Analiza numeryczna (L)
4.11.2020 r.

Powtórka

- $\alpha = ?: \; f(\alpha) = 0$
- metoda bisekcji
- metoda Newtona

$$\begin{cases} x_0 \text{ – dane} \\ x_{n+1} := x_n - \dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)} \quad (n = 0, 1, \ldots) \end{cases}$$

- metoda siecznych

$$\begin{cases} x_0, x_1 \text{ – dane} \\ x_{n+1} = x_n - \dfrac{f(x_n)}{\dfrac{f(x_n) - f(x_{n-1})}{x_n - x_{n-1}}} \quad (n = 0, 1, \ldots) \end{cases}$$

- rząd zbieżności metody / wykładnik zbieżności ciągu

$$(x_n), \; x_n \xrightarrow{n\to\infty} \alpha: \; p \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{|x_{n+1} - \alpha|}{|x_n - \alpha|^p} = C > 0$$
$$(p = 1 \Rightarrow C \in (0,1))$$

Wykład 5. Interpolacja wielomianowa Lagrange'a. Część I.

Oznaczenie:
Π_n – zbiór wielomianów jednej zmiennej stopnia $\le n$ $(n \in \mathbb{N})$.

Postaci wielomianu

a) postać potęgowa (naturalna)

$$w \in \Pi_n: \quad w(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k \cdot x^k \quad (\text{dane: } \underbrace{a_0, a_1, \ldots, a_n}_{\text{współczynniki wielomianu}}, \; x \text{ – zmienna})$$

$$w(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 =$$
$$= x(a_n x^{n-1} + a_{n-1} x^{n-2} + \ldots + a_2 x + a_1) + a_0 =$$
$$= x(x(a_n x^{n-2} + a_{n-1} x^{n-3} + \ldots + a_3 x + a_2) + a_1) + a_0 =$$
$$= \ldots$$

idea schematu Hornera

$$O(n) \begin{cases} w_n := a_n \\ w_k := w_{k+1} \cdot x + a_k \quad (k = n-1, n-2, \ldots, 0) \end{cases}$$
Wtedy $w(x) = w_0$

Twierdzenie
Schemat Hornera jest algorytmem numerycznie poprawnym.

b) postać Newtona wielomianu

$$w \in \Pi_n: \quad w(x) = \sum_{k=0}^{n} b_k p_k(x), \text{ gdzie}$$

$$(\text{dane: } \underbrace{b_0, b_1, \ldots, b_n}_{\text{współczynniki postaci Newtona}}, \; x \text{ – zmienna}, \; \underbrace{x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}}_{\text{dodatkowe parametry}})$$

$$\begin{cases} p_0(x) \equiv 1 \\ p_k(x) = (x - x_{k-1}) p_{k-1}(x) \quad (k = 1, 2, 3, \ldots) \end{cases}$$
$$\Rightarrow p_k(x) = (x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_{k-1}) \quad (k = 1, 2, \ldots)$$

$$\begin{aligned} w(x) = \; & b_n (x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_{n-2})(x-x_{n-1}) + \\ & b_{n-1}(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_{n-2}) + \\ & b_{n-2}(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_{n-3}) \\ & \vdots \\ & b_1(x-x_0) + \\ & b_0 \end{aligned}$$

idea uogólnionego schematu Hornera (wyciągamy czynniki podobnej postaci)

$$O(n) \begin{cases} w_n := b_n \\ w_k := w_{k+1}(x - x_k) + b_k \quad (k = n-1, n-2, \ldots, 0) \end{cases}$$
Wtedy $w(x) = w_0$

Twierdzenie
Uogólniony schemat Hornera jest algorytmem numerycznie poprawnym.

Zadanie
Jak zamienić postać Newtona wielomianu na postać potęgową? $O(n^2)$
$\Downarrow$
Horner

c) postać Czebyszewa wielomianu

$$\begin{cases} T_0(x) \equiv 1, \quad T_1(x) \equiv x \\ T_k(x) = 2x T_{k-1}(x) - T_{k-2}(x) \quad (k = 2, 3, \ldots) \end{cases}$$
$\Rightarrow$ Definicja rekurencyjna wielomianów Czebyszewa

Podstawowe własności wielomianów Czebyszewa

- $T_k \in \Pi_k \setminus \Pi_{k-1}$ $(k \in \mathbb{N}; \; \Pi_{-1} := \emptyset)$ – wielomian T_k jest dokładnie k-tego stopnia
- $T_k(x) = 2^{k-1} x^k + 0 \cdot x^{k-1} + \ldots$ $(k \geq 1)$
- $T_k(-x) = (-1)^k T_k(x)$ – wielomiany Czebyszewa stopnia parzystego są funkcjami parzystymi, a te stopnia nieparzystego – funkcjami nieparzystymi. Dowód ! (zadanie domowe)
- $x \in [-1, 1] \Rightarrow T_k(x) = \cos(k \cdot \arccos x)$
- $\operatorname{lin}\{T_0, T_1, \ldots, T_n\} = \Pi_n \Rightarrow$ Wniosek: Każdy wielomian $w \in \Pi_n$ może być zapisany jako kombinacja liniowa wielomianów Czebyszewa
- Wszystkie miejsca zerowe ! wielomianu T_k są pojedyncze, rzeczywiste i leżą w przedziale $(-1, 1)$
- $|T_k(x)| \le 1$ dla $x \in [-1, 1]$

