8. Niech $X_1 = Y_1 \cos Y_2$, $X_2 = Y_1 \sin Y_2$, gdzie $0 < Y_1 < 1$, $0 \leqslant Y_2 \leqslant 2\pi$. Znaleźć gęstość $g(y_1, y_2)$ zmiennej (Y_1, Y_2). Sprawdzić czy zmienne Y_1, Y_2 są niezależne.

$$g(y_1, y_2) = f(x_1, x_2) \cdot |J|$$

Wiemy, że $f(x_1, x_2) = \frac{1}{\pi}$, więc wyznaczmy $|J|$.

$$|J| = \begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial y_1} & \frac{\partial x_1}{\partial y_2} \\ \frac{\partial x_2}{\partial y_1} & \frac{\partial x_2}{\partial y_2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial y_1 \cos y_2}{\partial y_1} & \frac{y_1 \cos y_2}{\partial y_2} \\ \frac{\partial y_1 \sin y_2}{\partial y_1} & \frac{y_1 \sin y_2}{\partial y_2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos y_2 & -y_1 \sin y_2 \\ \sin y_2 & y_1 \cos y_2 \end{vmatrix} = |y_1 \cos^2 y_2 + y_1 \sin^2 y_2|$$

$$|J| = |y_1 \cdot (\cos^2 y_2 + \sin^2 y_2)| = |y_1| = y_1$$

W takim razie:

$$g(x_1, x_2) = \frac{1}{\pi} \cdot y_1 = \frac{y_1}{\pi}$$

Sprawdźmy niezależność zmiennych Y_1, Y_2, tzn. czy $f(y_1) \cdot f(y_2) = f(y_1, y_2)$

$$f(y_1) = \int_{\mathbb{R}} g(y_1, y_2)\, dy_2 = \int_0^{2\pi} \frac{y_1}{\pi}\, dy_2 = \left[\frac{y_1}{\pi} \cdot y_2 \right]_0^{2\pi} = 2y_1$$

$$f(y_2) = \int_{\mathbb{R}} g(y_1, y_2)\, dy_1 = \int_0^1 \frac{y_1}{\pi}\, dy_1 = \left[\frac{y_1^2}{2\pi} \right]_0^1 = \frac{1}{2\pi}$$

$$f(y_1) \cdot f(y_2) = g(y_1, y_2)$$

$$2y_1 \cdot \frac{1}{2\pi} = \frac{1}{\pi} \cdot y_1$$

$\frac{y_1}{\pi} = \frac{y_1}{\pi}$ dla każdego $y_1, y_2 \in \mathbb{R}$, zatem Y_1, Y_2 są niezależne.