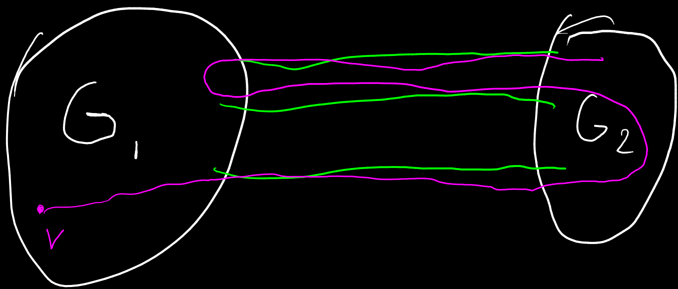
MDL Lista 12 Krystian Jasionek

2. *Minimalnym cięciem* w grafie jest podzbiór jego krawędzi, których usunięcie rozspaja graf, a usunięcie żadnego podzbioru krawędzi w nim zawartego nie rozspaja grafu. Wykaż, że graf spójny zawiera cykl Eulera wtedy i tylko wtedy, gdy każde minimalne cięcie zawiera parzystą liczbę krawędzi.
Uwaga: To zadanie nie jest tak proste, jak się wydaje.

Niech C_{min} to minimalne cięcie. Pokażmy, że graf spójny zawiera cykl Eulera $\Leftrightarrow$ każde minimalne cięcie zawiera parzystą liczbę krawędzi.

$\Rightarrow$) Weźmy dowolny graf spójny $G=(V,E)$, zawierający cykl Eulera. Rozważmy dowolne minimalne cięcie w G. Zawiera ono k krawędzi, przechodzących między podgrafami G_1 i G_2.

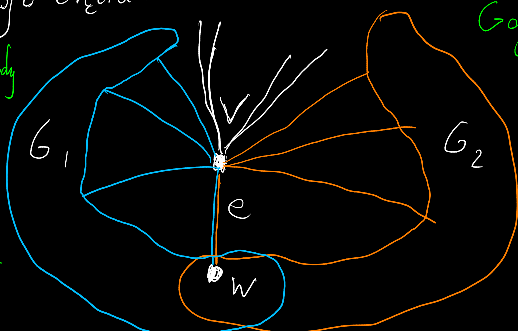


Zauważmy, że skoro w grafie istnieje cykl Eulera, to k musi być parzyste. W przeciwnym wypadku podczas przechodzenia po cyklu zaczynającym się w wierzchołku $v \in G_1$ (na rysunku) musielibyśmy przejść wszystkie k krawędzi minimalnego cięcia (cykl Eulera przechodzi jednokrotnie przez każdą krawędź) i po przejściu przez ostatnią nie bylibyśmy w stanie wrócić do $v \in G_1$, bo nie istnieje już żadna nieodwiedzona krawędź między G_1 i G_2, w takim razie w G nie mógłby istnieć cykl Eulera.

$\Leftarrow$) Weźmy dowolny graf $G=(V,E)$, w którym każde minimalne cięcie C_{min} zawiera parzystą liczbę krawędzi. Pokażmy, że ten graf zawiera cykl Eulera.

Zauważmy, że graf zawiera cykl Eulera wtedy i tylko wtedy, gdy każdy wierzchołek grafu ma parzysty stopień.
Załóżmy, że każde C_{min} w G zawiera parzystą liczbę krawędzi oraz istnieje pewien wierzchołek v w G, że $\deg(v)$ jest nieparzysty. Pokażmy, że prowadzi to do sprzeczności.
Rozważmy wierzchołek v, $\deg(v) = n$ - nieparzyste. Wszystkie krawędzie tego wierzchołka należą do pewnych cięć*, powiedzmy, że jest ich k. Zauważmy, że zbiory krawędzi w cięciach minimalnych są rozłączne, tzn. jedna krawędź należy do jednego cięcia.

*Minimalne cięcie to zbiór krawędzi między składowymi G_1 i G_2, po którego usunięciu powstają dwa rozdzielne grafy G_1 i G_2. To oznacza, że każda krawędź $e=(v,w)$, należąca do cięcia minimalnego ma $v \in G_1$ i $w \in G_2$.



