L6.3. 1 punkt Sformułuj i udowodnij *algorytm Clenshawa* obliczania wartości wielomianu

$$w(x) = \frac{1}{2}c_0T_0(x) + c_1T_1(x) + c_2T_2(x) + \ldots + c_nT_n(x)$$

w punkcie x, gdzie $c_0, c_1, \ldots, c_n$ są danymi stałymi, a T_n oznacza n-ty *wielomiany Czebyszewa.*

Weźmy $w(x) = \frac{1}{2}c_0T_0(x) + c_1T_1(x) + \ldots + c_nT_n(x)$. Wiemy, że

$T_0(x) = 1$
$T_1(x) = x$
$T_k(x) = 2xT_{k-1}(x) - T_{k-2}(x)$

Niech B_k będzie k-tym wyrazem algorytmu Clenshawa.

Dla $W(x) = \sum_{k=0}^{n}{}' b_k T_k(x)$

$B_{n+2}(x) = B_{n+1}(x) = 0$ ← dwa początkowe wyrazy; rekurencją schodzimy do B_0.

$B_k(x) = 2xB_{k+1}(x) + B_{k+2}(x) + b_k$ dla $k = n, n-1, \ldots, 0$ $\Rightarrow b_k = B_k - 2xB_{k+1} + B_{k+2}$

Pokażemy, że $W(x) = \frac{B_0 - B_2}{2}$ $\boxed{b_k = B_k - 2xB_{k+1} + B_{k+2}}$. Dla wygody pomijamy „x" w zapisie $B_k(x)$.

bo $b_k = B_k - 2xB_{k+1} + B_{k+2}$

rozbijamy na trzy sumy i spróbujemy zredukować możliwie najwięcej wyrazów

$$W(x) = \sum_{k=0}^{n}{}' b_kT_k(x) = \left(\sum_{k=0}^{n}{}' (B_k - 2xB_{k+1} + B_{k+2})\right)\cdot T_k(x) = \sum_{k=0}^{n}{}' B_kT_k(x) - 2x\sum_{k=0}^{n} B_{k+1}T_k(x) + \sum_{k=0}^{n}{}' B_{k+2}T_k(x) =$$

wyciągam początkowe wyrazy z każdej z sum z pierwszej, 2 z drugiej, 1 z trzeciej

wyciągamy ostatnie wyrazy z ostatnich dwóch sum

zerują się, bo $B_{n+2} = B_{n+1} = 0$

$$= \frac{1}{2}B_0T_0(x) + B_1T_1(x) + B_2T_2(x) - \frac{2}{2}xB_1T_0(x) + \frac{1}{2}B_2T_0(x) + 2xB_2T_1(x) - \sum_{k=3}^{n} B_kT_k(x) - 2x\sum_{k=2}^{n-1} B_{k+1}T_k(x) + \sum_{k=1}^{n-2} B_{k+2}T_k(x) \underbrace{- 2xB_{n+1}T_n(x)}_{=0} + \underbrace{B_{n+2}T_n(x)}_{=0} + \underbrace{B_{n+1}T_{n-1}(x)}_{=0} =$$

uzgadniamy indeksy sum

$$= \frac{1}{2}B_0T_0(x) + B_1T_1(x) - xB_1T_0(x) + \frac{1}{2}B_2T_0(x) + \sum_{k=3}^{n} B_kT_k(x) - 2x\sum_{k=3}^{n} B_kT_{k-1}(x) + \sum_{k=3}^{n} B_kT_{k-2}(x) - 2xB_2T_1(x) + B_2T_2(x) =$$

łączymy sumy w jedną

$$= \frac{1}{2}B_0T_0(x) + B_1T_1(x) - xB_1T_0(x) + \frac{1}{2}B_2T_0(x) + \sum_{k=3}^{n} B_k\underbrace{(T_k(x) - 2xT_{k-1}(x) + T_{k-2}(x))}_{=0} - 2xB_2T_1(x) + B_2T_2(x) =$$

$= 0$ ← z definicji: $T_k = 2xT_{k-1} + T_{k-2}$

$T_2 = 2xT_1 - T_0$

$$= \frac{1}{2}B_0 + B_1T_1(x) - xB_1T_0(x) + B_2T_2(x) - 2xB_2T_1(x) + \frac{1}{2}B_2T_0(x) =$$

$$= \frac{1}{2}B_0 + \cancel{B_1(x)} - \cancel{xB_1} + \cancel{2x^2}B_2 - B_2 - \cancel{2x^2B_2} + \frac{1}{2}B_2 =$$

$$= \frac{1}{2}B_0 - \frac{1}{2}B_2 = \frac{B_0 - B_2}{2}$$ ■

Zatem wystarczy obliczyć B_0 oraz B_2 znając wartość x, by policzyć wartość $W(x)$.