L6.3. 1 punkt Sformułuj i udowodnij *algorytm Clenshawa* obliczania wartości wielomianu

$$w(x) = \frac{1}{2}c_0T_0(x) + c_1T_1(x) + c_2T_2(x) + \ldots + c_nT_n(x)$$

w punkcie x, gdzie $c_0, c_1, \ldots, c_n$ są danymi stałymi, a T_n oznacza n-ty *wielomiany Czebyszewa.*

Weźmy $w(x) = \frac{1}{2}c_0T_0(x) + c_1T_1(x) + \ldots + c_nT_n(x)$. Wiemy, że

$T_0(x) = 1$
$T_1(x) = x$
$T_k(x) = 2xT_{k-1}(x) - T_{k-2}(x)$

Niech B_k będzie k-tym wyrazem algorytmu Clenshawa.

Dla $W(x) = \sum_{k=0}^{n}{}' b_k T_k(x)$

$B_{n+2}(x) = B_{n+1}(x) = 0$ ← dwa początkowe wyrazy; rekurencją schodzimy do B_0.

$B_k(x) = 2xB_{k+1}(x) + B_{k+2}(x) + b_k$ dla $k = n, n-1, \ldots, 0$ $\Rightarrow b_k = B_k - 2xB_{k+1} + B_{k+2}$

Pokażemy, że $W(x) = \frac{B_0 - B_2}{2}$ $\boxed{b_k = B_k - 2xB_{k+1} + B_{k+2}}$. Dla wygody pomijamy „$x$" w zapisie $B_k(x)$.

rozbijamy na trzy sumy i spróbujemy zredukować możliwie najwięcej wyrazów

bo $b_k = B_k - 2xB_{k+1} + B_{k+2}$

$$W(x) = \sum_{k=0}^{n}{}' b_kT_k(x) = \left(\sum_{k=0}^{n}{}' (B_k - 2xB_{k+1} + B_{k+2})\right) \cdot T_k(x) = \sum_{k=0}^{n}{}' B_kT_k(x) - 2x\sum_{k=0}^{n} B_{k+1}T_k(x) + \sum_{k=0}^{n}{}' B_{k+2}T_k(x) =$$

wyciągam początkowe wyrazy z każdej z sum z pierwszej, 2 z drugiej, 1 z trzeciej; wyciągamy ostatnie wyrazy z ostatnich dwóch sum; zerują się, bo $B_{n+2} = B_{n+1} = 0$

$$= \frac{1}{2}B_0T_0(x) + B_1T_1(x) + B_2T_2(x) - \frac{2}{2}xB_1T_0(x) + \frac{1}{2}B_2T_0(x) + 2xB_2T_1(x) - \sum_{k=3}^{n} B_kT_k(x) - 2x\sum_{k=2}^{n-1} B_{k+1}T_k(x) + \sum_{k=1}^{n-2} B_{k+2}T_k(x) - \underbrace{2xB_{n+1}T_n(x)}_{=0} + \underbrace{B_{n+2}T_n(x)}_{=0} + \underbrace{B_{n+1}T_{n-1}(x)}_{=0} =$$

uzgadniamy indeksy sum

$$= \frac{1}{2}B_0T_0(x) + B_1T_1(x) - xB_1T_0(x) + \frac{1}{2}B_2T_0(x) + \sum_{k=3}^{n} B_kT_k(x) - 2x\sum_{k=3}^{n} B_kT_{k-1}(x) + \sum_{k=3}^{n} B_kT_{k-2}(x) - 2xB_2T_1(x) + B_2T_2(x) =$$

łączymy sumy w jedną

$$= \frac{1}{2}B_0T_0(x) + B_1T_1(x) - xB_1T_0(x) + \frac{1}{2}B_2T_0(x) + \sum_{k=3}^{n} B_k \underbrace{\left(T_k(x) - 2xT_{k-1}(x) + T_{k-2}(x)\right)}_{=0 \text{ ← z definicji: } T_k = 2xT_{k-1} + T_{k-2}} - 2xB_2T_1(x) + B_2T_2(x) =$$