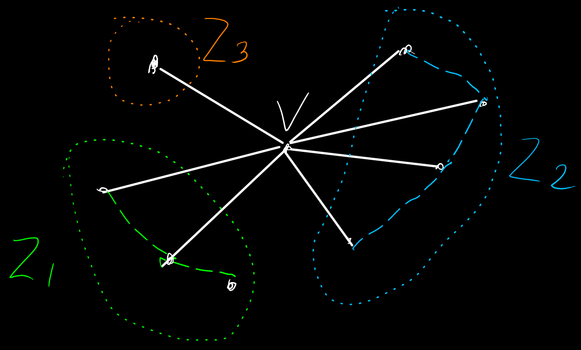
Gdyby istniała krawędź $e=(v,w)$, należąca do cięcia niebieskiego i pomarańczowego, wtedy wierzchołek w musiałby leżeć w obu składowych G_1 i G_2. Ale wtedy nie są to cięcia, bo po usunięciu niebieskich krawędzi lub pomarańczowych, wtedy $e(v,w)$ łączy te dwa grafy G_1 i G_2.

W takim razie $\deg(v) = n = \sum_{i=1}^{k} c_i$, gdzie c_i to liczba krawędzi w minimalnym cięciu C_i. Ale skoro każde c_i jest parzyste, stąd $\sum_{i=1}^{k} c_i = n$ jest parzysta, ale założyliśmy, że $n = \deg(v)$ jest nieparzyste, zatem otrzymaliśmy sprzeczność.

W takim razie każdy wierzchołek musi mieć parzysty stopień, czyli istnieje cykl Eulera.

* Każda krawędź wychodząca z wierzchołka v należy do jakiegoś cięcia minimalnego.

Jest to stosunkowo prosta obserwacja. Weźmy dowolnych k sąsiadów v, którzy są połączeni ścieżką, na której nie leży v, i pozostałych sąsiadów v, w ten sposób powstał zbiór k sąsiadów v. Niech taki zbiór to Z.



Podobnie możemy zrobić z pozostałymi sąsiadami v, otrzymując i zbiorów. Zauważmy, że każdy tak powstały zbiór Z_i łączy się z pozostałymi przez krawędzie wychodzące z niego do v i krawędzie wychodzące z v do pozostałych wierzchołków. Oznacza to, że usunięcie krawędzi z v do Z_i rozspaja graf, zatem te krawędzie należą do pewnego cięcia minimalnego. Tak samo możemy zrobić z dowolnym Z_i, zatem każda krawędź wychodząca z v należy do pewnego cięcia minimalnego.

3. (Problem haremu). Niech A i B będą dwoma rozłącznymi zbiorami osób. Przypuśćmy, że każda osoba a należąca do zbioru A chce poślubić (naraz) co najmniej $n_a \geq 1$ osób ze zbioru B. Jaki jest warunek konieczny i wystarczający, aby ten problem miał rozwiązanie? Wskazówka: Zastosuj klonowanie i tw. Halla.

Weźmy zbiory A i B rozłączne. Zacznijmy od stworzenia nowego zbioru A^*, który zawiera n_a klonów każdego elementu ze zbioru A. Niech krawędzie między wierzchołkami $a \in A, b \in B$ oznaczają, że a chce poślubić b, wtedy a może ożenić się z n_a kobietami ze zbioru B. Zauważmy, że kilku mężczyzn może chcieć poślubić tę samą kobietę, ale tylko jeden z nich może ją poślubić. Niech każdy klon $a^* \in A$ wierzchołka $a \in A$ posiada krawędzie do tych samych $b \in B$ co a, tzn. każdy klon posiada te same krawędzie co oryginał. Oznaczmy podzbiór A^*, zawierający wszystkie klony pewnego a przez A' oraz zbiór kobiet b, t. że istnieje krawędź między b i a (a chce poślubić b) przez $W(A')$. Wtedy warunek konieczny i wystarczający, by problem haremu miał rozwiązanie, to z tw. Halla

$$|W(A')| \geq |A'| \text{ dla każdego } A' \subseteq A^*.$$

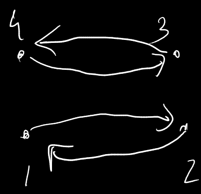
4. Ile jest nieidentycznych digrafów o wierzchołkach $1, 2, \ldots, n$, w których nie ma pętli ani krawędzi równoległych i stopnie wchodzący i wychodzący każdego wierzchołka wynosi 1?

