EGZAMIN Z ANALIZY NUMERYCZNEJ (L)

8 lutego 2021 r.

Pierwszy termin

Pracuj samodzielnie!!!

Imię i nazwisko: Krystian Jasionek

Numer części: 4 Numer zadania: 3

$f(x)=\sin(2x)$ interpolujemy $L_n \in \Pi_n$ w węzłach Czebyszewa T_{n+1} $x_k=\cos\left(\frac{2k+1}{2n+2}\pi\right)$ na przedziale $x\in[-1,1]$. Chcemy, żeby:

$$\max_{x\in[-1,1]} |f(x)-L_n(x)| \leq 10^{-8}$$, z wykładu wiemy, że

$$\max_{x\in[-1,1]} |f(x)-L_n(x)| \leq \max_{x\in[-1,1]} \frac{|f^{(n+1)}(x)|}{(n+1)!} \cdot \max_{x\in[-1,1]} |(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_n)|$$, ale

dla węzłów Czebyszewa na przedziale $x\in[-1,1]$ dla T_{n+1} $x_k=\cos\left(\frac{2k+1}{2n+2}\pi\right)$ $n\geq k\geq 0$

$\max|(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_n)| = \frac{1}{2^n}$, zatem

$$\max_{x\in[-1,1]} |f(x)-L_n(x)| \leq \max \frac{|f^{(n+1)}(x)|}{(n+1)!}\cdot\frac{1}{2^n} \leq 10^{-8}$$. Znajdźmy minimalne n

$f(x)=\sin(2x)$, $f'(x)=2\cos(2x)$, $f''(x)=-4\sin(2x)$,

$f^{(n+1)}(x) = \pm \begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix}(2x)\cdot 2^{n+1} \leq 1\cdot 2^{n+1}$ ← szacujemy funkcję sin/cos z góry przez 1.

$\max_{x\in[-1,1]} |f^{(n+1)}(x)| = 1\cdot 2^{n+1}$, stąd

$$\max_{x\in[-1,1]} \frac{|f^{(n+1)}(x)|}{(n+1)!}\cdot\frac{1}{2^n} = \frac{2^{n+1}}{(n+1)!}\cdot\frac{1}{2^n} \leq 10^{-8}$$

$$\frac{2}{(n+1)!} \leq 10^{-8}$$

$$2\cdot 10^8 \leq (n+1)!$$

najmniejsze n, dla którego jest spełniona ta nierówność to $n=11$.