$T_2 = 2xT_1 - T_0$

$$= \frac{1}{2}B_0 + B_1T_1(x) - xB_1T_0(x) + B_2T_2(x) - 2xB_2T_1(x) + \frac{1}{2}B_2T_0(x) =$$

$$= \frac{1}{2}B_0 + \cancel{B_1(x)} - \cancel{xB_1} + \cancel{2x^2}B_2 - B_2 - \cancel{2x^2B_2} + \frac{1}{2}B_2 =$$

$$= \frac{1}{2}B_0 - \frac{1}{2}B_2 = \frac{B_0 - B_2}{2} \quad \blacksquare$$

Zatem wystarczy obliczyć B_0 oraz B_2 znając wartość x, by policzyć wartość $W(x)$.

ANL Lista 6 Krystian Jasionek

L6.1. 1 punkt Uzasadnij, że *schemat Hornera* jest algorytmem numerycznie poprawnym.

Weźmy dowolny wielomian $W(x)$ i przeprowadźmy na nim schemat Hornera.

$$W(x) = \alpha_n x^n + \alpha_{n-1} x^{n-1} + \ldots + \alpha_1 x^1 + \alpha_0 x^0$$

$$\hat{W}(x) = ((\ldots(\alpha_n x(1+\delta_n)(1+\varepsilon_n) + \alpha_{n-1})(1+\varepsilon_{n-1})x(1+\delta_{n-1}) + \alpha_{n-2})\ldots)(1+\varepsilon_1)x(1+\delta_1) + \alpha_0(1+\varepsilon_0)(1+\delta_0)$$

$(1+\delta_i)$ — błąd przy i-tym mnożeniu

$(1+\varepsilon_i)$ — błąd przy i-tym dodawaniu

$$(1+\varepsilon_n) = (1+\delta_0) = 1$$

Zobaczmy jak duży jest błąd. Wymnóżmy nawiasy do postaci normalnej wielomianu.

$$\hat{W}(x) = \alpha_n x^n (1+\delta_n)(1+\varepsilon_n)(1+\varepsilon_{n-1})\ldots(1+\varepsilon_0)(1+\delta_0) + \alpha_{n-1}x^{n-1}(1+\delta_{n-1})(1+\varepsilon_{n-1})(1+\delta_{n-2})\ldots + \alpha_0(1+\varepsilon_0)(1+\delta_0)$$

$$\hat{W}(x) = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i x^i \prod_{j=0}^{i}(1+\varepsilon_j)(1+\delta_j)$$, wiemy że $|\varepsilon_i|, |\delta_i| \leq 2^{-t}$, zatem mamy powodność

$$1+E_i = \prod_{j=0}^{i}(1+\varepsilon_j)(1+\delta_j)$$, gdzie z tw. o kumulacji błędów, gdzie $(1+\delta_0) = 1+\varepsilon_n = 1$

$$|E_i| \leq 2i \cdot 2^{-t}$$, zatem

$$\hat{W}(x) = \sum_{i=0}^{n} x^i \hat{\alpha}_i$$, gdzie $\hat{\alpha}_i = \alpha_i(1+E_i)$ oraz $|E_i| \leq 2^{-t} 2i$, czyli mamy mało

zaburzony wynik dla mało zaburzonych danych. Zatem schemat Hornera jest numerycznie poprawny.

L6.3. 1 punkt Sformułuj i udowodnij *algorytm Clenshawa* obliczania wartości wielomianu

$$w(x) = \frac{1}{2}c_0T_0(x) + c_1T_1(x) + c_2T_2(x) + \ldots + c_nT_n(x)$$

w punkcie x, gdzie $c_0, c_1, \ldots, c_n$ są danymi stałymi, a T_n oznacza n-ty *wielomiany Czebyszewa*.

Weźmy $w(x) = \frac{1}{2}c_0T_0(x) + c_1T_1(x) + \ldots + c_nT_n(x)$. Wiemy, że

$T_0(x) = 1$

$T_1(x) = x$

$T_k(x) = 2xT_{k-1}(x) - T_{k-2}(x)$

Niech B_k będzie k-tym wyrazem algorytmu Clenshawa.

