Egzamin z analizy numerycznej (L)
8 lutego 2021 r.
Pierwszy termin

Pracuj samodzielnie!!!

Imię i nazwisko: Krystian Jasionek

Numer części: 3 **Numer zadania:** 2

a) $x^5 + \sqrt{x^{10} + 2021} = W(x)$

dla bardzo dużych x ujemnych $\sqrt{x^{10}+2021}$ będzie w przybliżeniu równy $-x^5$, zatem będziemy mieli do czynienia z odejmowaniem bliskich sobie liczb.

$$x^5 + \sqrt{x^{10}+2021} \cdot \frac{x^5 - \sqrt{x^{10}+2021}}{x^5 - \sqrt{x^{10}+2021}} = \frac{x^{10} - x^{10} - 2021}{x^5 - \sqrt{x^{10}+2021}} = \frac{-2021}{x^5 - \sqrt{x^{10}+2021}}$$

Żeby uniknąć tego problemu obliczamy W w taki sposób:

$$W(x) = \begin{cases} x^5 + \sqrt{x^{10}+2021}, & x \geq 0 \\ \dfrac{-2021}{x^5 - \sqrt{x^{10}+2021}}, & x < 0. \end{cases}$$

b) $W(x) = x^{-3}(\sin x - x) = \frac{1}{x^3}(\sin x - x)$, problem dla $x \approx 0$.

Dla bardzo małych x $\sin x \approx x$, więc będziemy mieli do czynienia z odejmowaniem bliskich sobie liczb. Rozwińmy $\sin x$ w szereg Taylora dla $|x| \leq \frac{1}{10}$. Dodatkowo będziemy dzielić wyrażenie przez x^3, czyli liczbę bardzo bliską 0.

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$W(x) = \frac{1}{x^3}\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots - x\right) = \frac{1}{x^3}\left(-\frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots\right) = -\frac{1}{3!} + \frac{x^2}{5!} - \frac{x^4}{7!} + \ldots$$

Pokażmy, że $\sin(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$ jest zbieżny z kryt. Leibniza, tzn.

$\cancel{\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \geq \frac{x^{2n+3}}{(2n+3)!}}$

$\cancel{x^{2n+1}(2n+3)! \geq x^{2n+3}(2n+1)!}$

$\cancel{x^{2n+1}(2n+2)(2n+3) - x^{2n+3} \geq 0}$

~~zawsze dodatnie, bo przyst[...]~~

Pamiętaj o zasadach nadsyłania rozwiązań!

1° $\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \geq \frac{x^{2n+3}}{(2n+3)!}$

$(2n+2)(2n+3)$

$\frac{x^2}{(2n+2)(2n+3)} \leq 1$ $\to$ prawda, bo $|x| \leq \frac{1}{10}$, zatem $|x^2| \leq \frac{1}{100}$, a mianownik > 1, bo $n \geq 0$

2° $\lim_{n\to\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = ?$

$$\underbrace{\lim_{n\to\infty} \frac{0}{(2n+1)!}}_{\downarrow\ 0} \leq \lim_{n\to\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \leq \underbrace{\lim_{n\to\infty} \frac{1}{(2n+1)!}}_{\downarrow\ 0}, \text{ bo } |x| \leq \frac{1}{10}$$

z tw. o trzech granicach

$\Downarrow$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = 0$$

Czyli $W(x) = -\frac{1}{3!} + \frac{x^2}{5!} - \frac{x^4}{7!} + \ldots = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+2}}{(2n+5)!}\right) - \frac{1}{6}$

Żeby uniknąć problemów z utratą cyfr znaczących obliczymy $W(x)$ w poniższy sposób:

$$W(x) = \begin{cases} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+2}}{(2n+5)!} - \frac{1}{6}, & |x| \leq \frac{1}{10} \\ x^{-3}(\sin(x) - x), & \text{w.p.p.} \end{cases}$$

Utrata cyfr znaczących polega na spadku liczby cyfr znaczących do bardzo niskiego poziomu, który skutkuje pojawieniem się błędów, np. podczas odejmowania bardzo bliskich sobie liczb wynik tego działania może być na tyle mały, że nie zostanie w pełni przechowany w mantysie, a podczas normalizacji liczby utracone cyfry zostaną zastąpione czymś bezsensownym, nie mającym nic wspólnego z prawdziwym wynikiem. Taka sytuacja występuje na przykład przy odejmowaniu bardzo bliskich sobie liczb.

Pamiętaj o zasadach nadsyłania rozwiązań!