MDL Lista 9 Krystian Jasionek

1. Przedstaw algorytm, służący do sprawdzania, czy dany graf jest dwudzielny, korzystający z przeglądania grafu metodą w głąb. Złożoność Twojego algorytmu powinna być $O(m+n)$.

Chcemy pokazać, że graf jest dwudzielny, tzn. że jego wierzchołki możemy podzielić na dwa rozłączne zbiory tak, żeby dwa sąsiednie wierzchołki nie leżały w tym samym zbiorze. Możemy to zrobić, np. przechodząc przez kolejne wierzchołki zgodnie z algorytmem DFS i kolorując każdy wierzchołek i jego sąsiadów na dwa różne kolory, np. czerwony i niebieski. Załóżmy, że mamy n wierzchołków i m krawędzi w grafie. Idea algorytmu jest następująca – przechodzimy wgłąb po kolejnych wierzchołkach i kolorujemy je na przemian na czerwono i niebiesko, tzn. jeśli zaczynamy w wierzchołku v to kolorujemy go na niebiesko, potem przechodzimy do jego sąsiada w i kolorujemy go na czerwono, następnie do sąsiada w z, itd., aż przejdziemy przez cały graf. W każdym kroku sprawdzamy też, czy któryś z sąsiadów wierzchołka nie ma tego samego koloru, co ten wierzchołek, wtedy graf nie byłby dwudzielny, bo dwa wierzchołki z dwóch zbiorów miałyby wspólną krawędź. Jeśli taka sytuacja nigdy nie wystąpi, tzn. pomyślnie pokolorowaliśmy graf, to graf jest dwudzielny.

Będziemy potrzebować dwóch tablic:

coloured = [0] * n - tablica, przechowująca informacje o kolorach wierzchołków. Na początku wypełniona jest zerami, co oznacza niepokolorowane wierzchołki. Kolor -1 oznacza czerwony, 1 oznacza niebieski.
neighbours = [0] * $deg(v)$, to tablica list sąsiedztwa poszczególnych wierzchołków.

Algorytm:

```
dfsPaint(v, previousColour) :
    coloured[v] = -previousColour
    for neighbour in neighbours[v]:
        if coloured[neighbour] == coloured[v]:
            return False
        elif dfsPaint(neighbour, coloured[v]) == False:
            return False
    return True
```

Zauważmy, że nasz algorytm, to po prostu DFS, w którym dodaliśmy kolorowanie i sprawdzanie koloru odwiedzanych grafów. Sprawdzanie koloru i kolorowanie to zaglądanie do komórki tablicy i modyfikowanie jej wartości, zatem odbywa się w czasie stałym. Zatem złożoność naszego algorytmu to po prostu złożoność DFS, czyli $O(m+n)$.

3. Pokaż, że graf G jest drzewem wtedy i tylko wtedy gdy dla dowolnej pary wiezchołków $u, v \in G$ w G istnieje dokładnie jedna ścieżka je łącząca.

Udowodnimy to twierdzenie pokazując implikację w obie strony.

$\Rightarrow$) Załóżmy, że G jest drzewem. Wtedy G jest grafem spójnym i acyklicznym. Skoro G jest spójny, to dla każdej pary $u, v \in G$ istnieje ścieżka łącząca u i v. Pokażmy, że dokładnie jedna.

