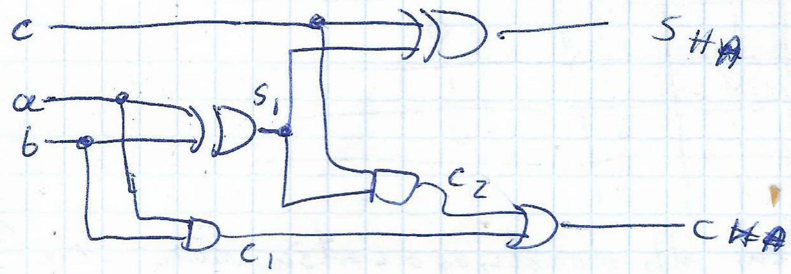
Zad 1. Sumator pełny (Karnaugh)

$s_K = a \oplus b \oplus c$

$c_K = ab + ac + bc$

Sumator pełny (Half Adder)



$S_{HA} = c \oplus s_1 = c \oplus (a \oplus b)$

$C_{HA} = c_1 + c_2 = (ab) + (s_1 c) = ab + c\ (a \oplus b)$

a	b	c	C_{HA}	$a \oplus b$	C_K	S_K	S_{HA}
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0	1	1
0	1	0	0	1	0	1	1
0	1	1	1	1	1	0	0
1	0	0	0	1	0	1	1
1	0	1	1	1	1	0	0
1	1	0	1	0	1	0	0
1	1	1	1	0	1	1	1

Zatem dla dowolnego wartościowania a, b, c $S_{HA} = S_K$ oraz $C_K = C_{HA}$, czyli sumatory są sobie równoważne.

Zad 2. Pokażemy, że $c_k = a_k \oplus b_k \oplus s_k$ przy sumowaniu liczb binarnych za pomocą tabeli wartości logicznych.

a_k	b_k	c_k	s_k	$a_k \oplus b_k$	$a_k \oplus b_k \oplus s_k$
0	0	0	0	0	0
0	0	1	1	0	1
0	1	0	1	1	0
0	1	1	0	1	1
1	0	0	1	1	0
1	0	1	0	1	1
1	1	0	0	0	0
1	1	1	1	0	1

Wartości s_k znamy z wykładu.

Zatem dla dowolnego wartościowania $c_k = a_k \oplus b_k \oplus s_k$

Zad 3.

$g_k = a_k b_k$ - jedna bramka AND

$p_k = a_k + b_k$ - jedna bramka OR

$s_k = a_k \oplus b_k \oplus c_k$ - jedna bramka XOR

Musimy sprawdzić ilość bramek dla każdego c_n, $n \in [1,8]$. Stosujemy wzór

$$c_n = \sum_{i=-1}^{n-1} g_i \prod_{j=i+1}^{n-1} p_j \quad \cancel{c_0 = g_0}$$

$c_1 = (g_{-1} p_0) + g_0$ - 2 bramki

$c_2 = (g_{-1} p_0 p_1) + (g_0 p_1) + g_1$ - $2 + 1 = 3$ bramki

$c_3 = (g_{-1} p_0 p_1 p_2) + (g_0 p_1 p_2) + (g_1 p_2) + g_2$ ~~5 bramek~~ - 4 bramki

~~$c_4 = [(g_{-1} p_0 p_1 p_2 p_3) + (g_0 p_1 p_2 p_3) + (g_1 p_2 p_3) + (g_2 p_3) + g_3]$ - 4 + 2 + 1 = 8 bramek~~

~~$c_5 = (g_{-1} p_0 p_1 p_2 p_3 p_4) + (g_0 p_1 p_2 p_3 p_4) + (g_1 p_2 p_3 p_4) + (g_2 p_3 p_4) + (g_3 p_4) + g_4$ - 4 + 2 + 2 + 1 = 9 bramek~~

~~$c_6 = [(g_{-1} p_0 p_1 p_2 p_3 p_4 p_5) + (g_0 p_1 p_2 p_3 p_4 p_5) + (g_1 p_2 p_3 p_4 p_5) + (g_2 p_3 p_4 p_5) + (g_3 p_4 p_5) + (g_4 p_5) + g_5]$ - 4 + 3 + 3 + 2 + 1 = 13 bramek~~

