MDL Lista 6 Krystian Jasionek

2. Rozwiąż następujące zależności rekurencyjne:

(a) $a_{n+1} = \left\lfloor \sqrt{a_n^2 + a_{n-1}^2} \right\rfloor$, $a_0 = a_1 = 1$,

(b) $b_{n+1} = \left\lfloor \sqrt{b_n^2 + 3} \right\rfloor$, $b_0 = 8$,

(c) $c_{n+1} = (n+1)c_n + (n^2+n)c_{n-1}$, $c_0 = 0$, $c_1 = 1$.

a)

$$a_{n+1} = \left| \sqrt{a_n^2 + a_{n-1}^2} \right| \quad / (\ )^2$$

$$a_{n+1}^2 = a_n^2 + a_{n-1}^2, \quad \text{niech } b_{n+1} = a_{n+1}^2$$

$$b_{n+1} = b_n + b_{n-1}$$

$$(E^2 - E - 1)\, b_n = 0$$

$$(E - \varphi)^2 = 0 \qquad \varphi_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \qquad \varphi_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

$$b_n = \alpha \varphi_1^n + \beta \varphi_2^n \qquad b_0 = b_1 = 1^2 = 1$$

$$\begin{cases} 1 = \alpha \varphi_1^0 + \beta \varphi_2^0 \Rightarrow \beta = 1 - \alpha \\ 1 = \alpha \varphi_1^1 + \beta \varphi_2^1 \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$1 = \cancel{\frac{\alpha}{2}} - \frac{\alpha\sqrt{5}}{2} + \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2} - \cancel{\frac{\alpha}{2}} - \frac{\alpha\sqrt{5}}{2}$$

$$\frac{1-\sqrt{5}}{2} = -\alpha\sqrt{5}$$

$$\alpha = \frac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{5}} = \frac{5-\sqrt{5}}{10} \qquad \beta = \frac{5+\sqrt{5}}{10}$$

$$b_n = \frac{5+\sqrt{5}}{10} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \frac{5-\sqrt{5}}{10} \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

$$a_n = \sqrt{b_n} = \left| \sqrt{\left(\frac{5+\sqrt{5}}{10}\right)\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \left(\frac{5-\sqrt{5}}{10}\right)\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n} \right|$$

b) $b_{n+1} = \left|\sqrt{b_n^2+3}\right|$ $\quad b_0 = 8$

$b_0 = 8 \qquad a_0 = 64$

$b_1 = \sqrt{67} \qquad a_1 = 67$

$b_{n+1}^2 = b_n^2 + 3 \qquad b_n^2 = a_n$

$a_{n+1} = a_n + 3$

$(E-1)(E-1)$

$(E-1)^2$

$a_{n+1} = \alpha n + \beta$

$64 = \alpha n^0 + \beta \Rightarrow \beta = 64$

$67 = \alpha n^1 + \beta \Rightarrow \alpha = 3$

$a_n = 3n + 64$

$b_n^2 = 3n + 64$

$b_n = \left|\sqrt{3n+64}\right|$

C) $c_{n+1} = (n+1)c_n + (n^2+n)c_{n-1} \qquad c_0 = 0 \quad c_1 = 1$

$c_n = n c_{n-1} + n(n-1) c_{n-2} \qquad / : n!$

$$\frac{c_n}{n!} = \frac{c_{n-1}}{(n-1)!} + \frac{c_{n-2}}{(n-2)!}$$

Weźmy $d_n = \frac{c_n}{n!}$, $d_0 = 0$, $d_1 = 1$. Wtedy d_n to ciąg Fibonacciego.