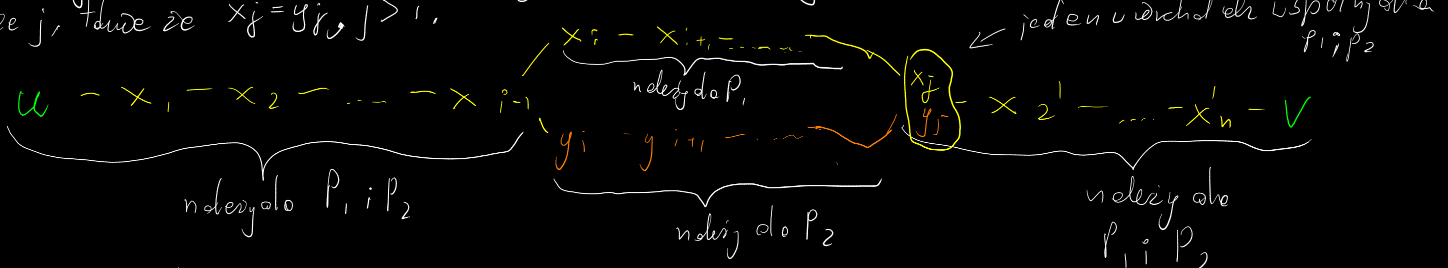
Załóżmy, że istnieją dwie różne ścieżki z u do v, nazwijmy je p_1 i p_2. Zapiszmy, że

$p_1 = u, x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, v$

$p_2 = u, y_1, y_2, \dots, y_m, v$

gdzie x i y to kolejne wierzchołki na ścieżce p_1 i p_2.

Widzimy, że p_1 i p_2 zaczynają i kończą się w tych samych wierzchołkach, ale są różne, zatem istnieje co najmniej jeden taki $x_i \in p_1$, $y_i \in p_2$, że $x_i \neq y_i$. Weźmy najmniejsze i takie, że $x_i \neq y_i$, najmniejsze j, takie że $x_j = y_j$, $j > i$.



Zauważmy, że wtedy pojawia się cykl między x_i a x_j, zatem G nie jest acykliczne, co jest sprzeczne z założeniem. Zatem taka ścieżka jest jedyna.

$\Leftarrow$) Załóżmy, że dla każdej pary wierzchołków $u, v \in G$ istnieje łącząca je ścieżka. Stąd wiemy, że graf G jest spójny. Zauważmy, że skoro każde dwa punkty $u, v \in G$ łączy tylko jedna ścieżka, to G musi być acykliczny. Załóżmy, że $\forall u, v \in G$ $\exists!$ ścieżka łącząca u, v i G jest cykliczny, tzn. że na ścieżce z u do v możemy trafić na cykl - równoległe, które rozdzieli istniejącą ścieżkę na dwie osobne (ilustracja do poprzedniej części dowodu). Wtedy między u i v istnieją dwie różne ścieżki, co jest sprzeczne z założeniem, zatem G jest acykliczny. Skoro G jest spójny i acykliczny, to G jest drzewem. ∎

6. Niech Q_k oznacza graf k-wymiarowej kostki, tzn. zbiór wierzchołków tego grafu tworzą wszystkie k-elementowe ciągi zer i jedynek i dwa wierzchołki są sąsiednie wtedy i tylko wtedy, gdy odpowiadające im ciągi różnią się dokładnie jedną współrzędną. Wykaż, że jest to graf dwudzielny.

Graf jest dwudzielny, gdy wszystkie jego wierzchołki możemy rozdzielić na dwa rozłączne zbiory tak, aby dwa sąsiednie wierzchołki nie leżały w tym samym zbiorze.

Wiemy, że wierzchołki $v \in Q_k$ możemy reprezentować jako k-elementowe ciągi zero-jedynkowe.

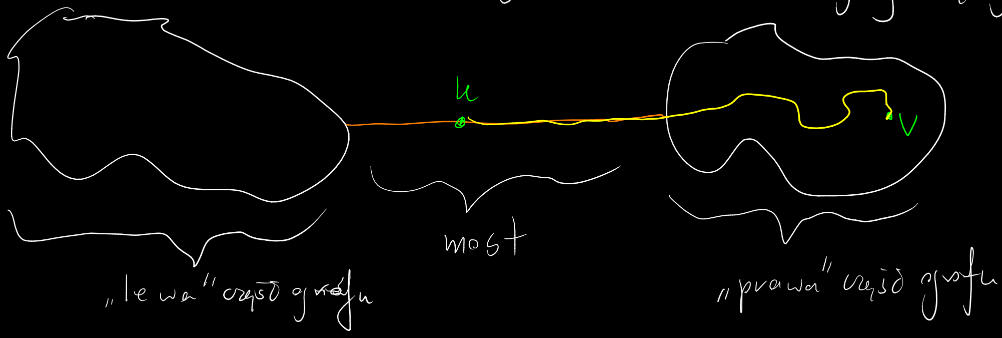
$$V = (b_0, b_1, b_2, \dots, b_{k-1}), \; b_i \in \{0, 1\}$$