Dla $W(x) = \sum_{k=0}^{n} b_k T_k(x)$

$$B_{n+2} = B_{n+1} = 0$$

$$B_k = 2xB_{k+1} - B_{k+2} + b_k \quad \text{dla } k = n, n-1, \ldots, 0$$

Pokażemy, że $W(x) = \dfrac{B_0 - B_2}{2}$ $\quad \boxed{b_k = B_k - 2xB_{k+1} + B_{k+2}}$

$$\sum_{k=0}^{n}{}' b_k T_k(x) = \left(\sum_{k=0}^{n}{}' (B_k - 2xB_{k+1} + B_{k+2})\right) \cdot T_k(x) = \sum_{k=0}^{n}{}' B_k T_k(x) - 2x\sum_{k=0}^{n} B_{k+1} T_k(x) + \sum_{k=0}^{n}{}' B_{k+2} T_k(x) =$$

$$= \frac{1}{2} B_0 T_0(x) + B_1 T_1(x) + B_2 T_2(x) - \frac{2}{2} x B_1 T_0(x) + \frac{1}{2} B_2 T_0(x) + 2x B_2 T_1(x) + \sum_{k=3}^{n} B_k T_k(x) - 2x \sum_{k=2}^{n-1} B_{k+1} T_k(x) + \sum_{k=1}^{n-2} B_{k+2} T_k(x) - \underbrace{2x B_{n+1} T_n(x)}_{=0} + \underbrace{B_{n+2} T_n(x)}_{=0} + \underbrace{B_{n+1} T_n(x)}_{=0} =$$

$$= \frac{1}{2} B_0 T_0(x) + B_1 T_1(x) - x B_1 T_0(x) + \frac{1}{2} B_2 T_0(x) + \sum_{k=3}^{n} B_k T_k(x) - 2x \sum_{k=3}^{n} B_k T_{k-1}(x) + \sum_{k=3}^{n} B_k T_{k-2}(x) - 2x B_2 T_1(x) + B_2 T_2(x) =$$

$$= \frac{1}{2} B_0 T_0(x) + B_1 T_1(x) - x B_1 T_0(x) + \frac{1}{2} B_2 T_0(x) + \sum_{k=3}^{n} B_k \underbrace{\left(T_k(x) - 2x T_{k-1}(x) + T_{k-2}(x)\right)}_{=0} - 2x B_2 T_1(x) + B_2 T_2(x) =$$

$$= \frac{1}{2} B_0 + B_1 T_1(x) - x B_1 T_0(x) + B_2 \underset{T_2 = 2xT_1 - T_0}{T_2(x)} - 2x B_2 T_1(x) + \frac{1}{2} B_2 T_0(x) =$$

$$= \frac{1}{2} B_0 + \cancel{B_1(x)} - \cancel{x B_1} + \cancel{2x^2 B_2} - B_2 - \cancel{2x^2 B_2} + \frac{1}{2} B_2 =$$

$$= \frac{1}{2} B_0 - \frac{1}{2} B_2 = \frac{B_0 - B_2}{2} \quad \blacksquare$$

Zatem wystarczy obliczyć B_0 oraz B_2 znając wartość x, by policzyć wartość $W(x)$.

L6.4. $\boxed{\text{2 punkty}}$ Niech T_n $(n = 0, 1, \ldots)$ oznacza n-ty wielomian Czebyszewa.

(a) Podaj postać potęgową wielomianu T_6.

(b) Jakimi wzorami wyrażają się współczynniki wielomianu T_n przy x^n i x^{n-1}?

