ANL Lista 4 Krystian Josianek

L4.1. $\boxed{\text{1 punkt}}$ Niech $[a_0, b_0], [a_1, b_1], \ldots$ będzie ciągiem przedziałów zbudowanym za pomocą metody bisekcji zastosowanej do lokalizacji zer funkcji f ciągłej w przedziale $[a_0, b_0]$, niech ponadto $m_{n+1} := \frac{1}{2}(a_n + b_n)$, $\alpha = \lim_{n\to\infty} m_n$ oraz $e_n := \alpha - m_{n+1}$.

(a) Wykaż, że $[a_n, b_n] \supset [a_{n+1}, b_{n+1}] \quad (n = 0, 1, \ldots)$.
(b) Ile wynosi długość przedziału $[a_n, b_n] \quad (n = 0, 1, \ldots)$?
(c) Wykaż, że

(1) $$|e_n| \le 2^{-n-1}(b_0 - a_0) \qquad (n \ge 0).$$

(d) Czy może zdarzyć się, że $a_0 < a_1 < a_2 < \ldots$?

a) Niech $m_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}$ – środek $[a_n, b_n]$. Wtedy mamy dwa przypadki

I $[a_{n+1}, b_{n+1}] = [m_{n+1}, b_{n+1}] \subseteq [a_n, b_n]$

II $[a_{n+1}, b_{n+1}] = [a_{n+1}, m_{n+1}] \subset [a_n, b_n]$

Zatem $[a_{n+1}, b_{n+1}] \subset [a_n, b_n]$. ☒

b) Pokażemy, że $[a_n, b_n]$ jest długości $d_n = \frac{|a_0 - b_0|}{2^n}$ dla $n = 0, 1, \ldots$

Przeprowadźmy dowód przez indukcję.

Podstawa:

dla $n = 0$

$$d_0 = \frac{|a_0 - b_0|}{2^0} = |a_0 - b_0|$$

Krok: Załóżmy, że $d_n = \frac{|a_0 - b_0|}{2^n}$. Pokażmy dla $n+1$

$$d_{n+1} = \frac{|a_0 - b_0|}{2^{n+1}} = \frac{|a_0 - b_0|}{2^n} \cdot \frac{1}{2} = \frac{d_n}{2}$$, ale

każdy kolejny przedział zmniejszamy o połowę, zatem $d_{n+1} = \frac{d_n}{2}$, co kończy dowód. ☒

c) $|e_n| \le 2^{-n-1}(b_0 - a_0) \quad (n \geq 0)$

$e_n := \alpha - m_{n+1}$

m_{n+1} to środek przedziału $[a_n, b_n]$. W kolejnym kroku metody m_{n+1} to jeden z końców przedziału

Mamy dwa przypadki

długość $(n+1)$-go przedziału $(b_0 \geq a_0)$

I m_{n+1} to początek przedziału $(n+1)$-go

$$|\alpha - m_{n+1}| \le |b_{n+1} - a_{n+1}|$$

$$b_{n+1} \geq \alpha \geq m_{n+1}$$

II m_{n+1} to koniec $(n+1)$-go przedziału $\quad \alpha \le m_{n+1}$

$$|\alpha - m_{n+1}| \le |b_{n+1} - a_{n+1}|$$

Stąd $|\alpha - m_{n+1}| \le |b_{n+1} - a_{n+1}| = \frac{|b_0 - a_0|}{2^{n+1}} = |2^{-n-1}(b_0 - a_0)|$, ale $b_0 \geq a_0$, stąd możemy opuścić wartość bezwzględną z prawej strony. Zatem

$$\underline{|\alpha - m_{n+1}| \le 2^{n-1}(b_0 - a_0)}$$

d) Jest to możliwe, wystarczy ustalić $\alpha = b_0$ lub, w przypadku skończonej precyzji: $\alpha \in [a_0, b_0]$ $\alpha \approx b_0$.

L4.2. 1 punkt Ile kroków według metody bisekcji należy wykonać, żeby wyznaczyć zero α z błędem bezwzględnym mniejszym niż zadana liczba $\varepsilon > 0$?

Korzystamy ze wzoru z pierwszego zadania

$$|e_n| \le \frac{b_0 - a_0}{2^{n+1}}$$

Chcemy, żeby $|e_n| < \varepsilon$, zatem $\frac{b_0-a_0}{2^{n+1}} < \varepsilon \ / \cdot \frac{2^{n+1}}{\varepsilon}$

