L11.1. [1 punkt] Uzasadnij proces *ortogonalizacji Grama-Schmidta.*

Udowodnijmy indukcyjnie, że w procesie ortogonalizacji Grama-Schmidta po n krokach algorytmu powstaje ciąg wielomianów ortogonalnych.

Pokażmy w tym celu, że w każdym kroku algorytmu dostajemy układ wielomianów ortogonalnych, tzn. że
$\forall_{i,j}$, $i \neq j$ $\langle f_i, f_j \rangle_N = 0$, $i = j$ $\langle f_i, f_j \rangle_N > 0$.

Podstawa: $n = 0$

$$f_0 = g_0$$

Każda funkcja jest ortogonalna do samej siebie, więc mamy układ ortogonalny.

Krok: Załóżmy, że po n krokach powstaje ukł. n wiel. ortogonalnych. Pokażmy, że wtedy po $n+1$ krokach powstanie ukł. wiel. ort.

W $n+1$-szym kroku powstaje

$$f_{n+1} = g_{n+1} - \sum_{i=0}^{n} \frac{\langle g_{n+1}, f_i \rangle_N}{\langle f_i, f_i \rangle_N} f_i .$$

Pokażmy, że jest on ortogonalny do wszystkich f_i wybranych w poprzednich krokach. Weźmy dowolne $j < n+1$, wtedy

możemy zastosować własności z wykładu
1) $\langle f+g, h \rangle = \langle f, h \rangle + \langle g, h \rangle$
2) $\langle \alpha f, g \rangle = \alpha \langle f, g \rangle$

$$\langle f_j, f_{n+1} \rangle_N = \langle f_j, g_{n+1} - \sum_{i=0}^{n} \frac{\langle g_{n+1}, f_i \rangle_N}{\langle f_i, f_i \rangle_N} f_i \rangle_N$$

$$\langle f_j, f_{n+1} \rangle_N = \langle f_j, g_{n+1} \rangle - \langle f_j, \sum_{i=0}^{n} \frac{\langle g_{n+1}, f_i \rangle_N}{\langle f_i, f_i \rangle_N} f_i \rangle_N$$

$$\langle f_j, f_{n+1} \rangle_N = \langle f_j, g_{n+1} \rangle - \langle f_j, \left(\frac{\langle g_{n+1}, f_0 \rangle_N}{\langle f_0, f_0 \rangle_N} + \dots + \frac{\langle g_{n+1}, f_n \rangle_N}{\langle f_n, f_n \rangle_N} \right) f_i \rangle_N$$

i ponownie zastosować własność 1)

$$\langle f_j, f_{n+1} \rangle_N = \langle f_j, g_{n+1} \rangle - \sum_{i=0}^{n} \langle f_j, \frac{\langle g_{n+1}, f_i \rangle_N}{\langle f_i, f_i \rangle_N} f_i \rangle_N$$

$\frac{\langle g_{n+1}, f_i \rangle_N}{\langle f_i, f_i \rangle_N}$ to liczba, więc

$$\langle f_j, f_{n+1} \rangle_N = \langle f_j, g_{n+1} \rangle - \sum_{i=0}^{n} \frac{\langle g_{n+1}, f_i \rangle_N}{\langle f_i, f_i \rangle_N} \langle f_j, f_i \rangle_N$$

ale wiemy, że dla n kroków mamy ciąg wiel. ort. $f_0, f_1 \dots f_n$, zatem dla $0 \le i, j \le n$ $\langle f_i, f_j \rangle = 0$, $i \neq j$, stąd

$$\langle f_j, f_{n+1} \rangle_N = \langle f_j, g_{n+1} \rangle - \frac{\langle g_{n+1}, f_j \rangle_N}{\cancel{\langle f_j, f_j \rangle_N}} \cancel{\langle f_j, f_j \rangle_N}$$

$$\langle f_j, f_{n+1} \rangle_N = \langle f_j, g_{n+1} \rangle - \langle g_{n+1}, f_j \rangle_N$$

, ale skoro $\langle g, h \rangle_N = \langle h, g \rangle_N$, to

$$\langle f_j, f_{n+1} \rangle_N = \langle f_j, g_{n+1} \rangle - \langle f_j, g_{n+1} \rangle_N = 0 \quad \blacksquare$$

Zatem po $n+1$ krokach otrzymujemy ciąg $n+1$ wiel. ortogonalnych.