(c) Korzystając z faktu, że dla dowolnego x z przedziału $[-1, 1]$ n-ty $(n \geq 0)$ wielomian Czebyszewa wyraża się wzorem $T_n(x) = \cos(n \arccos x)$:

i. sprawdź, że $|T_n(x)| \leq 1$ $\quad (-1 \leq x \leq 1;\ n \geq 0)$;

ii. wyznacz wszystkie *punkty ekstremalne* n-tego wielomianu Czebyszewa, tj. rozwiązania równania $|T_n(x)| = 1$;

iii. udowodnij, że wielomian Czebyszewa T_{n+1} $(n \geq 0)$ ma $n+1$ zer rzeczywistych, pojedynczych, leżących w przedziale $(-1, 1)$.

a) $T_0 = 1 \quad T_1 = x \qquad T_n = 2x T_{n-1}(x) - T_{n-2}(x)$

$T_2(x) = 2xT_1 - T_0 = 2x^2 - 1$

$T_3 = 2xT_2 - T_1 = 4x^3 - 3x$

$T_4 = 2xT_3 - T_2 = 8x^4 - 6x^2 - 2x^2 + 1 = 8x^4 - 8x^2 + 1$

$T_5 = 2xT_4 - T_3 = 16x^5 - 16x^3 + 2x - 4x^3 + 3x = 16x^5 - 20x^3 + 5x$

$T_6 = 2xT_5 - T_4 = 32x^6 - 40x^4 + 10x^2 + 10x^2 - 8x^4 + 8x^2 - 1 = 32x^6 - 48x^4 + 18x^2 - 1$

b) Pokażemy, że $T_n(x) = 2^{n-1} x^n + 0x^{n-1} + Q(x)$ przez indukcję dla $n \geq 1$.

Podstawa: $T_1 = x = x \cdot 2^0 + 0 \cdot x^0$ ✓ $\quad T_2 = 2x^2 - 1 = 2^1 x^2 + 0x - 1$ ✓

Krok: Załóżmy, że dla $n_0 \leq n$ $T_{n_0}(x) = 2^{n_0 - 1} x^{n_0} + 0x^{n_0 - 1} + Q(x)$. Pokażmy, że wtedy teza jest spełniona dla $n+1$.

$$T_{n+1} = 2xT_n - T_{n-1} \overset{\text{z zał. ind.}}{=} 2x(x^n \cdot 2^{n-1} + 0 \cdot x^{n-1} + Q(x)) - (x^{n-1} \cdot 2^{n-2} + 0x^{n-2} + Q'(x))$$

$$T_{n+1} = x^{n+1} 2^n + 0x^n + Q(x) - x^{n-1} 2^{n-2} + 0x^{n-2} + Q'(x) \ ✓ \quad \blacksquare$$

c) Dla $x \in [-1, 1]$, $n \geq 0$ $\quad T_n(x) = \cos(n \arccos x)$

i) Pokaż, że $|T_n(x)| \leq 1$.

Zauważmy, że $-1 \leq \cos(n \cdot \arccos(x)) \leq 1$, zatem $|T_n(x)| \leq 1$.

ii) $|T_n(x)| = |\cos(n \cdot \arccos(x))|$

$\Downarrow$

$\cos(n \cdot \arccos(x)) = 1 \quad \vee \quad \cos(n \cdot \arccos(x)) = -1$

$\Downarrow \qquad\qquad \Downarrow$

$n \cdot \arccos(x) = 0 + 2k\pi \qquad n \cdot \arccos(x) = \pi + 2k\pi$

$\arccos(x) = \frac{2k\pi}{n} \qquad \arccos(x) = \frac{1+2k}{n}\pi$

$x = \cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right) \qquad x = \cos\left(\frac{1+2k}{n}\right)\pi$, zatem $x = \cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)$

iii) $T_{n+1}(x) = \cos((n+1)\arccos(x)) = 0$, $x \in (-1,1)$

$$\Updownarrow$$

$$(n+1)\arccos(x) = \frac{\pi}{2} + k\pi$$

$$\arccos(x) = \frac{\pi + 2k\pi}{2n+2}$$

$x = \cos\left(\frac{\frac{1}{2}+k}{n+1}\pi\right)$, ale zauważmy, że wszystkie wartości cosinusa leżą między $k\pi : k\pi + \pi$, poza tym przedziałem mamy powtórzenia. Stąd chcemy, żeby

$$0 < \frac{\frac{1}{2}+k}{n+1} \leq 1$$

$$0 < \frac{1}{2} + k \leq n+1$$

$$0 < k \leq n + \frac{1}{2}$$

$0 < k \leq n$, czyli mamy co najmniej $n+1$ rozwiązań oraz co najwyżej $n+1$ rozwiązań, bo $T_{n+1}(x)$ jest wielomianem stopnia $n+1$. Czyli mamy $n+1$ rozwiązań.

