MDL Lista 2 Krystian Jasiencki

Zad. 1. Dla $k \geq 1$ wykazać, że

$$\binom{n}{k} = \frac{n}{k}\binom{n-1}{k-1}$$

Wykażemy równość algebraicznie.

$$\binom{n}{k} = \frac{n}{k}\binom{n-1}{k-1}$$

$$\frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n}{k}\,\frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Zatem równość jest spełniona dla $k \geq 1$.

Dowód kombinatoryczny

Wyobraźmy sobie sytuację, w której mamy szkołę liczącą n osób. Spośród nich wybieramy k-osobowy samorząd szkolny, z którego potem wybieramy przewodniczącego. Na ile sposobów możemy to zrobić? Najpierw wybierzmy k-osób do samorządu. Możemy to zrobić na $\binom{n}{k}$ sposobów. Spośród samorządu wybierzmy teraz jednego przewodniczącego. Samorząd liczy k osób, zatemmożemy to zrobić na k sposobów. Po przemnożeniu otrzymujemy, że możemy wybrać samorząd z przewodniczącym na $k\binom{n}{k}$ sposobów. W alternatywnym podejściu najpierw wybierzmy przewodniczącego spośród n uczniów. Możemy to zrobić na n sposobów. Teraz, spośród pozostałych $n-1$ uczniów wybierzmy pozostałych $k-1$ osób do samorządu. Możemy to zrobić na $\binom{n-1}{k-1}$ sposobów. Po przemnożeniu okazuje się, że możemy wybrać taki samorząd z przewodniczącym na $n\binom{n-1}{k-1}$ sposobów.

Oba te podejścia są równoważne, zatem możemy napisać, że

$$n\binom{k-1}{n-1} = k\binom{n}{k} \tag{1}$$

Łatwo możemy to przekształcić do

$$\binom{n}{k} = \frac{n}{k}\binom{n-1}{k-1} \tag{2}$$

co kończy dowód.

4. Pokażmy, że $\forall n \in \mathbb{N}$

$$(a+b)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a^i b^{n-i}$$

Dowód przeprowadzimy indukcyjnie.

Podstawa:

dla $n=0$ mamy $(a+b)^0 = \sum_{i=0}^{0} \binom{n}{i} a^i b^{n-i} = \binom{0}{0} a^0 b^0 = 1$ ✓

dla $n=1$ mamy $(a+b)^1 = \sum_{i=0}^{1} \binom{n}{i} a^i b^{n-i} = \binom{1}{0} a^0 b^1 + \binom{1}{1} a^1 b^0 = a+b$ ✓

Krok:

Załóżmy, że teza jest spełniona dla n i pokażmy, że wtedy $(a+b)^{n+1} = \sum_{i=0}^{n+1} \binom{n+1}{i} a^i b^{n+1-i}$

Wiemy, że $(a+b)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a^i b^{n-i} = \binom{n}{0} a^0 b^n + \binom{n}{1} a^1 b^{n-1} + \ldots + \binom{n}{n} a^n b^0$

oraz, że $(a+b)^{n+1} = (a+b)^n \cdot (a+b)$. Zatem:

$(a+b)^{n+1} = (a+b) \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a^i b^{n-i}$, wymnażamy sumy

$(a+b)^{n+1} = a \cdot \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a^i b^{n-i} + b \cdot \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a^i b^{n-i}$

$(a+b)^{n+1} = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a^{i+1} b^{n-i} + \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a^i b^{n+1-i}$, chcemy w jakiś sposób otrzymać dwie identyczne sumy.

wyciągamy ostatni czynnik pierwszej sumy i pierwszy czynnik drugiej, by uzyskać tak samo indeksowane sumy

$(a+b)^{n+1} = \binom{n}{n} a^{n+1} b^0 + \sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i-1} a^i b^{n-i+1} + \binom{n}{0} a^0 b^{n+1} + \sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i} a^i b^{n-i+1}$

$(a+b)^{n+1} = \binom{n}{n} a^{n+1} b^0 + \binom{n}{0} a^0 b^{n+1} + \sum_{i=1}^{n} \left(\binom{n}{i-1} + \binom{n}{i}\right) a^i b^{n-i+1}$, ale korzystając z tego, że $\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}$ otrzymujemy

