Analiza numeryczna (L)
16.12.2020 r.

Powtórka

- $\|f\|_2 := \sqrt{\sum_{k=0}^{N} (f(x_k))^2}$
- f – dana funkcja, $\mathcal{X}$ – wybrany „model" $\Rightarrow$ szukamy „optymalnego" $w^* \in \mathcal{X}$: $\|f - w^*\|_2 \overset{(\Delta)}{=} \min_{w \in \mathcal{X}} \|f - w\|_2$ (minimalizacja „odległości" f i w)
- rozwiązanie (Δ) („wzorne" = „niewygodne" dla dużej liczby parametrów) $\Rightarrow$ przyrównanie do zera pochodnych cząstkowych po wszystkich parametrach modelu (m – liczba parametrów modelu) Koszt: $O(m^2N + m^3)$ Drogo!

Wykład 10. Wielomianowa aproksymacja śr.kw. na zbiorze dyskretnym

Załóżmy, że rozpatrywanym modelem, do którego chcemy się dopasować, jest zbiór wielomianów. Dokładniej,

$$\mathcal{X} := \Pi_m \quad (m \text{ – ustalone})$$

Zadanie (wielomianowa aproksymacja śr.kw. na zbiorze dyskretnym)

Dla danej funkcji f określonej w parami różnych punktach $x_0, x_1, \dots, x_N$, znaleźć taki wielomian $w_m^* \in \Pi_m$, że

$$\|f - w_m^*\|_2 = \min_{w_m \in \Pi_m} \|f - w_m\|_2 \equiv$$
$$\equiv \min_{w_m \in \Pi_m} \sqrt{\sum_{k=0}^{N} \left(f(x_k) - w_m(x_k)\right)^2}$$

Uwaga

W tym wypadku metoda podana ostatnio nie jest najlepsza. Zadanie to można rozwiązać znacznie efektywniej.

Idea

Zapisać wielomian optymalny w „specjalnej" bazie tak, aby „łatwo" rozwiązać zadanie postawione wyżej.

Plan wykładu

iloczyn skalarny $\rightarrow$ układ ortogonalny $\rightarrow$ ciąg wielomianów ortogonalnych $\rightarrow$ związek rekurencyjny dla wielomianów ortogonalnych $\rightarrow$ algorytm Clenshawa $\rightarrow$ „łatwe" rozwiązanie zadania wielomianowej aproksymacji śr.kw.

Iloczyn skalarny (dyskretny)

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{dwie funkcje}}}{(f,g)_N} := \sum_{k=0}^{N} f(x_k)g(x_k) \leftarrow \text{liczba}$$

Własności

- $(f,f)_N \geqslant 0$, $(f,f)_N = 0 \iff f(x_k) = 0 \ (0 \leqslant k \leqslant N)$
- $(f,g)_N = (g,f)_N$
- $(\alpha f, g)_N = \alpha (f,g)_N$ (α – liczba rzeczywista)
- $(f+g, h)_N = (f,h)_N + (g,h)_N$
- $\boxed{(f,f)_N = \|f\|_2^2 \quad \left(\text{inaczej}: \|f\|_2 := \sqrt{(f,f)_N}\right)}$

Ortogonalność funkcji

Funkcje f i g są ortogonalne względem iloczynu skalarnego $(\cdot,\cdot)_N$, jeśli

$$\boxed{(f,g)_N = 0}$$

Przykład

$(f,g)_N := \sum_{k=0}^{3} f(x_k)g(x_k)$, $\quad x_0 = 0,\ x_1 = \frac{1}{3},\ x_2 = \frac{2}{3},\ x_3 = 1$

$f(x) := \cos(2\pi x)$, $\quad g(x) := x^2 - \frac{13}{9}x$

$f(x_0)g(x_0) = 0$, $f(x_1)g(x_1) = \frac{5}{27}$, $f(x_2)g(x_2) = \frac{7}{27}$, $f(x_3)g(x_3) = -\frac{4}{9}$

$$\Downarrow$$

$(f,g)_N = 0 \quad \Rightarrow$ te funkcje są ortogonalne względem wybranego iloczynu skalarnego.

