7. Wykazać że współczynnik korelacji zmiennych X_1, X_2 jest równy zero. Wykazać, że zmienne są zależne.

Współczynnik $\rho = \frac{Cov(X_1, X_2)}{\sqrt{V(X_1)V(X_2)}}$

$$Cov(X,Y) = E[(X_1 - E(X_1)) \cdot (X_2 - E(X_2))]$$

[Do zadań 6–8] Niech (X_1, X_2) będzie dwuwymiarową zmienną losową o gęstości $f(x_1, x_2) = \frac{1}{\pi}$, dla $0 < x_1^2 + x_2^2 < 1$.

Ustalmy wartość zmiennej X_1. Może ona być w przedziale $[-1,1]$, bo punkty spełniają $0 < x_1^2 + x_2^2 < 1$, czyli leżą wewnątrz okręgu jednostkowego. Wartość drugiej zmiennej $- X_2$ leży w przedziale $-\sqrt{1-x_1^2} < x_2 < \sqrt{1-x_1^2}$.

$$E(X_1) = \int_{-1}^{1}\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} x \frac{1}{\pi} dy dx = \int_{-1}^{1} \left[\frac{x}{\pi} y\right]_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} = \int_{-1}^{1} \frac{2x\sqrt{1-x^2}}{\pi} dx = \left| \begin{array}{l} t = 1-x^2 \\ dt = -2x\,dx \\ -dt = 2x\,dx \end{array} \right| =$$

$$= \int_0^0 \frac{-\sqrt{t}}{\pi} dt = \frac{-1}{\pi}\left[\frac{2}{3} t^{\frac{3}{2}}\right]_0^0 = -\frac{1}{\pi} \cdot [0-0] = 0$$

Podobnie $E(X_2) = 0$. Zatem

$$Cov(X_1, X_2) = E(X_1 \cdot X_2) = \int_{-1}^{1}\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} xy \frac{1}{\pi} dy dx = \int_{-1}^{1} \frac{x}{\pi}\left[\frac{y^2}{2}\right]_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} dx = \int_{-1}^{1} \frac{2x\sqrt{1-x^2}}{\pi} dx =$$

$$= \left| \begin{array}{l} t = 1-x^2 \\ dt = -2x\,dx \\ -dt = 2x\,dx \end{array} \right| = \frac{-1}{\pi}\int_0^0 \sqrt{t}\, dt = 0$$

tożsamościowo co przy $E(X_1)$, więc znamy już wynik

$$\rho = \frac{Cov(X_1, X_2)}{\sqrt{V(X_1)V(X_2)}} = \frac{0}{\sqrt{V(X_1)V(X_2)}} = 0, \text{ jeśli } V(X_1) \neq V(X_2) \neq 0.$$

Pokażmy, że X_1, X_2 są zależne.

Zmienne są niezależne wtw, gdy $\forall x, y \in \mathbb{R}$ $f(x,y) = f_1(x) \cdot f_2(y)$.

Z zad. 6 mamy, że $f_1(x) = \frac{2\sqrt{1-x^2}}{\pi}$, $f_2(y) = \frac{2\sqrt{1-y^2}}{\pi}$. Stąd

$$f_1(x) f_2(y) = \frac{4}{\pi^2}\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2} = \frac{4\sqrt{(1-x^2)(1-y^2)}}{\pi^2}$$

$f(x,y) = \frac{1}{\pi}$, zatem $\frac{1}{\pi} \neq \frac{4}{\pi^2}\sqrt{(1-x^2)(1-y^2)}$ dla każdego $x, y \in \mathbb{R}$, bo np. dla $x = y = 1$ mamy $\frac{1}{\pi} \neq 0$.