$$\frac{b_0-a_0}{\varepsilon} < 2^{n+1} \ / \log_2$$

$$\log_2\left(\frac{b_0-a_0}{\varepsilon}\right) < n+1$$

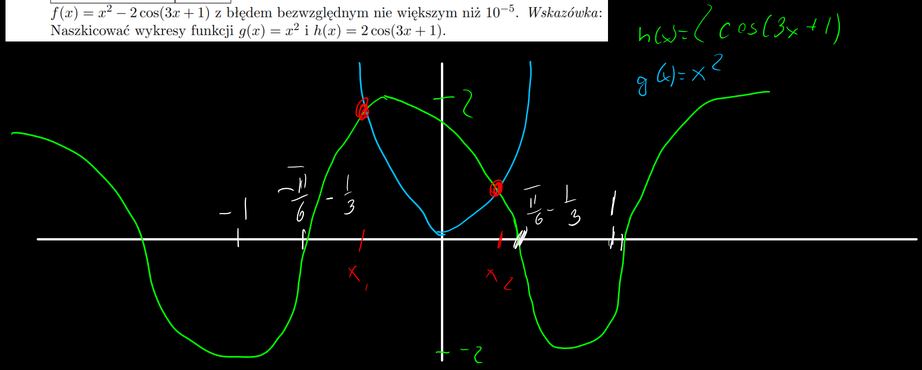
$$\log_2\left(\frac{b_0-a_0}{\varepsilon}\right) - 1 < n$$, zatem

potrzebujemy $n = \left\lceil \log_2\left(\frac{b_0-a_0}{\varepsilon}\right) - 1 \right\rceil$ kroków.

L4.3. **Włącz komputer!** 1 punkt Wykonaj 5 pierwszych kroków metody bisekcji dla funkcji $f(x) = x - 0.49$ i wartości początkowych $a_0 = 0$, $b_0 = 1$. Porównaj wartości błędów $|e_n|$ $(1 \le n \le 5)$ z ich oszacowaniami (1) (oznaczenia – jak w zadaniu **L4.1**). Skomentuj wyniki.

```
e = 0.010000000000000009 dla m = 0.5, gdzie przybliżenie = 0.5
e = 0.24 dla m = 0.25, gdzie przybliżenie = 0.25
e = 0.11499999999999999 dla m = 0.375, gdzie przybliżenie = 0.125
e = 0.05249999999999999 dla m = 0.4375, gdzie przybliżenie = 0.0625
e = 0.021249999999999999 dla m = 0.46875, gdzie przybliżenie = 0.03125
```

L4.4. **Włącz komputer!** 1 punkt Stosując metodę bisekcji, wyznaczyć wszystkie zera funkcji $f(x) = x^2 - 2\cos(3x+1)$ z błędem bezwzględnym nie większym niż 10^{-5}. *Wskazówka:* Naszkicować wykresy funkcji $g(x) = x^2$ i $h(x) = 2\cos(3x+1)$.



x_1 oraz x_2 to miejsca zerowe $f(x) = x^2 - 2\cos(3x+1)$

Zatem zastosujemy metodę bisekcji dla dwóch przedziałów $[-1, 0]$ i $[0, 1]$.

Policzmy ile kroków potrzebujemy dla błędu $\varepsilon < 10^{-5}$

$$\varepsilon = 10^{-5} > \frac{a_0 - b_0}{2^{n+1}}$$

$$n = \left\lceil \log_2\left(\frac{a_0-b_0}{\varepsilon}\right) - 1 \right\rceil$$

$$n = \left\lceil \log_2(10^5) - 1 \right\rceil = 16$$

Program zwrócił wartości

```
x0 = -0.759422
x1 = 0.184593
```

Popularne narzędzie obliczeniowe zwróciło

Solutions:

$x \approx -0.759426$

$x \approx 0.184586$

Więc wyniki są poprawne.

L4.6. **Włącz komputer!** 1 punkt Stosując metodę Newtona, zaproponuj algorytm numerycznego obliczania $\frac{1}{\sqrt{a}}$ $(a > 0)$ bez wykonywania dzieleń. Opracowaną metodę **sprawdź eksperymentalnie**, w tym zbadaj m.in. jak warto dobierać x_0 oraz ile średnio iteracji wystarczy do osiągnięcia satysfakcjonujących wyników.

Chcemy policzyć wartość $\frac{1}{\sqrt{a}}$ znając a. Zaczniemy od przedstawienia problemu jako funkcji $f(x)$.

Niech $x = \frac{1}{\sqrt{a}}$ to miejsce zerowe

$$x^2 = \frac{1}{a} \quad / \cdot \frac{a}{x^2}$$

$$a = \frac{1}{x^2}$$

$$f(x) = \frac{1}{x^2} - a = 0$$

Teraz z metody Newtona mamy, że kolejne przybliżenia to

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^{-2} - a}{-2x_n^{-3}} = x_n + \frac{1}{2}\left(x_n - a x_n^3\right)$$

$$\frac{1}{\sqrt{a}} \approx x_{n+1} = \frac{3}{2}x_n - \frac{a x_n^3}{2} = \frac{1}{2}\left(3x_n + a x_n^3\right)$$

Eksperymentalnie można zaobserwować, że musimy wybierać coraz mniejsze x dla coraz większych a.

x_0: `1.2, 1.2, 0.9, 0.9, 0.7};`
a: `2, 3, 3, 4, 4};`

dla tych wartości widać zmianę dokładności metody

Średnio trzeba wykonać ok. 5 iteracji.