1. a) $4\cos^2 x - 3$ $\to$ problem pojawia się dla $x = \pm \frac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

$$4\cos^2 x - 3 = 4(1-\sin^2 x) - 3 =$$

$$= 1 - 4\sin^2 x = (1 - 2\sin x)(1 + \sin x) =$$

$$= \left(1 - 2\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right)\left(1 + 2\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right) =$$ możemy rozwinąć cos w szereg Taylora $=$

$$= \left(1 - 2\left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!}\right)\right)\left(1 + 2\left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!}\right)\right)$$

2. Najpierw liczymy pierwszy pierwiastek

I Jeśli $b \leq 0$

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

a) Jeśli $x_1 \neq 0$

$$x_1 x_2 = \frac{c}{a}$$

$$x_2 = \frac{c}{a x_1}$$

b) Jeśli $x_1 = 0$

$$x_1 + x_2 = \frac{-b}{a}$$

$$x_2 = \frac{-b}{a} - x_1$$

$$x_2 = \frac{-b}{a}$$

II $b > 0$

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Tak samo, jak w pierwszym przypadku

4. $$\left|\frac{f(x) - f(x+h)}{f(x)}\right| = \left|\frac{f(x) - f(x+h)}{h}\right|\left|\frac{h}{f(x)}\right| = \left|\frac{f'(x)}{f(x)}\right|\left|h\right| = \left|\frac{f'(x)\,x}{f(x)}\right|\left|\frac{h}{x}\right|$$

błąd względny wartości funkcji przy małym zaburzeniu

współczynnik uwarunkowania zadania

$$\frac{|x - x + h|}{|x|} = \left|\frac{h}{x}\right|$$

błąd względny argumentów przy małym zaburzeniu h

3. $x = \left(r + \sqrt{q^3+r^2}\right)^{\frac{1}{3}} + \left(r - \sqrt{q^3+r^2}\right)^{\frac{1}{3}}$

Niech $a = r + \sqrt{q^3+r^2}$ wtedy

$$\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{\frac{\left(r - \sqrt{q^3+r^2}\right)a}{a}} = \sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{\frac{r^2 - q^3 - r^2}{a}}$$

$$= \sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{\frac{-q^3}{a}}$$

$$= \sqrt[3]{a} + \frac{-q}{\sqrt[3]{a}}, \quad b = \sqrt[3]{a}$$

$$= b - \frac{q}{b}$$

$$= \frac{b^2 - q}{b}$$

$$= \frac{\left(\sqrt[3]{r + \sqrt{q^3+r^2}}\right)^2 - q}{\sqrt[3]{r + \sqrt{q^3+r^2}}}$$

5. a) $f(x) = x^3 + 2020$ $\quad f'(x) = 3x^2$

$$K = \left|\frac{3x^2 \cdot x}{x^3+2020}\right| = \left|\frac{3x^3}{x^3+2020}\right|$$

dla $x \approx -\sqrt[3]{2020}$ mianownik jest blisko zero, zatem

$$\lim_{x\to -\sqrt[3]{2020}} K = \infty$$

b) $f(x) = x^{-1}\ln(x)$ $\quad f'(x) = -x^{-2}\ln(x) + \frac{1}{x^2}$

$$f'(x) = \frac{-\ln x + 1}{x^2} = \frac{1-\ln x}{x^2}$$

$$K = \left|\frac{(1-\ln x)}{x^2}\cdot\frac{x}{\ln x}\cdot x\right| = \left|\frac{1-\ln x}{\ln x}\right| = \left|\frac{1}{\ln x} - 1\right|$$

dla $x\approx 1$ $\ln(x)\approx 0$, więc

$$\lim_{x\to 1} K = \infty$$

c) $f(x) = \cos(5\cancel{x})$ $\quad f'(x) = -5\sin(5x)$

$$K = \left|\frac{-5\sin(5x)x}{\cos(5x)}\right| = \left|-5x\,tg(5x)\right|$$

dla $5x \approx \left(\frac{\pi}{2}+k\pi\right)$

$x \approx \frac{\pi}{10}+\frac{k\pi}{5}, k\in\mathbb{Z}$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{10}+\frac{k\pi}{5}} K = \infty$$

