Analiza numeryczna (L)
22.12.2020 r.

Powtórka

- $w_n^* \in \Pi_n$: $\|f - w_n^*\|_2 = \min_{w_n \in \Pi_n} \|f - w_n\|$

  $w_n^*(x)$ – jawny wzór
- $(\cdot,\cdot)_N \to \|\cdot\|_2$
- ortogonalność
- ortogonalizacja Grama-Schmidta
- ciąg wielomianów ortogonalnych $P_k \in \Pi_k \setminus \Pi_{k-1}$ $(0 \le k \le N)$

$$\begin{cases} (P_k, P_l)_N = 0 & \text{dla } k \ne l, \\ (P_k, P_k)_N > 0. \end{cases} \qquad \Pi_n = \mathrm{lin}\{P_0, P_1, \dots, P_n\} \quad (n \le N)$$

wielomiany ortogonalne spełniają związek rekurencyjny II-go rzędu $\Downarrow$ koszt wyznaczenia $O(n)$

- $\sum \alpha_k P_k \to$ algorytm Clenshawa

$$\boxed{w_n^*(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k P_k(x), \qquad a_k := \frac{(f, P_k)_N}{(P_k, P_k)_N} \quad (0 \le k \le N)}$$

$$w_{n+1}^*(x) = w_n^* + a_{n+1} P_{n+1}(x) \Rightarrow w_0^* \to w_1^* \to w_2^* \to \dots$$

szybko

Wykład 11. Kwadratury czyli całkowanie numeryczne

Powtórka

$$\boxed{\int f(x)\,dx = F(x) \iff F'(x) = f(x)}$$

$$\int x^n dx = \frac{1}{n+1} x^{n+1} + C \quad (n \in \mathbb{Z} \setminus \{-1\})$$

$$\int \frac{dx}{x} = \ln(x) + C, \qquad \int \sin(x) = -\cos(x) + C$$

$$\int \frac{dx}{x^2+1} = \arctan(x) + C, \qquad \int x e^{x^2} dx = \frac{1}{2} e^{x^2} + C$$

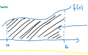
np. podstawienie

$$\int x \ln(x)\,dx = \dots, \qquad \int e^x dx = e^x + C$$

przez części

$$\boxed{\int e^{-x^2} dx = ???}, \qquad \boxed{\int \frac{\sin(x)}{x} dx = ???}$$

Całka oznaczona



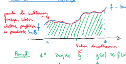
Pole pod wykresem $:= \boxed{\int_a^b f(x)\,dx}$

Sumy Riemanna

Twierdzenie

$$f \in C[a,b]: \qquad \int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a), \quad F' \equiv f$$

Idea całkowania numerycznego



f – trudna do scałkowania funkcja

Szukamy $\int_a^b f(x)\,dx = ???$

Pomysł
1° znajdź g : $g(x) \approx f(x)$ dla $x \in [a,b]$
2° $\int_a^b g(x)\,dx \approx \int_a^b f(x)\,dx$

Założenie: Rozpatrujemy tylko funkcje ciągłe w przedziale całkowania

Definicja (kwadratura liniowa)
Dla danej funkcji f kwadraturą liniową nazywamy wyrażenie postaci

$$Q_n(f) := \sum_{k=0}^{n} A_k^{(n)} f(x_k^{(n)}),$$

gdzie $x_0^{(n)}, x_1^{(n)}, \dots, x_n^{(n)}$ są parami różnymi węzłami, a wielkości $A_0^{(n)}, A_1^{(n)}, \dots, A_n^{(n)}$ są ustalonymi liczbami (tzw. współczynniki kwadratury)

Zadanie
Dobrać węzły $x_k^{(n)}$ i współczynniki $A_k^{(n)}$ kwadratury Q_n, w taki sposób, aby

$$\int_a^b f(x)\,dx \;\boxed{\approx}\; Q_n(f) \qquad (a, b - \text{ustalone})$$

dla funkcji f pochodzących z jakiejś ustalonej klasy funkcji

Uwaga
Do dyspozycji mamy zatem $2n+2$ parametry (węzły + współczynniki). Jak je dobrać, aby było jak „najlepiej"?

