Analiza numeryczna (L)
3.02.2021 r.

Powtórka

- „inna technika" odwracania macierzy

$A,\ \det(A) \neq 0 \Rightarrow \bar{X} := A^{-1}$ $\qquad e_1, \dots, e_n \in \mathbb{R}^n$ $\qquad x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}^n$

$$A \cdot \bar{X} = \begin{bmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n} \qquad \bar{X} = \begin{bmatrix} x_{11} & \dots & x_{1n} \\ x_{21} & \dots & x_{2n} \\ \vdots & & \\ x_{n1} & \dots & x_{nn} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

$$\Updownarrow$$

$$\boxed{A x_k = e_k \quad (k = 1, 2, \dots, n)}$$

$A = L \cdot U \quad O(n^3)$
+
metoda faktoryzacji roz. układów równań
n-układów $\rightarrow O(n^3)$

- eliminacja Gaussa w wersji skalowanej

$\underbrace{\square\,\|\,=\,\| \rightarrow \square\,\|\,=\,\| \rightarrow \square\,\|\,=\,\| \rightarrow \dots \rightarrow \triangle\,\|\,=\,\|}_{O(n^3)}$ $\uparrow \left. \begin{matrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{matrix} \right\} O(n^2)$

- wybór elementów głównych
  - częściowy $O(n^3)$
  - pełny $O(n^3)$

- $P \cdot A = L \cdot U$

1° Przebieg egzaminu

2° Powtórka

Błąd interpolacji

$$f(x) - L_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\eta_x)}{(n+1)!}(x - x_0)(x - x_1)\dots(x - x_n)$$

$x_0, x_1, \dots, x_n \in [a,b]$ (p. różne) $\qquad \eta_x \in (a,b)$

$$\max_{x \in [a,b]} |f(x) - L_n(x)| \leq \frac{1}{(n+1)!} \max_{a \leq x \leq b} |f^{(n+1)}(x)| \cdot \underbrace{\max_{x \in [a,b]} |(x - x_0)\dots(x - x_n)|}$$!

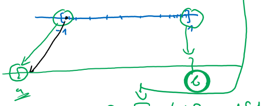
$(x-x_0)\dots(x-x_n) = 1 \cdot x^{n+1} + \dots$

$$\frac{1}{2^n} |T_{n+1}(x)| \leq \frac{1}{2^n}$$

$$[a,b] = [-1,1] \Rightarrow \boxed{\begin{matrix} x_k := \cos\left(\frac{2k+1}{2n+2}\pi\right) \\ T_{n+1}(x_k) = 0 \end{matrix}} \quad (k = 0, 1, \dots, n)$$

$T_{n+1}(x) = 2^n \cdot x^{n+1} + \dots$

$$\boxed{\alpha \cdot \cos\left(\frac{2k+1}{2n+2}\pi\right) + \beta}$$



stała $\cdot T_{n+1}$(stała $\cdot x +$ stała) $= 1 \cdot x^{n+1}$

L 15.11

$$w(x) = a_1 x/3! - a_3 x^3/5! + a_5 x^5/7! - a_7 x^7/9! =$$

$$= \frac{x}{3!}\left(a_1 - \frac{a_3}{4 \cdot 5}x^2 + \frac{a_5}{4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7}x^4 - \frac{a_7}{4 \cdots 9}x^6\right) =$$

$$= \frac{x}{3!}\left(a_1 - \frac{x^2}{4 \cdot 5}\left(a_3 - \frac{a_5}{6 \cdot 7}x^2 + \frac{a_7}{6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9}x^4\right)\right) =$$

$$= \frac{x}{3!}\left(a_1 - \frac{x^2}{4 \cdot 5}\left(a_3 - \frac{x^2}{6 \cdot 7}\left(a_5 - \frac{a_7}{8 \cdot 9}x^2\right)\right)\right)$$

$$fl\left(a_5 - \frac{a_7}{8 \cdot 9} \cdot x^2\right) = \left(a_5 - (a_7/8/9) \cdot x \cdot x\, \underbrace{(1+\varepsilon_1)(1+\varepsilon_2)(1+\varepsilon_3)(1+\varepsilon_4)}_{= 1 + E}\right)(1+\varepsilon_5)$$

$a_5(1+\delta)$

$|\varepsilon_i| \leq 2^{-t}$ $\quad (i = 1, \dots, 5)$

$\Downarrow$ Tw. o kumulacji błędów

$|E| \lesssim 4 \cdot 2^{-t}$

$x = rd(x)$
$a_i = rd(a_i)$

$w(x) \equiv w(x; a_3, a_5, a_7)$

$$fl(w(x)) = w\big(x(1+\beta_1); a_3(1+\beta_2); a_5(1+\beta_3); a_7(1+\beta_4)\big) \cdot (1+\beta_5)$$

$|\beta_i| \lesssim K_i \cdot 2^{-t}$

$(1+F) \qquad |F| \lesssim 5 \cdot 2^{-t}$

$(1+F)^5 (1+E)^4 =: 1 + G$

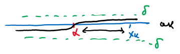
$|G| \lesssim 9 \cdot 2^{-t}$

$$fl(a) = \dots \underbrace{a(1+H_1)}_{\tilde{a}} + \underbrace{a(1+H_2)}_{\hat{a}}$$

Warunek stopu dla metody iteracyjnej rozwiązywania równania nieliniowego $f(x) = 0$

$$x_0, x_1, x_2, \dots, x_k, \dots \rightarrow \alpha : f(\alpha) = 0$$

STOP: $|f(x_k)| < \delta \wedge \frac{|x_{k+1} - x_k|}{|x_k|} < \varepsilon \wedge$ MaxIter



$f(x) = x^5 - a$