Układ ortogonalny

Układ funkcji $f_0, f_1, \dots, f_m$ $(m \leqslant N)$ nazywamy ortogonalnym, jeśli

$$\boxed{\begin{cases} (f_k, f_l)_N = 0 & \text{dla } k \neq l, \\ (f_k, f_k)_N > 0. \end{cases}}$$

Ortogonalizacja Grama–Schmidta

Dla dowolnego układu $g_0, g_1, \dots, g_m$ $(m \leqslant N)$ liniowo niezależnych funkcji, układ $f_0, f_1, \dots, f_m$ określony wzorami:

$$\begin{cases} f_0 := g_0 \\ f_k := g_k - \sum_{j=0}^{k-1} \frac{(g_k, f_j)_N}{(f_j, f_j)_N} f_j & (k = 1, 2, \dots, m) \end{cases}$$

jest ortogonalny względem iloczynu skalarnego $(\cdot,\cdot)_N$.

Koszt: $O(Nm^2)$

Uwagi

- Proces ortogonalizacji Grama–Schmidta jest dość drogi.
- (!) Są duże problemy numeryczne przy realizacji tej metody w świecie zmiennopozycyjnym.

Ciąg wielomianów ortogonalnych

Ciąg wielomianów $P_0, P_1, \dots, P_m$ $(m \leqslant N)$ nazywamy ciągiem wielomianów ortogonalnych względem ustalonego iloczynu skalarnego $(\cdot,\cdot)_N$, jeśli

$$\begin{cases} P_k \in \Pi_k \setminus \Pi_{k-1} & (\Pi_{-1} := \emptyset;\ k = 0, 1, \dots, m), \\ (P_k, P_l)_N = 0 & (k \neq l), \\ (P_k, P_k)_N > 0. \end{cases}$$

Pytanie

Jak dla danego iloczynu skalarnego znaleźć (zbudować) ciąg wielomianów ortogonalnych?

Odpowiedź

Możemy użyć ortogonalizacji Grama–Schmidta do układu

$$1, x, x^2, \dots, x^m. \xrightarrow{\text{Uwaga}} \text{Są problemy (koszt + aspekt numeryczny)}$$

Przykład

$(f,g)_N := \sum_{k=0}^{3} f(x_k)g(x_k)$, $\quad x_0 = 0,\ x_1 = \frac{1}{3},\ x_2 = \frac{2}{3},\ x_3 = 1$

$f_0(x) = 1$, $f_1(x) = x$, $f_2(x) = x^2$, $f_3(x) = x^3$

$\Downarrow$ ortogonalizacja Grama–Schmidta

$P_0(x) = f_0(x) \equiv 1$

$P_1(x) = x - \frac{(f_1, P_0)_N}{(P_0, P_0)_N} P_0(x) = x - \frac{1}{2}$

$P_2(x) = x^2 - \frac{(f_2, P_0)_N}{(P_0, P_0)_N} P_0(x) - \frac{(f_2, P_1)_N}{(P_1, P_1)_N} P_1(x) = x^2 - x + \frac{1}{9}$

$P_3(x) = x^3 - \frac{(f_3, P_0)_N}{(P_0, P_0)_N} P_0(x) - \frac{(f_3, P_1)_N}{(P_1, P_1)_N} P_1(x) - \frac{(f_3, P_2)_N}{(P_2, P_2)_N} P_2(x) = x^3 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{47}{90}x - \frac{1}{90}$

$\mathrm{Lin}\{P_0, P_1, P_2, P_3\} = \Pi_3$

$(P_i, P_j) = 0$ dla $i \neq j$ oraz $(P_i, P_i) > 0$.

Uwagi

1° Ciąg wielomianów ortogonalnych $P_0, P_1, \dots, P_m$ $(m \leqslant N)$ względem dowolnie wybranego iloczynu skalarnego $(\cdot,\cdot)_N$ tworzy bazę przestrzeni Π_m, tzn.

$$\mathrm{Lin}\{P_0, P_1, \dots, P_m\} \equiv \Pi_m$$

2° Ciąg wielomianów ortogonalnych można zbudować znacznie szybciej i bezpieczniej pod względem numerycznym niż używając ortogonalizacji Grama–Schmidta.

