Analiza numeryczna (L)
27.01.2021 r.

SKOS
⇓
więcej szczegółów na temat egzaminu

ZMIANA → 9.05 - 9.20

Powtórka

- macierze, wektory, operacje ($+, -, *$, odwrotność, transpozycja, wyznacznik, układ równań liniowych, wzory Cramera, ...)
- rozwiązywanie układów trójkątnych ↓◺▯=▯, ↑◹▯=▯ $O(n^2)$
- $Ax=b$ ($A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ - macierz pełna) ⇒ metoda faktoryzacji

  rozkład LU

  $Ax=b \to A=LU$ $(L = ◺, U = ◹)$

  $O(n^3)$ ↳ twierdzenie o rozkładzie LU

  $O(n^3) = O(\underset{LU}{n^3} + n^2)$
  $$\begin{cases} L y = b & 1^\circ \; O(n^2) \\ U x = y & 2^\circ \; O(n^2) \end{cases}$$
  ↳ rozwiązanie układu

- inne zastosowania rozkładu LU

  — obliczanie wyznacznika

  $\mathbb{R}^{n\times n} \ni A = LU$

  $O(n^3) = O(\underset{LU}{n^3}+n)$ $\quad \det(A) = \det(\underset{[l_{ij}]}{L})\det(\underset{[u_{ij}]}{U}) = l_{11}\cdot l_{22}\cdot\ldots\cdot l_{nn}\cdot u_{11}\cdot u_{22}\cdot\ldots\cdot u_{nn}$

  — odwracanie macierzy

  $\mathbb{R}^{n\times n} \ni A = LU$

  $A^{-1} = (L\cdot U)^{-1} = U^{-1}\cdot L^{-1}$ $\quad O(n^3)$ $\overset{\text{wniosek}}{\Longrightarrow}$ wystarczy umieć odwracać macierze trójkątne

Ważna Uwaga

Jeśli to jest tylko możliwe powinniśmy unikać wyznaczania jawnego macierzy odwrotnej. Jest to bowiem zadanie źle uwarunkowane!

Przykład

Stosując rozkład LU znajdziemy wyznacznik macierzy $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -3 & -2 & -4 \\ -5 & 18 & 26 \end{bmatrix}$

Można sprawdzić (albo użyć twierdzenia o rozkładzie LU), że

$A = L\cdot U$, gdzie $L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ -5 & 7 & 1 \end{bmatrix}$, $U = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$

$\underset{\{a_{ij}\}}{A} = \begin{bmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ l_{ij} & & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_{11} & & u_{ij} \\ & u_{22} & \\ 0 & & \ddots \end{bmatrix}$

$\det(A) = \overset{1}{\det(L)}\cdot \overset{1\cdot 4\cdot 6}{\det(U)} = 24$

Inna technika znajdowania macierzy odwrotnej

$A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $\det(A) \neq 0$

Niech $\underset{[x_{ij}]}{X} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ oznacza macierz odwrotną (tzn. $X := A^{-1}$)

⇕

$AX = I_n$ (I_n - macierz identycznościowa stopnia n)

$$X := \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & \ldots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \ldots & x_{2n} \\ \vdots & & & \\ x_{n1} & x_{n2} & \ldots & x_{nn} \end{bmatrix} = [x_1\ x_2 \ldots x_n],$$

gdzie
$$x_k := \begin{bmatrix} x_{1k} \\ x_{2k} \\ \vdots \\ x_{nk} \end{bmatrix} \quad (k = 1,2,\ldots,n)$$

$$I_n := \begin{bmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{bmatrix} = [e_1\ e_2 \ldots e_n],$$

gdzie
$$e_k = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{(jedynka na } k\text{-tej pozycji, reszta to zera)} \quad (k=1,2,\ldots,n)$$

$A\underset{[x_1, x_2 \ldots x_n]}{X} = I_n$

⇓

$\boxed{Ax_k = e_k \quad (k=1,2,\ldots,n)}$ ← n układów równań liniowych o tej samej macierzy A!

Pomysł

Znajdujemy macierz odwrotną kolumna po kolumnie ($x_1 \to x_2 \to \ldots \to x_n$)

⇑ to można zrównoleglić

Pytanie

Jaki jest koszt odwracania macierzy przy zastosowaniu tej techniki?

⇓

$\boxed{O(n^3)}$, bo rozkład LU robimy tylko raz $O(n^3)$, a potem n razy stosujemy metodę faktoryzacji ze znanym rozkładem LU $n\cdot O(n^2)$

Przykład

Stosując opisaną metodę odwrócimy macierz $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -3 & -2 & -4 \\ -5 & 18 & 26 \end{bmatrix}$

Wiemy już, że

$A = LU$, $L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ -5 & 7 & 1 \end{bmatrix}$, $U = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$.

$$X := A^{-1} = \begin{array}{c} \begin{matrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{bmatrix} \end{array} \to \begin{cases} A x_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} & 1^\circ \\ A x_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} & 2^\circ \\ A x_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} & 3^\circ \end{cases}$$

