ANL Lista 5 Krystian Jasionek

L5.3. $\boxed{\text{1 punkt}}$ Załóżmy, że metoda iteracyjna postaci

$$x_0 \text{ – dane}, \quad x_{k+1} = F(x_k) \qquad (k = 0, 1, \ldots)$$

(metody takie nazywamy *metodami jednokrokowymi*; np. metodą taką jest metoda Newtona, dla której $F(x) := x - f(x)/f'(x)$) jest zbieżna do pierwiastka α równania $f(x) = 0$. Wykaż, że jeśli

$$1^\circ \quad F(\alpha) = \alpha, \quad F'(\alpha) = F''(\alpha) = \ldots = F^{(p-1)}(\alpha) = 0, \quad F^{(p)}(\alpha) \neq 0,$$

to rząd metody jest równy p, tzn.

$$2^\circ \quad \lim_{n\to\infty} \frac{|x_{n+1} - \alpha|}{|x_n - \alpha|^p} = C \neq 0.$$

Jakim wzorem wyraża się stała asymptotyczna C?

Pokażemy, że $1^\circ \Rightarrow 2^\circ$.

Załóżmy 1°. Wtedy rozwińmy x_{n+1} w szereg Taylora.

$$x_{n+1} = F(\alpha) + \frac{(x_n-\alpha)}{1!}F'(\alpha) + \frac{(x_n-\alpha)^2}{2!}F''(\alpha) + \ldots + \frac{(x_n-\alpha)^{(p-1)}}{(p-1)!}F^{(p-1)}(\alpha) + \frac{(x_n-\alpha)^p}{p!}F^{(p)}(\xi),$$

gdzie $\xi \in [x_n, \alpha]$, ale z 1° wiemy, że $F'(\alpha) = F''(\alpha) = \ldots = F^{(p-1)}(\alpha) = 0$, $F(\alpha) = \alpha$, $F^{(p)}(\alpha) \neq 0$;

zatem $x_{n+1} = \alpha + \frac{(x_n-\alpha)^p}{p!}F^{p}(\xi)$. Możemy wtedy napisać, że

$$C = \lim_{n\to\infty} \frac{|x_{n+1}-\alpha|}{|x_n-\alpha|^p} = \lim_{n\to\infty} \frac{\left|\alpha + \frac{(x_n-\alpha)^p}{p!}F^{p}(\xi) - \alpha\right|}{|x_n-\alpha|^p} = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{F^{(p)}(\xi)}{p!}\right|,$$ ale wiemy, że

$x_n \xrightarrow{n\to\infty} \alpha$ oraz $\xi \in [x_n, \alpha]$, zatem $C = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{F^{(p)}(\xi)}{p!}\right| = \left|\frac{F^{(p)}(\alpha)}{p!}\right|$.

Z założenia 1° wiemy, że $F^{(p)}(\alpha) \neq 0$, więc $C = \left|\frac{F^{(p)}(\alpha)}{p!}\right| \neq 0$, czyli rząd metody jest równy p. Zatem $1^\circ \Rightarrow 2^\circ$, a stałą C możemy wyrazić wzorem

$$C = \left|\frac{F^{(p)}(\alpha)}{p!}\right|$$

∎