Nieosiągalne wartości -1 oraz 1, bo $\frac{\frac{1}{2}+k}{n+1} \notin \mathbb{Z}$, $\cos\left(\frac{\frac{1}{2}+k}{n+1}\right) \in [-1,1]$, zatem $x \in (-1,1)$.

L6.8. 1 punkt Niech będzie $f(x) = 2020x^5 + 1977x^4 - 1410x^3 + 1945x - 1791$.

(a) Wyznacz wielomian stopnia ≤ 5 interpolujący funkcję f w punktach $-2020, -1945, -1410, 966, 1791, 2020$.

(b) Wyznacz wielomian drugiego stopnia, interpolujący funkcję f w punktach $-1, 0, 1$.

a) Wiemy, że rozwiązanie interpolacji Lagrange'a jest jednoznaczne i dla n punktów dostajemy wielomian interpolacyjny $n-1$ stopnia. Stąd otrzymujemy wielomian

$$L_6(x) = f(x)$$

b)

x	-1	0	1
y	-2369	-1791	2741

$$\lambda_0 = \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} = \frac{(x-0)(x-1)}{(-1-0)(-1-1)} = \frac{1}{2}(x-0)(x-1)$$

$$\lambda_1 = \frac{(x+1)(x-1)}{1(-1)} = -(x+1)(x-1)$$

$$\lambda_2 = \frac{(x+1)x}{(1+1)1} = \frac{(x+1)x}{2}$$

$$L_3(x) = -\frac{2369}{2}(x-1)x + 1791(x+1)(x-1) + 2741\frac{(x+1)x}{2}$$

$$L_3(x) = -\frac{2369}{2}x^2 + \frac{2369}{2}x + 1791x^2 - 1791 + \frac{2741}{2}x^2 + \frac{2741}{2}x$$

$$L_3(x) = 1977x^2 + 2555x - 1791$$

L6.7. 1 punkt Podaj postać Lagrange'a wielomianu interpolacyjnego dla danych

	0	1	2	3
x_k	-3	-2	0	4
y_k	0	2	6	-10

.

$$\lambda_0 = \frac{(x+2)x(x-4)}{(-1)(-3)(-7)}$$

$$\lambda_1 = \frac{(x+3)x(x-4)}{1(-2)(-6)}$$

$$\lambda_2 = \frac{(x+3)(x+2)(x-4)}{3\cdot 2(-4)}$$

$$\lambda_3 = \frac{(x+3)(x+2)x}{7\cdot 6\cdot 4}$$

$$L_n(x) = \sum_{k=0}^{n} y_k \lambda_k$$

$$\lambda_k = \prod_{\substack{i=0\\ i\neq k}}^{n} \frac{(x-x_i)}{(x_k-x_i)}$$

$$L_3(x) = 0 + 2\frac{(x+3)x(x-4)}{(-2)(-6)} + 6\frac{(x+3)(x+2)(x-4)}{3\cdot 2\cdot(-4)} - 10\frac{(x+3)(x+2)x}{7\cdot 6\cdot 4}$$

L6.6. $\boxed{\text{1 punkt}}$ Udowodnij istnienie i jednoznaczność rozwiązania zadania interpolacyjnego Lagrange'a.

Weźmy zbiór punktów $((x_0, y_0), (x_1, y_1) \dots (x_n, y_n))$. Pokażmy, że istnieje dla niego rozwiązanie zad. interpolacyjnego.

$$\lambda_i(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$$

$$\lambda_i(x_i) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n} \frac{x_i - x_j}{x_i - x_j} = 1$$

$$\lambda_i(x_k) \prod_{\substack{j=0 \\ i \neq j}}^{n} \frac{x_k - x_j}{x_i - x_j} = 0 \text{, bo istnieje } k = j$$

Widzimy też, że λ_i jest wielomianem stopnia $\leq n$, bo jest iloczynem n czynników $(x - x_j)$.

