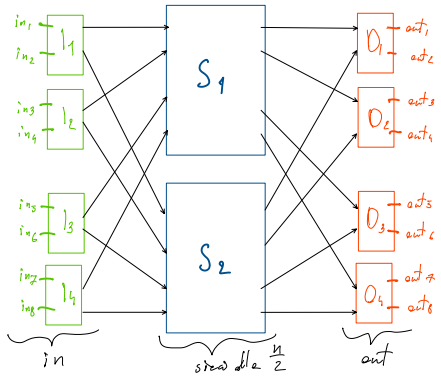
AiSD Lista 3-4

środa, 28 kwietnia 2021 00:23

9. (2pkt) Jakie jest prawdopodobieństwo wygenerowania permutacji identycznościowej przez sieć Beneša-Waksmana, w której przełączniki ustawiane są losowo i niezależnie od siebie w jeden z dwóch stanów (każdy stan przełącznika jest osiągany z prawdopodobieństwem 1/2).

Zobaczmy, jak wygląda taka sieć.



Chcemy uzyskać permutację identycznościową, zatem każda dana na wejściu in_k musi opuścić układ wyjściem out_k.

Załóżmy, że sygnał wejściowy do układu górnym wejściem, opuszcza go olalym ze swoich wyjść. Jeśli trafił do S_2, to do out_k może dotrzeć tylko poprzez jego dolne wejście. Wtedy out_k musi mieć ten sam układ, co in_k, tzn. nie wprost lub na krzyż.

Można zauważyć, że stany odpowiadających sobie przełączników in_i out_i muszą być takie same.

Jeśli sygnał trafił do S_1 lub S_2 przez i-te wejście to przybył z i-tego przełącznika wyjściowego. W takim razie, żeby wyszedł na i-tym przełączniku wyjściowym, musi wyjść i-tym wyjściem. W takim razie podobwody muszą tutaj być identyczne.

Wyznaczmy prawdopodobieństwo

Prawdopodobieństwo, że obie warstwy (in i out) mają ten sam stan wynosi $\frac{1}{2}$ — oba nachos lub oba prosto, gdzie mamy 4 możliwe stany. Mamy $\frac{n}{2}$ przełączników w tych warstwach, zatem łącznie mamy prawdopodobieństwo $\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n}{2}}$. Podobnie pomyślmy, że warstwa wewnętrzna też musi być identyczna, prawdopodobieństwo tego oznaczmy $P\left(\frac{n}{2}\right)$. Mamy dwa przełączniki w tych warstwach, więc łącznie $P\left(\frac{n}{2}\right)^2$.

Wtedy dla $n = 2^k$ mamy:

$$P(n) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & \text{dla } n=2 \\ P\left(\frac{n}{2}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n}{2}}, & \text{wp.p.} \end{cases}$$

$$P(n) = P\left(\frac{n}{2}\right)^2 \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n}{2}} = \left(P\left(\frac{n}{4}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n}{4}}\right)^2 \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n}{2}} = P\left(\frac{n}{4}\right)^4 \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n}{2}} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n}{2}} =$$

$$= \left(P\left(\frac{n}{8}\right)^2 \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n}{8}}\right)^4 \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n}{2}} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n}{2}} = P\left(\frac{n}{8}\right)^8 \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n}{2}} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n}{2}} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n}{2}} = \dots =$$

$$= P(2)^{\frac{n}{2}} \cdot \underbrace{\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n}{2}} \cdot \dots \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n}{2}}}_{\text{Łącznie } \log(n-1) \text{ wyrazów}} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n}{2}} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\log(n-1)\cdot\frac{n}{2}} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\log(n)\cdot\frac{n}{2}}$$

($P(2) = \frac{1}{2}$)

Udowodnijmy ten wzór indukcyjnie.

