ANL Lista 10 Krystian Jasionek

L10.1. [1 punkt] Niech daną będą parami różne punkty $\mathcal{X} := \{x_0, x_1, \ldots, x_N\}$ i funkcja p o własności $p(x) > 0$ dla $x \in \mathcal{X}$. Udowodnij, że wzór

$$||f|| := \sqrt{\sum_{k=0}^{N} p(x_k) f(x_k)^2}$$

określa normę na zbiorze dyskretnym $\mathcal{X}$.

1° $||f|| = 0 \Rightarrow f = 0$

$$\sqrt{\sum_{k=0}^{N} \underbrace{p(x_k)}_{>0} \underbrace{f^2(x_k)}_{\geq 0}} = 0$$

, zatem $||f|| = 0$, tylko gdy $f(x_k) = 0$ dla $k = 0..N$

2° $||\alpha f|| = |\alpha| \, ||f||$

$$\sqrt{\sum_{k=0}^{N} p(x_k) \cdot (\alpha f(x_k))^2} = \sqrt{\sum_{k=0}^{N} p(x_k) \cdot \alpha^2 f^2(x_k)} = \alpha \sqrt{\sum_{k=0}^{N} p(x_k) \cdot f^2(x_k)}$$

$$\left|\sum_{i=1}^{N} u_i v_i\right|^2 \leq \left(\sqrt{\sum_{i=1}^{N} u_i^2}\right)\left(\sqrt{\sum_{i=1}^{N} v_i^2}\right)$$

3° $||f+g|| \leq ||f|| + ||g||$

z Cauchy'ego-Schwarza

$$\sqrt{\sum_{k=0}^{N} p(x_k)(f(x_k) + g(x_k))^2} = \sqrt{\sum_{k=0}^{N} p(x_k) f^2(x_k) + 2\sum_{k=0}^{N} p(x_k) f(x_k) g(x_k) + \sum_{k=0}^{N} p(x_k) g^2(x_k)} \leq \sqrt{\sum_{k=0}^{N} f^2(x_k) p(x_k) + 2\sqrt{\sum_{k=0}^{N} f^2(x_k) p(x_k)} \cdot \sqrt{\sum_{k=0}^{N} g^2(x_k) \cdot p(x_k)} + \sum_{k=0}^{N} g^2(x_k) p(x_k)}$$

$$= \sqrt{p(x_k)} \cdot f(x_k) \cdot \sqrt{p(x_k)} \cdot g(x_k)$$

$$= \sqrt{\left(\sqrt{\sum_{k=0}^{N} f^2(x_k) p(x_k)} + \sqrt{\sum_{k=0}^{N} g(x_k)^2 p(x_k)}\right)^2} = \left|\underbrace{\sqrt{\sum_{k=0}^{N} f^2(x_k) p(x_k)}}_{\geq 0} + \underbrace{\sqrt{\sum_{k=0}^{N} g^2(x_k) p(x_k)}}_{\geq 0}\right| = \sqrt{\sum_{k=0}^{N} f^2(x_k) p(x_k)} + \sqrt{\sum_{k=0}^{N} g^2(x_k) p(x_k)}$$

L10.2. [1 punkt] Wyznacz funkcję postaci $y(x) = ax(2021x - 2020) + 1977$ najlepiej dopasowaną w sensie aproksymacji średniokwadratowej do danych

x_k	x_0	x_1	$\ldots$	x_n
y_k	y_0	y_1	$\ldots$	y_n

$$E(a) = \sum_{k=0}^{n} (f(x_k) - y(x_k))^2 = \sum_{k=0}^{n} (f(x_k) - ax(2021x - 2020) - 1977)^2$$

$$E'(a) = \left(\sum_{k=0}^{n} (f(x_k) - ax(2021x - 2020) - 1977)^2\right)' = 2\sum_{k=0}^{n} (f(x_k) - ax_k(2021x_k - 2020) - 1977)(-x_k(2021x_k - 2020))$$

$$E'(a) = 2\left[\sum_{k=0}^{n} -x_k(2021x_k - 2020)(f(x_k) - 1977) + \sum_{k=0}^{n} a x_k^2 (2021x_k - 2020)^2\right] = 0$$

$$2\left[\sum_{k=0}^{n} -x_k(2021x_k - 2020)(f(x_k) - 1977) + \underbrace{a\sum_{k=0}^{n} x_k^2 (2021x_k - 2020)^2}\right] = 0$$

współczynnik przy a jest sumą liczb ≥ 0, zatem jest ≥ 0. Czyli E' jest liniową funkcją rosnącą, zatem znajdziemy minimalną wartość

$$a\sum_{k=0}^{n} x_k^2 (2021x_k - 2020)^2 = 2\left[\sum_{k=0}^{n} x_k(2021x_k - 2020)(f(x_k) - 1977)\right]$$

$$a = \frac{\sum_{k=0}^{n} x_k (2021x_k - 2020)(f(x_k) - 1977)}{\sum_{k=0}^{n} x^2 (2021x - 2020)^2}$$

