ANL Lista 8 Krystian Jasionek

L8.1. 1 punkt Znajdź naturalną interpolacyjną funkcję sklejaną trzeciego stopnia dla danych

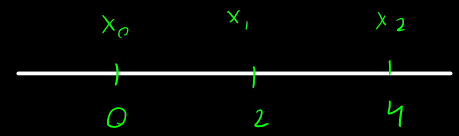
a)

x_k	0	2	4
y_k	−8	8	−8

b)

x_k	−1	−1/2	1/2	1
y_k	4	2	−6	−24

a)



Mamy dwa przedziały $[x_0, x_1]$ oraz $[x_1, x_2]$.

$$s_k(x) = \frac{1}{h_k}\left[\frac{1}{6} M_{k-1}(x_k - x)^3 + \frac{1}{6} M_k (x - x_{k-1})^3 + \left(y_{k-1} - \frac{1}{6} M_{k-1} h_k^2\right)(x_k - x) + \left(y_k - \frac{1}{6} M_k h_k^2\right)(x - x_{k-1})\right]$$

$$h_k = x_k - x_{k-1}$$

$$M_0 = M_n = 0$$

$$\lambda_k M_{k-1} + 2M_k + (1-\lambda_k) M_{k+1} = 6 f[x_{k-1}, x_k, x_{k+1}] \quad k \in [1, n-1]$$

Mamy jedno $k = 1$, bo $n = 2$. Policzmy $f[x_0, x_1, x_2]$

$$\begin{array}{l|l}
x_0 = 0 & f[x_0] = -8 \\
x_1 = 2 & f[x_1] = 8 \to f[x_0, x_1] = \frac{16}{2} = 8 \\
x_2 = 4 & f[x_2] = -8 \to f[x_1, x_2] = \frac{-16}{2} = -8 \to f[x_0, x_1, x_2] = \frac{-16}{4} = -4
\end{array}$$

$$\lambda_k = \frac{h_k}{h_k + h_{k+1}} \qquad \lambda_1 = \frac{h_1}{h_1 + h_2} \qquad h_1 = x_1 - x_0 = 2$$

$$\lambda_1 = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \qquad h_2 = x_2 - x_1 = 2$$

Zatem M_1 spełnia równanie

$$\lambda_k M_{k-1} + 2M_k + (1-\lambda_k) M_{k+1} = 6 f[x_{k-1}, x_k, x_{k+1}]$$

$$\frac{1}{2} \cdot \overset{=0}{M_0} + 2M_1 + \left(1 - \frac{1}{2}\right)\overset{=0}{M_2} = 6 \cdot (-4)$$

$$2M_1 = -24$$

$$M_1 = -12$$

Czyli

$$s_1(x) = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{6} \cdot \overset{=0}{M_0}(2 - x)^3 + \frac{1}{6}\overset{-12}{M_1}(x - 0)^3 + \left(-8 - \frac{1}{6} \cdot \overset{=0}{M_0} \cdot 2^2\right)(2 - x) + \left(8 - \frac{1}{6}\overset{=-12}{M_1} \cdot 2^2\right)(x - 0)\right]$$

$$s_1(x) = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{6} \cdot (-12)x^3 + (-8)(2 - x) + (8 + 2 \cdot 2^2)x\right] = \frac{1}{2}\left[-2x^3 - 16 + 8x + 16x\right]$$

$$s_1(x) = -x^3 + 12x - 8 \in \Pi_3$$

$S_1(0) = -8$ $\qquad S_1'(x) = -3x^2+12 \quad \in [0, 4]$

$S_1(2) = 8$ $\qquad S_1''(x) = -6x \quad \in [0, 4]$

$$S_2(x) = \frac{1}{2}\Big[\frac{1}{6}\cdot M_1 (4-x)^3 + \frac{1}{6} \overset{0}{M_2}(x-2)^3 +$$
$$+\Big(8 - \frac{1}{6} \overset{-12}{M_1} 2^2\Big)(4-x) +$$
$$+\Big(-8 - \frac{1}{6} \overset{=0}{M_2} \cdot 2^2\Big)(x-2)\Big]$$

$$S_2(x) = \cancel{\tfrac{1}{2}}\Big[-\cancel{2}(64 - 48x + x^2\cdot 12 - x^3) + (\overset{4}{\cancel{8}}+\overset{4}{8})(4-x) + (-\overset{4}{\cancel{8}})(x-1)\Big]$$

