6. Zmienna X ma standardowy rozkład normalny $X \sim N(0,1)$. Niech $\sigma > 0, \mu \in \mathbb{R}$. Znaleźć rozkład zmiennej $Y = \sigma X + \mu$.

def. $X \sim N(0,1)$, tzn. $f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$

$Y = \sigma X + \mu$

$$F_Y(y) = P(Y < y) = P(\sigma X + \mu < y) = P\left(X < \frac{y-\mu}{\sigma}\right) = \int_0^{\frac{y-\mu}{\sigma}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx =$$

$$= \int_0^{\frac{y-\mu}{\sigma}} f_X(x) dx = \left[F_X(x)\right]_0^{\frac{y-\mu}{\sigma}} = F_X\left(\frac{y-\mu}{\sigma}\right) - F_X(0)$$

$$f_Y(y) = F_Y'(y) = \frac{d}{dy} F_X\left(\frac{y-\mu}{\sigma}\right) - \frac{d}{dy} F_X(0) = f_X\left(\frac{y-\mu}{\sigma}\right) \cdot \frac{d}{dy}\left(\frac{y-\mu}{\sigma}\right) - f_X(0) \cdot \frac{d}{dy} 0 =$$

$$= \frac{1}{\sigma} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\left(\frac{y-\mu}{\sigma}\right)^2}{2}} - f_X(0) \cdot 0 = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\left(\frac{y-\mu}{\sigma}\right)^2}{2}}$$

9. Zmienna (X,Y) jest typu ciągłego, zmienne X,Y są niezależne. Wykazać, że $\mathrm{Cov}(X,Y)=0$.

X i Y są niezależne $\iff f_1(x)\cdot f_2(y) = f(x,y)$

- *Dla 2-wymiarowej zmiennej losowej (X,Y) momentem mieszanym rzędu (k,l) nazywamy wartości $m_{kl} = E\left(X^kY^l\right)$ oraz $\mu_{kl} = E\left[(X-EX)^k\cdot(Y-EY)^l\right]$.*

Wartość oczekiwana EX to m_1, wariancja VX to μ_2, moment mieszany μ_{11} to kowariancja zmiennych X,Y, oznaczenie Cov(X,Y). Symbole EX, E(X) oznaczają to samo (wartość oczeki-

$\mathrm{Cov}(X,Y) = E[(X-E(X))^1\cdot(Y-E(Y))^1] = E[(X-E(X))\cdot(Y-E(Y))] =$

$= E[(XY - XE(Y) - YE(X) + E(X)E(Y)] =$ $|E(X+Y) = E(X)+E(Y)|$ $=$

$= E(XY) - E(XE(Y)) - E(YE(X)) + E(E(X)E(Y)) =$ $|E(XY) = E(X)E(Y)|$ $=$

$= E(XY) - E(X)E(E(Y)) - E(Y)E(E(X)) + E(E(X))E(E(Y)) =$ $|E(E(X)) = E(X)|$ $=$

$= E(XY) - E(X)E(Y) - E(Y)E(X) + E(X)E(Y) =$

$= E(XY) - E(XY) - E(XY) + E(XY) = 0$ $\blacksquare$