L10.3. $\boxed{\text{1 punkt}}$ Dla jakiej stałej a wyrażenie

$$\sum_{k=0}^{r} \frac{e^{x_k} - 2020}{1 + \ln(x_k^2 + 1)} \left[y_k - a(\cos(2x_k + 2020) + x_k^3)\right]^2$$

przyjmuje najmniejszą możliwą wartość?

$$f(a) = \sum_{k=0}^{r} \frac{e^{x_k}+2020}{1+\ln(x_k^2+1)} [y_k - a(\cos(2x_k+2020)+x_k^3)]^2$$

Szukamy minimum funkcji $f(a)$, czyli $f'(a) = 0$.

Niech $\alpha = \frac{e^{x_k}+2020}{1+\ln(x_k^2+1)}$

$$f'(a) = \left(\sum_{k=0}^{r} \alpha \left(y_k - a(\cos(2x_k+2020)+x_k^3)\right)^2\right)'$$

$$f'(a) = \sum_{k=0}^{r} -2\alpha\left(y_k - a(\cos(2x_k+2020)+x_k^3)\right)(\cos(2x_k+2020)+x_k^3)$$

$$f'(a) = \sum_{k=0}^{r} -2\alpha y_k(\cos(2x_k+2020)+x_k^3) + 2\alpha a(\cos(2x_k+2020)+x_k^3)^2 = 0$$

$\geqslant 0$

przeanalizujmy znak α

$$\alpha = \frac{e^{x_k}+2020}{1+\ln(x_k^2+1)} \geqslant 0$$

$$\Updownarrow$$

$$(e^{x_k} - 2020)(1+\ln(x_k^2+1)) > 0$$

$e^{x_k} > -2020$ $\qquad$ $\ln(x_k^2+1) > -1$

$x_k \in \mathbb{R}$ $\qquad$ $x_k^2 + 1 > \frac{1}{e}$

$x_k^2 > \frac{1}{e} - 1$

$x_k \in \mathbb{R}$

Zatem $\sum_{k=0}^{r} 2\alpha a(\cos(2x_k+2020)+x_k^3)^2 = \sum_{k=0}^{r} 2\alpha y_k(\cos(2x_k+2020)+x_k^3)$

$$a = \frac{\sum_{k=0}^{r} 2\alpha y_k(\cos(2x_k+2020)+x_k^3)}{\sum_{k=0}^{r} 2\alpha(\cos(2x_k+2020)+x_k^3)^2}$$

L10.5. $\boxed{\text{1 punkt}}$ Wiadomo, że napięcie powierzchniowe cieczy S jest funkcją liniową temperatury T:

$$S = aT + b.$$

Dla konkretnej cieczy wykonano pomiary S w pewnych temperaturach, otrzymując następujące wyniki:

T	0	10	20	30	40	80	90	95
S	68.0	67.1	66.4	65.6	64.6	61.8	61.0	60.0

Wyznacz prawdopodobne wartości stałych a i b.

$S = aT + b$

Z wykładu mamy, że

$$\sqrt{E} = \sqrt{\sum_{k=0}^{7} (f(T) - aT - b)^2}$$

$$E = \sum_{k=0}^{7} (f(T) - aT - b)^2$$

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial a} E = \sum_{k=0}^{7} 2(f(T) - aT - b)(-T) = 0 \\ \frac{\partial}{\partial b} E = \sum_{k=0}^{7} 2(f(T) - aT - b)(-1) = 0 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} \sum_{k=0}^{7} (f(T) - aT - b)(T) = 0 \\ \sum_{k=0}^{7} (f(T) - aT - b) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sum_{k=0}^{7} f(T)T - a\sum_{k=0}^{7} T^2 - b\sum T = 0 \\ \sum_{k=0}^{7} f(T) - a\sum_{k=0}^{7} T - b\sum_{k=0}^{7} 1 = 0 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} \sum_{k=0}^{7} f(T)\cdot T = a\sum_{k=0}^{7} T^2 + b\sum_{k=0}^{7} T \\ \sum_{k=0}^{7} f(T)\cdot 1 = a\sum_{k=0}^{7} T + b\sum_{k=0}^{7} 1 \end{cases}$$

rozwiążemy wzorami Cramera

$$\begin{bmatrix} \langle 1,1 \rangle & \langle T,1 \rangle \\ \langle 1,T \rangle & \langle T,T \rangle \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b \\ a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \langle f(T), 1 \rangle \\ \langle f(T), T \rangle \end{bmatrix} \Rightarrow$$

```
a=-0.07993035770813549
b=67.95932257043368
```

L10.6. 1 punkt Punkty (x_k, y_k) $(k = 0, 1, \ldots, r)$ otrzymano jako wyniki pomiarów. Po ich zaznaczeniu na papierze z siatką półlogarytmiczną okazało się, że leżą one prawie na linii prostej, co sugeruje, iż $y \approx e^{ax+b}$. Zaproponuj prosty sposób wyznaczenia prawdopodobnych wartości parametrów a i b.