$d_n = d_{n-1} + d_{n-2}$

$$d_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right)$$

$c_n = n!\, d_n$

$$c_n = \frac{n!}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right)$$

4. Wykaż, że iloczyn dowolnych kolejnych k liczb naturalnych jest podzielny przez $k!$.

Weźmy liczbę $\binom{n}{k}$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq k$. Wtedy

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!} = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)\cancel{(n-k)}\cancel{(n-k-1)}\cancel{(n-k-2)}\ldots\cancel{2\cdot 1}}{k!\,\cancel{(n-k)}\cancel{(n-k-1)}\ldots\cancel{2\cdot 1}} = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)}{k!},$$

gdzie $n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)$ to iloczyn k kolejnych liczb całkowitych. Wiemy, że $\binom{n}{k} \in \mathbb{Z}$, zatem $n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)$ jest podzielne przez $k!$ ∎

5. Wyprowadź zależność rekurencyjną dla liczby nieporządków: $d_{n+1} = n(d_n + d_{n-1})$. Jakie należy przyjąć warunki początkowe dla tej zależności?

Określmy warunki początkowe.

$d_0 = 1$, bo żaden element nie stoi na swoim miejscu (nie ma żadnych elementów)

$d_1 = 0$, bo każdy element stoi na swoim miejscu (jest tylko jeden element)

Z poprzednich ćwiczeń wiemy, że $d_n = n! \sum_{i=0}^{n} \frac{(-1)^i}{i!}$. Pokażemy, że $d_{n+1} = n(d_n + d_{n-1})$

Sprawdźmy, czy $d_{n+2} = (n+1)(d_n + d_{n+1})$

$$(n+1)(d_n+d_{n+1}) = (n+1)\left(n!\sum_{i=0}^{n}\frac{(-1)^i}{i!} + (n+1)!\sum_{i=0}^{n+1}\frac{(-1)^i}{i!}\right)$$

$$=(n+1)\left(n!\sum_{i=0}^{n}\frac{(-1)^i}{i!} + (n+1)!\sum_{i=0}^{n}\frac{(-1)^i}{i!} + (n+1)!\frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!}\right)$$ wyciągamy ostatni wyraz większej sumy

$$= \underbrace{(n+1)!\sum_{i=0}^{n}\frac{(-1)^i}{i!}} + \underbrace{(n+1)(n+1)!\sum_{i=0}^{n}\frac{(-1)^i}{i!}} + (n+1)(-1)^{n+1}$$ wymnażamy przez $(n+1)$

$$= (n+2)(n+1)!\sum_{i=0}^{n}\frac{(-1)^i}{i!} + (n+1)(-1)^{n+1}$$ grupujemy wyrazy

$$=(n+2)!\sum_{i=0}^{n}\frac{(-1)^i}{i!} + (n+1)(-1)^{n+1}$$

$$= (n+2)!\sum_{i=0}^{n+2}\frac{(-1)^i}{i!} - \frac{(-1)^{n+2}}{(n+2)!}\cdot(n+2)! - \frac{(n+2)!(-1)^{n+1}}{(n+1)!} + (n+1)(-1)^{n+1}$$ zwiększamy sumę o 2 czynniki i odejmujemy je poza sumą

$$= (n+2)!\sum_{i=0}^{n+2}\frac{(-1)^i}{i!} - (-1)^{n+2} - (n+2)(-1)^{n+1} + (n+1)(-1)^{n+1}$$ upraszczamy ułamki

$$= (n+2)!\sum_{i=0}^{n+2}\frac{(-1)^i}{i!} - \left(\underbrace{(-1)^{n+2} + (-1)^{n+1}}\right)$$ czynniki mają ten sam moduł, ale wykładniki różne o 1, zatem ich suma jest równa zero

$$= (n+2)!\sum_{i=0}^{n+2}\frac{(-1)^i}{i!} = d_{n+2} \quad \boxtimes$$ otrzymaliśmy wcześniej udowodniony wzór na d_{n+2}, zatem istotnie $d_{n+2} = (n+1)(d_{n+1}+d_n)$

6. Rozwiąż zależność rekurencyjną
$a_n^2 = 2a_{n-1}^2 + 1$ z warunkiem początkowym $a_0 = 2$ i założeniem, że $a_n > 0$ dla każdego naturalnego n.

