2. X jest zmienną losową typu dyskretnego, tzn. dane są ciągi $\{x_i\}, \{p_i\}$ – wartości i ppb tej zmiennej. Udowodnić, że dla $Y = aX + b$ jest $\mathrm{V}(Y) = a^2\mathrm{V}(X)$, $(a, b \in \mathbb{R})$.

Definicja 4. *Wartością oczekiwaną zmiennej losowej X nazywamy liczbę $EX = E(X) = \sum_i x_i p_i$ w wypadku dyskretnym lub $E(X) = \int_{\mathbb{R}} x f(x)\, dx$ w wypadku ciągłym.*

Definicja 5. *Wariancją zmiennej losowej X nazywamy liczbę $VX = V(X) = \sum_i (x_i - EX)^2\, p_i$ w wypadku dyskretnym lub $V(X) = \int_{\mathbb{R}} (x - EX)^2 f(x)\, dx$ w wypadku ciągłym.*

$E(Y) = \sum (ax_i + b) p_i$ $\qquad V(X) = \sum_i x_i - E(X)^2 p_i$

Z zad 6 z listy 2 wiemy, że $E(a \cdot X + b) = a E(X) + b$ dla X dyskretnych i ciągłych.

$V(Y) = \sum_i [(ax_i + b) - E(Y)]^2 p_i = \sum_i [(ax_i + b) - E(aX + b)]^2 p_i = \sum_i [(ax_i + b) - (aE(X) + b)]^2 p_i =$

$= \sum_i [a^2 x_i^2 + 2abx_i + b^2 - 2(ax_i + b)(aE(X) + b) + a^2 E^2(X) + 2abE(X) + b^2] p_i =$

$= \sum_i [a^2 x_i^2 + 2abx_i + b^2 - 2a^2 x_i E(X) - 2abE(X) - 2abx_i - 2b^2 + a^2 E^2(X) + 2abE(X) + b^2] p_i =$

$= \sum_i [a^2 x_i^2 - 2a^2 x_i E(X) + a^2 E^2(X)] p_i = \sum_i a^2 [x_i^2 - 2x_i E(X) + E^2(X)] p_i = \sum_i a^2 [x_i - E(X)]^2 p_i =$

$= a^2 \sum_i [x_i - E(X)]^2 p_i = \underline{a^2 V(X)}$ ∎