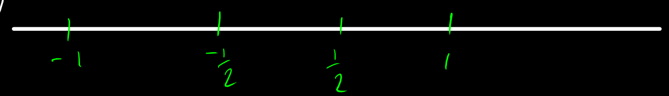
$$S_2(x) = -64 + 48x - x^2\cdot 12 + x^3 + 32 - 8x + 4 - 4x = x^3 - 12x^2 + 36x - 24$$

$S_2(2) = 8$

$S_2(4) = -8$

$$S(x) = \begin{cases} -x^3 + 12x - 8, & x \in [0,2] \\ x^3 - 12x^2 + 36x - 24, & x \in [2,4] \end{cases}$$

b)



x_k	-1	$-1/2$	$1/2$	1
y_k	4	2	-6	-24

$n = 3$

$h_1 = \frac{1}{2}$ $\qquad \lambda_1 = \dfrac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}+1} = \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{2}{3} = \dfrac{1}{3}$

$h_2 = 1$ $\qquad \lambda_2 = \dfrac{1}{1+\frac{1}{2}} = 1\cdot\dfrac{2}{3} = \dfrac{2}{3}$

$h_3 = \frac{1}{2}$ $\qquad \dfrac{\frac{1}{5}+\frac{1}{6}}{2} = \dfrac{\frac{6+5}{30}}{2} = \dfrac{11}{60}$

$x_0 = -1 \;|\; f[x_0] = 4 \to f[x_0,x_1] = \dfrac{-2}{\frac{1}{2}} = -4 \to f[x_0,x_1,x_2] = \dfrac{-4}{\frac{3}{2}} = -4\cdot\dfrac{2}{3} = -\dfrac{8}{3}$

$x_1 = -\frac{1}{2} \;|\; f[x_1] = 2$

$x_2 = \frac{1}{2} \;|\; f[x_2] = -6 \to f[x_1,x_2] = \dfrac{-8}{1} = -8 \to f[x_1,x_2,x_3] = \dfrac{-28}{\frac{3}{2}} = -28\cdot\dfrac{2}{3} = -\dfrac{56}{3}$

$x_3 = 1 \;|\; f[x_3] = -24 \to f[x_2,x_3] = \dfrac{-18}{\frac{1}{2}} = -36$

$f[x_0 \ldots x_3] = -\dfrac{48}{3}\cdot\dfrac{1}{2} =$

$= -8$

$M_0 = M_3 = 0$

$\lambda_1 \overset{=0}{M_0} + 2M_1 + (1-\lambda_1)M_2 = 6\cdot f[x_0,x_1,x_2]$ $\qquad \lambda_2 M_1 + 2M_2 + (1-\lambda_2)M_3 = 6\cdot f[x_1,x_2,x_3]$

$2M + \frac{2}{3}M_2 = -16$ $\qquad \frac{1}{3}M_1 + 2M_2 = -112$

$$\begin{cases} 2M_1 + \frac{2}{3}M_2 = -16 \\ \frac{2}{3}M_1 + 2M_2 = -112 \;/\cdot(-3) \end{cases} \qquad + \begin{cases} 2M_1 + \frac{2}{3}M_2 = -16 \\ -2M_1 - 6M_2 = 336 \end{cases}$$