Niech $b_n = a_n^2$, wtedy

$b_n = 2b_{n-1} + 1$ $\qquad b_0 = 4$

$b_{n+1} = 2b_n + 1$

$(E-2)(E-1)\langle b_n\rangle = 0$ – anihilator

Postać ogólna jest więc postaci

$b_n = a2^n + b$ $\qquad a_0 = 2 \Rightarrow b_0 = 4$

$\qquad b_1 = 9$

Wyznaczamy a i b z układu równań

$$\begin{cases} 4 = a2^0 + b \Rightarrow b = 4 - a \\ 9 = a2^1 + b \end{cases}$$

$\Downarrow$

$9 = 2a + 4 - a$

$a = 5$, $b = -1$

$b_n = 5\cdot 2^n - 1$, stąd

$a_n = \left|\sqrt{5\cdot 2^n - 1}\right|$

7. Ile jest wyrazów złożonych z n liter należących do 25-literowego alfabetu łacińskiego, zawierających parzystą liczbę liter a?

Niech $W(n)$ oznacza ilość wyrazów n-literowych dla 25-literowego alfabetu, gdzie „a" występuje parzystą liczbę razy.

$W(0) = 1$ – wyraz pusty i 0 liter „a"

$W(1) = 24$ – wyrazy jednoliterowe bez „a"

Rozpatrzmy słowa n-literowe. Składają się ze słów (n−1)-literowych i jednej dodatkowej litery, założmy że nową literę dokładamy zawsze z przodu.

25^n – liczba słów n-literowych

$W(n-1)$ – liczba słów n-1 literowych z parzystą liczbą „a"

$N(n-1)$ – -||- z nieparzystą liczbą „a".

Uważmy, że $25^{n-1} = N(n-1) + W(n-1)$. Zastanówmy się jak konstruować n-literowe słowo dodając literę do n-1 literowego:

1° dodajemy „a" do słowa o nieparzystej liczbie „a" $\Rightarrow$ słowo o parzystej liczbie „a"

2° dodajemy „a" do -||- parzystej l. „a" $\Rightarrow$ -||- nieparzystej -||- „a"

3° dodajemy literę $\beta \neq$ „a" do słowa o parzystej l. „a" $\Rightarrow$ -||- parzystej l. „a"

4° -||- $\beta \neq a$ do słowa o n.p. l. „a" $\Rightarrow$ -||- nieparzystej l. „a"

Widzimy, że parzystą l. „a" otrzymamy tylko w przypadkach 1° i 3°. Zatem możemy wyrazić liczbę takich słów n-literowych za pomocą zależności rekurencyjnej:

$$W(n) = \underset{\substack{\text{dodajemy } \beta\neq a \\ \text{do słowa o parzystej} \\ \text{liczbie „a"}}}{24\cdot W(n-1)} + \underset{\substack{\text{dodajemy „a" do} \\ \text{do słowa o nieparzystej} \\ \text{liczbie „a"}}}{N(n-1)}.$$

Korzystając z $25^n = W(n) + N(n)$ możemy napisać

$W(n) = 24W(n-1) + 25^n - W(n-1)$

$W(n) = 23W(n-1) + 25^n$

Możemy wyznaczyć wzór jawny rozwiązując zależność rekurencyjną.

$W(n+1) = 23W(n) + 25^n$

$(E-23)(E-25)$ – anihilator dla $W(n)$

Postać ogólna wyraża się jako

$W(n) = \alpha 23^n + \beta 25^n$

$W(0) = 1$

$W(1) = 24$

$$\begin{cases} 1 = \alpha 23^0 + \beta 25^0 \Rightarrow \beta = 1-\alpha \\ 24 = \alpha 23 + \beta 25 \end{cases}$$

$\Downarrow$

$24 = 23\alpha + 25 - 25\alpha$

$\alpha = \frac{1}{2}$, $\beta = \frac{1}{2}$ $\Rightarrow W(n) = \frac{1}{2}(23^n + 25^n)$