Mamy zatem punkty

		x_0	x_1	$\dots$	x_n
y_0	$\lambda_0(x)$	y_0	0	$\dots$	0
y_1	$\lambda_1(x)$	0	y_1	$0 \dots$	0
$\vdots$		0	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$ 0
y_n	$\lambda_n(x)$	0	0	$\dots$ 0	y_n

Każdy z wielomianów λ_i spełnia warunek interpolacyjny w punkcie x_i, a w pozostałych się zeruje i nie wpływa na wynik.

Zatem mamy

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i \lambda_i(x)$$ spełnia wszystkie warunki interpolacji.

Zatem takie $L_n(x)$ istnieje.

Pokażmy, że jest jedyny. Załóżmy, że istnieją takie $W(x)$, $Q(x)$ – wielomiany co najwyżej n-tego stopnia, t. że dla $i = 0, 1 \dots n$ $W(x_i) = Q(x_i)$, będące rozwiązaniami zadania interpolacyjnego dla pewnej funkcji.

Wtedy możemy ułożyć $D(x)$ t. że

$D(x) = W(x) - Q(x)$ Wiemy, że $D(x)$ – wielomian co najwyżej n-tego stopnia, bo jest różnicą wielomianów c.n. n-tego stopnia.

W szczególności $D(x_i) = W(x_i) - Q(x_i) = 0$. Stąd możemy powiedzieć, że $D(x)$ ma co najmniej $n+1$ pierwiastków, ale jest wielomianem co najwyżej n-tego stopnia, zatem

$$D(x) = 0 \text{, czyli}$$

$$W(x) = Q(x)$$

L6.5. $\boxed{\text{2 punkty}}$ Wykaż, że dla dowolnych $k, l \in \mathbb{N}$ oraz $x \in \mathbb{R}$ zachodzi

$$T_{kl}(x) = T_k(T_l(x)).$$

Wykorzystaj podaną zależność do opracowania **szybkiego algorytmu** wyznaczania wartości wielomianu Czebyszewa **wysokiego** stopnia niebędącego liczbą pierwszą.

Wzór $T(n) = \cos(n \arccos(x))$ działa tylko dla $|x| \le 1$. Wyznaczmy wzór dla pozostałych.

$$T_{n+2}(x) = 2x T_{n+1}(x) - T_n(x) \quad , \quad T_0 = 1 \quad , \quad T_1(x) = x$$

$$y^2 - 2xy - 1 = 0$$

$$y_1 = \frac{2x - \sqrt{4x^2 - 4}}{2} \qquad y_2 = \frac{2x + \sqrt{4x^2-4}}{2}$$

$$y_1 = x - \sqrt{x^2-1} \qquad y_2 = x + \sqrt{x^2-1} \qquad T_n = \alpha\left(x - \sqrt{x^2-1}\right)^n + \beta\left(x + \sqrt{x^2-1}\right)^n$$

$$\begin{cases} 1 = \alpha\left(x-\sqrt{x^2-1}\right)^0 + \beta\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)^0 \implies \beta = 1-\alpha \\ x = \alpha\left(x - \sqrt{x^2-1}\right) + \beta\left(x + \sqrt{x^2-1}\right)^1 \end{cases}$$

$$\cancel{x} = \cancel{\alpha x} - \alpha\sqrt{x^2-1} + \cancel{x} + \sqrt{x^2-1} - \cancel{\alpha x} - \alpha\sqrt{x^2-1}$$

$$2\alpha \cancel{\sqrt{x^2-1}} = \cancel{\sqrt{x^2-1}}$$

$$\alpha = \frac{1}{2} \qquad \beta = \frac{1}{2}$$

$$T_n = \begin{cases} \dfrac{\left(x + \sqrt{x^2-1}\right)^n + \left(x - \sqrt{x^2-1}\right)^n}{2} &, |x| \ge 1 \\ \cos(n \arccos(x)) &, |x| \le 1 \end{cases}$$

Możemy przedstawić $\dfrac{\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)^n + \left(x - \sqrt{x^2-1}\right)^n}{2}$ inaczej.