$-\dfrac{16}{3}M_2 = 320 \;/\cdot\dfrac{-3}{16}$

$M_2 = -60$

$$2m_1 + \frac{2}{3}\cdot(-60) = -16$$

$$2M_1 = -16 + 40$$

$$2m_1 = 24$$

$$m_1 = 12$$

$$\frac{3}{2}$$

$$S_1(x) = 2[\tfrac{1}{6}\cdot\cancel{0}\,(\tfrac{1}{2}-x)^3 + \tfrac{1}{6}\cdot 12(x+1)^3 + (4-\cancel{\tfrac{1}{6}\cdot 0\cdot\tfrac{1}{2}})(-\tfrac{1}{2}-x) + (\cancel{2-\tfrac{1}{6}\cdot 12\cdot\tfrac{1}{2}})(x+1)]$$

$$S_1(x) = 2[2x^3+6x+6x^2+\cancel{2-2}-4x+\tfrac{3}{2}x+\tfrac{3}{2}]$$

$$S_1(x) = 4x^3+12x+12x^2-8x+3x+3$$

$$S_1(x) = 4x^3+12x^2+7x+3$$

$$S_2(x) = 1[\overset{2}{\cancel{\tfrac{1}{6}\cdot 12}}(\tfrac{1}{2}-x)^3 + \tfrac{1}{6}\cdot(-60)(x+\tfrac{1}{2})^3 + (2-\overset{2}{\cancel{\tfrac{1}{6}\cdot 12}}\cdot 1)(\tfrac{1}{2}-x) + (-6-\tfrac{1}{6}(-60))(x+\tfrac{1}{2})]$$

$$S_2(x) = 2\cdot(\tfrac{1}{8}-\tfrac{3}{4}x+\tfrac{3}{2}x^2-x^3) - 10(x^3+\tfrac{3}{2}x^2+\tfrac{3}{4}x+\tfrac{1}{8}) + (0)(\tfrac{1}{2}-x) + (\cancel{-6+10})\,4\cdot(x+\tfrac{1}{2})$$

$$S_2(x) = \tfrac{1}{4} - \tfrac{3}{2}x + 3x^2 - 2x^3 - 10x^3 - 15x^2 - \tfrac{15}{2}x - \tfrac{5}{4} + 4x + 2$$

$$S_2(x) = \tfrac{1}{4}(1-6x+12x^2-8x^3-40x^3-60x^2-30x-5+16x+8)$$

$$S_2(x) = \tfrac{1}{4}(-48x^3-48x^2-20x+4)$$

$$S_2(x) = -12x^3-12x^2-5x+1$$

$$S_3(x) = 2[\tfrac{1}{6}\cdot(-60)(1-x)^3 + \tfrac{1}{6}\cdot 0(x-\tfrac{1}{2})^3 + (-6-\tfrac{1}{6}\cdot(-60)\cdot\tfrac{1}{4})(1-x) + (-24-\tfrac{1}{6}\cdot 0\cdot\tfrac{1}{4})(x-\tfrac{1}{2})]$$

$$-\frac{24+10}{4} = \frac{-14}{4} = -\frac{7}{2}$$

$$S_3(x) = 2[-10(1-3x+3x^2-x^3) + (-6+\tfrac{10}{4})(1-x) + (-24)(x-\tfrac{1}{2})] \qquad -\tfrac{7}{2}$$

$$S_3(x) = 2[-10+30x-30x^2-10x^3-\tfrac{7}{2}+\tfrac{7}{2}x-24x+12]$$

$$S_3(x) = 1[-20+60x-60x^2+20x^3-7+7x-48x+24]$$

$$S_3(x) = 20x^3-60x^2+19x-3$$

$$S(x) = \begin{cases} 4x^3+12x^2+7x+3, & x\in[-1,-\tfrac{1}{2}] \\ -12x^3-12x^2-5x+1, & x\in[-\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2}] \\ 20x^3-60x^2+19x-3, & x\in[\tfrac{1}{2},1] \end{cases}$$

L8.2. $\boxed{\text{1 punkt}}$ Czy funkcja

$$f(x) = \begin{cases} x^3 + 6x^2 + 18x + 13 & \text{dla} \quad -2 \le x \le -1, \\ -5x^3 - 12x^2 + 7 & \text{dla} \quad -1 \le x \le 0, \\ 5x^3 - 12x^2 + 7 & \text{dla} \quad 0 \le x \le 1, \\ -x^3 + 6x^2 - 18x + 13 & \text{dla} \quad 1 \le x \le 2 \end{cases}$$

jest naturalną interpolacyjną funkcją sklejaną trzeciego stopnia?