Rozdzielmy wierzchołki na takie, które zawierają parzystą liczbę jedynek ($\sum_{i=0}^{k-1} b_i = 2m, m \in \mathbb{N}$) i zawierających nieparzystą liczbę jedynek ($\sum_{i=0}^{k-1} b_i = 2m+1, m \in \mathbb{N}$). Wtedy w zbiorze z wierzchołkami o parzystej liczbie jedynek mamy ciągi zawierające $0, 2, 4, 6, \dots, 2m$ jedynek, czyli nie znajdą się w nim dwa ciągi różniące się na jednej współrzędnej (sąsiedzi). Podobnie mamy dla zbioru wierzchołków o nieparzystej liczbie jedynek, tzn. zawierających ciągi o $1, 3, 5, \dots$ $\dots, 2m+1$ jedynkach, czyli tutaj także nie znajdą się sąsiedzi, bo wszystkie wierzchołki różnią się na dwóch współrzędnych. Zatem stworzyliśmy taki podział wierzchołków z Q_k na dwa rozłączne zbiory, gdzie dwóch sąsiadów nie znajduje się w jednym, czyli Q_k jest dwudzielny.

7. Udowodnij, że graf G jest spójny wtedy i tylko wtedy, gdy przynajmniej dwa grafy z rodziny $\{G_v : v \in V\}$ są spójne, gdzie G_v jest grafem powstałym z G przez usunięcie wierzchołka v i incydentnych z nim krawędzi.

Udowodnimy, pokazując implikację w obie strony.

$\Rightarrow$) Załóżmy, że G jest spójny. Weźmy najdłuższą ścieżkę p z G, prowadzącą od wierzchołka u do v. Spróbujmy usunąć wierzchołek u i sprawdźmy, czy G_u jest spójny. Problem może się pojawić, jeśli u leżałby na moście należącym do G. Przeanalizujmy tę sytuację.



Zauważmy, że skoro u leży na moście rozdzielającym obie składowe grafu G i v leży w „prawej" składowej, wtedy, skoro G jest spójny, istnieje także w, leżący w lewej składowej, z którego istnieje ścieżka do v. Zauważmy, że ścieżka z w do v jest dłuższa, niż s (ścieżka z u do v), zatem s nie jest najdłuższą ścieżką, co jest sprzeczne z założeniem. Zatem wierzchołki na końcach najdłuższej ścieżki nie mogą leżeć na moście, zatem nie spowodują rozspójnienia grafu. Zatem istnieją co najmniej dwa takie G_u, G_v, które są spójne, mianowicie dla u i v – skrajnych wierzchołków w najdłuższej ścieżce w G.

$\Leftarrow$) Załóżmy, że istnieją przynajmniej dwa takie grafy G_u, G_v spójne, należące do rodziny $\{G_w, w \in V\}$. Wtedy wiemy, że dla każdej pary wierzchołków $x, y \in G_u$ istnieje między nimi ścieżka, oraz –||– $x', y' \in G_v$ istnieje między nimi ścieżka.

Zauważmy, że G_u zawiera te same ścieżki między wierzchołkami, co G_v, z wyjątkiem ścieżek między wierzchołkami w i u, z kolei G_v –||– co G_u z wyjątkiem –||– w, v.

Weźmy dowolne dwa wierzchołki x, y należące do G. Mamy cztery przypadki.