$y \approx e^{ax+b}$, tak naprawdę interesują nas wykładniki, zatem obliczmy logarytm

$$\log y \approx \log\left(e^{ax+b}\right)$$

$$\log y \approx ax+b$$

$$E = \sum_{k=0}^{r} (\log y - ax - b)^2$$

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial a} E = \sum_{k=0}^{r} 2(\log y - ax - b)(-x) = 0 \\ \frac{\partial}{\partial b} E = \sum_{k=0}^{r} 2(\log y - ax - b)(-1) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial a} E = \sum_{k=0}^{r} (\log y - ax - b)x = 0 \\ \frac{\partial}{\partial b} E = \sum_{k=0}^{r} (\log y - ax - b) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sum \log y\, x - a\sum x^2 - b\sum x = 0 \\ \sum \log y - a\sum x - b\sum 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow 8b = \sum \log y - a\sum x$$

$$\sum \log y x - a\sum x^2 - \frac{1}{8}\left(\sum x\right)\left(\sum \log y - a\sum x\right) = 0$$

$$\sum \log y \cancel{x} - a\sum x^2 - \frac{1}{8}\sum x \cdot \sum \log y + \frac{1}{8}a\left(\sum x\right)^2 = 0$$

$$a\left(\left(\sum x\right)^2 \frac{1}{8} - \sum x^2\right) = \frac{1}{8}\sum x \sum \log y - \sum \log y x$$

$$a = \frac{\frac{1}{8}\sum x \cdot \sum \log y - \sum \log y x}{\frac{1}{8}\left(\sum x\right)^2 - \sum x^2}$$

Po rozwiązaniu układu równań otrzymamy

$$a = \sum_{k=0}^{7} \log(y) \cdot T - \frac{1}{r+1}\sum_{k=0}^{7} \log(y) - \sum_{k=0}^{7} T$$

$$b = \frac{\sum \log(y) - a\sum T}{r+1} \quad \frac{1}{8}$$

L10.7. 1 punkt Poziom wody w Morzu Północnym zależy głównie od tzw. *pływu* M_2 o okresie ok. 2π i równaniu

$$H(t) = h_0 + a_1 \sin\frac{2\pi t}{12} + a_2 \cos\frac{2\pi t}{12} \qquad (t \text{ mierzone w godzinach}).$$

Zrobiono następujące pomiary:

t	0	2	4	6	8	10	godz.
$H(t)$	1	1.6	1.4	0.6	0.2	0.8	m

Wykorzystaj aproksymację średniokwadratową do wyznaczenia prawdopodobnych wartości stałych h_0, a_1, a_2.

$g_0 = 1$, $g_1 = \sin\frac{2\pi t}{12}$, $g_2 = \cos\frac{2\pi t}{12}$

$a_0 = h_0$, $a_1 = a_1$, $a_2 = a_2$

$$E(a_0, a_1, a_2) = \sum_{k=0}^{n} (y_k - a_0 g_0 - a_1 g_1 - a_2 g_2)^2$$

$$\frac{\partial}{\partial a_i} E(a_0, a_1, a_2) = 2\sum_{k=0}^{n} (y_k - a_0 g_0 - a_1 g_1 - a_2 g_2) g_i = 0$$

$$\begin{cases} 2\sum_{k=0}^{n} (y_k - a_0 g_0 - a_1 g_1 - a_2 g_2) g_0 = 0 \\ 2\sum_{k=0}^{n} (y_k - a_0 g_0 - a_1 g_1 - a_2 g_2) g_1 = 0 \\ 2\sum_{k=0}^{n} (y_k - a_0 g_0 - a_1 g_1 - a_2 g_2) g_2 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \sum_{k=0}^{n} y_k g_0 = \sum_{k=0}^{n} (a_0 g_0 + a_1 g_1 + a_2 g_2) g_0 \\ \sum_{k=0}^{n} y_k g_1 = \sum_{k=0}^{n} (a_0 g_0 + a_1 g_1 + a_2 g_2) g_1 \\ \sum_{k=0}^{n} y_k g_2 = \sum_{k=0}^{n} (a_0 g_0 + a_1 g_1 + a_2 g_2) g_2 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} \langle g_0, g_0\rangle & \langle g_1, g_0\rangle & \langle g_2, g_0\rangle \\ \langle g_0, g_1\rangle & \langle g_1, g_1\rangle & \langle g_2, g_1\rangle \\ \langle g_0, g_2\rangle & \langle g_1, g_2\rangle & \langle g_2, g_2\rangle \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_k g_0 \\ y_k g_1 \\ y_k g_2 \end{bmatrix}$$

Możemy rozwiązać ten układ wzorami Cramera. Otrzymamy

```
h = 0.9333333333333332
a1 = 0.5773502691896254
a2 = 0.26666666666666683
```