Sprawdzamy cztery warunki

I $f(x_k) = y_k$ – zakładamy, że warunek zachodzi

II Ciągłość f, f', f'' w przedziale $[-2, 2]$

$f_0(-1) = f_1(-1) \iff -1+6-18+13 = 5-12+7 \iff 0=0$ ✓

$f_1(0) = f_2(0) \iff 7=7$ ✓

$f_2(1) = f_3(1) \iff 5-12+7 = -1+6-18+13 \iff 0=0$ ✓

$$f'(x) = \begin{cases} 3x^2 + 12x + 18 \\ -15x^2 - 24x \\ 15x^2 - 24x \\ -3x^2 + 12x - 18 \end{cases}$$

$$f''(x) = \begin{cases} 6x + 12 \\ -30x - 24 \\ 30x - 24 \\ -6x + 12 \end{cases}$$

$f_0'(-1) = f_1'(-1) \iff 3-12+18 = -15+24 \iff 9=9$ ✓

$f_1'(0) = f_2'(0) \iff 0=0$ ✓

$f_2'(1) = f_3'(1) \iff 15-24 = -3+12-18 \iff -9=-9$ ✓

$f_0''(-1) = f_1''(-1) \iff -6+12 = 30-24 \iff 6=6$ ✓

$f_1''(0) = f_2''(0) \iff -24=-24$ ✓

$f_2''(1) = f_3''(1) \iff 30-24 = -6+12 \iff 6=6$ ✓

III $s|_{[x_{k-1}, x_k]} \in \Pi_3$ $(1 \le k \le n)$ Każdy wielomian jest stopnia ≤ 3, zatem warunek jest spełniony.

IV $f''(a) = f''(b) = 0$

$f''(-2) = f''(2)$

$-12+12 = -12+12$

$0=0$ ✓

Wszystkie warunki są spełnione, zatem funkcja jest NIFS3.

L8.3. $\boxed{\text{1 punkt}}$ Czy istnieją takie stałe a, b, c, d, że funkcja

$$f(x) = \begin{cases} 2020x & \text{dla} \quad -2 \le x \le -1, \\ ax^3 + bx^2 + cx + d & \text{dla} \quad -1 \le x \le 1, \\ -2020x & \text{dla} \quad 1 \le x \le 2 \end{cases}$$

jest naturalną interpolacyjną funkcją sklejaną trzeciego stopnia?

$$f'(x) = \begin{cases} 2020 \\ 3ax^2 + 2bx + c \\ -2020 \end{cases}$$

Sprawdźmy, czy funkcja jest ciągła na przedziałach.

$$f''(x) = \begin{cases} 0 \\ 6ax + 2b \\ 0 \end{cases}$$

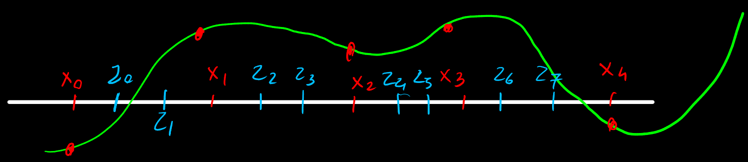
$$\begin{cases} f_0(-1) = f_1(-1) \\ f_1(1) = f_2(1) \\ f_0'(-1) = f_1'(-1) \\ f_1'(1) = f_2'(1) \\ f_0''(-1) = f_1''(-1) \\ f_1''(1) = f_2''(1) \end{cases} \qquad \begin{cases} -2020 = -a + b - c + d \\ -2020 = a + b + c + d \\ 2020 = 3a - 2b + c \\ -2020 = 3a + 2b + c \\ 0 = -6a + 2b \\ 0 = 6a + 2b \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} a = 0 \\ b = 0 \end{matrix}$$

$$\begin{cases} -2020 = -a + b - c + d \\ -2020 = a + b + c + d \\ 2020 = 3a - 2b + c \\ -2020 = 3a + 2b + c \end{cases} \equiv \begin{cases} -2020 = -c + d \\ -2020 = c + d \\ 2020 = c \\ -2020 = c \end{cases} \Downarrow \begin{cases} c = 2020 \\ c = -2020 \end{cases}$$

sprzeczność

Otrzymaliśmy sprzeczność, zatem ten warunek nie jest spełniony i $f(x)$ nie jest NIFS3.