8. Znajdź ogólną postać rozwiązań następujących równań rekurencyjnych za pomocą anihilatorów i rozwiąż jedno z równań do końca:

(a) $a_{n+2} = 2a_{n+1} - a_n + 3^n - 1$, gdy $a_0 = a_1 = 0$.
(b) $a_{n+2} = 4a_{n+1} - 4a_n + n2^{n+1}$, gdy $a_0 = a_1 = 1$.
(c) $a_{n+2} = \frac{1}{2^{n+1}} - 2a_{n+1} - a_n$, gdy $a_0 = a_1 = 1$.

a) $a_{n+2} = 2a_{n+1} - a_n + 3^n - 1$

$(E^2 - 2E + 1)(E-3)(E-1)\langle a_n \rangle$

$(E-1)^3(E-3)\langle a_n \rangle$

$a_n = \alpha n^2 + \beta n + \gamma + \delta 3^n$

b) $a_{n+2} = 4a_{n+1} - 4a_n + n2^{n+1}$

$(E^2 - 4E + 4)(E-2)^2 \langle a_n \rangle$

$(E-2)^4$

$a_n = (\alpha n^3 + \beta n^2 + \gamma n + \delta) 2^n$

c) $a_{n+2} = \frac{1}{2^{n+1}} - 2a_{n+1} - a_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} - 2a_{n+1} - a_n$ $a_0 = a_1 = 1$

$a_2 = \frac{1}{2} - 2 - 1 = -\frac{5}{4}$

$(E^2 + 2E + 1)(E - \frac{1}{2})\langle a_n \rangle$

$(E+1)^2(E - \frac{1}{2})$

$a_n = (\alpha n + \beta)(-1)^n + \gamma\left(\frac{1}{2}\right)^n$

$$\begin{cases} 1 = (\alpha 0 + \beta)(-1)^0 + \gamma\left(\frac{1}{2}\right)^0 \\ 1 = (\alpha 1 + \beta)(-1)^1 + \gamma\left(\frac{1}{2}\right)^1 \\ -\frac{5}{2} = (\alpha 2 + \beta)(-1)^2 + \gamma\left(\frac{1}{2}\right)^2 \end{cases} = \begin{cases} 1 = \beta + \gamma \\ 1 = -\alpha - \beta + \frac{\gamma}{2} \\ -\frac{5}{2} = 2\alpha + \beta + \frac{\gamma}{4} \end{cases}$$

$\Rightarrow \beta = 1 - \gamma$

$\Rightarrow \alpha = \frac{\gamma}{2} - \beta - 1$

$\Downarrow$

$$\begin{cases} 1 = -\alpha - 1 + \frac{3}{2}\gamma \\ -\frac{5}{2} = 2\alpha + 1 - \frac{3}{4}\gamma \quad / \cdot 2 \end{cases}$$

$$+\begin{cases} 1 = -\alpha - 1 + \frac{3}{2}\gamma \\ -5 = 4\alpha + 2 - \frac{3}{2}\gamma \end{cases}$$

$-4 = 3\alpha + 1$

$3\alpha = -5$

$\alpha = -\frac{5}{3}$

$$\begin{cases} \alpha = \frac{\gamma}{2} - \beta - 1 \\ \beta = 1 - \gamma \end{cases}$$

$\alpha = \frac{3\gamma}{2} - 1 - 1$

$-\frac{5}{3} = \frac{3\gamma}{2} - 2 \quad / \cdot 6$

$-10 = 9\gamma - 12$

$2 = 9\gamma$

$\gamma = \frac{2}{9}$ $\beta = \frac{7}{9}$

$a_n = (\alpha n + \beta)(-1)^n + \gamma\left(\frac{1}{2}\right)^n$

$$\underbrace{a_n = \left(-\frac{5}{3}n + \frac{7}{9}\right)(-1)^n + \frac{2}{9}\left(\frac{1}{2}\right)^n}$$