10. Niech $X \sim U[a;b]$. Obliczyć wartość $V(X)$

$X \sim U[a,b]$

$f_X(x) = \frac{1}{b-a}$

Definicja 5. *Wariancją zmiennej losowej X nazywamy liczbę $VX = V(X) = \sum_i (x_i - EX)^2\, p_i$ w wypadku dyskretnym lub $V(X) = \int_{\mathbb{R}} (x - EX)^2 f(x)\,dx$ w wypadku ciągłym.*

$V(X) = \int_a^b (x - E(X))^2 f_X(x)\,dx$. Wyznaczmy $E(X)$.

Definicja 4. *Wartością oczekiwaną zmiennej losowej X nazywamy liczbę $EX = E(X) = \sum_i x_i p_i$ w wypadku dyskretnym lub $E(X) = \int_{\mathbb{R}} x f(x)\,dx$ w wypadku ciągłym.*

$$E(X) = \int_a^b x f_X(x)\,dx = \int_a^b x \frac{1}{b-a}\,dx = \frac{1}{b-a}\left[\frac{x^2}{2}\right]_a^b = \frac{1}{b-a}\left[b^2 - a^2\right] = \frac{b^2-a^2}{2(b-a)} = \frac{(b-a)(b+a)}{2(b-a)}$$

$$E(X) = \frac{b+a}{2}$$

Teraz policzmy wariancję.

$$V(x) = \int_a^b \left(x - \frac{b+a}{2}\right)^2 \frac{1}{b-a}\,dx = \int_a^b \left(x^2 - x(b+a) + \frac{(b+a)^2}{4}\right)\frac{1}{b-a}\,dx = \frac{1}{b-a}\left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^2(b+a)}{2} + \frac{(b+a)^2}{4}x\right]_a^b$$

$$V(x) = \frac{1}{b-a}\left[\frac{b^3}{3} - \frac{b^2(b+a)}{2} + \frac{b(b+a)^2}{4} - \frac{a^3}{3} + \frac{a^2(b+a)}{2} - \frac{a(b+a)^2}{4}\right]$$

$$V(x) = \frac{1}{b-a}\left[\frac{b^3-a^3}{3} - \frac{(b^2-a^2)(b+a)}{2} + \frac{(b-a)(b+a)^2}{4}\right]$$

$$V(x) = \frac{a^2+b^2+ab}{3} - \frac{(b+a)(b+a)}{2} + \frac{(b+a)^2}{4} = \frac{4(a^2+b^2+ab)}{12} - \frac{6(b+a)^2}{12} + \frac{3(b+a)^2}{12} = \frac{4(a+b)^2 - 4ab - 3(a+b)^2}{12}$$

$$V(x) = \frac{(a+b)^2 - 4ab}{12} = \frac{a^2 + 2ab + b^2 - 4ab}{12} = \frac{a^2 - 2ab + b^2}{12}$$

$$V(x) = \frac{(b-a)^2}{12}$$