L8.5. $\boxed{\text{2 punkty}}$ Niech będzie $\mathbf{x}{:=}[x_0, x_1, \ldots, x_n]$ $(x_0 < x_1 < \cdots < x_n)$, $\mathbf{y}{:=}[y_0, y_1, \ldots, y_n]$ oraz $\mathbf{z}{:=}[z_0, z_1, \ldots, z_m]$. Niech s_n oznacza naturalną interpolacyjną funkcję sklejaną trzeciego stopnia (*w skrócie*: NIFS3) spełniającą warunki $s_n(x_k) = y_k$ $(0 \le k \le n)$. W języku `PWO++` procedura `NSpline3(x,y,z)` wyznacza wektor `Z` $:= [s_n(z_0), s_n(z_1), \ldots, s_n(z_m)]$, z tym, że **musi być** $m < 2n$. Załóżmy, że wartości pewnej funkcji ciągłej f znane są **jedynie** w punktach $x_0 < x_1 < \cdots < x_{100}$. Wiadomo, że NIFS3 odpowiadająca danym $(x_k, f(x_k))$ $(0 \le k \le 100)$ bardzo dobrze przybliża funkcję f. Wywołując procedurę `NSpline3` **tylko raz**, opracuj algorytm numerycznego wyznaczania przybliżonych wartości wszystkich miejsc w przedziale $[x_0, x_{100}]$, w których funkcja f ma ekstrema lokalne.



Do każdego przedziału $[x_i, x_{i+1}]$ dodajemy dwa punkty z (ilustracja powyżej). W ten sposób stosując interpolację Newtona uzyskamy dokładne przybliżenie $S_n(x)$ na tym przedziale (bo $S_n(x)$ jest wielomianem stopnia ≤ 3.
Obliczamy wartości $S_n(z_i)$ obliczając wektor Z przy pomocy procedury NSpline3(x, y, z).

Wiemy, że wielomiany interpolacyjne dobrze przybliżają $s_n(x)$, zatem użyjmy ich do obliczenia ekstremów S_n. Obliczając pochodne wiel. interp. otrzymamy wielomiany stopnia ≤ 2, a z takich łatwo możemy wyznaczyć miejsca zerowe.
Pochodne możemy wyznaczyć stosując algorytm przekształcający wielomian z postaci Newtona do postaci potęgowej. Wtedy

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$
$$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$$
$$f''(x) = 6ax + 2b$$

lub

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$
$$f'(x) = 2ax + b$$
$$f''(x) = 2a$$

Niech $f(x)$ – wielomian przybliżający funkcję pierwotną na przedziale $[x_i, x_{i+1}]$.

$1°$ *$f(x)$ – wielomian trzeciego stopnia*

$$f'(x) = ax^2 + bx + c$$

$$x_0 = \frac{\left(-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}\right)}{2a}$$

Wystarczy sprawdzić $f''(x_0) \neq 0$

$2°$ $f'(x) = ax + b$

$$x_0 = -\frac{b}{a}$$

Wystarczy sprawdzić, czy $f''(x_0) \neq 0$.
Jeśli $f''(x_0) > 0$, wtedy x_0 to minimum lokalne.
Jeśli $f''(x_0) < 0$, wtedy x_0 to maksimum lokalne.