Ad 1°

$$\forall_{w \in \Pi_m} \exists!_{a_0, a_1, \dots, a_m \in \mathbb{R}} \quad w(x) = \sum_{k=0}^{m} a_k P_k(x)$$

$\Downarrow$

Można sprawdzić, że (dla domu) $\quad a_k := \frac{(w, P_k)_N}{(P_k, P_k)_N}$.

Ad 2°

Twierdzenie

Ciąg wielomianów ortogonalnych $P_0, P_1, \dots, P_m$ $(m \leqslant N;$ iloczyn skalarny $(\cdot,\cdot)_N$ – ustalony$)$ spełnia następujący związek rekurencyjny:

$$(*) \begin{cases} P_0(x) \equiv 1, \quad P_1(x) = x - c_1 \\ P_k(x) = (x - c_k) P_{k-1}(x) - d_k P_{k-2}(x) & (k = 2, 3, \dots, m), \end{cases}$$

gdzie

$$c_k := \frac{(xP_{k-1}, P_{k-1})_N}{(P_{k-1}, P_{k-1})_N} \ (1 \leqslant k \leqslant m), \quad d_k := \frac{(P_{k-1}, P_{k-1})_N}{(P_{k-2}, P_{k-2})_N} \ (2 \leqslant k \leqslant m).$$

Ważne obserwacje

1° Elementy ciągu wielomianów ortogonalnych możemy wyznaczać jeden po drugim stosując zależność $(*)$: $P_0 \to P_1 \to P_2 \to P_3 \to P_4 \to \dots$

2° Współczynniki c_k i d_k są „podobne".

Koszt użycia $(*)$: $\boxed{\text{liniowy względem } m}$

Przykład

Zbudujmy, korzystając z podanej zależności rekurencyjnej, ciąg wielomianów ortogonalnych względem iloczynu skalarnego postaci

$$(f,g)_N := \sum_{k=0}^{3} f(x_k)g(x_k), \quad x_0 = 0,\ x_1 = \tfrac{1}{3},\ x_2 = \tfrac{2}{3},\ x_3 = 1$$

$$\Downarrow (*)$$

$P_0(x) = 1$

$P_1(x) = x - c_1 = x - \frac{(xP_0, P_0)_N}{(P_0, P_0)_N} = x - \frac{1}{2}$

$P_2(x) = (x - c_2) P_1(x) - d_2 P_0(x) = \left(x - \frac{(xP_1, P_1)_N}{(P_1, P_1)_N}\right) P_1(x) - \frac{(P_1, P_1)_N}{(P_0, P_0)_N} = x^2 - x + \frac{1}{9}$

$P_3(x) = (x - c_3) P_2(x) - d_3 P_1(x)$
$= \left(x - \frac{(xP_2, P_2)_N}{(P_2, P_2)_N}\right) P_2(x) - \frac{(P_2, P_2)_N}{(P_1, P_1)_N} =$
$= x^3 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{47}{90}x - \frac{1}{90}$

Algorytm Clenshawa

Niech dany będzie ciąg wielomianów $Q_0, Q_1, \dots$ zadany w następujący sposób rekurencyjny:

$$\begin{cases} Q_0(x) = \alpha_0, \quad Q_1(x) = (\alpha_1 x - \beta_1) Q_0(x) \\ Q_k(x) = (\alpha_k x - \beta_k) Q_{k-1}(x) - \gamma_k Q_{k-2}(x) & (k = 2, 3, \dots), \end{cases}$$

gdzie wielkości $\alpha_k, \beta_k, \gamma_k$ są znane. Rozważmy wielomian $q_m \in \Pi_m$ postaci

$$q_m(x) = \sum_{k=0}^{m} a_k Q_k(x) \quad (a_k \text{ – znane}).$$

Dla danego x, wartość $q_m(x)$ zaleca się obliczać następującym algorytmem Clenshawa:

$$\begin{cases} B_{m+1} := B_{m+2} := 0 \\ B_k := a_k + (\alpha_{k+1} x - \beta_{k+1}) B_{k+1} - \gamma_{k+2} B_{k+2} \\ \qquad (k = m, m-1, \dots, 0). \end{cases}$$