Dla $x \ge 1$ $\quad x = \cosh(\theta) \implies \theta = \cosh^{-1}(x)$

$\cosh(\theta)^2 - \sinh(\theta)^2 = 1$

$\cosh(\theta) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$

$\sinh(\theta) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$

$$T_n(\cosh(\theta)) = \frac{\left(\cosh(\theta) + \sqrt{\cosh^2\theta - 1}\right)^n + \left(\cosh(\theta) + \sqrt{\cosh^2(\theta) - 1}\right)^n}{2}$$

$$T_n(\cosh\theta) = \frac{(\cosh(\theta) + \sinh)^n + (\cosh\theta - \sinh(\theta))^n}{2}$$

$$T_n(\cosh(\theta)) = \frac{\left(\frac{e^\theta + e^{-\theta} + e^{\theta} - e^{-\theta}}{2}\right)^n + \left(\frac{e^\theta + e^{-\theta} - e^{\theta} + e^{-\theta}}{2}\right)}{2} = \frac{e^{\theta n} + e^{-\theta n}}{2}$$

$$T_n(\cosh(\theta)) = \cosh(\theta n) = \cosh(n \cosh^{-1}(x))$$

Dla $x \le 1$ $\quad x = -\cosh(\theta) \implies \theta = \operatorname{arccosh}(-x)$

$$T_n(-\cosh(\theta)) = \frac{(-\cosh(\theta) + \sinh(\theta))^n + (-\cosh(\theta) - \sinh(\theta))^n}{2}$$

$$T_n(-\cosh(\theta)) = (-1)^n\left(\frac{e^{-\theta n} + e^{\theta n}}{2}\right) = (-1)^n \cosh(\theta n)$$

$$T_n(-\cosh(\theta)) = (-1)^n \cosh(n \operatorname{arccosh}(-x))$$

Pokażmy, że $T_{nk}(x) = T_n(T_k(x))$

① $|x| \le 1$

$$T_k(T_n(x)) = \cos(n \cancel{\cos^{-1}}(\underbrace{\cancel{\cos}(k \cos^{-1}(x))}_{[-1,1]})))$$

$$= \cos(nk \cos^{-1}(x)) = T_{nk}(x) \ \checkmark$$

② $x \ge 1$

$$T_n(T_k(x)) = \cosh(n \cancel{\cosh^{-1}}(\underbrace{\cancel{\cosh}(k \cdot \cosh^{-1}(x))}_{[1,+\infty]})))$$

$$= \cosh(nk \cosh^{-1}(x)) = T_{nk}(x) \ \checkmark$$

③ $x \le -1$

$$T_k(x) = (-1)^k \cosh(k \cosh^{-1}(-x))$$

Wiemy, że $T_n(-x) = (-1)^n T_n(x)$

Z wykładu

$T_n(-x) = (-1)^n T_n(x)$

I k - parzyste $\qquad -x \ge 1$

$$T_n(T_k(x)) = \cosh(n \cancel{\cosh^{-1}}(\underbrace{\cancel{\cosh}(k \cosh^{-1}(-x))}_{\in [1,+\infty]})))$$

k parzyste

$$= \cosh(nk \cosh^{-1}(-x)) = T_{nk}(-x) = (-1)^{nk} T_{nk}(x) = T_{nk}(x) \ \checkmark$$

II k - nieparzyste

k nieparzyste

$$T_n(T_k(x)) = (-1)^n \cosh(n \cosh^{-1}(-(-1)^k \cosh(k \cosh^{-1}(-x))))$$

$$= (-1)^n \cosh(n \cancel{\cosh^{-1}}(\cancel{\cosh}(k \cosh^{-1}(-x))))$$

$$= (-1)^n \big(\underbrace{\cosh(nk \cosh^{-1}(-x))}_{\text{bo } -x \geq 1}\big)$$

$$= (-1)^n T_{nk}(-x) = (-1)^n (-1)^{nk} T_{nk}(x)$$

$$= (-1)^{\overset{\uparrow}{n(1+k)}} T_{nk}(x)$$

parzyste

$$= T_{nk}(x) \quad \checkmark$$

Szkic algorytmu.

