Analiza numeryczna (L)
2.12.2020 r.

- Sprawdzian

Przykład

$S = \boxed{NIE!}$ S

- $s(t) = x_k$ $(0 \le t \le 1;\ a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b)$
- $s, s', s'' \in C[x_0, b]$
- $s|_{[x_{k-1}, x_k]} \in \Pi_3$ $(1 \le k \le n)$
- $\boxed{s'(a) = s'(b) = 0}$

$x \in [x_{k-1}, x_k]$ $\Rightarrow$ funkcja $s(x)$ na S — warunki

$\hookrightarrow$ wykłądnicy tam $M_k := s''(x_k)$

$\hookrightarrow$ trójprzekątniowy układ równań

odpowiednie rozwiązywanie układów równań w $O(n)$

- Interpolacja parametryczna
- zastosowania w grafice
  - $\hookrightarrow$ aproximacja krzywych

$\beta = (x_k, y_k) \in \mathbb{R}^2$

$\begin{cases} \beta_x(t_k) = x_k \\ \beta_y(t_k) = y_k \end{cases}$ $(0 \le k \le N)$ np. $t_k := \frac{k}{N}$

Szukamy NIE!=3

Wykład 3. Krzywe Béziera i ich zastosowania w grafice komputerowej

Oznaczenia

- $\mathbb{R}^d$ - wektory, np. $v \in \mathbb{R}^2$ - wektor na płaszczyźnie
- $\mathbb{E}^d$ - punkty, np. $A \in \mathbb{E}^2$ - punkt na płaszczyźnie

- kombinacja barycentryczna punktów

  interpretacja $\in \sum_{i=0}^{n} \alpha_i W_i$: $\sum_{i=0}^{n} \alpha_i = 1$, $W_i \in \mathbb{E}^2$

- kombinacja wypukła $\Rightarrow \alpha_i \ge 0$ $\in \mathbb{E}^2$ - punkt na płaszczyźnie.

Definicja (wielomiany Bernsteina stopnia n)

$$B_k^n(t) := \binom{n}{k} t^k (1-t)^{n-k} \quad (0 \le k \le n,\ n \in \mathbb{N})$$

Podstawowe własności

- $B_i^n(t) \ge 0$ dla $t \in [0,1]$
- B_k^n osiąga w przedziale $[0,1]$ dokładnie jedno maksimum w punkcie $t = \frac{k}{n}$.
- $B_k^n(t) = (1-t) B_k^{n-1}(t) + t B_{k-1}^{n-1}(t)$ $(0 \le k \le n)$
- $\left(B_k^n(t)\right)' = n\left(B_{k-1}^{n-1}(t) - B_k^{n-1}(t)\right)$

Umowa: $B_k^n := 0$ dla $p < 0$ lub $q > p$

(1) $\boxed{\sum_{k=0}^{n} B_k^n(t) \equiv 1}$

- Wielomiany $B_0^n, B_1^n, \ldots, B_n^n \in \Pi_n \setminus \Pi_{n-1}$ tworzą bazę przestrzeni Π_n, tzn.

$$\mathrm{Lin}\{B_k^n : k = 0, 1, \ldots, n\} \equiv \Pi_n.$$

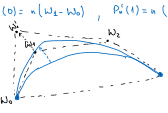
Definicja (krzywa Béziera)

$$\boxed{P_n : [0,1] \to \mathbb{E}^d} \quad P_n(t) := \sum_{i=0}^{n} B_i^n(t) W_i \quad (0 \le t \le 1;\ W_i \in \mathbb{E}^2)$$

($P_n(t) \in \mathbb{E}^d$; $B_i^n(t)$ - stopnie krzywej; W_i - punkty kontrolne)

Podstawowe własności

- $P(0) = W_0$, $P_n(1) = W_n$
- $P_n([0,1]) \subset \mathrm{conv}\{W_0, W_1, \ldots, W_n\}$ ← otoczka wypukła
- $P_n'(0) = n(W_1 - W_0)$, $P_n'(1) = n(W_n - W_{n-1})$ ← wektory (1)

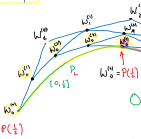


Pytanie

W jaki sposób efektywnie wyznaczać punkt na krzywej Béziera? To znaczy: jak dla danego $t \in [0,1]$ obliczyć $P_n(t)$?