Wtedy $\quad q_m(x) = \alpha_0 B_0$. (dowód $\rightarrow$ ćwiczenia)

Zadanie (wielomianowa aproksymacja śr.kw. na zbiorze dyskretnym)

Dla danej funkcji f i parami różnych $x_0, x_1, \dots, x_N$, znaleźć taki wielomian $w_m^* \in \Pi_m$, że

$$\|f - w_m^*\|_2 = \min_{w_m \in \Pi_m} \|f - w_m\|_2 \equiv \min_{w_m \in \Pi_m} \sqrt{\sum_{k=0}^{N} \left(f(x_k) - w_m(x_k)\right)^2}$$

Używając iloczynu skalarnego i ciągu wielomianów ortogonalnych względem tego iloczynu skalarnego można podać jawny wzór dla wielomianu w_m^*.

Twierdzenie

Wielomian optymalny $w_m^* \in \Pi_m$ $(m \leqslant N)$ wyraża się następującym wzorem

$$w_m^*(x) = \sum_{k=0}^{m} \boxed{a_k} P_k(x), \leftarrow \text{jawny wzór}$$

gdzie $P_0, P_1, \dots, P_m$ są wielomianami ortogonalnymi względem iloczynu skalarnego postaci

$$(g,h)_N := \sum_{k=0}^{N} g(x_k)h(x_k),$$

tzn. $(P_i, P_j)_N = 0$ dla $i \neq j$ oraz $(P_i, P_i)_N > 0$ (uwaga: wielomiany te spełniają związek rekurencyjny $(*)$)

oraz

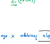
$$a_k = \frac{(f, P_k)_N}{(P_k, P_k)_N} \quad (k = 0, 1, \dots, m).$$

Podsumowanie

Dane:

x_0	x_1	x_2	$\dots$	x_N
$f(x_0)$	$f(x_1)$	$f(x_2)$	$\dots$	$f(x_N)$

$\leftarrow$ dane



Szukamy:

$w_m^* \in \Pi_m$ (m – ustalony) – wielomian najlepszy, w sensie aproksymacji śr.kw., dopasowany do danych

Krok 1° Znajdź wielomiany ortogonalne $P_0, P_1, \dots, P_m$ stosując związek rekurencyjny $(*)$

Krok 2° Oblicz współczynniki $a_k = \frac{(f, P_k)_N}{(P_k, P_k)_N} = \frac{\sum_{i=0}^{N} f(x_i) P_k(x_i)}{\sum_{i=0}^{N} (P_k(x_i))^2}$ $\leftarrow$ Potrzebne są jedynie wartości wielomianów ortogonalnych w punktach x_k $(0 \leqslant k \leqslant N)$

Krok 3° Rozwiązanie

$$w_m^*(x) = \sum_{k=0}^{m} a_k P_k(x)$$

Uwagi

1° Wartości wielomianu w_m^* dla danego x obliczaj algorytmem Clenshawa.

2°
$$\boxed{w_{m+1}^*(x) = w_m^*(x) + a_{m+1} P_{m+1}(x)}$$

$$w_0^* \to w_1^* \to w_2^* \to w_3^* \to \dots$$

warunek stopu

Twierdzenie

$$\|f - w_m^*\|_2 = \sqrt{\|f\|_2^2 - \sum_{k=0}^{m} \frac{(f, P_k)_N^2}{(P_k, P_k)_N}} \leftarrow \text{błąd średniokwadratowy}$$

Uwaga

Czym jest ostatni z wielomianów optymalnych czyli $w_N^* \in \Pi_N$?

$$\|f - w_N^*\|_2 = \min_{w_N \in \Pi_N} \sqrt{\sum_{k=0}^{N} \left(f(x_k) - w_N(x_k)\right)^2}$$

$$\boxed{w_N^*(x) = L_N(x)} \text{ – N-ty wielomian interpolacyjny } L_N(x_k) = f(x_k) \ (0 \leqslant k \leqslant N)$$

Wniosek

Aproksymację średniokwadratową warto stosować, gdy

$$\underset{\text{stopień wiel. } w_m^*}{m} \ll \underset{N+1 \text{ = liczba obserwacji}}{N}$$