Zauważmy, że gdybyśmy szukali takich spójnych digrafów o n wierzchołkach, to byłoby ich tyle, co cykli Hamiltona w turnieju o n wierzchołkach. Wynika to z ograniczeń narzuconych przez treść zadania, tj. gdyby taki digraf nie był cyklem Hamiltona, wtedy albo istniałaby krawędź równoległa, albo stopnie wchodzące i wychodzące któregoś wierzchołka nie byłyby równe 1.

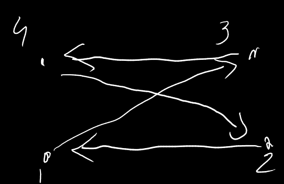
Jednak szukane grafy mogą nie być spójne, wtedy powyższa obserwacja jest prawdziwa dla ich spójnych składowych. Jak policzyć liczbę takich grafów? Spróbujmy reprezentować wierzchołki w innej postaci.

Przedstawmy graf jako permutację, w której górny i dolny wiersz to indeksy wierzchołków między którymi istnieje krawędź, np.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} \equiv$$



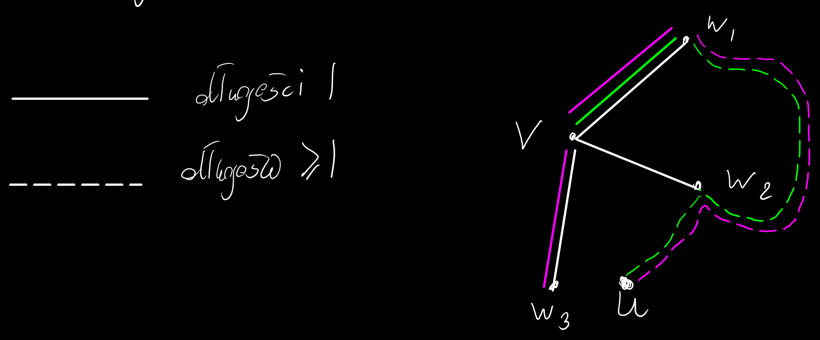
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix} \equiv$$



Zauważmy, że taka reprezentacja od razu zapewnia, że każdy wierzchołek musi mieć dokładnie jedną krawędź wchodzącą i wychodzącą, ponieważ każdy element jest permutowany na jeden sposób, oraz nie ma krawędzi równoległych (z tego samego powodu, jest tylko n krawędzi). Zauważmy też, że żaden element nie może stać po spermutowaniu na tym samym miejscu, bo to oznaczałoby istnienie pętelek. Ale ten warunek oznacza, że tak naprawdę dozwolone są tylko nieporządki, a ich liczbę znamy z poprzednich list. Zatem takich digrafów jest $n! \sum_{i=0}^{n} \frac{(-1)^i}{i!}$.

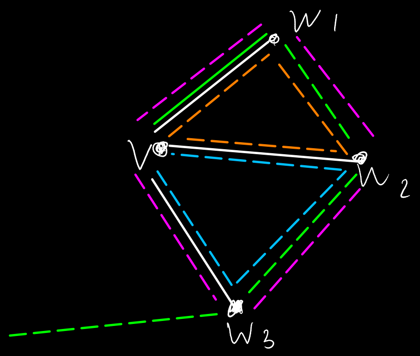
8. Pokaż, że graf $G = (V, E)$, w którym każdy wierzchołek ma stopień 3 zawiera cykl o parzystej długości.

