RPiS Lista 4

1. Dla funkcji $f(x, y) = C(x + y)\exp\{-(x + y)\}$, gdzie $x > 0$, $y > 0$
   (a) Wyznaczyć stałą C taką, aby podana wyżej funkcja była gęstością zmiennej (X, Y).
   (b) Sprawdzić, czy zmienne losowe X, Y są niezależne.
   (c) Obliczyć momenty m_{10}, m_{01}.

1. $f(x,y) = C(x+y)e^{-(x+y)}$, $x > 0, y > 0$

a) f jest funkcją gęstości, jeśli $f(x,y) \geq 0$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dy\,dx = 1$$

$$f(x,y) = C(x+y)e^{-(x+y)} \Rightarrow C \geq 0$$

$$\int_0^\infty\int_0^\infty C(x+y)e^{-(x+y)}\,dy\,dx = \int_0^\infty Ce^{-x}\int_0^\infty (x+y)e^{-y}\,dy\,dx = \left| \begin{matrix} f = x+y & g' = e^{-y} \\ f' = 1 & g = -e^{-y} \end{matrix} \right| = \int_0^\infty Ce^{-x}\left[(x+y)(-e^{-y}) + \int_0^\infty e^{-y}dy\right]_0^\infty dx =$$

$$= \int_0^\infty Ce^{-x}\left[-(x+y)e^{-y} - e^{-y}\right]_0^\infty dx = \int_0^\infty Ce^{-x}\left[-e^{-y}(x+y+1)\right]_0^\infty dx = \int_0^\infty Ce^{-x}\left(\lim_{y\to\infty} \frac{-1}{e^y}(x+y+1) + e^0(x+1)\right)dx =$$

$$\overset{d'H}{=} \int_0^\infty Ce^{-x}\left(\lim_{y\to\infty}\left(\frac{-x}{e^y} - \underset{\downarrow 0}{\frac{1}{e^y}} - \frac{1}{e^y}\right) + e^0(x+1)\right)dx = \int_0^\infty Ce^{-x}(x+1)\,dx = \left| \begin{matrix} f = x+1 & g' = Ce^{-x} \\ f' = 1 & g = -Ce^{-x} \end{matrix} \right| =$$

$$= \left[-Ce^{-x}(x+1) + C\int_0^\infty e^{-x}dx\right]_0^\infty = \left[-Ce^{-x}(x+1) - Ce^{-x}\right]_0^\infty = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{-Cx}{e^x} - \frac{2C}{e^x}\right) + \frac{2C}{e^0} =$$

$$\overset{d'H}{=} \lim_{x\to\infty}\left(\frac{-C}{e^x} - \underset{\downarrow 0}{\frac{2C}{e^x}}\right) + 2C = 1, \text{ stąd } C = \frac{1}{2}.$$

b) X i Y są niezależne, wtedy, gdy $\forall_{x,y} \in \mathbb{R}$ $f(x,y) = f_1(x)\cdot f_2(y)$.

Wyznaczamy $f_1(x)$ i $f_2(y)$

wyznaczyłem tą całkę w poprzednim podpunkcie

$$f_1(x) \overset{def.}{=} \int_{\mathbb{R}} f(x,y)\,dy = \int_0^\infty \frac{1}{2}(x+y)e^{-x-y}\,dy = \underbrace{\frac{1}{2}e^{-x}(x+1)}$$

$$f_2(y) \overset{def.}{=} \int_{\mathbb{R}} f(x,y)\,dx = \int_0^\infty \frac{1}{2}(x+y)e^{-x-y}\,dx = \frac{1}{2}e^{-y}\int_0^\infty (x+y)e^{-x}\,dx = \left| \begin{matrix} f = x+y & g' = e^{-x} \\ f' = 1 & g = -e^{-x} \end{matrix} \right| =$$

