Zad 9.5

$P(t) = \sum_{i=0}^{n} B_i^n W_i$ — $\sum_{i=0}^{n} B_i^n = 1$, zatem możemy zapisać $P(t)$ jako kombinację barycentryczną:

$$P(t) = W_0 + B_1^n (W_1 - W_0) + \ldots + B_n^n (W_n - W_0)$$

$$V_i = W_i - W_0$$

$$P(t) = W_0 + B_1^n V_1 + B_2^n V_2 + \ldots + B_n^n V_n$$

$$P(t) = W_0 + (1-t)^{n-1} t \left(V_1 \binom{n}{1} + (1-t)^{n-2} t \left(\binom{n}{2} V_2 + \ldots + (1-t) t \left(\binom{n}{n-1} V_{n-1} + (1-t) t \left(\binom{n}{n} V_n \right) \ldots \right)\right)\right)$$

$$P(t) = W_0 + (1-t)^n \frac{t}{1-t} \left(V_1 \binom{n}{1} + \frac{t}{1-t} \left(\binom{n}{2} V_2 + \frac{t}{1-t} \left(\ldots \frac{t}{1-t} \left(\binom{n}{n-1} V_{n-1} + \frac{t}{1-t} \left(\binom{n}{n} V_n \right) \ldots \right)\right)\right)\right)$$

Zauważmy, że $\binom{n}{i-1} = \binom{n}{i} \frac{i}{n-i+1}$

$$\frac{\binom{n}{i-1}}{\binom{n}{i}} = \frac{\cancel{n!}}{(i-1)! \cdot (n-i+1)!} \cdot \frac{i!(n-i)!}{\cancel{n!}} = \frac{i}{n-i+1}$$

Rozważmy algorytm

$d = (1-t)^n$ — możemy policzyć w $O(\log n)$ algorytmem szybkiego potęgowania

$V_i = W_n - W_0$

$N = \binom{n}{n} = 1$

$p = V_n \cdot \frac{t}{1-t} \cdot N$

for i from $n-1$ to 1:

- $N *= \frac{i}{n-i+1}$
- $V_i = W_i - W_0$
- $p += N \cdot V_i$
- $p *= \frac{t}{1-t}$

złożoność $O(n)$

$p *= d$

$p += W_0$

return p