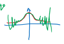
Analiza numeryczna (L)
25.11.2020 r.

• Sprawdzian!

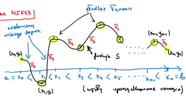
Powtórka

- postać Newtona + ilorazy różnicowe $O(n^2)$!
  ↓ łatwo dodawać kolejne obserwacje
  + postać Newtona $O(n)$
- twierdzenie o błędzie interpolacji $\max_{x\in[a,b]}|f(x)-L_n(x)| \le \dfrac{\max_{x\in[a,b]}|f^{(n+1)}(x)|}{(n+1)!} \cdot \max_{x\in[a,b]}|(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_n)|$
  węzły Czebyszewa
- efekt Rungego



Wykład 7. Naturalna interpolacyjna funkcja sklejana 3-go stopnia (NIFS3) i jej zastosowania w grafice

Idea NIFS3



Warunki na NIFS3

1° $s(x_k) = y_k \quad (0 \le k \le n)$

2° $s|_{[x_{k-1},x_k]} \in \Pi_3 \quad (1 \le k \le n)$

3° $s, s', s'' \in C[a,b]$

4° $s''(a) = s''(b) = 0$

Liczba niewiadomych: $4n$

Liczba warunków: $n+1$ (1°), $3(n-1)$ (3°)

$4n-2 \; + \; (+2) = 4n$

Przykład

Znajdźmy NIFS3 dla danych:

x_k	-1	0	1
y_k	1	-1	1

$$s(x) = \begin{cases} s_1(x) = Ax^3+Bx^2+Cx+D & : x\in[-1,0], \\ s_2(x) = Ex^3+Fx^2+Gx+H & : x\in[0,1]. \end{cases}$$

Szukamy wartości A, B, C, D, E, F, G, H.

$s_1(-1)=1 \Rightarrow -A+B-C+D=1$

$s_1(0)=s_2(0)=-1 \Rightarrow D=-1, \; H=-1$

$s_2(1)=1 \Rightarrow E+F+G+H=1$

$$s'(x) = \begin{cases} s_1'(x) = 3Ax^2+2Bx+C & : x\in[-1,0], \\ s_2'(x) = 3Ex^2+2Fx+G & : x\in[0,1]. \end{cases}$$

$s_1'(0)=s_2'(0) \Rightarrow C=G$

$$s''(x) = \begin{cases} s_1''(x) = 6Ax+2B & : x\in[-1,0], \\ s_2''(x) = 6Ex+2F & : x\in[0,1]. \end{cases}$$

$s_1''(0)=s_2''(0) \Rightarrow 2B=2F$

$s_1''(-1)=0 \Rightarrow -6A+2B=0$

$s_2''(1)=0 \Rightarrow 6E+2F=0$

$$\begin{cases} -A+B-C+D=1 \\ E+F+G+H=1 \\ -6A+2B=0 \\ 6E+2F=0 \\ D=-1 \\ H=-1 \\ C=G \\ B=F \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=1, & E=-1, \\ B=3, & F=3, \\ C=0, & G=0, \\ D=-1, & H=-1. \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$s(x) = \begin{cases} x^3+3x^2-1 & : x\in[-1,0], \\ -x^3+3x^2-1 & : x\in[0,1]. \end{cases}$$

Kolejne przykłady (Maple)

a) $f(x)=e^x$, $n=3$, $x_0=0$, $x_1=0.2$, $x_2=0.6$, $x=0.8$ ⇒ NIFS3 + porównanie z interpolacją

b) $f(x)=e^x$, $n=7$, węzły równoodległe w $[-1,2]$ ⇒ NIFS3 ☺

c) $f(x)=\sin(4\pi^2x^2)$, $x_k=\frac{k}{n}$ $(k=0,1,\dots,n;\; n=1,2,3,\dots,45)$ ⇒ NIFS3 ☺

Problem

Jak efektywnie wyznaczać NIFS3 nawet w sytuacji gdy węzłów są setki czy tysiące?

↳ Na pewno nie powinniśmy stosować pomysłu użytego w pierwszym przykładzie.

Rozwiązanie

Podamy metodę (algorytm) działającą w czasie $O(n)$, gdzie $n+1$ to liczba interpolowanych punktów.

