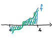
Analiza numeryczna (L)
13.01.2021 r.

Powtórka

- przybliżać wartości $\int_a^b f(x)dx$ (f - ciągła)

$\underbrace{w\text{ - prosta do scałkowania funkcja (np. wielomian)} \quad + \quad w(x) \approx f(x), \; x\in[a,b]}$

$$I(f) := \int_a^b f(x)dx \overset{!!}{\approx} \int_a^b w(x)dx$$



- kwadratura liniowa

$$Q_n(f) := \sum_{k=0}^{n}{}' A_k^{(n)} f(x_k^{(n)})$$

współczynniki; węzły (parami różne)

CEL: Tak dobrać współczynniki i węzły, aby (uniwersalne)

$$I(f) \approx Q_n(f)$$

dla funkcji f z szerokiej klasy

- kwadratury interpolacyjne

POMYSŁ: Funkcję podcałkową zastępujemy jej wielomianem interpolacyjnym dla ustalonych węzłów $x_0, x_1, \dots, x_n$

$$L_n(x) = \sum_{k=0}^{n}{}' (\lambda_k(x)) f(x_k)$$

$$\hookrightarrow \lambda_k(x) := \prod_{\substack{i=0\\ i\neq k}}^{n} \frac{x-x_i}{x_k-x_i}$$

$$\Downarrow$$

$$Q_n(f) := \int_a^b L_n(x)\,dx = \sum_{k=0}^{n}{}' \underbrace{\left(\int_a^b \lambda_k(x)dx\right)}_{\text{współczynniki}} \cdot f(x_k) \leftarrow \text{kwadratura liniowa}$$

- błąd kwadratury interpolacyjnej
- rząd kwadratury

$\hookrightarrow$ rząd $(Q_n) = r \iff \forall_{w\in\Pi_{r-1}} \; Q_n(w) = I(w)$ (inaczej: błąd kwadratury $= 0$)

$\exists_{v\in\Pi_r\setminus\Pi_{r-1}} \; Q_n(v) \neq I(v)$ (inaczej: błąd kwadratury $\neq 0$)

Tw.

rząd $(Q_n) \leq 2n+2$

rząd $(Q_n) \geq n+1 \Rightarrow Q_n$ – kwadratura interpolacyjna

- kwadratury Newtona – Cotesa + ich błąd + rząd

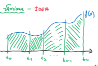
$\hookrightarrow$ kwadratury interpolacyjne dla węzłów równoodległych

$$\boxed{x_k := a + k\cdot h, \; h := \frac{b-a}{n} \quad (0\leq k\leq n)}$$

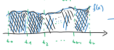
- wzór trapezów ($n=1$)
- wzór Simpsona ($n=2$)

Wykład 12. Kwadratury złożone. Metoda Romberga. Kwadratury Gaussa.

Kwadratury złożone – IDEA



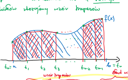
$$\boxed{\int_{t_0}^{t_n} f(x)dx = \sum_{k=0}^{n-1}{}' \int_{t_k}^{t_{k+1}} f(x)dx}$$



$\rightarrow$ Dzielimy przedział całkowania na części (małe, w których funkcja zbytnio się nie zmienia) i stosujemy prostą kwadraturę w każdym z podprzedziałów

Złożony wzór trapezów

Dzielimy przedział całkowania na n równych części i w każdym z podprzedziałów stosujemy wzór trapezów



$h := \frac{b-a}{n}$ ← odległości pomiędzy kolejnymi węzłami

$$\int_{t_k}^{t_{k+1}} f(x)dx = \underbrace{\frac{h}{2}\left[f(t_k) + f(t_{k+1})\right]}_{\text{wzór trapezów}} - \underbrace{\frac{h^3}{12} f''(\eta_k)}_{\text{błąd wzoru trapezów}}, \quad \eta_k \in (t_k, t_{k+1}), \; f\in C^2[t_k, t_{k+1}]$$

$$I(f) = \int_a^b f(x)dx = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{t_k}^{t_{k+1}} f(x)dx =: T_n(f) + R_n^T(f)$$

