3. $\Gamma(p) = \int_0^\infty t^{p-1} e^{-t}\,dt$, $p>0$. $\Gamma(n) = (n-1)!$, $n \in \mathbb{N}$.

$$\Gamma(n) = \int_0^\infty t^{n-1} e^{-t}\,dt = \left| \begin{matrix}\text{możemy całkować} \\ \text{przez części}\end{matrix} \right| = \left| \begin{matrix} f = t^{n-1} & g' = e^{-t} \\ f' = (n-1)t^{n-2} & g = -e^{-t}\end{matrix}\right| = -t^{n-1}\cdot e^{-t} - \int_0^\infty (n-1)t^{n-2}\cdot -e^{-t}\,dt$$

$$\Gamma(n) = -t^{n-1}e^{-t} + (n-1)\int_0^\infty t^{n-2} e^{-t}$$

Możemy to zrobić całką oznaczoną.

$$\Gamma(n) = \left[-t^{n-1}e^{-t}\right]_0^\infty + (n-1)\int_0^\infty t^{n-2}e^{-t}$$

$$\Gamma(n) = -\lim_{t\to\infty} t^{n-1}e^{-t} - (-0\cdot 1) + (n-1)\int_0^\infty t^{n-2}e^{-t}$$

$$\lim_{t\to\infty} \frac{t^{n-1}}{e^t} = \left|\frac{\infty}{\infty} \text{ - zatem d'l'Hospital}\right| = \lim_{t\to\infty}\frac{t^{n-2}}{e^t} = \left|\begin{matrix}\text{taka sama sytuacja,} \\ \text{więc powtórzymy to } n-1 \text{ razy}\end{matrix}\right| = \ldots = \lim_{t\to\infty}\frac{1}{e^t} = 0$$

$\boxed{\Gamma(n) = (n-1)\int_0^\infty t^{n-2}e^{-t}}$, ponownie całkowanie przez części

$\Gamma(n) = (n-1)\left[\left[-t^{n-2}e^{-t}\right]_0^\infty + (n-2)\int_0^\infty t^{n-3}e^{-t}\,dt\right]$, widać, że będziemy tak iterować, aż dojdziemy do $(n-1)(n-2)\cdots(2)\int_0^\infty t^0 e^{-t}\,dt = (n-1)!$ .. Jak to poprawnie sformułować?

Zauważmy, że $\Gamma(n) = (n-1)\,\Gamma(n-1)$, zatem możemy obliczyć $\Gamma(n)$ rekurencyjnie. Ile wynosi podstawa rekurencji, tj. $\Gamma(1)$?

$$\Gamma(1) = \int_0^\infty t^{1-1}e^{-t}\,dt = \int_0^\infty e^{-t}\,dt = \left[-e^{-t}\right]_0^\infty = \left[-\frac{1}{e^t}\right]_0^\infty = 0+1 = 1, \text{ zatem}$$

$\Gamma(n) = (n-1)\,\Gamma(n-1)$; $\Gamma(1)=1$, stąd $\Gamma(n) = (n-1)!$