Teza: $P(2^k) = \left(\frac{1}{2}\right)^{\log 2^k \cdot \frac{2^k}{2}} = \left(\frac{1}{2}\right)^{k \cdot 2^{k-1}}$

Podstawa: $k = 1$

$$P(2) = \left(\frac{1}{2}\right)^{2^0} = \left(\frac{1}{2}\right)^1 = \frac{1}{2} \quad \checkmark$$

Krok: Załóżmy, że teza prawdziwa dla k i pokażmy, że dobry jest spełniona dla $k+1$.

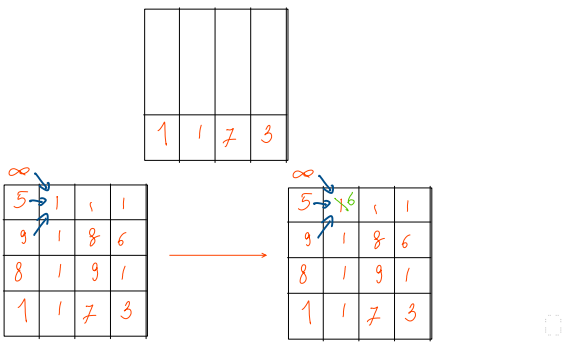
$$P(2^{k+1}) = P\left(2^{\frac{k+1}{2}}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{2^{k+1}} = \underbrace{P(2^k)}_{\text{z zał. ind.}} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{2^k} = \left(\frac{1}{2}\right)^{k \cdot 2^{k-1}} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{2^k} = \left(\frac{1}{2}\right)^{(k+1)2^k}$$ ∎

Lista 3

1. (1pkt) Ułóż algorytm znajdujący najtańszą drogę przejścia przez tablicę, w którym oprócz ruchów dopuszczalnych w wersji problemu prezentowanej na wykładzie, dozwolone są także ruchy w górę i w dół tablicy.

Przypomnienie metody z wykładu

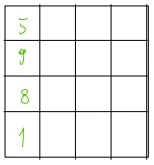
	∞		
5	1	1	1
9	1	8	6
8	1	9	1



Każde komórka cyklicznej tablicy zawiera długość najkrótszej ścieżki, która do niej prowadzi.

Algorytm:

1. Pierwsze kolumna wypełniona liczbami z tabeli (są to punkty startowe)



2. Pozostałe komórki wypełniamy licząc sumę wartości komórki z kosztem z jej tyłu,

2. (1.5pkt) Ułóż algorytm, który dla danego ciągu znajduje długość najdłuższego jego podciągu, który jest palindromem.

3. (1.5pkt) Chcemy obliczać wartości współczynników dwumianowych modulo liczba pierwsza. Ułóż algorytm, który dla danej liczby pierwszej p oraz ciągu par $(n_1, k_1), (n_2, k_2), ...(n_r, k_r)$ obliczy wartości $\binom{n_i}{k_i} \bmod p$. Twój algorytm powinien wypisywać wartości $\binom{n_i}{k_i} \bmod p$ po czasie nie większym niż $O(\max\{n_1, n_2, \ldots, n_t\})$.

   Możesz założyć, że $k_i \leq n_i < p$ dla każdego $i = 1, \ldots, r$.

```
N_max <- max(n_1, n_2, ...)
factorials[0] <- 1
```

```
factorials[0] <- 1

for i from 1 to N_max do:
    factorials[i] <- (factorials[i-1] * i) % p
```

```
inverse_p <- [1]
for i from 2 to N_max do:
    Inverse_p <- (-floor(p / i) * inverse_p[p % i]) % p

inverse_factorials[0] <- 1
for i from 1 to N_max do:
    Inverse_factorials[i] <- (inverse_factorials[i-1] * inverse_p[i]) % p
```

```
pairs = [ [n_1, k_2], [n_2, k_2], ... [n_r, k_r]]

for i from 1 to r do:
    n = pairs[i][0]
    k = pairs[i][1]
    print(factorials[n] * inverse_factorials[n - k] * inverse_factorials[k]) % p)
```