~~$c_7 = (g_{-1} p_0 p_1 p_2 p_3 p_4 p_5 p_6) + (g_0 p_1 p_2 p_3 p_4 p_5 p_6) + (g_1 p_2 p_3 p_4 p_5 p_6) + (g_2 p_3 p_4 p_5 p_6) + (g_3 p_4 p_5 p_6) + g_4 p_5 p_6 + g_5 p_6 + g_6$~~

~~$c_8 = (g_{-1} p_0 p_1 p_2 p_3 p_4 p_5 p_6 p_7) + (g_0 p_1 p_2 p_3 p_4 p_5 p_6 p_7) + (g_1 p_2 p_3 p_4 p_5 p_6 p_7) + (g_2 p_3 p_4 p_5 p_6 p_7) + (g_3 p_4 p_5 p_6 p_7) + (g_4 p_5 p_6 p_7) + g_5 p_6 p_7 + g_6 p_7 + g_7$~~

~~$c_7 = 4 + 2 + 3 + 3 + 3 + 1 + 1 = 17$ bramek~~

~~$c_8 = 4 + 2 + 3 + 3 + 3 + 4 + 1 + 1 = 21$~~

~~Usunie $8 + 8 + 8 + 21 + 17 + 13 + 9 + 7 + 4 + 3 + 2$~~

$c_4 = [(g_{-1}p_0p_1p_2)p_3 + (g_0p_1p_2p_3) + (g_1p_2p_3) + (g_2p_3) + g_3]$ – $4+2+1 = 7$ bramek

$+1 =$

$c_5 = [(g_{-1}p_0p_1p_2)p_3p_4) + ((g_0p_1p_2p_3)p_4)] + [(g_1p_2p_3p_4) + (g_2p_3p_4) + g_3p_4 + g_4]$

– $4+2+2+1 = 9$ bramek

$c_6 = [(g_{-1}p_0p_1p_2)p_3p_4p_5] + [(g_0p_1p_2p_3)p_4p_5] + [(g_1p_2p_3p_4)p_5] + [(g_2p_3p_4p_5) + (g_3p_4p_5) + (g_4p_5) + g_6]$ – $4+2+2+2+1 = 11$ bramek

$c_7 = [(g_{-1}p_0p_1p_2)(p_3p_4p_5p_6)] + [(g_0p_1p_2p_3)p_4p_5p_6] + [(g_1p_2p_3p_4)p_5p_6] + [(g_2p_3p_4p_5)p_6] + [g_3p_4p_5p_6 + g_4p_5p_6 + g_5p_6 + g_6]$ – $4+2+2+2+3+1+1 = 15$ bramek

$c_8 = [(g_{-1}p_0p_1p_2)(p_3p_4p_5p_6p_7)] + [(g_0p_1p_2p_3)(p_4p_5p_6p_7)] + [(g_1p_2p_3p_4)p_5p_6p_7] + [(g_2p_3p_4p_5)p_6p_7] + [(g_3p_4p_5p_6)p_7] + [g_4p_5p_6p_7 + g_5p_6p_7 + g_6p_7 + g_7]$

– $4+2+2+2+3+3+1+1 = 18$ bramek

Razem $8+8+8+18+15+11+9+7+4+3+2 = 93$ bramki

Zad 5. Wygląd ścieżki załączony w pliku zad 5.png. ~~Zauważmy, że FA jest z~~ Jej długość trzeba policzyć analizując kolejne mijane bramki. Przejście przez bramkę AND zwiększa długość o 1, ~~w którym FA wyjście jako s zwiększa długość~~ Zauważmy, że FA jest zbudowany z HA. ~~W takim wyjście z FA jako c zwiększa długość ścieżki o 3, a jako s o 1, gdy wejście, do~~ Przejście przez pierwszy FA ~~zwiększa długość o 3, przez drugi o 2. Następnie wyjście~~ Przejście przez FA zwiększa ścieżkę na kilka sposobów:

- o 1, gdy wchodzimy jako c i wychodzimy jako s
- o 2, gdy c -> c_0
- o 2, gdy a -> s.
- o 3, gdy a -> c_0