$(a+b)^{n+1} = \binom{n}{n} a^{n+1} b^0 + \binom{n}{0} a^0 b^{n+1} + \sum_{i=1}^{n} \binom{n+1}{i} a^i b^{n-i+1}$, ale $\binom{n}{n} = \binom{n+1}{n+1}$ oraz $\binom{n}{0} = \binom{n+1}{0}$, więc

$(a+b)^{n+1} = \binom{n+1}{n+1} a^{n+1} b^0 + \binom{n+1}{0} a^0 b^{n+1} + \sum_{i=1}^{n} \binom{n+1}{i} a^i b^{n-i+1}$, możemy włączyć dwa czynniki pod sumę, bo $\binom{n+1}{n+1} a^{n+1} b^0$ oraz $\binom{n+1}{0} a^0 b^{n+1}$ to odpowiednio ostatni i pierwszy wyraz sumy $\sum_{i=0}^{n+1} a^i b^{n+1-i}$

$(a+b)^{n+1} = \sum_{i=0}^{n+1} \binom{n+1}{i} a^i b^{n+1-i}$

Zatem teza jest prawdziwa dla $n+1$, co kończy dowód

niby oczywiste, ale w reszcie czego

Lemat: $\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}$

$$\frac{(n+1)!}{k!(n-k+1)!} = \frac{n!}{k!(n-k)!} + \frac{n!}{(k-1)!(n-k+1)!}$$

do wspólnego mianownika

$$\frac{(n+1)\cancel{n!}}{k\cancel{(k-1)!}(n-k+1)\cancel{(n-k)!}} = \frac{\cancel{n!}}{k\cancel{(k-1)!}\cancel{(n-k)!}} + \frac{\cancel{n!}}{\cancel{(k-1)!}\cancel{(n-k)!}(n-k+1)}$$

$$\frac{n+1}{k(n-k+1)} = \frac{1}{k} + \frac{1}{n-k+1}$$

$$\frac{n+1}{k(n-k+1)} = \frac{n-k+1+k}{k(n-k+1)} = \frac{n+1}{k(n-k+1)}$$

czyli równość zachodzi

6 (2p) Oblicz liczbę funkcji niemalejących postaci
$f : \{1, 2, \ldots, n\} \to \{1, 2, \ldots, n\}$.

Spróbujmy przedstawić ten problem jako problem n kulek i k szufladek. Weźmy n szufladek i ponumerujmy je od 1 do n. Niech reprezentują one wartości funkcji. Następnie weźmy n kulek i włóżmy je w dowolny sposób do szufladek. Podejdźmy do pierwszej szufladki i sprawdźmy, czy jest w niej kulka, jeśli tak - wyjmijmy ją, jeśli nie - sprawdźmy kolejną szufladkę. Załóżmy, że pierwszą kulkę znaleźliśmy w ten sposób w k-tej szufladce. Od tego momentu ta kulka reprezentuje argument równy 1 (bo wyjęliśmy ją jako pierwszą), dla którego funkcja przyjmuje wartość k, bo wyjęliśmy ją z k-tej szufladki. W podobny sposób wyjmijmy kolejne kulki z tej szufladki, aż do jej opróżnienia, następnie przejdźmy do $k+1$-szej szufladki. Powtarzajmy ten proces, aż wyjmiemy wszystkie kulki. Tym sposobem otrzymamy n kulek, z których każda reprezentuje wartość funkcji dla konkretnego argumentu. Funkcja ta jest niemalejąca, ponieważ kulkom (argumentom) przypisywaliśmy wartości w sposób niemalejący (rosnące numerki kolejnych szuflad).