$$= \frac{1}{2}e^{-y}\left[-(x+y)e^{-x} + \int e^{-x}dx\right]_0^\infty = \frac{1}{2}e^{-y}\left[-(x+y)e^{-x} - e^{-x}\right]_0^\infty = \frac{1}{2}e^{-y}\left[\lim_{x\to\infty}\left(\frac{-x}{e^x} - \frac{y}{e^x} - \frac{1}{e^x}\right) + y + 1\right] =$$

$$\overset{d'H}{=} \frac{1}{2}e^{-y}\left[\lim_{x\to\infty}\left(\frac{-1}{e^x} - \underset{\downarrow 0}{\frac{y}{e^x}} - \frac{1}{e^x}\right) + y + 1\right] = \underline{\frac{1}{2}e^{-y}(y+1)}$$

Weźmy dowolne $x, y \in \mathbb{R}$: wtedy $\cancel{\frac{1}{2}}(x+y)\cancel{e^{-x-y}} = \cancel{\frac{1}{2}}\cancel{e^{-y}}(y+1)\cdot\frac{1}{2}\cancel{e^{-x}}(x+1)$

$$x+y = \frac{1}{2}(y+1)(x+1)$$

$$x+y = \frac{1}{2}(xy+y+x+1)$$

$$0 = \frac{1}{2}xy + \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} \quad \underline{\text{Fałsz}}, \text{ czyli zmienne są zależne.}$$

c) def. $m_{kl} = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} x^k y^l f(x,y)\,dy\,dx$

$$m_{10} = \int_0^\infty \int_0^\infty x\, y^0\, \tfrac{1}{2}(x+y)\, e^{-(x+y)}\,dy\,dx = \int_0^\infty \tfrac{1}{2} x e^{-x} \int_0^\infty (x+y) e^{-y}\,dy\,dx = \int_0^\infty \tfrac{1}{2} x e^{-x}(x+1)\,dx =$$

$$= \left| \begin{matrix} f = x^2+x & g' = e^{-x} \\ f' = 2x+1 & g = -e^{-x} \end{matrix} \right| = -\frac{1}{2}\Big[(x^2+x)e^{-x}\Big]_0^\infty + \frac{1}{2}\int_0^\infty (2x+1)e^{-x}\,dx = \left| \begin{matrix} f = 2x+1 & g' = e^{-x} \\ f' = 2 & g = -e^{-x} \end{matrix} \right| =$$

$$= -\frac{1}{2}\Big[\lim_{x\to\infty} \frac{x^2+x}{e^x} - 0\Big] + \frac{1}{2}\Big[-e^{-x}(2x+1)\Big]_0^\infty + \frac{1}{2}\int_0^\infty 2e^{-x}\,dx = -\frac{1}{2}\Big[\lim_{x\to\infty} \frac{x^2+x}{e^x} - 0\Big] + \frac{1}{2}\Big[-\lim_{x\to\infty} \frac{2x+1}{e^x} + \frac{1}{e^0}\Big] + \frac{1}{2}\Big[-2e^{-x}\Big]_0^\infty$$

$$\overset{d'LH}{=} \frac{1}{2}\Big[\lim_{x\to\infty} \underbrace{\frac{2}{e^x}}_{0} - 0\Big] - \frac{1}{2}\Big[\lim_{x\to\infty} \underbrace{\frac{2}{e^x}}_{0} - 1\Big] - \frac{1}{2}\Big[\lim_{x\to\infty} \underbrace{\frac{2}{e^x}}_{0} - \underbrace{\frac{2}{e^0}}_{2}\Big] = \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2}$$

$$m_{01} = \int_0^\infty \int_0^\infty x^0 y^1\, \tfrac{1}{2}(x+y)\, e^{-(x+y)}\,dy\,dx = \left| \text{dostaniemy tą samą całkę co wyżej, ponieważ obliczając ją po } x \text{ lub po } y \text{ dostajemy ten sam wynik, różnią się tylko zmienne} \right| = \frac{3}{2}$$