1° $Ly_1 = e_1$ ⇒ wyznaczamy y_1 ⇒ $Ux_1 = y_1$ ⇒ wyznaczamy $x_1 = \begin{bmatrix} \frac{5}{6} \\ \frac{49}{12} \\ -\frac{8}{3} \end{bmatrix}$

2° $Ly_2 = e_2$ ⇒ wyznaczamy y_2 ⇒ $Ux_2 = y_2$ ⇒ wyznaczamy $x_2 = \begin{bmatrix} \frac{1}{12} \\ \frac{41}{24} \\ -\frac{7}{6} \end{bmatrix}$

3° $Ly_3 = e_3$ ⇒ wyznaczamy y_3 ⇒ $Ux_3 = y_3$ ⇒ wyznaczamy $x_3 = \begin{bmatrix} -\frac{1}{12} \\ -\frac{5}{24} \\ -\frac{1}{6} \end{bmatrix}$

Znaleźliśmy kolumny macierzy odwrotnej:

$$X = A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{5}{6} & \frac{1}{12} & -\frac{1}{12} \\ \frac{49}{12} & \frac{41}{24} & -\frac{5}{24} \\ -\frac{8}{3} & -\frac{7}{6} & -\frac{1}{6} \end{bmatrix}$$

Metoda eliminacji Gaussa w wersji skalarnej

$$A^{(1)}x = b^{(1)}$$

$$\begin{cases} a_{11}^{(1)}x_1 + a_{12}^{(1)}x_2 + a_{13}^{(1)}x_3 + \ldots + a_{1n}^{(1)}x_n = b_1^{(1)} \\ a_{21}^{(1)}x_1 + a_{22}^{(1)}x_2 + a_{23}^{(1)}x_3 + \ldots + a_{2n}^{(1)}x_n = b_2^{(1)} \\ \vdots \\ a_{n1}^{(1)}x_1 + a_{n2}^{(1)}x_2 + a_{n3}^{(1)}x_3 + \ldots + a_{nn}^{(1)}x_n = b_n^{(1)} \end{cases}$$

Załóżmy, że $a_{11}^{(1)} \neq 0$. Dla $i = 2,3,\ldots,n$ pomnóżmy pierwsze równanie przez współczynnik

$$m_{i1} := -\frac{a_{i1}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}}$$

i dodajmy do i-tego równania. Otrzymamy równoważny wyjściowemu układowi układ równań

$$A^{(2)}x = b^{(2)}$$

$$\begin{cases} a_{11}^{(1)}x_1 + a_{12}^{(1)}x_2 + \ldots + a_{1n}^{(1)}x_n = b_1^{(1)} \\ \quad a_{22}^{(2)}x_2 + \ldots + a_{2n}^{(2)}x_n = b_2^{(2)} \\ \quad a_{32}^{(2)}x_2 + \ldots + a_{3n}^{(2)}x_n = b_3^{(2)} \\ \quad \vdots \\ \quad a_{n2}^{(2)}x_2 + \ldots + a_{nn}^{(2)}x_n = b_n^{(2)} \end{cases},$$

gdzie
$$\left.\begin{aligned} a_{ij}^{(2)} &:= a_{ij}^{(1)} + m_{i1}a_{1j}^{(1)} \quad (j = 2,3,\ldots,n) \\ b_i^{(2)} &:= b_i^{(1)} + m_{i1}b_1^{(1)} \end{aligned}\right\} (i = 2,3,\ldots,n)$$

Następnie, jeśli $a_{22}^{(2)} \neq 0$, to eliminujemy z równań od 3 do n niewiadomą x_2. To da nam układ równań

$$A^{(3)}x = b^{(3)}.$$

Po $n-1$ krokach otrzymamy układ $A^{(n)}x = b^{(n)}$ (równoważny wyjściowemu) postaci

Przy założeniu, że $a_{kk}^{(k)} \neq 0$ $(k=1,2,\ldots,n)$ → (□)

$$\begin{cases} a_{11}^{(1)}x_1 + a_{12}^{(1)}x_2 + a_{13}^{(1)}x_3 + \ldots + a_{1n}^{(1)}x_n = b_1^{(1)} \\ \quad a_{22}^{(2)}x_2 + a_{23}^{(2)}x_3 + \ldots + a_{2n}^{(2)}x_n = b_2^{(2)} \\ \quad\quad a_{33}^{(3)}x_3 + \ldots + a_{3n}^{(3)}x_n = b_3^{(3)} \\ \quad\quad\quad \ddots \quad \vdots \\ \quad\quad\quad\quad a_{nn}^{(n)}x_n = b_n^{(n)}. \end{cases}$$

(trójkątny górny)

Układ (□) można zapisać też tak:

$$\boxed{\sum_{j=r}^{n} a_{rj}^{(r)}x_j = b_r^{(r)} \quad (r=1,2,\ldots,n)},$$

gdzie $a_{rr}^{(r)} \neq 0$ $(r=1,2,\ldots,n)$ oraz

$$\boxed{\left.\begin{aligned} a_{ij}^{(r)} &= a_{ij}^{(r-1)} + m_{i,r-1}a_{r-1,j}^{(r-1)} \\ b_i^{(r)} &= b_i^{(r-1)} + m_{i,r-1}b_{r-1}^{(r-1)}, \\ m_{i,r-1} &= -\frac{a_{i,r-1}^{(r-1)}}{a_{r-1,r-1}^{(r-1)}} \end{aligned}\right\} (r = 2,3,\ldots,n;\ i,j = r,r+1,\ldots,n)}$$

$O(n^3)$

Współczynniki $a_{rr}^{(r)}$ $(r=1,2,\ldots,n)$ nazywamy elementami głównymi.

