5. Mówimy, że zmienna losowa X podlega rozkładowi Gamma z parametrami $b, p > 0$ jedynie wtedy gdy $f(x) = \frac{b^p}{\Gamma(p)} x^{p-1} \exp(-bx)$, dla $x \in (0, \infty)$. (Krótko: $X \sim \text{Gamma}(b, p)$). Czy Y z zadania 3. ma rozkład Gamma? Jeżeli tak, podać wartości parametrów b, p.

3. Zmienna losowa podlega standardowemu rozkładowi normalnemu, tzn. $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)$, gdzie $x \in \mathbb{R}$. (Skrótowo: $X \sim N(0,1)$). Znaleźć rozkład (gęstość $f_Y(y) \equiv g(y)$) zmiennej $Y = X^2$.

$$f_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{y}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{y}{2}}$$

$$X \sim \text{Gamma}(b,p) \iff f(x) = \frac{b^p}{\Gamma(p)} x^{p-1} e^{-bx},$$

$$\Gamma(p) = \int_0^\infty t^{p-1} e^{-t} \, dt$$

$$\downarrow$$

$$e^{-bx} = e^{-\frac{y}{2}} \Rightarrow \boxed{b = \frac{1}{2}}$$

$$\frac{b^p}{\Gamma(p)} x^{p-1} = \frac{1}{\sqrt{y}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \Rightarrow x^{p-1} = \frac{1}{\sqrt{y}} = y^{-\frac{1}{2}} \Rightarrow p - 1 = -\frac{1}{2}$$

$$\boxed{p = \frac{1}{2}}$$

Sprawdźmy, czy $\frac{b^p}{\Gamma(p)} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$.

$$\frac{1}{\sqrt{2}} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}} = b^p \checkmark$$

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} = \Gamma\left(\tfrac{1}{2}\right) \text{ [z zad. 4]} = \Gamma(p) \checkmark$$

Zatem $Y \sim \text{Gamma}\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ ∎