AiSD Zadanie 6.6

środa, 19 maja 2021 10:52

6. (0,5pkt) Udowodnij, że każde drzewo BST można przekształcić operacjami rotacji w dowolne inne drzewo BST .

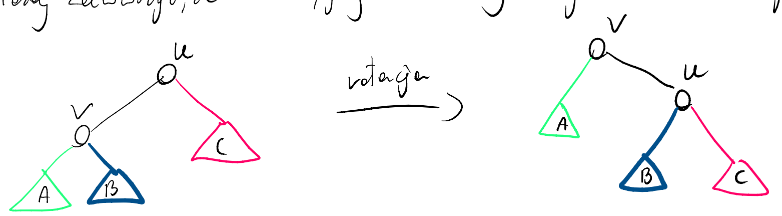
Przekształcamy rotacjami tylko drzewa o tym samym zbiorze wierzchołków. Zakładamy różnowartościowość kluczy (zawsze możemy je poindeksować). Pamiętajmy też, że rotacje zachowują porządek BST.

Pokażemy przez indukcję, że zawsze możemy przekształcić drzewo BST w dowolne inne BST, korzystając z rotacji. Będzie to nasza teza.

Podstawa) Puste drzewo zawsze możemy przekształcić rotacjami w inne drzewo puste — wystarczy 0 rotacji.

Krok) Załóżmy, że teza jest spełniona dla drzew o $k \in [0, n]$ wierzchołkach. Pokażemy, że wtedy jest też spełniona dla $n+1$ wierzchołków.

Możemy zauważyć, że zawsze, gdy zamieniamy miejscami wierzchołek z jego rodzicem, to jego wysokość rośnie o 1.



₹

Dzięki temu po odpowiedniej liczbie rotacji możemy przesunąć wierzchołek do korzenia. Wykorzystujemy do tego algorytm

```
Dopóki (wierzchołek docelowy nie jest korzeniem)
{
      Jeśli wierzchołek jest lewym dzieckiem rodzica
      {
            Zastosuj prawą rotację na nim i rodzicu
      }
      W przeciwnym wypadku
      {
            Zastosuj lewą rotację na nim i rodzicu
      }
}
```

Δ

Możemy to wykorzystać tę obserwację do utworzenia algorytmu rekurencyjnego. Możemy znaleźć korzeń drugiego drzewa i odszukać go w pierwszym drzewie, a następnie przenieść go powyższym algorytmem do korzenia. Otrzymane drzewo ma następujące własności:

1) Oba drzewa mają ten sam korzeń.
2) Prawe poddrzewa tych drzew mają te same elementy, ale mogą mieć inny kształt.
3) Tak samo dla lewych.

Możemy rekurencyjnie użyć algorytmu powyższego na poddrzewach. Po dotarciu do liści mamy w pełni zrotowane drzewo.

$$f(x) = \begin{cases} -x, & x < 0 \\ x, & x \geq 0 \\ \text{\textit{dotegowane równanie}} \end{cases}$$