1° $x \neq u \wedge y \neq u$. Wtedy $x, y \in G_u$. Wiemy, że G_u jest spójny, zatem ścieżka $x - y$ istnieje w G_u, zatem istnieje w G.

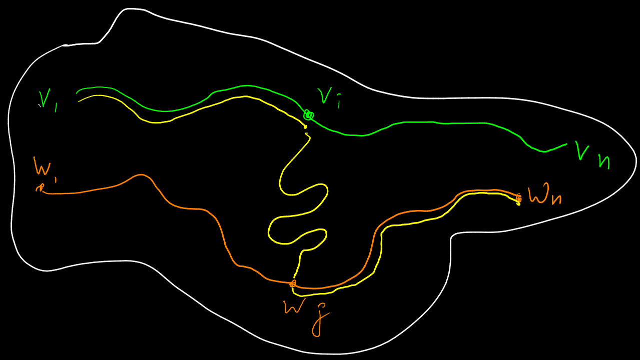
2° $x \neq v \wedge y \neq v$. Wtedy $x, y \in G_v$. Wiemy, że G_v jest spójny, zatem ścieżka $x - y$ istnieje w G_v, oczywiście istnieje w G.

3° $x = u$, $z = v$. Wtedy $x \in G_v$, $y \in G_u$. Przy założeniu, że mamy co najmniej trzy wierzchołki (inaczej teza nie jest spełniona) istnieje $z \neq u$, $z \neq v$, $z \in G_u$, $z \in G_v$. Wtedy istnieje ścieżka $x - z$ w G_v oraz ścieżka $y - z$ w G_u. Zatem istnieje ścieżka $x - z - y$ w grafie G.

Zatem graf G jest spójny.

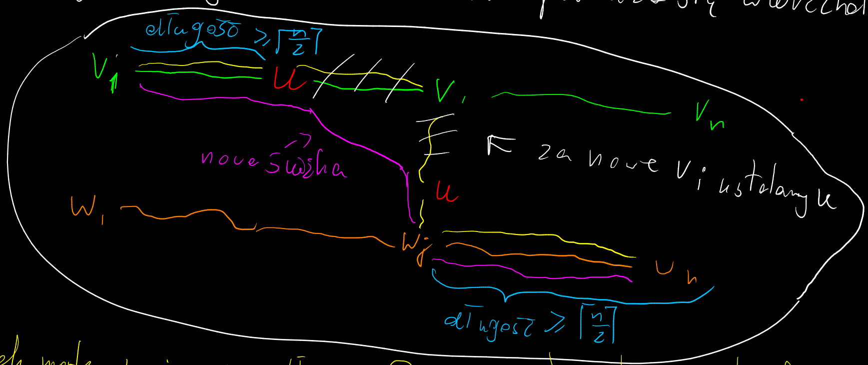
8. Udowodnij, że w grafie spójnym każde dwie najdłuższe ścieżki mają wspólny wierzchołek.

Załóżmy nie wprost, że w grafie spójnym istnieją dwie najdłuższe ścieżki, które nie mają wspólnego wierzchołka. Oznaczmy te ścieżki jako $p_1 = (v_1, v_2, v_3 \dots, v_n)$, $p_2 = (w_1, w_2, w_3 \dots w_n)$.



Wiemy, że graf jest spójny, zatem dla każdej pary wierzchołków istnieje między nimi ścieżka. Weźmy takie $v_i \in S_1$, $w_j \in S_2$ i połączmy je ścieżką. Chcemy połączyć v_1 z w_n ścieżką, przechodzącą przez ścieżkę (v_i, w_j) (żółta ścieżka na rysunku). Nazwijmy taką ścieżkę P. Istnieje ryzyko, że na odcinku $v_i - w_j$ pojawią się wierzchołki, które wcześniej wystąpiły na odcinku v_1, v_i. Wtedy możemy ustalić, że naszym v_i będzie ten powtórzony wierzchołek. Taką operację możemy powtarzać, aż żadne wierzchołki na odcinku $v_1 - w_n$ nie będą się powtarzać. Analogiczną procedurę możemy przeprowadzić dla odcinka $v_j - w_n$. W ten sposób możemy znaleźć ścieżkę $v_i - w_j$, która nie zawiera żadnych powtarzających się wierzchołków z S_1 oraz S_2.

