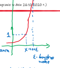
Analiza numeryczna (L)
28.10.2020 r.

(nagranie z dnia 26.10.2020 r.)



Powtórka

- uwarunkowanie zadania
  ↳ wskaźnik uwarunkowania
- algorytmy numerycznie poprawne

Rozwiązywanie równań nieliniowych

f - dana funkcja $\Rightarrow$ $\boxed{f(x)=\alpha}$ $\Leftarrow$ szukamy miejsc zerowych funkcji f.

$\alpha \in D_f : f(\alpha)=0$

$(a\neq 0)$ $ax+b=0 \Rightarrow x=-\frac{b}{a}$ 🙂

$ax^2+bx+c=0 \Rightarrow x_1=\dots,\ x_2=\dots$ 🙂

$2020\cos(17x) - \operatorname{arcctg}\left(\frac{x}{x^2+1}\right) + \ln(|x+7|-15) = 0$? ☹

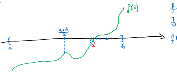
Obserwacja

Prawie zawsze rozwiązanie równania nieliniowego nie jest możliwe w sposób analityczny.

Jedyne rozwiązanie

Musimy szukać rozwiązań przybliżonych. Warto do tego użyć komputera.

Metoda bisekcji



f - ciągła w $[a,b]$
$\exists!\ \alpha\in(a,b)$ $f(\alpha)=0$
$f(a)f(b)<0$

Załóżmy, że funkcja f jest ciągła w przedziale $[a_0,b_0]$ i że $f(a_0)f(b_0)<0$ (ściślej: $f(a_0)<0$ i $f(b_0)>0$). Załóżmy, że w przedziale $[a_0,b_0]$ jest dokładnie jedno miejsce zerowe α. Oczywiście $\alpha\in(a_0,b_0)$. W następujący sposób rekurencyjny konstruujemy taki ciąg przedziałów

$$I_k := [a_k, b_k] \quad (k=0,1,\dots),$$

że $I_0 \supset I_1 \supset I_2 \supset \dots \supset I_k \supset I_{k+1} \dots$ i że $\alpha\in I_k$ $(k=0,1,\dots)$:

- wyznaczamy środek przedziału I_k:
$$m_{k+1} := \frac{a_k+b_k}{2}$$
- jeśli $f(m_{k+1})=0 \Rightarrow \alpha := m_{k+1}$, w przeciwnym wypadku

$$I_{k+1} := [a_{k+1}, b_{k+1}] \equiv \begin{cases} [m_{k+1}, b_k] : & f(m_{k+1})<0, \\ [a_k, m_{k+1}] : & f(m_{k+1})>0. \end{cases}$$

Obserwacje

1° W n-tym kroku metody bisekcji otrzymujemy przedział o długości

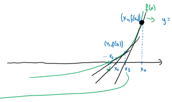
$$\frac{b_0-a_0}{2^n} \xrightarrow[\infty]{n} 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} m_{n+1} = \alpha$$

2° Zbieżność metody bisekcji jest wolna (jedna cyfra dwójkowa na krok)

! 3° Zbieżność metody nie zależy od rozpatrywanej funkcji

! 4° Algorytm wyznaczenia przedziału zawierającego α o długości $\varepsilon>0$ wymaga ok. $\left\lfloor \log_2 \frac{b_0-a_0}{2\varepsilon} \right\rfloor$ kroków.

Metoda Newtona (metoda stycznych)



$\to y = f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$

↑ styczna do wykresu funkcji f w punkcie $(x_0, f(x_0))$

miejsce zerowe y: $0 = f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$

$$x_1 \equiv x = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$
$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$$
$$x_3 = x_2 - \frac{f(x_2)}{f'(x_2)}$$
$$\vdots$$

M. Newtona

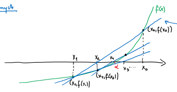
$$\boxed{\begin{cases} x_0 - \text{dane} \\ x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \end{cases} \quad (n=0,1,2,\dots)}$$

Musimy znać wzór pochodnej funkcji f ☹

Pytanie

Co zrobić, gdy nie znamy wzoru na pochodną?
(często tak jest: potrafimy jedynie obliczać wartości funkcji f w danym punkcie)

Metoda siecznych



prosta przechodząca przez punkty $(x_0,f(x_0))$ oraz $(x_1,f(x_1))$
Jej miejsce zerowe przyjmujemy za kolejne przybliżenie szukanego miejsca zerowego

