptyset\}| = W(0) = 1$

$n=1: \ |\{\emptyset, \{1\}\}| = W(1) = 2$

$n=2: \ |\{\emptyset, \{1\}, \{2\}\}| = W(2) = 3$

$n=3: \ |\{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,3\}\}| = W(3) = 5$

$n=4: \ |\{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,3\}, \{4\}, \{1,4\}, \{2,4\}\}| = W(4) = 8$

$n=5: \ |\{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,3\}, \{4\}, \{1,4\}, \{2,4\}, \{1,2,4\}, \{5\}, \{1,5\}, \{2,5\}, \{3,5\}, \{1,3,5\}\}| = W(5) = 13$

Widzimy, że dla każdego n (poza $n=0$) wynikiem jest wynik dla $n-1$ powiększony o dozwolone sumy zbiorów z $n-1$ z singletonem $\{n\}$ (w przykładach oznaczone na zielono). Liczbę dozwolonych sum zbiorów dla $n-1$ z $\{n\}$ możemy łatwo wyznaczyć. Zauważmy, że musimy unikać podzbiorów zawierających elementy n oraz $n-1$. Ale podzbiory dla $n-1$ zawierają podzbiory dla $n-2$, w których nie występuje element $n-1$, zatem dozwolonych sum podzbiorów dla $n-1$ z $\{n\}$ jest tyle ile wszystkich sum podzbiorów dla $n-2$ z $\{n\}$, tj. $W(n-2)$. Stąd możemy napisać, że

$$W(n) = W(n-1) + W(n-2)$$

Możemy zauważyć podobieństwo otrzymanego wzoru do wzoru na n-ty wyraz ciągu Fibonacciego.

Wyznaczmy jawny wzór na $W(n)$.

$$W(n) = W(n-1) + W(n-2)$$, ale zauważmy, że $W(n) = F(n+2)$, $n \geq 0$

$$W(n) = F(n+2) = F(n) + F(n+1)$$

$$F(n+2) = F(n) + F(n+1)$$ ma następujący wielomian charakterystyczny, który

możemy rozwiązać.

$$x^2 = x + 1$$

$$x^2 - x - 1 = 0$$

$$\sqrt{\Delta} = \sqrt{5}$$

$$x_1 = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \qquad x_2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

$\boxed{\begin{matrix} W(0)=1 \\ W(1)=2 \end{matrix}}$ $\boxed{\begin{matrix} F(0)=0 \\ F(1)=1 \end{matrix}}$

$$F(n) = a x_1^n + b x_2^n$$

$$\begin{cases} 0 = a + b \\ 1 = a\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) + b\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) \end{cases} \Rightarrow b = -a$$

$$1 = \cancel{\tfrac{a}{2}} - \frac{a\sqrt{5}}{2} - \cancel{\tfrac{a}{2}} - \frac{a\sqrt{5}}{2}$$

$$1 = -a\sqrt{5}$$

$$a = \frac{-1}{\sqrt{5}}, \quad b = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

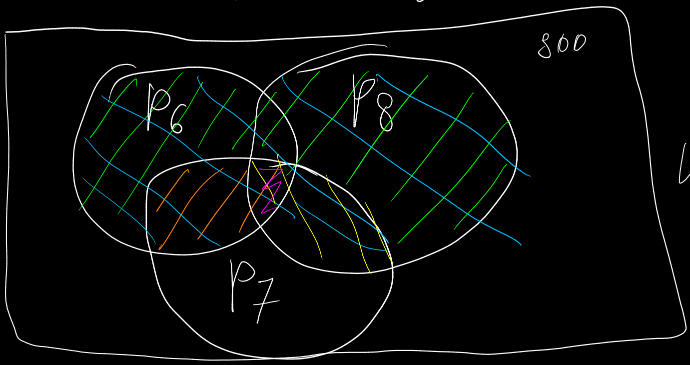
$$F(n) = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right)$$, ale my chcemy $W(n)$, zatem

$$W(n) = F(n+2)$$

$$W(n) = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+2} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+2}\right)$$

2. Wśród liczb naturalnych $1, 2, \ldots, 800$, ile jest takich, które nie są podzielne przez 7, ale są podzielne przez 6 lub przez 8.

Rozpatrzmy problem, korzystając z reguły włączeń i wyłączeń. Zauważmy, że poszukujemy miary sumy zakolorowanej na diagramie obok.



Wtedy interesuje nas S.