Jeśli f jest stopnia stopnia <2 to $f''(x) = 0$, więc wtedy nie istnieje eksl

Wiemy, że te miejsca zerowe są ekstremami tych wielomianów, bo funkcja interpolowana jest dwukrotnie różniczkowalna i $S_n(x_i) = S_n(x_{i+1})$, $S_n'(x_i) = S_n'(x_{i+1})$, $S_n''(x_i) = S_n''(x_{i+1})$ z zał., że s_n to NIFS.
Zatem wyznaczyliśmy wszystkie ekstrema funkcji przybliżanej przez S_n.
Ten sposób nie uwzględnia przypadku, gdy $f''(x_0) = 0$. Wtedy nie wiemy czy x_0 to ekstremum.

Alternatywnie możemy obliczyć wzór pierwszej pochodnej. Wtedy wyznaczamy x_0 t. że $f'(x_0)=0$ w sposób opisany wyżej. Możemy wziąć małą liczbę $\delta>0$ i sprawdzić, czy zmieniła się znak pochodnej w punkcie x_0, tzn.

$f'(x_0+\delta)>0$ — $f'(x_0+\delta)<0$

$f'(x_0-\delta)<0$ — $f'(x_0-\delta)>0$

Wtedy mamy maksimum. — Wtedy mamy minimum.

Weźmy $\delta < \frac{\min|x_0-x_0'|}{2}$, gdzie $|x_0-x|$ to odległość między sąsiednimi miejscami zerowymi.

L8.4. [1 punkt] Niech s będzie naturalną funkcją sklejaną trzeciego stopnia interpolującą funkcję f w węzłach $x_0, x_1, \ldots, x_n$ $(a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b)$. Jak wiemy, *momenty* $M_k := s''(x_k)$ $(k = 0, 1, \ldots, n)$ spełniają układ równań

(1) $$\lambda_k M_{k-1} + 2M_k + (1-\lambda_k)M_{k+1} = d_k \quad (k = 1, 2, \ldots, n-1),$$

gdzie $M_0 = M_n = 0$ oraz

$$d_k := 6f[x_{k-1}, x_k, x_{k+1}], \quad \lambda_k := h_k/(h_k + h_{k+1}), \quad h_k := x_k - x_{k-1}.$$

Sformułuj i uzasadnij oszczędny algorytm rozwiązywania układu (1). Jaki jest koszt jego realizacji?

Zaczynamy z układem równań

$$\begin{cases} \lambda_1 \underbrace{M_0}_{=0} + 2M_1 + (1-\lambda_1)M_2 = d_1 \\ \lambda_2 M_1 + 2M_2 + (1-\lambda_2)M_3 = d_2 \\ \lambda_3 M_2 + 2M_3 + (1-\lambda_3)M_4 = d_3 \\ \vdots \\ \lambda_{n-1}M_{n-2} + 2M_{n-1} + (1-\lambda_{n-1})\underbrace{M_n}_{=0} = d_{n-1} \end{cases}$$

Zauważmy, że $\lambda_1 M_0 + 2M_1 + (1-\lambda_1)M_2 = d_1 \iff M_1 = \frac{d_1 - (1-\lambda_1)M_2}{2}$

Zatem mamy, że

$M_1 = \frac{d_1}{2} + \frac{(\lambda_1 - 1)}{2}M_2$ Nazwijmy $a_1 = \frac{d_1}{2}$

$b_1 = \frac{\lambda_1 - 1}{2}$

Następnie, możemy użyć M_1 do obliczenia M_2.

$$\lambda_2 M_1 + 2M_2 + (1-\lambda_2)M_3 = d_2$$

$$\lambda_2 a_1 + \lambda_2 b_1 M_2 + 2M_2 + (1-\lambda_2)M_3 = d_2$$

$$M_2(\lambda_2 b_1 + 2) = d_2 - (1-\lambda_2)M_3 - \lambda_2 a_1$$

$$M_2 = \frac{d_2 - \lambda_2 a_1}{\lambda_2 b_1 + 2} + (\lambda_2 - 1)M_3$$

Zauważmy, że dla każdego $k = 2 \ldots n-2$ otrzymamy podobny wzór

$$\lambda_k M_{k-1} + 2M_k + (1-\lambda_k)M_{k+1} = d_k$$

$$\lambda_k a_{k-1} + \lambda_k b_{k-1} M_k + 2M_k + (1-\lambda_k)M_{k+1} = d_k$$

$$M_k = \underbrace{\frac{d_k - \lambda_k a_{k-1}}{\lambda_k b_{k-1} + 2}}_{a_k} + \underbrace{\frac{\lambda_k - 1}{\lambda_k b_{k-1} + 2}}_{b_k} M_{k+1}$$