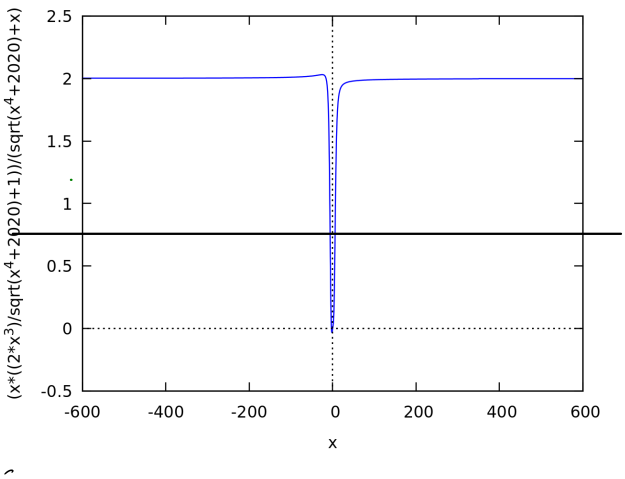
d) $f(x) = \left(\sqrt{x^4+2020}+x\right)^{-1}$ $\quad f'(x) = -\frac{\left(\frac{2x^3}{\sqrt{x^4+2020}}+1\right)}{\left(\sqrt{x^4+2020}+x\right)^2}$

$$K = \left|-\frac{\left(2x^4 + x\sqrt{x^4+2020}\right)}{x^4+2020+x\sqrt{x^4+2020}}\right|$$

$$\lim_{x\to\pm\infty} K = 2$$

$$\lim_{x\to 0} K = \frac{0}{2020} = 0$$

Badając wykres widzimy, że funkcja nie ma większych podejrzanych miejsc.



Zatem zadanie jest dobrze uwarunkowane.

7. $w(x) = x + x^{-1}$ $(x \neq 0)$

$$(v(1+\varepsilon_1)+u)(1+\varepsilon_2)$$

```
u := x;
v := 1/x;
return (u+v)
```

Nic umiemy wyjąć $(1+\varepsilon_1)$ przed nawias, więc policzymy ile musi wynosić γ, kiedy przedstawilibyśmy działanie jako $(u+v)(1+\gamma)(1+\varepsilon_2)$

$$(v(1+\varepsilon_1)+u)(1+\cancel{\varepsilon_2}) = (u+v)(1+\gamma)(1+\cancel{\varepsilon_2})$$

$$\cancel{v} + \varepsilon_1 v + \cancel{u} = \cancel{u} + \gamma u + \cancel{v} + \gamma v$$

$$\varepsilon_1 v = \gamma(u+v)$$

$$\gamma = \frac{v\varepsilon_1}{u+v}, \quad \varepsilon_1 \leq 2^{-t}$$

$$\gamma = \frac{\frac{1}{x}\varepsilon_1}{x+\frac{1}{x}}$$

$$\gamma = \frac{\varepsilon_1}{x^2+1} \Rightarrow \gamma < \varepsilon_1 \leq 2^{-t}$$

$$w(x) = (u+v)(1+\gamma)(1+\varepsilon_1), \text{ a } \gamma\varepsilon_1 = E \leq 2 \cdot 2^{-t}$$

$$w(x) = (u+v)(E+1)$$

Zatem algorytm jest numerycznie poprawny.

8. Dla liczb maszynowych:

$$\underline{I} = (x_1 \cdot x_2)(1+\varepsilon_2) \cdot x_3(1+\varepsilon_3) \times x_4(1+\varepsilon_4) \cdot \ldots \cdot x_n(1+\varepsilon_n) =$$

$$= \prod_{i=1}^{n} x_i(1+\varepsilon_i) = \left(\prod_{i=1}^{n} x_i\right)\left(\prod_{j=1}^{n}(1+\varepsilon_j)\right) \qquad \varepsilon_j \leq 2^{-t}$$

$$1 + E = \prod_{j=1}^{n}(1+\varepsilon_j), \quad E \leq n \cdot 2^{-t}$$

$$\underline{I} = \left(\prod_{i=1}^{n} x_i\right)(1+E)$$

Zatem jest algorytmem numerycznie poprawnym.

Dla liczb niemaszynowych (z błędami)

$$rd(x_k) = x_k(1+\varepsilon_k), \quad |\varepsilon_k| \leq 2^{-t} \qquad 1 \leq k \leq n$$

$$\underline{I} = (x_1(1+\varepsilon_1)\cdot(1+\gamma_1)\, x_2(1+\varepsilon_2)(1+\gamma_2)\ldots x_n(1+\varepsilon_n)(1+\gamma_n) =$$

$$= \prod_{i=1}^{n} x_i(1+\varepsilon_i)(1+\gamma_i)$$

ale $\varepsilon_i, \gamma_i \leq 2^{-t}$, zatem $(1+\varepsilon_i) \approx (1+\gamma_i) \approx (1+\alpha_i)$

$$\prod_{i=1}^{n}(1+\varepsilon_i)(1+\gamma_i) \approx \prod_{i=1}^{2n}(1+\alpha_i) = 1 + \Theta, \quad \Theta \leq 2n \cdot 2^{-t}$$

$$\underline{I} = \left(\prod_{i=1}^{n} x_i\right)\Theta$$, zatem algorytm jest numerycznie poprawny.