Ze względu uwarunkowań i wzoru geometrycznych punktów na krzywej Béziera zaleca się obliczać przy pomocy tzw. algorytmu de Casteljau. ⇒ patrz prezentacja

Interpretacja geometryczna



Algorytm de Casteljau nie tylko oblicza punkt na krzywej, ale umożliwia też jej podział.

„lewa" część ⇒ P_L to krzywa Béziera z punktami kontrolnymi $W_0^{(i)}$ $(0 \le i \le n)$

„prawa" część ⇒ P_R to krzywa Béziera z punktami kontrolnymi $W_i^{(n-i)}$ $(0 \le i \le n)$

Przekształcenie krzywych Béziera

Następnie zaczynamy tzw. proces podnoszenia stopnia krzywej Béziera.

Niech dana będzie krzywa Béziera stopnia n postaci

$$P_n(t) := \sum_{k=0}^{n} B_k^n(t) W_k \quad (t \in [0,1]),$$

oraz krzywa Béziera stopnia $n+1$ postaci:

$$R_{n+1}(t) := \sum_{k=0}^{n+1} B_k^{n+1}(t) W_k^{\langle 1 \rangle}.$$

Pytanie

Czy można dobrać punkty $W_k^{\langle 1 \rangle}$ w taki sposób, aby

$$P_n(t) \equiv R_{n+1}(t) \ ?$$

Odpowiedź

TAK! Wykorzystaj przyjęć

$$W_k^{\langle 1 \rangle} := \frac{k}{n+1} W_{k-1} + \left(1 - \frac{k}{n+1}\right) W_k \quad (k = 0, 1, \ldots, n+1;\ W_{-1} := W_{n+1} := 0).$$

Wniosek

Jeśli porównamy z dowolną krzywą Béziera to - bez utraty ogólności - możemy założyć, że mają one ten sam stopień.

Wykorzystamy proces podnoszenia stopnia do transformacji jednej krzywej Béziera w inną. Niech dane będą krzywe Béziera

P_n - stopnia n oraz Q_m - stopnia m $(n \le m)$. Rozważmy następującą krzywą pomocniczą:

$$S_L(t) := (1-\alpha) \underbrace{P_n(t)}_{\in \mathbb{E}^2} + \alpha \underbrace{Q_m(t)}_{\in \mathbb{E}^2}. \quad (\alpha \in [0,1]).$$

Krzywa $S_L(t)$ jest dobrze określona tzn. dla wszystkich $t \in [0,1]$ i $t \in [0,1]$ $S_L(t) \in \mathbb{E}^2$ czyli jest punktem na płaszczyźnie.

Co więcej $S_L(t)$ to krzywa Béziera stopnia m. Znajdziemy jej punkty kontrolne:

$$S_L(t) = (1-\alpha) \sum_{k=0}^{n} \overbrace{W_k}^{\text{punkty kontrolne } P_n} \underbrace{B_k^n(t)}_{\text{podstawowy stopień dla } m} + \alpha \sum_{i=0}^{m} \overbrace{V_i}^{\text{punkty kontrolne } Q_m} B_i^m(t) =$$

$$= (1-\alpha) \sum_{k=0}^{n} \underbrace{W_k^{(m-n)}}_{\text{punkty kontrolne dla } m} \underbrace{B_k^m(t)}_{\text{podstawowy stopień dla } m} + \alpha \sum_{i=0}^{m} V_i B_i^m(t) =$$

$$= \sum_{j=0}^{m} Z_j B_j^m(t), \text{ gdzie } \rightarrow \boxed{Z_j := (1-\alpha) W_j^{(m-n)} + \alpha V_j \quad (j = 0, 1, \ldots, m)}$$