Definicja (błąd kwadratury)

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = Q_n(f) + R_n(f)}$$

błąd kwadratury Q_n

Definicja (rząd kwadratury)
Mówimy, że rząd kwadratury liniowej Q_n wynosi $r \in \mathbb{N}$,

$\Updownarrow$

$$\boxed{\forall_{w \in \Pi_{r-1}}\ 1°\ \int_a^b w(x)\,dx = Q_n(w)} \quad (w \in \Pi_{r-1}),$$

$R_n(w) = 0$

$$2°\ \exists_{v \in \Pi_r \setminus \Pi_{r-1}} \quad \boxed{\int_a^b v(x)\,dx \ne Q_n(v)}$$

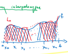
$R_n(v) \ne 0$.

Uwaga
Warto kwadratury definiować tak, aby ich rząd był jak największy.

Twierdzenie

$$\boxed{\text{rząd}(Q_n) \le 2n+2.}$$

Kwadratury interpolacyjne



$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \int_a^b L_n(x)\,dx$$

wielomian interpolacyjny

$$\begin{cases} L_n \in \Pi_n \\ L_n(x_i) = f(x_i) \quad (i = 0, 1, \dots, n) \end{cases}$$

$$\boxed{L_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f(x_k) \lambda_k(x), \qquad \lambda_k(x) := \prod_{\substack{i=0 \\ i \ne k}}^{n} \frac{x - x_i}{x_k - x_i} \quad (0 \le k \le n)}$$

$x_i \ne x_j$ dla $i \ne j$

Pomysł: Funkcję podcałkową zamieniamy na wielomian interpolacyjny i całkujemy ten wielomian.

$$\int_a^b L_n(x)\,dx = \sum_{k=0}^{n} \underbrace{\left(\int_a^b \lambda_k(x)\,dx\right)}_{A_k \text{ – współczynniki}} f(x_k) =: Q_n(f)$$

węzły

Mamy tu do czynienia z kwadraturą liniową.

Oczywiście

$$A_k := \int_a^b \left(\prod_{\substack{i=0 \\ i \ne k}}^{n} \frac{x - x_i}{x_k - x_i} \right) dx$$

wielomian stopnia dokładnie n

Tu jest problem „techniczny". Musimy umieć efektywnie całkować wielomiany podane w postaci ilorazowej

$\boxed{\text{ćwiczenia}}$

Jaki błąd ma kwadratura interpolacyjna?

Przypomnienie
Jeśli f ma ciągłą $(n+1)$-szą pochodną, to

$$f(x) - L_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\eta_x)}{(n+1)!} (x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_n)$$

$$\eta_x \in (a,b) \supset \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$$

Zatem

$$\int_a^b f(x)\,dx = \underbrace{\int_a^b L_n(x)\,dx}_{\text{kwadratura interpolacyjna}} + \underbrace{\frac{1}{(n+1)!} \int_a^b f^{(n+1)}(\eta_x)(x - x_0) \dots (x - x_n)}_{\text{błąd kwadratury interpolacyjnej}}$$

$$Q_n(f) := \sum_{k=0}^{n} \left(\int_a^b \lambda_k(x)\,dx \right) f(x_k) \qquad R_n(f)$$

Przykład
$[a,b] := [0,1]$, $n := 4$, $x_0 = 0$, $x_1 = \frac{1}{3}$, $x_2 = \frac{1}{2}$, $x = \frac{2}{3}$, $x_4 = 1$
Jak dla tych danych wygląda kwadratura interpolacyjna?

$$\left.\begin{aligned} \lambda_k(x) &= \prod_{\substack{i=0 \\ i \ne k}}^{4} \frac{x - x_i}{x_k - x_i} \quad (k = 0,1,2,3,4) \\ A_k &= \int_0^1 \lambda_k(x)\,dx \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} A_0 = A_4 &= \tfrac{11}{120} \\ A_1 = A_3 &= \tfrac{27}{40} \\ A_2 &= -\tfrac{8}{15} \end{aligned}$$

$\Downarrow$

$$Q_4(f) := \frac{11}{120} f(0) + \frac{27}{40} f\left(\tfrac{1}{3}\right) - \frac{8}{15} f\left(\tfrac{1}{2}\right) + \frac{27}{40} f\left(\tfrac{2}{3}\right) + \frac{11}{120} f(1)$$

