1. Wykazać, że dla rozkładu Cauchy'ego wartość oczekiwana nie istnieje.

$$f(x) = \frac{1}{\pi \cdot (1 + x^2)}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Wartość oczekiwana jest zdefiniowana jako $E(X) = \int_{\mathbb{R}} x f(x)\, dx$. W tym przypadku

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{\pi(1+x^2)}\, dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{1+x^2}\, dx = \left| \begin{array}{l} t = 1+x^2 \\ dt = 2x\, dx \\ \frac{1}{2} dt = x\, dx \end{array} \right| = \frac{1}{2\pi} \int_{0}^{\infty} \frac{1}{t}\, dt$$

$$E(X) = \frac{1}{2\pi} \left[\log(t) \right]_0^{\infty} = \frac{1}{2\pi} \left[\log(1+x^2) \right]_{-\infty}^{\infty}$$

$$E(X) = \frac{1}{2\pi} \left[\lim_{x \to \infty} \log(1+x^2) - \lim_{x \to -\infty} \log(1+x^2) \right] = \frac{1}{2\pi} \left[\infty - \infty \right] = ?$$

Z definicji: wartość oczekiwanej wychodzi symbol nieoznaczony $\infty - \infty$. Wartość całki nie jest zbieżna, zatem wartość oczekiwana jest nieokreślona.