Metoda siecznych

$$\boxed{\begin{cases} x_0, x_1 - \text{dane} \\ x_{n+1} := x_n - \dfrac{f(x_n)}{\frac{f(x_n)-f(x_{n-1})}{x_n-x_{n-1}}} \end{cases} \quad (n=1,2,\dots)}$$

$\frac{f(x_n)-f(x_{n-1})}{x_n-x_{n-1}} \approx f'(x_n)$ (dla $x_n \approx x_{n-1}$)

Ważne pytania

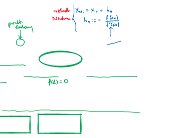
Nie jest to łatwe ☹ ←

1° W jaki sposób dobierać wartości początkowe (x_0 - w metodzie Newtona; x_0, x_1 - w metodzie siecznych)?

2° Jak klasyfikować metody iteracyjne pod względem „szybkości ich działania"? (w skrócie: które metody są lepsze, a które gorsze)?

Ad 1°

metoda Newtona $\begin{cases} x_{n+1} = x_n + h_n \\ h_n := -\frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \end{cases}$



Ad 2.

Definicja (wykładnik zbieżności)

Niech dany będzie ciąg (x_n) zbieżny do α, tzn. $\lim_{n\to\infty} x_n = \alpha$. Jeśli istnieją takie liczby rzeczywiste p i C ($C>0$), że

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|x_{n+1}-\alpha|}{|x_n-\alpha|^p} = C,$$

to p nazywamy wykładnikiem zbieżności ciągu x_n, a C — stałą asymptotyczną. Dla $p=1$ i $C\in(0,1)$ mówimy o zbieżności liniowej, dla $p=2$ o zbieżności kwadratowej, a dla $p=3$ — o sześciennej.

Motywacja

$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$

$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n!} = 0$
↑ ten ciąg zbiega do 0 szybciej

$|x_n-\alpha| \approx 10^{-10}$
$p=2 \Rightarrow$
$|x_{n+1}-\alpha| \approx C|x_n-\alpha|^p$ (dla dostatecznie dużych n)
$\Downarrow$
$|x_{n+1}-\alpha| \approx C\cdot(10^{-10})^p = C\cdot 10^{-20}$

Obserwacja

Im większe p tym ciąg szybciej zbiega do granicy!

Twierdzenie

Niech α będzie pojedynczym miejscem zerowym funkcji f. Wtedy metoda Newtona (zakładając, że dla przyjętego x_0 jest ona zbieżna) ma wykładnik zbieżności $p=2$ (zbieżność kwadratowa)

Twierdzenie

Jeśli α jest pierwiastkiem podwójnym to wykładnik zbieżności (rząd metody) metody Newtona wynosi $p=1$ (zbieżność liniowa $C\in(0,1)$!)

Twierdzenie

Metoda siecznych w wypadku pojedynczych miejsc zerowych jest metodą rzędu

$$p = \frac{\sqrt{5}+1}{2} \approx 1{,}618\ldots < \boxed{2}$$

↑ rząd metody Newtona

Pytanie / Problem

W jaki sposób znajdować rząd zbieżności metody (jej wykładnik zbieżności)?

→ To też nie jest łatwe!

Twierdzenie

Rozważmy następującą metodę jednokrokową:

$$(*) \begin{cases} x_0 - \text{dane} \\ x_{n+1} := F(x_n) \end{cases} \quad (n=0,1,\dots)$$

→ np. metoda Newtona jest metodą jednokrokową mamy tam $F(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$
f - funkcja, której miejsca zerowego szukamy

Rząd metody (*) (inaczej: wykładnik zbieżności metody (*)) jest liczbą naturalną p $\Leftrightarrow$

$$F(\alpha)=\alpha,\ F'(\alpha)=0,\ F''(\alpha)=0, \dots, F^{(p-1)}(\alpha)=0$$
$$\text{i} \quad F^{(p)}(\alpha)\neq 0,$$

gdzie α jest szukanym miejscem zerowym, tzn. $\lim_{n\to\infty} x_n \overset{(*)}{=} \alpha$.
Stała asymptotyczna C wyraża się wzorem $\boxed{C := \frac{F^{(p)}(\alpha)}{p!}}$.