$T_n(f)$ ← złożony wzór trapezów; $R_n^T(f)$ ← błąd złożonego wzoru trapezów

$$\boxed{T_n(f) := h \sum_{k=0}^{n}{}'' f(t_k)}$$

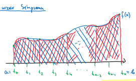
Przypomnienie: $\sum_{k=0}^{n}{}'' a_k := \frac{a_0}{2} + a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1} + \frac{a_n}{2}$

$$\boxed{R_n^T(f)} := -\frac{h^3}{12} \boxed{\sum_{k=0}^{n-1} f''(\eta_k)} \overset{!}{=} \boxed{-n\frac{h^3}{12} f''(\eta)}, \quad \eta\in(a,b)$$

jeśli $f\in C^2[a,b]$

$$= -(b-a)\frac{h^2}{12} f''(\eta) \; \text{"} \boxed{= O\left(\frac{1}{n^2}\right)} \text{"}$$

Złożony wzór Simpsona



Dzielimy przedział całkowania na n równych części (z tym, że $n=2m$ – liczba parzysta) i w każdym z podprzedziałów $[t_{2k}, t_{2k+2}]$ stosujemy wzór Simpsona.

$h = \frac{b-a}{n}$

$\boxed{n\text{ - parzyste}, \; n=2m}$

$$\int_{t_{2k}}^{t_{2k+2}} f(x)dx = \underbrace{\frac{h}{3}\left[f(t_{2k}) + 4f(t_{2k+1}) + f(t_{2k+2})\right]}_{\text{wzór Simpsona}} - \underbrace{\frac{h^5}{90} f^{(4)}(\alpha_k)}_{\text{błąd wzoru Simpsona}},$$

$$\boxed{\alpha_k \in (t_{2k}, t_{2k+2}), \; f\in C^4[t_{2k}, t_{2k+2}]}$$

$$\Downarrow$$

$$\int_{t_0}^{t_n} f(x)dx = \sum_{k=0}^{m-1} \int_{t_{2k}}^{t_{2k+2}} f(x)dx =: S_n(f) + R_n^S(f)$$

$S_n(f)$ ← złożony wzór Simpsona; $R_n^S(f)$ ← błąd złożonego wzoru Simpsona

$$\boxed{S_n(f) := \frac{h}{3}\left(2\sum_{k=0}^{m}{}'' f(t_{2k}) + 4\sum_{k=1}^{m} f(t_{2k-1})\right)}$$

$$\boxed{R_n^S(f) := -(b-a)\frac{h^4}{180} f^{(4)}(\alpha)} \; \text{"} = O\left(\frac{1}{n^4}\right) \text{"}$$

$\alpha\in(a,b)$

Tw. Jeśli $f\in C[a,b]$, to

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} T_n(f) = I(f) = \int_a^b f(x)dx \qquad \lim_{n\to\infty} S_n(f) = I(f) = \int_a^b f(x)dx}$$

Nietrudno sprawdzić, że

Wymyślony przykład ?

n	wyn. T_{2n}	wyn. S_{2n}
10	7	13
11	7	13
12	8	15
13	8	16
14	8	18
15	9	19

$$\boxed{\underset{(n=2m)}{S_n(f)} = \frac{4T_n(f) - 1\cdot T_m(f)}{4-1}} \leftarrow \text{związek pomiędzy złożonym wzorem Simpsona a złożonym wzorem trapezów}$$