Można sprawdzić, że

- $f(x) := \sin(\pi x) \Rightarrow \int_0^1 \sin(\pi x)\,dx = \frac{2}{\pi} = 0.63661\dots$

  $Q_4(f) = \frac{27}{40}\sqrt{3} - \frac{8}{15} = \boxed{0.63}58\dots$
- $f(x) = e^{-x^2} \Rightarrow \int_0^1 e^{-x^2} dx = 0.7468241\dots$

  $Q_4(f) = \boxed{0.7468}41$

Twierdzenie
Rząd kwadratury liniowej $Q_n \ge n+1 \iff Q_n$ jest kwadraturą interpolacyjną

Wniosek

$$n+1 \le \text{rząd kwadratury liniowej} \le 2n+2$$

kwadratura interpolacyjna

Pytanie
Jak zatem dobrać węzły kwadratury interpolacyjnej, aby jej rząd wynosił dokładnie $2n+2$?

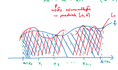
Odpowiedź
Jest to możliwe, ale sprawa nie jest łatwa. Wrócimy do tego w kolejnym wykładzie.

Kwadratury Newtona – Cotesa

Rozważmy kwadratury interpolacyjne z węzłami równoodległymi:

$$x_k := a + kh \qquad \left(k = 0, 1, \dots, n; \quad h := \frac{b-a}{n}\right)$$

węzły równoodległe w przedziale $[a,b]$



Obserwacje
1° Postać Lagrange'a wielomianu interpolacyjnego upraszcza się istotnie, gdy węzły są równoodległe $\Rightarrow \boxed{\text{ćwiczenia}}$

2°
$$A_k := \frac{(-1)^{n-k} h}{k!(n-k)!} \int_0^n \prod_{\substack{j=0 \\ j \ne k}}^{n} (t - j)\,dt \Rightarrow \boxed{\text{ćwiczenia}}$$

$h = \frac{b-a}{n}$

$$A_k = A_{n-k} \quad (0 \le k \le n)$$

TRUDNE 3° Błąd kwadratury Newtona – Cotesa

Oznaczenie: $Q_n^{NC}(f)$

$$R_n(f) = \begin{cases} \dfrac{f^{(n+1)}(\eta)}{(n+1)!} \displaystyle\int_a^b (x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_n)\,dx & (n = 1, 3, 5, \dots), \\ \dfrac{f^{(n+2)}(\eta)}{(n+2)!} \displaystyle\int_a^b x \cdot (x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_n)\,dx & (n = 2, 4, 6, \dots). \end{cases}$$

$\Downarrow$

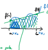
Wniosek

$$\boxed{\text{rząd}(Q_n^{NC}) = \begin{cases} n+2 & \text{dla } n \text{ parzystych}, \\ n+1 & \text{dla } n \text{ nieparzystych}. \end{cases}}$$

Widać zatem, że pod względem rzędu kwadratury, kwadratury Newtona-Cotesa są bardzo słabej jakości (bo jesteśmy prawie przy dolnej granicy oszacowania rzędu kwadratury interpolacyjnej).

Wzór trapezów

Chodzi o kwadraturę Q_1^{NC}:



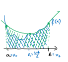
$\boxed{\text{wzór trapezów}} \to Q_1^{NC}(f) := \frac{b-a}{2}\big(f(a) + f(b)\big)$

wzór na pole trapezu

$\boxed{\text{błąd wzoru trapezów}} \to R_1^{NC}(f) := \frac{f''(\eta)}{2!} \int_a^b (x-a)(x-b)\,dx = -\frac{(b-a)^3}{12} f''(\eta) = \boxed{-\frac{h^3}{12} f''(\eta)}$

Wzór Simpsona

Rozważmy kwadraturę Q_2^{NC}:



$\boxed{\text{wzór Simpsona}} \to Q_2^{NC}(f) := \frac{b-a}{6}\left[f(a) + 4 f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right]$

$\boxed{\text{błąd wzoru Simpsona}} \to R_2^{NC}(f) = -\frac{1}{90} \left(\frac{b-a}{2}\right)^5 f^{(4)}(\alpha)$

$\frac{b-a}{2} = h$

Uwaga
Nie zaleca się – w ogólności – stosowania kwadratur Newtona-Cotesa dla dużych wartości n ($n > 7$)