Weźmy najdłuższą ścieżkę w grafie, powiedzmy, że wychodzi z wierzchołka v. Zauważmy, że każdy sąsiad v musi leżeć na takiej ścieżce, inaczej moglibyśmy wydłużyć ścieżkę o tego sąsiada, więc nie byłaby ona najdłuższa (rysunek).



Zakładając, że zielona ścieżka z v do u jest najdłuższa w grafie, wtedy wszyscy sąsiedzi v muszą leżeć na tej ścieżce, inaczej możemy przedłużyć ją o sąsiada, który na niej nie leży i otrzymamy fioletową ścieżkę, dłuższą od zielonej.

Zauważmy, że taka ścieżka musi wyglądać w podobny co na poniższym rysunku sposób.



Możemy zauważyć, że powstały trzy cykle: pomarańczowy, niebieski i fioletowy.

Rozpatrzmy przypadki:

1° $w_1 \to w_2$ ma parzystą długość, $w_2 \to w_3$ też, wtedy fioletowy cykl ma parzystą długość.

2° $w_1 \to w_2$ ma nieparzystą długość, $w_2 \to w_3$ parzystą, wtedy cykl niebieski ma parzystą długość.

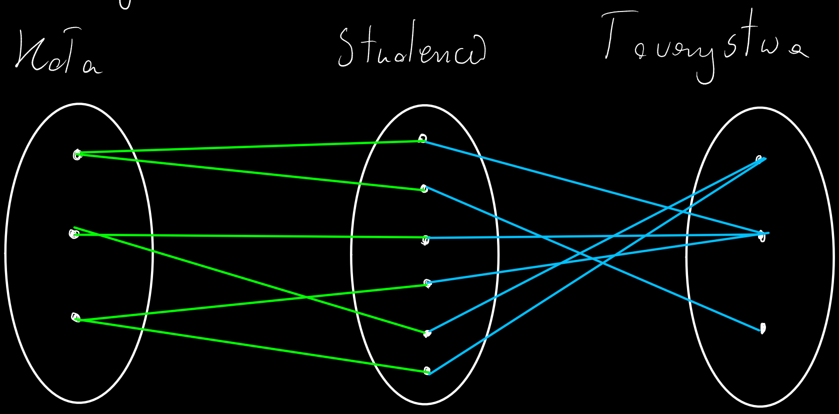
3° $w_1 \to w_2$ ma parzystą długość, $w_2 \to w_3$ nieparzystą, wtedy cykl pomarańczowy ma parzystą długość.

4° Zarówno $w_1 \to w_2$ i $w_2 \to w_3$ mają nieparzystą długość, wtedy fioletowy cykl ma parzystą długość.

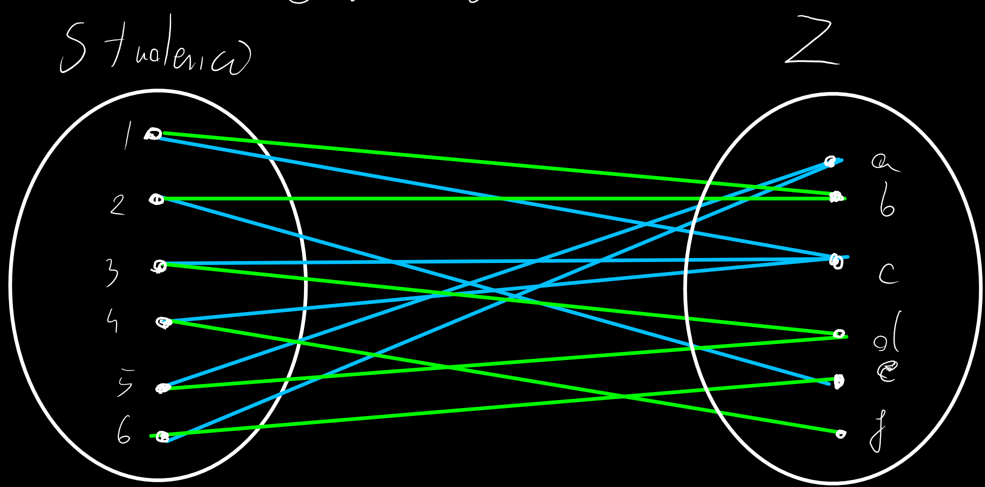
W każdym przypadku uzyskujemy cykl o parzystej długości, więc teza została udowodniona.