L11.2. 1 punkt Niech P_k $(1 \le k \le N)$ będzie k-tym wielomianem ortogonalnym względem iloczynu skalarnego $(\cdot,\cdot)_N$. Pokaż, że dla dowolnego wielomianu $w \in \Pi_{k-1}$ jest $(w, P_k)_N = 0$.

2. P_k $(1 \le k \le N)$ – k-ty wiel. ortogonalny wzg. $(\cdot,\cdot)_N$, $w \in \Pi_{k-1}$. Pokaż, że $(w, P_k)_N = 0$

$$(f,g)_N = \sum_{n=0}^{N} f(x_n)g(x_n)$$

$$(w,P_k)_N = \sum_{n=0}^{N} w(x_n)P_k(x_n)$$

Skoro P_k – wiel. ort. wzg. $(\cdot,\cdot)_N$ i $w \in \Pi_{k-1}$, to

$$w = \alpha_0 P_0 + \alpha_1 P_1 + \ldots + \alpha_{k-1} P_{k-1}$$

$$(w,P_k)_N = \sum_{n=0}^{N} w(x_n)P_k(x_n)$$

$$(w,P_k)_N = (\alpha_0 P_0 + \alpha_1 P_1 + \ldots + \alpha_N P_N, P_k)_N = (\alpha_0 P_0, P_k)_N + (\alpha_1 P_1, P_k)_N + \ldots + (\alpha_{k-1} P_{k-1}, P_k)_N =$$

$$(w,P_k)_N = \alpha_0 (P_0,P_k)_N + \alpha_1 (P_1,P_k)_N + \ldots + \alpha_{k-1}(P_{k-1},P_k)_N$$

Skoro $P_0, P_1, \ldots, P_N$ to wiel. ortogonalne, stąd

$\underline{(P_k, P_l)_N = 0}$, $(k \ne l)$ oraz $\underline{(P_k,P_k)_N > 0}$, zatem

$$(w,P_k)_N = \alpha_0 0 + \alpha_1 0 + \ldots + \alpha_{k-1} \cdot 0$$

$$(w,P_k)_N = 0$$

L11.6. 1 punkt Dwoma podanymi na wykładzie sposobami zbuduj wielomiany P_0, P_1, P_2 ortogonalne na zbiorze $D_4 = \{x_0, x_1, x_2, x_3, x_4\}$, gdzie $x_j := -10 + 5j$ $(j = 0, 1, 2, 3, 4)$.

$x_0 = -10$, $x_1 = -5$, $x_2 = 0$, $x_3 = 5$, $x_4 = 10$

$f_0(x) = 1$, $f_1(x) = x$, $f_2(x) = x^2$

1 sposób) – ortogonalizacja Grama-Schmidta

$$\begin{cases} P_0 = f_0 \\ P_k = f_k - \sum_{j=0}^{k-1} \frac{\langle f_k, P_j\rangle_N}{\langle P_j, P_j\rangle_N} P_j \end{cases}$$

$P_0(x) = 1$

$$P_1(x) = x - \frac{\langle f_1, P_0\rangle_N}{\langle P_0,P_0\rangle_N} P_0(x) = x - \frac{(-10\cdot1 + -5\cdot1 + 0\cdot1 + 5\cdot1 + 10\cdot1)}{1\cdot1 + 1\cdot1 + 1\cdot1 + 1\cdot1 + 1\cdot1}\cdot 1 = x - 0\cdot 1 = x$$

$$P_2(x) = x^2 - \frac{\langle f_2, P_0\rangle_N}{\langle P_0,P_0\rangle_N} P_0(x) - \frac{\langle f_2, P_1\rangle_N}{\langle P_1,P_1\rangle_N} P_1(x) = x^2 - \frac{(100+25+25+100)}{5}\cdot 1 - \frac{(-10\cdot100 - 5\cdot25 + 0 + 5\cdot25 + 10\cdot100)}{5}\cdot x$$

$$P_2(x) = x^2 - 50 - 0 = \underline{x^2 - 50}$$

II sposób) - Związek rekurencyjny

$$\begin{cases} P_0(x) = 1 \\ P_1(x) = x - c_1 \\ P_n(x) = (x - c_n)P_{n-1}(x) - d_n P_{n-2}(x) \end{cases}, \quad n \geq 2$$