Zilustrujmy to dla przykładu, gdzie na odcinku powtarza się wierzchołek u.



Odcinek między u i u ma długość 0, po prostu odcinamy odcinek między powtórzeniami.

Zauważmy, że punkt v_i podzielił S_1 na dwie części, podobnie w_j podzielił S_2. Weźmy dłuższą część S_1 oraz dłuższą część S_2 i połączmy je ścieżką P. Otrzymamy nową ścieżkę (nie powtarzamy wierzchołków). Zauważmy, że skoro braliśmy dłuższe fragmenty podzielonych S_1 oraz S_2, to każdy z tych fragmentów jest długości co najmniej $\lceil \frac{n}{2} \rceil$, gdzie n to długość S_1, S_2. Wiemy, że odcinek $v_i - w_j$ ma długość co najmniej 1, bo nie powtarza żadnych wierzchołków.
Zatem cała ścieżka P ma długość $\geq 2 \cdot \lceil \frac{n}{2} \rceil + 1 \geq n+1$, zatem jest ścieżką dłuższą niż S_1, S_2. Ale S_1 i S_2 to najdłuższe ścieżki w grafie, zatem mamy sprzeczność. Stąd wiemy, że każde dwie najdłuższe ścieżki muszą mieć wspólny wierzchołek.

9. Wykaż, że przynajmniej jeden z grafów $G = (V, E)$ i $\bar{G}$ ($\bar{G}$ jest dopełnieniem grafu G) jest spójny. Dopełnienie $\bar{G} = (V, E')$ grafu G zdefiniowane jest jako graf (V, E') taki, że $\{u, v\} \in E' \Leftrightarrow \{u, v\} \notin E$.

Rozpatrzmy graf G i jego dopełnienie $\bar{G}$. Mamy dwa przypadki:

1° Oba grafy są spójne – wtedy teza jest spełniona.

2° Jeden z grafów, bez straty ogólności powiedzmy, że G (rozumowanie przebiega identycznie dla $\bar{G}$) nie jest spójny. Wtedy w grafie G występują spójne składowe $G_1, G_2, \dots G_n$, pomiędzy elementami których nie ma krawędzi. Z definicji dopełnienia wiemy jednak, że te krawędzie znajdują się w $\bar{G}$. Pokażmy, że wtedy $\bar{G}$ jest spójny.

Weźmy dowolne dwa wierzchołki $v, w \in \bar{G}$. Wiemy, że G i $\bar{G}$ mają wspólny zbiór wierzchołków, zatem możemy posługiwać się składowymi (niekoniecznie spójnymi) $G_1, G_2 \dots G_n$ w analizie grafu $\bar{G}$. Wtedy mamy dwa przypadki:

a) v i w leżą w dwóch różnych składowych, tzn. $v \in G_i$, $w \in G_j$. Wiemy, że w grafie G między tymi wierzchołkami nie istniała krawędź, zatem istnieje krawędź (v, w) w $\bar{G}$. Zatem istnieje między nimi ścieżka w $\bar{G}$.

b) v i w leżą w tej samej wspólnej składowej – G_i. Zauważmy, że musi istnieć wtedy druga spójna składowa – G_j, inaczej $G = G_i$, zatem byłby spójny, co jest sprzeczne z założeniem. W takim razie weźmy pewny $x \in G_j$. Wiemy, że w G nie istnieje krawędź $v-x$ oraz $w-x$, zatem takie krawędzie istnieją w G'. Zatem wiemy, że w G' istnieje ścieżka $v-x-w$, zatem ścieżka między v i w.

Zatem $\bar{G}$ jest spójny.