Z diagramu widzimy, że

$$S = |(P_6 \cup P_8) \setminus P_7| = |(P_6 \cup P_8) \setminus P_7| = |P_6 \cup P_8| - |P_6 \cap P_7| - |P_7 \cap P_8| + |P_6 \cap P_8 \cap P_7|$$

$$|(P_6 \cup P_8)| = |P_6| + |P_8| - |P_6 \cap P_8|$$

$$|P_6| = \left\lfloor \frac{800}{6} \right\rfloor \quad |P_8| = \left\lfloor \frac{800}{8} \right\rfloor \quad |P_6 \cap P_8| = \left\lfloor \frac{800}{24} \right\rfloor$$

$$|P_6| = 133 \quad |P_8| = 100 \quad |P_6 \cap P_8| = 33$$

$$|P_6 \cup P_8| = 133 + 100 - 33 = 200$$

$$S = |(P_6 \cup P_8) \setminus P_7| = |P_6 \cup P_8| - |P_6 \cap P_7| - |P_7 \cap P_8| + |P_6 \cap P_8 \cap P_7|$$

$$|P_6 \cap P_7| = \left\lfloor \frac{800}{42} \right\rfloor = 19 \qquad |P_7 \cap P_8| = \left\lfloor \frac{800}{56} \right\rfloor = 14 \qquad |P_6 \cap P_8 \cap P_7| = \left\lfloor \frac{800}{168} \right\rfloor = 4$$

$$S = 200 - 19 - 14 + 4$$

$$S = 171$$

3. Korzystając z zasady włączeń-wyłączeń oblicz, ile jest sposobów ustawienia liter $a, a, a, a, b, b, b, c, c$ w taki sposób, aby takie same litery nie tworzyły jednego bloku, tzn. ustawienie $a, a, a, a, b, c, b, c, b$ jest zakazane, ale ustawienie $a, a, a, b, a, c, b, c, b$ jest dobre.

S - wszystkie możliwe ustawienia
A - ustawienia z jednym blokiem „a"
B - ustawienia z jednym blokiem „b"
C - ustawienia z jednym blokiem „c"

Interesuje nas

$$|S - A \cup B \cup C| = W$$

$$|S| = \binom{9}{4}\binom{5}{3}\binom{2}{2}$$

$$|A| = \binom{6}{1}\binom{5}{3}\binom{2}{2}$$

blok traktujemy jak jeden element, wtedy możemy go ustawić na jednym z 6 miejsc

$$|B| = \binom{7}{1}\binom{6}{4}\binom{2}{2}$$

analogicznie, ale blok b jest o 1 krótszy od a, stąd 7 miejsc

$$|C| = \binom{8}{1}\binom{7}{4}\binom{3}{3}$$

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$$

$$|A \cap B| = \binom{4}{1}\binom{3}{1}\binom{2}{2} = 12$$

analogicznie, ale teraz mamy dwa bloki, które rozpatrujemy jak pojedyncze elementy

$$|A \cap C| = \binom{5}{1}\binom{4}{1}\binom{3}{3} = 20 \qquad |B \cap C| = \binom{6}{1}\binom{5}{1}\binom{4}{4} = 30$$

$$|A \cap B \cap C| = \binom{3}{1}\binom{2}{1}\binom{1}{1} = 6$$

trzy bloki, więc tylko trzy elementy

$$|A \cup B \cup C| = 6 \cdot 10 + 7 \cdot 15 + 8 \cdot 35 - 12 - 20 - 30 + 6 = 389$$

$$W = 126 \cdot 10 - 389$$

$$W = 871$$

4. *Nieporządkiem* nazywa się taką permutację elementów, w której żaden element nie znajduje się na swoim miejscu. Niech d_n oznacza liczbę nieporządków utworzonych z n kolejnych liczb naturalnych. Wyprowadź wzór na d_n stosując zasadę włączeń-wyłączeń.

$d_n = |U - P|$, gdzie U - wszystkie permutacje n elementowe, P - wszystkie permutacje, gdzie co najmniej 1 element jest na swoim miejscu. Niech P_i oznacza zbiór permutacji, gdzie i-ty element jest na swoim miejscu. Wtedy $P_i \cap P_j$ oznacza permutacje, w których i-ty i j-ty element są na swoich miejscach, itd. dla większej liczby elementów.