$$c_n = \frac{\langle x \cdot P_{n-1}, P_{n-1} \rangle_N}{\langle P_{n-1}, P_{n-1} \rangle_N} \qquad d_n = \frac{\langle P_{n-1}, P_{n-1} \rangle_N}{\langle P_{n-2}, P_{n-2} \rangle_N}$$

$$P_0(x) = 1$$

$$c_1 = \frac{\langle x, 1 \rangle_N}{\langle 1, 1 \rangle_N} = \frac{(-10\cdot 1 + -5\cdot 1 + 0\cdot 1 + 5\cdot 1 + 10\cdot 1)}{1\cdot 1 + 1\cdot 1 + 1\cdot 1 + 1\cdot 1 + 1\cdot 1} \cdot 1 = 0$$

$$P_1(x) = x - 0 = x$$

$$P_2(x) = (x - c_2)P_1(x) - d_2 P_2(x)$$

$$c_2 = \frac{\langle x^2, x \rangle}{\langle x, x \rangle} = \frac{-1000 - 5\cdot 25 + 0 + 5\cdot 25 + 1000}{100 + 125 + 0 + 125 + 100} = 0$$

$$d_2 = \frac{\langle x, x \rangle}{\langle 1, 1 \rangle} = \frac{100 + 25 + 0 + 25 + 100}{1 + 1 + 1 + 1 + 1} = \frac{250}{5} = 50$$

$$P_2(x) = x \cdot x - 50 \cdot 1 = \underline{x^2 - 50}$$

L11.7. $\boxed{\text{1 punkt}}$ Funkcja h przyjmuje w punktach $x_j := -10 + 5j$ $(j = 0, 1, 2, 3, 4)$ odpowiednio wartości $3, -5, -1, -5, 3$. Wykorzystując ortogonalność wielomianów **skonstruowanych w poprzednim zadaniu**, wyznacz taki wielomian $w_2^* \in \Pi_2$, aby wyrażenie

$$\sum_{j=0}^{4} [w_2^*(x_j) - h(x_j)]^2$$

przyjmowało najmniejszą możliwą wartość.

$$P_0(x) = 1$$
$$P_1(x) = x$$
$$P_2(x) = x^2 - 50$$

Szukamy $w_2^* \in \Pi_2$ t. że $\sum_{j=0}^{4} [w_2^*(x_j) - h(x_j)]^2$ jest minimalne.

$y_0 = 3, \quad y_1 = -5, \quad y_2 = -1, \quad y_3 = -5, \quad y_4 = 3$

Z wykładu mamy, że szukany wielomian w_2^* to wielomian optymalny dany wzorem $w_2^*(x) = \sum_{k=0}^{2} a_k P_k(x)$, gdzie $a_k = \frac{\langle h, P_k \rangle_N}{\langle P_k, P_k \rangle_N}$. Obliczmy więc $w_2^*(x)$. $P_0 = 1 \quad P_1 = x \quad P_2 = x^2 - 50$

$$a_0 = \frac{\langle h, P_0 \rangle_N}{\langle P_0, P_0 \rangle_N} = \frac{3\cdot 1 - 5\cdot 1 - 1\cdot 1 - 5\cdot 1 + 3\cdot 1}{1+1+1+1+1} = \frac{-5}{5} = -1$$

$$a_1 = \frac{\langle h, P_1 \rangle_N}{\langle P_1, P_1 \rangle_N} = \frac{\cancel{-10\cdot 3} - 5\cdot(-5) - 1\cdot(0) + 5\cdot(-5) + \cancel{3\cdot 10}}{250} = \frac{0}{250} = 0$$

$$a_2 = \frac{\langle h, P_2 \rangle_N}{\langle P_2, P_2 \rangle_N} = \frac{3\cdot 50 - 5\cdot(-25)(-1)(-50) - 5\cdot(-25) + 3\cdot 50}{50\cdot 50 + (-25)(-25) + (-50)(-50) + (-25)(-25) + 50\cdot 50} = \frac{600}{8750} = \frac{12}{175}$$

$$W_2^*(x) = -1\cdot 1 + 0\cdot x + \frac{12}{175}\cdot x^2 - \frac{12}{175}\cdot 50 = \frac{12}{175}x^2 - \frac{600}{175} - \frac{175}{175} = \frac{12}{175}x^2 - \frac{775}{175} = \frac{12}{175}x^2 - \frac{31}{7}$$