Odpowiedź na pytanie *ile jest takich funkcji niemalejących*

$$f : \{1, 2..., n\} \to \{1, 2..., n\} \tag{5}$$

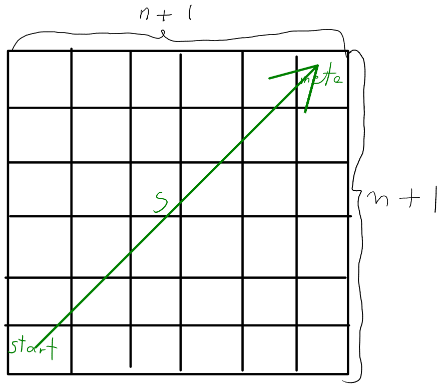
sprowadziliśmy do pytania *na ile sposobów możemy włożyć n kulek do n szufladek*, na które odpowiedź poznaliśmy na wykładzie. Zatem takich funkcji jest

$$\binom{n+n-1}{n-1} = \binom{2n-1}{n-1} \tag{6}$$

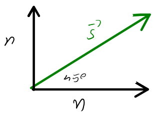
7

(2p) Udowodnij, że $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2$ równa się liczbie dróg, po których wieża może przejść z lewego dolnego rogu do prawego górnego rogu szachownicy $(n+1) \times (n+1)$ poruszając się wyłącznie do góry lub na prawo.

Czy potrafisz zwinąć tę sumę?



S – wektor przemieszczenia wieży



Możemy rozłożyć go na dwie składowe długości n (bo zaczynamy z pola (1,1), nie (0,0)), zatem widzimy, że wieża musi przebyć łącznie n kratek w górę i n kratek w prawo.

Podzielmy drogę, jaką przebywa wieża na dwie połowy, każda długości n. Wiemy, że łącznie wieża musi pokonać n pól w górę i n pól w prawo. Załóżmy, że w pierwszej połowie porusza się o *jedno* pole w prawo, policzmy na ile sposobów może to zrobić. Łącznie ma do pokonania n pól, zatem ma $\binom{n}{1}$ możliwości, który z jej ruchów będzie w prawo. W drugiej połowie drogi wciąż ma do pokonania $n-1$ pól w prawo i wykona łącznie n ruchów, zatem ma $\binom{n}{n-1}$ możliwości, które z jej ruchów będą w prawo. Ale $\binom{n}{n-1} = \binom{n}{1}$, zatem po uwzględnieniu obu połów mamy $\binom{n}{1}^2$ możliwości, na jakie poruszy się wieża, gdyż ustalenie, które ruchy wykonała w prawo określa, które ruchy wykonała w górę (pozostałe).

Rozpatrzmy ogólniejszy przypadek. W pierwszej połowie chcemy wykonać k ruchów w prawo. Rozumując jak poprzednio, mamy $\binom{n}{k}$ możliwości. W drugiej połowie otrzymamy za to $\binom{n}{n-k}$ możliwości. Ale $\binom{n}{n-k} = \binom{n}{k}$, więc po uwzględnieniu obu połów widzimy, że wieża może przesunąć się na $\binom{n}{k}^2$ sposobów w prawy góry róg.

Zauważmy, że w pierwszej połowie możemy wykonać od 0 do n ruchów i ta ilość determinuje, na ile sposobów może poruszyć się wieża. Zatem, aby określić sumaryczną ich (sposobów) sumaryczną ilość, musimy policzyć ile wynosi

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 \tag{3}$$

Popatrzmy na ten problem z innej strony. Jeśli nie będziemy dzielić drogi na dwie połowy, staniemy przed prostszym problemem. Liczymy na ile sposobów możemy wybrać, które n spośród $2n$ ruchów było w prawo. Jest to oczywiście $\binom{2n}{n}$ sposobów. Jest to rozwiązanie równoważne do poprzedniego, zatem

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n} \tag{4}$$

9.

Funkcja duże O

Niech $f, g : N \to R \geq 0$.

$f(n) = O(g(n)) \Leftrightarrow \exists_{c>0} \exists_{n_0 \in N} \forall_{n \geq n_0} f(n) \leq cg(n)$

Inne funkcje

Niech $f, g : N \to R \geq 0$.