9. nk studentów, przy czym $k \geq 2$, jest podzielonych na n towarzystw po k osób i na $n \geq 2$ kół naukowych po k osób każde. Wykaż, że da się wysłać delegację $2n$ osób tak, by każde towarzystwo i każde koło naukowe było reprezentowane. (Każdy student należy do jednego towarzystwa i jednego koła.) Jeden student może reprezentować tylko jedną grupę (typu koło lub towarzystwo).

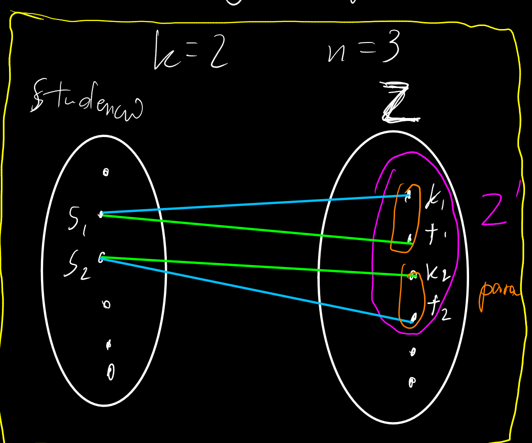
Zilustrujmy tą sytuację, by lepiej ją zrozumieć. Weźmy $k=2$, $n=3$



Złączmy zbiory kół i towarzystw otrzymując nowy zbiór Z. Wtedy graf prezentuje się następująco.



Zauważmy, że Z = Koła $\cup$ Towarzystwa, zatem $|Z| = 2n$. Zauważmy, że między zbiorem Z i Studentów istnieje skojarzenie doskonałe, zatem mamy zadanie rozwiązane. By istniało takie skojarzenie musi być spełniony warunek Halla, tzn. dla pewnego $Z' \subseteq Z$ $N(Z') \geq |Z'|$, gdzie $N(Z')$ to zbiór sąsiadów wierzchołków z Z'. Wiemy, że $|Z'| = 2n$, sprawdźmy ile co najmniej wynosi $N(Z')$. Zauważmy, że $N(Z')$ będzie najmniejsze, gdy będziemy mogli dobrać parami towarzystwa i koła tak, by dana para prowadziła do tego samego studenta, tj. sytuacja na rysunku poniżej.



Wtedy skoro każda para wierzchołków z Z' ma krawędź do jednego wierzchołka w Studentach oraz każde koło i towarzystwo mają po k członków, to $N(Z') = \lceil \frac{|Z'|}{2} \rceil \cdot k$ (sufit bo $|Z|$ może być nieparzysta, wtedy jeden element nie ma pary, ale ma sąsiada). Zauważmy, że $k \geq 2$ z założenia zadania, zatem
$$N(Z') = \lceil \frac{|Z'|}{2} \rceil \cdot k \geq 2n = |Z'|,$$
czyli warunek Halla jest spełniony i istnieje skojarzenie doskonałe.