Dla dużych n przybliżenie $T_n(x)$ możemy rozbić n na czynniki pierwsze. Mamy wtedy $T_n(x) = T_{p_1}(T_{p_2}(\dots T_{p_i}(x))\dots)$, gdzie p_i to liczby pierwsze. Wtedy możemy oszacować złożoność złożonego takiego algorytmu. W najgorszym przypadku n to liczba pierwsza, wtedy mamy złożoność identyczną jak dla wolniejszego algorytmu. Inaczej najgorszy przypadek jest, gdy $n = 2p$, gdzie p to l. pierwsza. Wtedy mamy $T_2(T_p(x))$. Mamy wtedy obliczenie $T_m(x)$ dla największych możliwych m. Oszacujemy złożoność owego tego przypadku jako

$$\sqrt{n} + \log_2 n \cdot \varphi^{\frac{n}{2}}$$

wyznaczanie dzielników pierwszych — ilość zagnieżdżeń — złożoność obliczania T dla danego parametru zagnieżdżenia.

Złożoność zwykłego algorytmu to $\Theta(\varphi^n)$.

$$\log_2 n \cdot \varphi^{\frac{n}{2}} \leq \varphi^n \quad / : \varphi^{\frac{n}{2}}$$

$$\log_2 n \leq \varphi^{\frac{n}{2}}, \text{ zatem}$$

jest to algorytm szybszy.

```
n = 26
x = 1.5
```

```
Fast: 36840651123.5    Calls: 761
Slow: 36840651123.5    Calls: 392835
```

L6.9. 1 punkt Wykaż, że dla wielomianów

$$\lambda_k(x) := \prod_{j=0, j\neq k}^{n} \frac{x - x_j}{x_k - x_j} \qquad (k = 0, 1, \dots, n)$$

zachodzi

a) $\sum_{k=0}^{n} \lambda_k(x) \equiv 1$, b) $\sum_{k=0}^{n} \lambda_k(0) x_k^j = \begin{cases} 1 & (j = 0), \\ 0 & (j = 1, 2, \dots, n). \end{cases}$

Wiemy, że $W(x) = \sum_{k=0}^{n} y_k \lambda_k(x)$, gdzie $y_k = f(x_k)$.

a) Weźmy funkcję $f(x) = 1$. Wtedy mamy $\forall x \in \mathbb{R}\ f(x) = 1$, zatem $W(x) = \sum_{k=0}^{n} \lambda_k(x)$. Mamy $f(x)$ - wielomian 0-wego stopnia i $n+1$ punktów, czyli z jednoznaczności rozwiązania zadania interpolacyjnego $W(x) \equiv 1$, zatem $\sum_{k=0}^{n} \lambda_k(x) \equiv 1$ ■

b) Weźmy funkcję $f(x)$ i $n+1$ punktów $x_0 \dots x_n$. Wtedy $W_n(x)$ - wielomian interpolacyjny f n-tego stopnia. Rozpatrzmy dwa przypadki.

1° $j = 1 \dots n$. Weźmy $f(x) = x^j$. Wtedy mamy $W_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \lambda_k y_k = \sum_{k=0}^{n} \lambda_k f(x_k) \overset{\text{z jednoznaczności rozwiązania zadania interpolacyjnego}}{=} \sum_{k=0}^{n} \lambda_k x_k^j = f(x)$. Stąd

$$x^j = \sum_{k=0}^{n} x_k^j \lambda_k, \text{ w szczególności dla } x = 0$$

$$0 = \sum_{k=0}^{n} x_k^j \lambda_k(0)$$

x^0 wstawienie zera zbiega do jedynki, wszędzie indziej jest równy 1.

2° $j = 0$. Weźmy $f(x) = 1$. f to wielomian 0 stopnia, więc dla $n+1$ punktów $x_0, \dots x_n$ z jednoznaczności — // —

$$W_n(x) = f(x) = \sum_{k=0}^{n} \lambda_k y_k = \sum_{k=0}^{n} \lambda_k f(x_k) = \sum_{k=0}^{n} \lambda_k 1, \text{ stąd}$$

$$f(0) = 1 = \sum_{k=0}^{n} x_k^0 \lambda_k(0)$$