# Imię i nazwisko: Krystian Jasionek

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | Σ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | | | | | | | | |

# 2

*Rozwiązanie zadania musi zmieścić się na jednej kartce. Powinno ono być napisane starannie oraz czytelnie, a wielkość liter nie może być mniejsza niż w tym tekście.*

$x \approx 0$

$$f(x) = \frac{\cos\left(\frac{x}{3}\right) - 1 + \frac{x^2}{18}}{x^4}$$

$$f(0) = \frac{1 - 1 + 0}{0} = \frac{0}{0}$$

Rozwińmy $\cos\left(\frac{x}{3}\right)$ w szereg Taylora, $|x| \leq \frac{1}{10}$

$$\cos\left(\frac{x}{3}\right) = 1 - \frac{\left(\frac{x}{3}\right)^2}{2} + \frac{\left(\frac{x}{3}\right)^4}{4!} - \frac{\left(\frac{x}{3}\right)^6}{6!} \dots$$

$\cos\left(\frac{x}{3}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} \cdot \left(\frac{x}{3}\right)^{2n}$, pokażmy, że jest zbieżny z kryterium Leibniza, tzn. że $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ $a_n \geq a_{n+1}$ oraz $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

$$\frac{\left(\frac{x}{3}\right)^{2k}}{\cancel{(2k)!}} \geq \frac{\left(\frac{x}{3}\right)^{2k+2}}{\cancel{(2k)!}\,(2k+1)(2k+2)}$$

$\frac{x^2}{(2k+1)(2k+2)\,9} \leq 1$, ale $|x| \leq \frac{1}{10}$, zatem $|x^2| \leq \frac{1}{100}$, więc nierówność jest spełniona

$\lim_{n\to 0} \frac{0}{3^{2k}(2k)!} \leq \lim_{n\to\infty} \frac{x^{2k}}{3^k (2k)!} \leq \lim_{n\to\infty} \frac{1}{3^{2k}(2k)!}$, zatem $\lim_{k\to\infty} \frac{x^{2k}}{3^k (2k)!} = 0$, zatem szereg jest zbieżny.

z twierdzenia o trzech granicach i faktu, że $|x| \leq \frac{1}{10}$

$$f(x) = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!\,3^{2n}} - 1 + \frac{x^2}{18}}{x^4}$$

$$f(x) = \frac{\sum_{n=3}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!\,3^{2n}} + 1 - \frac{x^2}{18} + \frac{x^4}{81 \cdot 24} - 1 + \frac{x^2}{18}}{x^4}$$

$$f(x) = \sum_{n=3}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n-4}}{(2n)!\,3^{2n}} + \frac{1}{81 \cdot 24}$$

ryzyko odejmowania bliskich sobie liczb

Możemy zastosować powyższy wzór, by uniknąć utraty cyfr znaczących

$$f(x) = \begin{cases} \sum_{n=3}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n-4}}{(2n)!\,3^{2n}} + \frac{1}{81 \cdot 24} & \text{dla } |x| \leq \frac{1}{10} \\ \frac{\cos\left(\frac{x}{3}\right) - 1 + \frac{x^2}{18}}{x^4} & \text{w p.p.} \end{cases}$$