Pozostało jedynie rozwiązanie układu trójkątnego górnego:

$$\boxed{x_r = \left(b_r^{(r)} - \sum_{j=r+1}^{n} a_{rj}^{(r)}x_j\right) \Big/ a_{rr}^{(r)} \quad (r = n, n-1, \ldots, 1)}$$

$O(n^2)$

Podsumowując, koszt metody eliminacji to $O(n^3)$. Dokładniej:

- I etap (doprowadzenie do układu trójkątnego czyli obliczenie $A^{(n)}, b^{(n)}$)

  $\frac{n(n^2-1)}{3}$ mnożeń, $\frac{n(n^2-1)}{3}$ dodawań, $\frac{n(n-1)}{2}$ dzieleń

- II etap (rozwiązanie układu trójkątnego $A^{(n)}x = b^{(n)}$)

  $\frac{n(n-1)}{2}$ mnożeń, $\frac{n(n-1)}{2}$ dodawań, n dzieleń

Σ: łączny koszt $\approx \frac{n^3}{3}$ par operacji (mnożenie i dodawanie)

Metoda eliminacji z wyborem elementów głównych

Rozważmy sytuację, w której rozpatrywany układ równań ma jednoznaczne rozwiązanie, ale dla pewnego r $(1 \le r \le n-1)$ jest $a_{ii}^{(i)} \neq 0$ $i = 1,2,\ldots,r-1$ oraz $a_{rr}^{(r)} = 0$. Oznacza to, że otrzymaliśmy równoważny wyjściowemu układ równań

$$A^{(r)}x = b^{(r)}$$

czyli

$$(\triangle) \begin{cases} a_{kk}^{(k)}x_k + a_{k,k+1}^{(k)}x_{k+1} + \ldots + a_{kn}^{(k)}x_n = b_k^{(k)} & (k = 1,2,\ldots,r-1) \\ a_{ir}^{(r)}x_r + a_{i,r+1}^{(r)}x_{r+1} + \ldots + a_{in}^{(r)}x_n = b_i^{(r)} & (r, r+1, \ldots, n), \end{cases}$$

gdzie $a_{rr}^{(r)} = 0$. Następny krok metody eliminacji wymaga obliczenia

$$m_{ir}\left(= -\frac{a_{ir}^{(r)}}{\underset{=0\,(!)}{a_{rr}^{(r)}}}\right)^{(\square)},$$

więc nie może być wykonany.

Wystarczy jednak zamienić miejscami r-te i p-te równanie układu $(\triangle)$, gdzie p jest takie, że $r+1 \le p \le n$ i że $a_{pr}^{(r)} \neq 0$. Wtedy wzór (□) będzie już sensowny.

Uwaga

Analiza błędów zaokrągleń w arytmetyce zmiennopozycyjnej wykazuje, że jest pożądane żeby wszystkie współczynniki m_{rj} były co do modułu mniejsze od 1.

Można to uzyskać $\boxed{\text{na dwa sposoby}}$. Uzyskujemy wtedy tzw. metodę eliminacji Gaussa z wyborem elementów głównych:

1° **Częściowy wybór elementów głównych**

W r-tym $(r = 1,2,\ldots,n-1)$ kroku eliminacji przestawiamy równania r-te i p-te, gdzie $p \in \{r, r+1, \ldots, n\}$ jest takie, że

$$|a_{pr}^{(r)}| = \max_{r \le i \le n} |a_{ir}^{(r)}|.$$

⇒ Można utrzymać złożoność $O(n^3)$

2° **Pełny wybór elementów głównych**

W r-tym $(r = 1,2,\ldots,n-1)$ kroku eliminacji przestawiamy równania r-te i p-te, a także zmieniamy numerację niewiadomych:

$x_r \leftrightarrow x_q$, gdzie $p, q \in \{r, r+1, \ldots, n\}$ są takie, że

$$|a_{pq}^{(r)}| = \max_{r \le i,j \le n} |a_{ij}^{(r)}|.$$

⇒ I tu można utrzymać złożoność $O(n^3)$

Wniosek końcowy

Tw.

Dla dowolnej macierzy $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ istnieją: macierz permutacji P (w każdym wierszu i w każdej kolumnie jest dokładnie jedna jedynka, a na pozostałych pozycjach – zera), macierz trójkątna dolna L z jedynkami na przekątnej oraz macierz trójkątna górna U, dla których

$$P\cdot A = L\cdot U.$$

Jednak macierze L i U nie zawsze są jednoznacznie wyznaczone.