Sprawdźmy co się dzieje dla $n-1$

$$M_{n-2} = a_{n-2} + b_{n-2} M_{n-1}$$

$$\lambda_{n-1} M_{n-2} + 2M_{n-1} + (1-\lambda_{n-1}) \overset{=0}{M_n} = d_{n-1}$$

$$\lambda_{n-1} a_{n-2} + \lambda_{n-1} b_{n-2} M_{n-1} + 2M_{n-1} + (1-\lambda_{n-1}) \overset{=0}{M_n} = d_{n-1}$$

$$M_{n-1}(\lambda_{n-1} b_{n-2} + 2) = d_{n-1} - \lambda_{n-1} a_{n-2}$$

$$M_{n-1} = \frac{d_{n-1} - \lambda_{n-1} a_{n-2}}{\lambda_{n-1} b_{n-2} + 2}$$

Otrzymujemy zatem

$$\begin{cases} M_0 = 0 \\ M_1 = a_1 + b_1 M_2 \\ M_k = a_k + b_k M_{k+1}, \quad k = 2 \ldots n-2 \\ M_{n-1} = a_{n-1} \\ M_n = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_k = \dfrac{d_k - \lambda_k a_{k-1}}{\lambda_k b_{k-1} + 2} \\ b_k = \dfrac{\lambda_k - 1}{\lambda_k b_{k-1} + 2} \end{cases} \qquad a_1 = \frac{d_1}{2}, \quad b_1 = \frac{\lambda_1 - 1}{2}$$

$$a_{n-1} = \frac{d_{n-1} - \lambda_{n-1} a_{n-2}}{\lambda_{n-1} b_{n-2} + 2}$$

Zauważmy, że $d_k = 6f[x_{k-1}, x_k, x_{k+1}]$ możemy obliczyć w czasie stałym, podobnie λ_k, zatem obliczenie a i b przeprowadzimy rekurencyjnie po $O(n)$ wyrazów, zatem złożoność tej operacji wynosi $O(n)$.

Mając wyznaczone a, b możemy rekurencyjnie wyznaczyć wszystkie momenty M_k w czasie $O(n)$.

Zauważmy, że jest to algorytm podany na wykładzie

Obliczamy pomocnicze wielkości $p_1, p_2, \ldots, p_{n-1}, q_0, q_1, \ldots, q_{n-1}, u_0, u_1, \ldots, u_{n-1}$ w następujący sposób rekurencyjny:

$$q_0 := u_0 := 0,$$

$$\left.\begin{aligned} p_k &:= \lambda_k q_{k-1} + 2, \\ q_k &:= (\lambda_k - 1)/p_k, \\ u_k &:= (d_k - \lambda_k u_{k-1})/p_k \end{aligned}\right\} \quad (k = 1, 2, \ldots, n-1),$$

gdzie

$$d_k := 6f[x_{k-1}, x_k, x_{k+1}] \qquad (k = 1, 2, \ldots, n-1).$$

Wówczas

$$\begin{cases} M_{n-1} = u_{n-1}, \\ M_k = u_k + q_k M_{k+1} \qquad (k = n-2, n-3, \ldots, 1). \end{cases}$$

Uwagi notacji

$$a_k = \frac{d_k - \lambda_k a_{k-1}}{\lambda_k b_{k-1} + 2}$$

$$b_k = \frac{\lambda_k - 1}{\lambda_k b_{k-1} + 2}$$

p_k – mianownik a_k i b_k

q_k – licznik b_k

u_k – licznik a_k