Przyspieszanie zbieżności

Metoda Romberga

Niech będzie $n = 2^k$ ($k = 0,1,2,\dots$) i niech

$$h_k := \frac{b-a}{2^k}, \quad x_i^{(k)} := a + ih_k \quad (i = 0,1,\dots,2^k)$$

$$T_{0k} := T_{2^k}(f) = h_k \sum_{i=0}^{2^k}{}'' f(x_i^{(k)}).$$

Wprowadzamy wielkości T_{mk} ($k = 0,1,\dots$; $m = 1,2,\dots$) następującym wzorem:

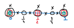
$$\boxed{T_{mk} = \frac{4^m T_{m-1,k+1} - 1\cdot T_{m-1,k}}{4^m - 1}} \leftarrow \text{metoda (wzór) Romberga}$$

złożony wzór trapezów $T_{2^k}(f)$

$$\begin{array}{ccccc}
T_{00} & & & & \\
T_{01} & T_{10} & & & \\
T_{02} & T_{11} & T_{20} & & \\
T_{03} & T_{12} & T_{21} & T_{30} & \\
T_{04} & T_{13} & T_{22} & T_{31} & T_{40} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots
\end{array} \leftarrow \text{tablica Romberga}$$

największy koszt obliczeniowy

Możliwe są oszczędności



Własności elementów tablicy Romberga:

- $T_{mk} = I(f) - c_m h_k^{2m+2} - \dots$
- $T_{mk} = \sum_{j=0}^{2^{m+k}} A_j^{(n)} f(x_j^{(m+k)})$ (współczynniki $A_j^{(n)} > 0$)
- $T_{m0}, T_{m1}, T_{m2}, \dots$ to kwadratury rzędu $2m+2$
- $\boxed{\lim_{k\to\infty} T_{mk} = \lim_{m\to\infty} T_{mk} = I(f) = \int_a^b f(x)dx}$

Informacja o kwadraturach Gaussa

Pytanie

Jak w wypadku kwadratury liniowej

$$Q_n(f) := \sum_{k=0}^{n} A_k^{(n)} f(x_k^{(n)})$$

dobrać współczynniki $A_k^{(n)}$ i węzły $x_k^{(n)}$, aby jej rząd był możliwie największy czyli wynosił $2n+2$?

Nie jest to proste. Na pewno kwadratura ta musi być interpolacyjna, tzn. jej współczynniki wyrażają się wzorem

$$A_k^{(n)} = \int_a^b \left(\prod_{\substack{i=0\\ i\neq k}}^{n} \frac{x - x_i^{(n)}}{x_k^{(n)} - x_i^{(n)}}\right) dx,$$

a to oznacza, że wystarczy skupić się na odpowiednim doborze węzłów ← TRUDNE :(

Twierdzenie

Przyjmijmy $[a,b] = [-1,1]$. Wtedy węzły $x_0^{(n)}, x_1^{(n)}, \dots, x_n^{(n)}$ kwadratury mającej rząd równy $2n+2$ są miejscami zerowymi tzw. $(n+1)$-szego wielomianu Legendre'a P_{n+1}. Wielomiany te spełniają następujący związek rekurencyjny:

$$(*) \begin{cases} P_0(x) \equiv 1, \quad P_1(x) \equiv x \\ P_k(x) = \frac{2k-1}{k} x P_{k-1}(x) - \frac{k-1}{k} P_{k-2}(x) \quad (k\geq 2). \end{cases}$$

Uwagi

1. Korzystając z rekurencji (*) możemy wyznaczyć dowolny wielomian Legendre'a.
2. Nie ma jawnych wzorów dla miejsc zerowych P_{n+1} :(, ale można znajdować je w sposób numeryczny
3. Miejsca zerowe te zostały już dawno obliczone z dużą dokładnością i są stablicowane, tak samo jak odpowiednie współczynniki A_n^k. :)

kwadratury Gaussa-Legendre'a →

$$\boxed{Q_n^{GL}(f) := \sum_{k=0}^{n}{}' A_k^{(n)} f(x_k^{(n)})}$$

$x_k^{(n)}$ ← miejsca zerowe wielomianu P_{n+1}