$$\underline{W_2^*(x) = \frac{12}{175}x^2 - \frac{31}{7}}$$

L11.5. 1 punkt Niech $\{Q_k\}$ będzie ciągiem wielomianów określonych w następujący sposób:

$$\begin{cases} Q_0(x) = 1, \qquad Q_1(x) = x - c_1, \\ Q_k(x) = (x - c_k)Q_{k-1}(x) - d_kQ_{k-2}(x) \qquad (k = 2, 3, \ldots), \end{cases}$$

gdzie c_k, d_k są danymi stałymi. Udowodnij, że następujący *algorytm Clenshawa*:

$B_{m+2} := B_{m+1} := 0,$

$B_k := a_k + (x - c_{k+1})B_{k+1} - d_{k+2}B_{k+2} \qquad (k = m, m-1, \ldots, 0),$

wynik $:= B_0,$

oblicza wartość sumy $\sum_{k=0}^{m} a_kQ_k(x)$. Jak wykorzystać powyższy algorytm do obliczenia wartości $Q_m(x)$?

Wyznaczamy a_k

$$a_k = B_k - (x - c_{k+1})B_{k+1} + d_{k+2}B_{k+2}$$

Pokażmy, że powyższy algorytm oblicza wartość sumy $\sum_{k=0}^{m} a_kQ_k(x)$, tzn. pokażmy, że $\sum_{k=0}^{m} a_kQ_k(x) = B_0$.

Podstawmy do sumy wyznaczone a_k.

$$\sum_{k=0}^{m} a_kQ_k(x) = \sum_{k=0}^{m} \left(B_k - (x - c_{k+1})B_{k+1} + d_{k+2}B_{k+2}\right)Q_k(x).$$

Rozbijamy na trzy sumy i zauważamy, że różnią się one granicami sumowania (wynika to z różnicy w indeksach B).

$$= \sum_{k=0}^{m} B_kQ_k(x) - \sum_{k=0}^{m-1} (x - c_{k+1})B_{k+1}Q_k(x) + \sum_{k=0}^{m-2} d_{k+2}B_{k+2}Q_k(x)$$

Wyciągamy wyrazy z dwóch pierwszych sum, by uzgodnić granice sumowania.

$$= B_0Q_0(x) + B_1Q_1(x) - (x - c_1)B_1Q_0(x) + \sum_{k=2}^{m} B_kQ_k(x) - \sum_{k=2}^{m} (x - c_k)B_kQ_{k-1}(x) + \sum_{k=2}^{m} d_kB_kQ_{k-2}(x)$$

$$= B_0\underbrace{Q_0(x)}_{=1} + B_1Q_1(x) - (x - c_1)B_1\underbrace{Q_0(x)}_{=1} + \sum_{k=2}^{m} B_kQ_k(x) - (x - c_k)B_kQ_{k-1}(x) + d_kB_kQ_{k-2}(x)$$

$$= B_0 + B_1Q_1(x) - (x - c_1)B_1 + \sum_{k=2}^{m} B_kQ_k(x) - (x - c_k)B_kQ_{k-1}(x) + d_kB_kQ_{k-2}(x)$$

$$= B_0 + B_1\underbrace{(Q_1(x) - x + c_1)}_{=0,\text{ bo } (x - c_1) = Q_1 \text{ z założenia.}} + \sum_{k=2}^{m} B_kQ_k(x) - (x - c_k)B_kQ_{k-1}(x) + d_kB_kQ_{k-2}(x)$$

$$= B_0 + \sum_{k=2}^{m} B_k\underbrace{\left(Q_k(x) - (x - c_k)Q_{k-1}(x) + d_kQ_{k-2}(x)\right)}_{=0,\text{ bo } (x - c_k)Q_{k-1}(x) - d_kQ_{k-2}(x) = Q_k(x) \text{ z założenia}}$$

$$\sum_{k=0}^{m} a_kQ_k(x) = B_0$$

Jak przy pomocy tego algorytmu wyznaczyć $Q_m(x)$? Zauważmy, że wtedy chcemy, by

$a_0 = a_1 = \ldots = a_{m-1} = 0$ oraz $a_m = 1$. Wtedy $\underline{\sum_{k=0}^{m} a_kQ_k(x) = Q_m(x)}$.