Twierdzenie

Dla danych: $n\in\mathbb{N}$, $a=x_0<x_1<\dots<x_n=b$ i danej funkcji f określonej w tych węzłach $(y_k := f(x_k))$ zawsze istnieje dokładnie jedna NIFS3.

Niech $x\in[x_{k-1},x_k]$ $(1\le k\le n)$; wtedy

$$\boxed{\begin{aligned} s(x) = h_k^{-1}\Big[&\tfrac{1}{6}M_{k-1}(x_k-x)^3 + \tfrac{1}{6}M_k(x-x_{k-1})^3 + \\ &+\big(\overset{=y_{k-1}}{f(x_{k-1})} - \tfrac{1}{6}M_{k-1}h_k^2\big)(x_k-x) + \\ &+\big(\overset{=y_k}{f(x_k)} - \tfrac{1}{6}M_k h_k^2\big)(x-x_{k-1})\Big], \quad h_k := x_k - x_{k-1}. \end{aligned}}$$

Tutaj $M_k := s''(x_k)$ $(k=0,1,\dots,n)$ [w szczególności mamy $M_0=M_n=0$].
(tzw. momenty NIFS3).

Momenty M_k spełniają następujący trójprzekątniowy układ równań liniowych:

(*) $\lambda_k M_{k-1} + 2M_k + (1-\lambda_k)M_{k+1} = 6f[x_{k-1},x_k,x_{k+1}]$
$(1\le k\le n-1)$.
$\lambda_k := h_k/(h_k+h_{k+1})$.

Fakt (jawna postać układu (*))

$$\begin{bmatrix} 2 & 1-\lambda_1 & & & \\ \lambda_2 & 2 & 1-\lambda_2 & & \\ & \lambda_3 & 2 & 1-\lambda_3 & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & \lambda_{n-2} & 2 & 1-\lambda_{n-2} \\ & & & \lambda_{n-1} & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \\ M_3 \\ \vdots \\ M_{n-2} \\ M_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ \vdots \\ d_{n-2} \\ d_{n-1} \end{bmatrix}, \quad d_k := 6f[x_{k-1},x_k,x_{k+1}]$$

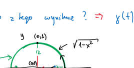
Obserwacja

Wystarczy podać efektywny algorytm rozwiązywania układu trójprzekątniowego (*), aby uzyskać metodę konstrukcji NIFS3, której będzie można używać w praktyce (nawet, gdy węzłów będzie bardzo dużo). Podamy algorytm rozwiązywania układu (*) w czasie $O(n)$, czyli w czasie liniowym względem liczby węzłów.

Koszt: $O(n)$

Zastosowania NIFS3 w grafice komputerowej

Krzywe parametryczne



Czym jest wykres funkcji f?

$[(x, f(x)) : a\le x\le b] \equiv$ wykres funkcji f

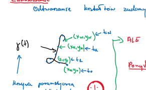
Pomysł

Opiszmy także ruch po pierwszej współrzędnej przy pomocy funkcji (być może bardzo skomplikowanej).

Pytanie

Co z tego wyniknie? ⇒ $\gamma(t) := [(x(t), y(t)) : a\le t\le b]$

ustalone funkcje



Paweł Woźny: Jak znaleźć krzywą parametryczną opisującą w sposób matematyczny ten podpis?

Zastosowanie

Odtwarzanie kształtów zadanych parametrycznie przy pomocy NIFS3.

Krzywa parametryczna opisująca literkę α.

Nie znamy wzoru dla $\gamma(t)$

ALE znamy współrzędne $(x_0,y_0), (x_1,y_1), \dots, (x_N,y_N)$

Pomysł

Znaleźć NIFS3 s_x oraz s_y spełniające następujące warunki:

$s_x(t_k) = x_k$
$s_y(t_k) = y_k$ $\quad (k=0,1,\dots,N)$

$\delta(t) := [(s_x(t), s_y(t)) : t_0\le t\le t_N]$

$\underset{\text{nie znamy}}{\gamma(t)} \approx \underset{\text{znamy}}{\delta(t)}$ dla $t\in[t_0,t_N]$

Uwaga techniczna: można przyjąć $t_k := \frac{k}{N}$