$|U| = n!$

$|A_i| = 1 \cdot (n-1)!$

$|A_i \cap A_j| = 1 \cdot 1 \cdot (n-2)!$

$\vdots$

$|A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \ldots \cap A_n| = 1$

Szukamy $W = |U - P|$

$$P = \sum_{i=0}^{n} |A_i| - \sum_{j<i} |A_i \cap A_j| + \ldots + (-1)^n (A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n|$$

$$P = (n-1)! \cdot \binom{n}{1} - (n-2)! \binom{n}{2} + \ldots + (-1)^n \, 0! \binom{n}{n}$$

wybieramy 1 z n liczb, która stoi na swoim miejscu

wybieramy 2 z n liczb, które stoją na swoim miejscu

wybieramy n z n, które liczb stoi na swoim miejscu

$$P = \frac{n! \cancel{(n-1)!}}{\cancel{(n-1)!}\, 1!} - \frac{\cancel{(n-2)!} \; n!}{\cancel{(n-2)!} \; 2!} + \frac{\cancel{(n-3)!} \cdot n!}{\cancel{(n-3)!} \cdot 3!} + \ldots + \frac{(-1)^n \, 0! \, n!}{0! \; n!}$$

$$P = \frac{n!}{1!} - \frac{n!}{2!} + \frac{n!}{3!} + \ldots + \frac{(-1)^n n!}{n!} = n! \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} - \ldots + \frac{(-1)^n}{n!} \right)$$

$$W = |U - P| = n! - n! \left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \ldots + \frac{(-1)^n}{n!}\right) = n! \left(1 - 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \ldots + \frac{(-1)^n}{n!}\right)$$

$$\underbrace{W = n! \sum_{i=0}^{n} \frac{(-1)^i}{i!}}$$

10. Ile jest różnych sposobów wejścia po schodach zbudowanych z n stopni, jeśli w każdym kroku można pokonać jeden lub dwa stopnie?

Przeanalizujmy kilka pierwszych przypadków. Niech $S(n)$ to liczba sposobów, na jakie można wejść na schody zbudowane z n stopni.

$S(0) = 1$ - nie ma jak wejść

$S(1) = 1$ - tylko jeden krok o 1 stopień.

$S(2) = 2$ - 2 kroki po 1 lub 1 po 2

$S(3) = 3$ - 2 kroki, pierwszy po 1 i drugi po 2, pierwszy po 2 i drugi po 1, trzy kroki po 1.

$S(4) = 5$ - 2 kroki: I - 2, II - 2; 3 kroki: I - 1, II - 2, III - 2; I - 2, II - 1, III - 2; I - 2, II - 2, III - 1; 5 kroków: wszystkie po 1

Zauważmy, że kolejne wyrazy S przypominają ciąg Fibonacciego. Istotnie, możemy rozważyć nasz problem w następujący sposób. Załóżmy, że chcemy przejść n stopni schodów stawiając nogę co 1 lub 2 stopnie. To oznacza, że mamy dwa sposoby, w jakie możemy wykonać ostatni krok, tzn. jeśli wcześniej pokonaliśmy n-1 stopni, to musimy wykonać 1 krok, a poprzednio mogliśmy wykonać na $S(n-1)$ sposobów, a jeśli wcześniej pokonaliśmy n-2 stopni, to musimy wykonać krok o 2 stopnie (wykonanie dwóch kroków po 1 byłoby równoważne z poprzednim przypadkiem), a poprzednio mogliśmy pokonać je na $S(n-2)$ sposobów. Zatem to ile stopni pokonamy w ostatnim kroku jest określone przez to jak pokonaliśmy wszystkie poprzednie kroki. Stąd możemy napisać, że

$$S(0) = S(1) = 1 \quad , \quad S(n) = 1 \cdot S(n-1) + 1 \cdot S(n-2) \quad , \; n \geq 2$$

1 – liczba sposobów na zrobienie ostatniego kroku; $S(n-1)$ – na jakie można pokonać poprzednie n-1 stopni; $+$ – lub obu tych przypadków; 1 – –||–; $S(n-2)$ – –||– poprzednie n-2 stopni

$$S(0) = S(1) = 1 \quad , \quad S(n) = S(n-1) + S(n-2) \text{ dla } n \geq 3$$

Liczbę sposobów $S(n)$ możemy wyrazić też wzorem jawnym.

