5. (2pkt) Pokaż, w jaki sposób algorytm "macierzowy" obliczania n-tej liczby Fibonacciego można uogólnić na inne ciągi, w których kolejne elementy definiowane są liniową kombinacją skończonej liczby elementów wcześniejszych. Następnie uogólnij swoje rozwiązanie na przypadek, w którym n-ty element ciągu definiowany jest jako suma kombinacji liniowej skończonej liczby elementów wcześniejszych oraz wielomianu zmiennej n.

Mamy $A \cdot \begin{bmatrix} a_{k+m-1} \\ a_{k+m-2} \\ \vdots \\ a_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{k+m} \\ \vdots \\ \vdots \\ a_{k+1} \end{bmatrix}$, gdzie

$$a_{k+m} = \alpha_0 a_k + \alpha_1 a_{k+1} + \dots + \alpha_m \cdot a_{k+m-1}.$$ Wtedy

$$A = \begin{bmatrix} \alpha_m & \alpha_{m-1} & \dots & \alpha_0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \\ 0 & 0 & \dots\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A \cdot \begin{bmatrix} a_{k+m-1} \\ \vdots \\ a_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_m & \dots & \alpha_0 \\ 1 & 0 \dots & \vdots \\ 0 & \dots\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{k+m-1} \\ \vdots \\ a_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_m a_{k+m-1} + \dots + \alpha_0 a_k \\ a_{k+m-1} \\ a_{k+m-2} \\ \vdots \\ a_{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{k+m-1} \\ \vdots \\ \vdots \\ a_{k+1} \end{bmatrix}$$

$$A^p \begin{bmatrix} a_k \\ \vdots \\ a_0 \end{bmatrix} = A^{p-1}\left(A \begin{bmatrix} a_k \\ \vdots \\ a_0 \end{bmatrix}\right) = A^{p-1} \begin{bmatrix} a_{k+1} \\ a_1 \end{bmatrix} = \dots = \begin{bmatrix} a_{k+p} \\ \vdots \\ a_p \end{bmatrix}$$

Jeśli a_n to kombinacja liniowa skończonej liczby el. wcześniejszych oraz wielomianu zmiennej n, to

$$a_n = \alpha_1 a_{n-1} + \alpha_2 a_{n-2} + \dots + \alpha_k a_{n-k} + W(n)$$

$$W(n) = \beta_0 n^0 + \beta_1 n^1 + \dots + \beta_p n^p$$

Szukamy takiego A, żeby

$$A \cdot \begin{bmatrix} a_{n-1} \\ a_{n-2} \\ \vdots \\ a_{n-k} \\ 1 \\ n^1 \\ \vdots \\ n^p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_n \\ a_{n-1} \\ \vdots \\ a_{n-k+1} \\ 1 \\ (n+1)^1 \\ \vdots \\ (n+1)^p \end{bmatrix}$$

Zauważając możemy zapisać A jako $A = \begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{bmatrix}$

$$A_1 = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_k \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad A_3 = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} b_0 & b_1 & \cdots & b_p \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{bmatrix} \qquad A_4 = \begin{bmatrix} \binom{0}{0} & 0 & \cdots & 0 \\ \binom{1}{0} & \binom{1}{1} & 0 & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ \binom{p}{0} & \binom{p}{1} & \cdots & \binom{p}{p} \end{bmatrix}$$

Utedy

$$A \begin{bmatrix} a_{n-1} \\ \vdots \\ a_{n-k} \\ 1 \\ n \\ \vdots \\ n^p \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{cccc|cccc} \alpha_1 & \cdots & & \alpha_k & b_0 & b_1 & \cdots & b_p \\ 1 & 0 & & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \hline 0 & \cdots & \cdots & 0 & \binom{0}{0} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \binom{p}{0} & \cdots & \cdots & \binom{p}{p} \end{array}\right] \begin{bmatrix} a_{n-1} \\ \vdots \\ a_{n-k} \\ 1 \\ n \\ \vdots \\ n^p \end{bmatrix}$$

$$A \begin{bmatrix} n-1 \\ \vdots \\ a_{n-k} \\ 1 \\ n \\ \vdots \\ n^p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_1 a_{n-1} + \alpha_2 a_{n-2} + \cdots + \alpha_k a_{n-k} + W(n) \\ a_{n-1} \\ \vdots \\ a_{n-k+1} \\ \binom{0}{0} \cdot 1 \\ \binom{1}{0} 1 + \binom{1}{1} \cdot n \\ \vdots \\ \binom{p}{0} 1 + \binom{p}{1} n + \cdots + \binom{p}{p} n^p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_n \\ a_{n-1} \\ \vdots \\ a_{n-k+1} \\ 1 \\ (n+1)^1 \\ (n+1)^2 \\ \vdots \\ (n+1)^p \end{bmatrix}$$

bo $(a+b)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a^i \cdot b^{n-1}$