- $f(n) = \Omega(g(n)) \Leftrightarrow \exists_{c>0} \exists_{n_0 \in N} \forall_{n \geq n_0} f(n) \geq cg(n)$
- $f(n) = \Theta(g(n)) \Leftrightarrow f(n) = \Omega(g(n)) \wedge f(n) = O(g(n))$
- $f(n) = \omega(g(n)) \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = \infty$

Niech $f, g, h : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$. Pokażemy, że

a) $f(n) = O(g(n)) \wedge g(n) = O(h(n)) \Rightarrow f(n) = O(h(n))$

d-d

Skoro $f(n) = O(g(n))$, to $\exists_{c>0} \exists_{n_0 \in \mathbb{N}} \forall_{n \geq n_0} f(n) \leq cg(n)$, oraz skoro $g(n) = O(h(n))$, to $\exists_{d>0} \exists_{m_0 \in \mathbb{N}} \forall_{m \geq m_0} g(m) \leq d\, h(m)$.

Weźmy takie $c' = c \cdot d$ oraz $k_0 = n_0 + m_0$. Wtedy $f(n) \leq c' \cdot h(n)$ dla $n \geq k_0$.

Zatem wtedy $f(n) = O(h(n))$, co kończy dowód.

b) $f(n) = O(g(n)) \Leftrightarrow g(n) = \Omega(f(n))$

$\Rightarrow$

Skoro $f(n) = O(g(n))$, to $\exists_{c>0} \exists_{n_0 \in \mathbb{N}} \forall_{n \geq n_0} f(n) \leq cg(n)$, zatem $\frac{1}{c} f(n) \leq g(n)$.

Więc istnieje takie $d = \frac{1}{c} > 0$ $\exists_{n_0' = n_0} \forall_{n \geq n_0'}$ $g(n) \geq d f(n)$, zatem $g(n) \in \Omega(f(n))$

$\Leftarrow$

Skoro $g(n) = \Omega(f(n))$, to $\exists_{c>0} \exists_{n_0 \in \mathbb{N}} \forall_{n \geq n_0} g(n) \geq c f(n)$, wtedy $\frac{1}{c} g(n) \geq f(n)$.

Zatem $\exists_{c' = \frac{1}{c} > 0} \exists_{n_0' = n_0 \in \mathbb{N}} \forall_{n \geq n_0'} f(n) \leq c' g(n)$, czyli $f(n) \in O(g(n))$.

Zatem tożsamość jest prawdziwa.

c) $f(n) = \Theta(g(n)) \Leftrightarrow g(n) = \Theta(f(n))$

$f(n) = \Theta(g(n))$, czyli $f(n) = \Omega(g(n)) \wedge f(n) = O(g(n))$. Możemy wykorzystać podpunkt b.

$f(n) = O(g(n)) \Leftrightarrow g(n) = \Omega(f(n))$

Dzięki temu $f(n) = \Omega(g(n)) \wedge f(n) = O(g(n)) \Leftrightarrow g(n) = O(f(n)) \wedge g(n) = \Omega(f(n))$, zatem

$g(n) = \Theta(f(n))$, co kończy dowód.

10. Niech f i g będą dowolnymi wielomianami o stopniach k i l takimi, że $k < l$.

Pokaż, że wówczas $f(n) = o(g(n))$.

Funkcja małe o

Niech $f, g : N \to R \geq 0$.

$f(n) = o(g(n)) \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 0$

Wtedy $f = \alpha_1 x^k + \alpha_2 x^{k-1} + \alpha_3 x^{k-2} + \ldots + \alpha_k$

$g = \beta_1 x^l + \beta_2 x^{l-1} + \ldots + \beta_l$

$f(n) = o(g(n)) \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 0$

$n \to \infty \to \alpha_1$ $\quad$ $k < l \Leftrightarrow k - l < 0$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\alpha_1 x^k + \alpha_2 x^{k-1} + \ldots + \alpha_k}{\beta_1 x^l + \beta_2 x^{l-1} + \ldots + \beta_l} = \lim_{n\to\infty} \frac{x^k\left(\alpha_1 + \alpha_2 \frac{1}{x} + \ldots + \alpha_k \frac{1}{x^k}\right)}{x^l\left(\beta_1 + \beta_2 \frac{1}{x} + \ldots + \beta_l \frac{1}{x^l}\right)} = \lim_{n\to\infty} \frac{\alpha_1 x^k}{\beta_1 x^l} = \frac{\alpha_1}{\beta_1} \lim_{n\to\infty} x^{k-l} = 0$$

$n \to \infty \to \beta_1$

Zatem $f(n) = o(g(n))$, co kończy dowód.