$S(n) = F_{n+1}$, bo możemy uznać S za przesunięty o 1 wyraz ciąg Fibonacciego.

$$S(n) = F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$$

$F_{n+1} - F_n - F_{n-1} = 0$, który ma równanie charakterystyczne

$x^2 - x - 1 = 0$, które pierwiastki to

$x_1 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$, $x_2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, zatem

$$S(n) = a\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} + b\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}$$

$S(0) = 1$

$S(1) = 1$

$$\begin{cases} 1 = a\frac{1-\sqrt{5}}{2} + b\frac{1+\sqrt{5}}{2} & / \cdot \frac{1+\sqrt{5}}{2} \\ 1 = a\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2 + b\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 \end{cases} \iff - \begin{cases} \frac{1+\sqrt{5}}{2} = a\frac{1-5}{4} + b\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 \\ 1 = a\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2 + b\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 \end{cases}$$

$$\frac{1+\sqrt{5}}{2} - 1 = -a - a\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2$$

$$\frac{\sqrt{5}-1}{2} = -a - \frac{a}{4} + \frac{a\sqrt{5}}{2} - \frac{5a}{4}$$

$$\frac{\sqrt{5}-1}{2} = -\frac{10}{4}a + \frac{a\sqrt{5}}{2}$$

$$\frac{\sqrt{5}-1}{2} = a\left(-\frac{10}{4} + \frac{\sqrt{5}}{2}\right) \Big/ : \left(-\frac{10}{4} + \frac{\sqrt{5}}{2}\right)$$

$$\frac{\sqrt{5}-1}{\cancel{2}} \cdot \frac{\cancel{2}}{\sqrt{5}-5} = a$$

$$\frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{5}-5} \cdot \frac{\sqrt{5}+5}{\sqrt{5}+5} = a$$

$$a = \frac{5+4\sqrt{5}-5}{5-25} = \frac{4\sqrt{5}}{-20} = -\frac{\sqrt{5}}{5} = -\frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$1 = a\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) + b\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$$

$$1 = -\frac{1}{\sqrt{5}}\frac{1-\sqrt{5}}{2} + b\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$$

$$1 = -\frac{1-\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} + b\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$$

$$\frac{2\sqrt{5}-\sqrt{5}+1}{2\sqrt{5}} = b\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) / \cdot 2$$

$$\frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{5}} = b(1+\sqrt{5})$$

$$b = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

Zatem

$$S(n) = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right), \; n \geq 1$$

11. Baltazar Gąbka ma 7 przyjaciół. Określ, na ile sposobów moze zapraszać po 3 z nich na kolację przez 7 kolejnych dni tak, aby każdy z nich został zaproszony co najmniej raz.

Niech Ω - zbiór wszystkich sposobów, na jakie może zaprosić po 3 znajomych z 7 przez 7 kolejnych dni.

$$|\Omega| = \binom{7}{3}^7$$ - wykładnik to 7, bo przez 7 dni.

Niech Z_i - zbiór sposobów na jakie można zaprosić po 3 spośród 7 gości, pomijając i-tego znajomego przez 7 dni.

$$|Z_i| = \binom{6}{3}^7, \quad |Z_i \cap Z_j| = \binom{5}{3}^7, \quad |Z_i \cap Z_j \cap Z_k| = \binom{4}{3}^7 \quad |Z_i \cap Z_j \cap Z_k \cap Z_l| = \binom{3}{3}^7$$

Z - zbiór sposobów na jakie można zaprosić przez 7 dni 3 z 7 znajomych pomijając co najmniej jednego znajomego.

Interesuje nas $|\Omega - Z|$.

$$|Z| = \left|\bigcup_{i=1}^{7} Z_i\right|$$

$$|Z| = \binom{7}{1}|Z_i|^7 - \binom{7}{2}|Z_i \cap Z_j|^7 + \binom{7}{3}|Z_i \cap Z_j \cap Z_k|^7 - \binom{7}{4}|Z_i \cap Z_j \cap Z_k \cap Z_l|^7$$

nie ma sensu rozpatrywać iloczynu więcej niż 4 zbiorów Z_i, bo oznacza to wykluczenie więcej niż 4 osób, a wtedy nie możemy wybrać 3 z pozostałych. Wyzerują się.

$$|Z| = 7 \cdot 20^7 - 21 \cdot 10^7 + 35 \cdot 4^7 - 35 \cdot 1^7$$

$$|Z| = 8940573405$$

$$|\Omega - Z| = \binom{7}{3}^7 - \binom{7}{1}\binom{6}{3}^7 + \binom{7}{2}\binom{5}{3}^7 - \binom{7}{3}\binom{4}{3}^7 + \binom{7}{4}\binom{3}{3}^7$$

$$|\Omega - Z| = 55\,588\,723\,470$$