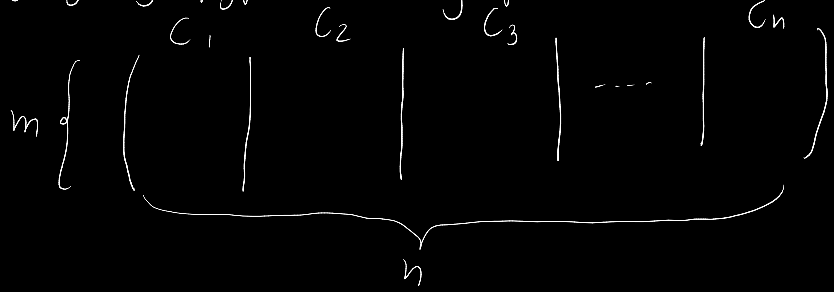
10. *Kwadratem łacińskim* nazywamy kwadrat $n \times n$, w którym na każdym polu stoi liczba ze zbioru $\{1, 2, \dots, n\}$ tak, że w każdej kolumnie oraz w każdym wierszu jest po jednej z liczb $\{1, 2, \dots, n\}$. *Prostokątem łacińskim* nazywamy prostokąt o n kolumnach i m wierszach, $1 \leq m \leq n$, w którym na każdym polu stoi liczba ze zbioru $\{1, 2, \dots, n\}$ tak, że w każdym wierszu każda z liczb $\{1, 2, \dots, n\}$ występuje dokładnie raz oraz w każdej kolumnie co najwyżej raz.

Czy każdy prostokąt łaciński o $m < n$ wierszach można rozszerzyć o jeden wiersz?

Wskazówka: przydatne mogą okazać się skojarzenia.

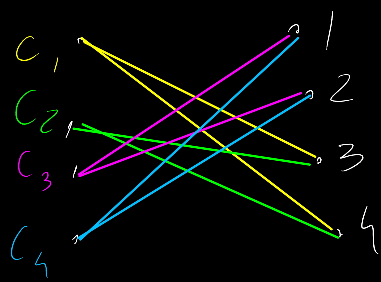
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix} \text{ – prostokąt łaciński}$$

Narysujmy ogólny przypadek takiego prostokąta $m \times n$, $m < n$.



Rozważmy graf dwudzielny $G = (C \cup N, E)$, gdzie C to zbiór kolumn prostokąta łacińskiego, a N to zbiór liczb naturalnych od 1 do n. Krawędź między $c \in C$ i $k \in N$ istnieje, gdy w kolumnie c w prostokącie łacińskim nie występuje k, np.

$$\begin{array}{cccc} c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \end{array}$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} \equiv$$



Zauważmy, że chcąc dopisać do każdej kolumny liczbę, która jeszcze w niej nie wystąpiła (poszerzyć prostokąt łaciński o 1 wiersz), tak naprawdę szukamy doskonałego skojarzenia tego grafu. Pokażmy, że takie skojarzenie istnieje, tzn. $\forall C' \subseteq C \ |N(C')| \geq |C'|$ oraz $\forall N' \subseteq N \ |N(N')| \geq |N'|$.

Weźmy dowolny $C' \subseteq C$ oraz dowolny $N' \subseteq N$. Zauważmy, że obecnie prostokąt łaciński ma m wierszy i n kolumn, zatem wykorzystaliśmy m liczb z N, pozostało nam $n-m$ niewystępujących w prostokącie. W grafie mamy więc dla każdej kolumny c_i mamy $n-m$ sąsiadów. Z drugiej strony każda liczba może występować tylko raz w każdym wierszu, więc obecnie w prostokącie musi ich być m. Oznacza to, że każdej z liczb w N przypisano już m kolumn, zatem w grafie każda liczba ma $n-m$ sąsiadów w C.

Zauważmy, że te dwie obserwacje pokazują, że mamy $(n-m) \cdot |C'|$ krawędzi wychodzących z C' oraz $(n-m) \cdot |N(C')|$ krawędzi wychodzących z $N(C')$. Obserwujemy, że jeśli jakaś liczba nie została dodana do kolumny, to istnieje krawędź między nią a tą kolumną, oraz że jeśli jakaś kolumna nie zawiera pewnej liczby, to istnieje krawędź między nią a tą liczbą. Zatem widzimy, że zbiór krawędzi wychodzących z C' zawiera się w zbiorze krawędzi wychodzących z $N(C')$, czyli w szczególności $|N(C')| \geq |C'|$. To samo rozumowanie przeprowadzone na N' prowadzi do wniosku, że $|N(N')| \geq |N'|$. W takim razie spełniony jest warunek Halla, czyli każdy prostokąt łaciński $m \times n$, $m < n$ można rozszerzyć o jeden wiersz.