Definicja
Niech dany będzie wielomian $w \in \Pi_n$. Następującą postać tego wielomianu nazywamy postacią Czebyszewa:

$$w(x) = \frac{1}{2} c_0 T_0(x) + c_1 T_1(x) + \ldots + c_n T_n(x) = \stackrel{\text{ozn.}}{=} \sum_{k=0}^{n}{}' c_k T_k(x)$$

$$\sum_{i=0}^{n}{}' a_k := \frac{1}{2} a_0 + a_1 + \ldots + a_n$$
$$\sum_{i=0}^{n}{}'' a_k := \frac{1}{2} a_0 + a_1 + \ldots + a_{n-1} + \frac{1}{2} a_n$$

Pytanie
Jak efektywnie dla danego x obliczać wartość $w(x)$, gdzie w jest podany w postaci Czebyszewa?

Ze względów numerycznych zaleca się obliczanie wartości wielomianu podanego w postaci Czebyszewa

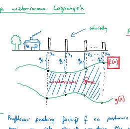
$$w(x) = \sum_{k=0}^{n}{}' b_k T_k(x)$$

przy pomocy następującego algorytmu Clenshawa:

$$O(n) \begin{cases} B_{n+2} := B_{n+1} := 0 \\ B_k := 2x B_{k+1} - B_{k+2} + b_k \quad (k = n, n-1, \ldots, 0) \end{cases}$$
Wtedy
$$w(x) = \frac{B_0 - B_2}{2}.$$

Przypomnienie
$T_0(x) = 1$, $T_1(x) = x$,
$T_k(x) = 2x T_{k-1}(x) - T_{k-2}(x)$

Interpolacja wielomianowa Lagrange'a



Pytanie
Jak (sensownie) odtworzyć przebieg funkcji f jedynie na podstawie dyskretnej informacji:

$$(*) \begin{cases} (x_0, y_0) \\ (x_1, y_1) \\ \vdots \\ (x_n, y_n) \end{cases} \; ?$$

Uwaga
Przybliżać przebieg funkcji f na podstawie dyskretnej informacji $(*)$ można na wiele różnych sposobów. My wykorzystamy do tego celu interpolację wielomianową Lagrange'a.

Zadanie (interpolacja wielomianowa Lagrange'a)
Niech dane będą parami różne węzły $x_0, x_1, \ldots, x_n$ (tzn. $x_i \neq x_j$ dla $i \neq j$) oraz odpowiadające im wartości $y_0, y_1, \ldots, y_n$, tzn.

x_0	x_1	x_2	$\ldots$	x_{n-1}	x_n
y_0	y_1	y_2		y_{n-1}	y_n

Znaleźć wielomian $L_n \in \Pi_n$ spełniający warunki

$$L_n(x_k) = y_k \quad (k = 0, 1, 2, \ldots, n).$$

Twierdzenie
Zadanie interpolacji wielomianowej Lagrange'a ma zawsze rozwiązanie i to jednoznaczne.

Fakt
Wielomian L_n wyraża się następującym wzorem:

$$L_n(x) = \sum_{k=0}^{n} y_k \cdot \lambda_k(x),$$
gdzie
$$\lambda_k(x) := \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq k}}^{n} \frac{x - x_j}{x_k - x_j}.$$

Obserwacja
- $\lambda_k(x_i) = \begin{cases} 1: & (i = k) \\ 0: & (i \neq k) \end{cases}$
- $\lambda_k \in \Pi_n \setminus \Pi_{n-1}$ $(k = 0, 1, \ldots, n)$

Przykład
$f(x) = e^x$, $n = 3$, $x_0 = 0.0$, $x_1 = 0.2$, $x_2 = 0.6$, $x_3 = 0.8$
Użyjmy interpolacji wielomianowej Lagrange'a do przybliżenia wartości $f(0.4)$, ale jedynie na podstawie obserwacji $(x_i, f(x_i))$ dla $i = 0, 1, 2, 3$.

x_k	x_0	x_1	x_2	x_3
$f(x_k)$	$1 = y_0$	$1.22\ldots = y_1$	$1.82\ldots = y_2$	$2.22\ldots = y_3$

$$L_3(x) = y_0 \lambda_0(x) + y_1 \lambda_1(x) + y_2 \lambda_2(x) + y_3 \lambda_3(x)$$

$$\lambda_0(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)} = -\frac{1}{0.096}(x-0.2)(x-0.6)(x-0.8)$$

$$\lambda_1(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)(x_1-x_3)} = \frac{1}{0.048}(x-0.0)(x-0.6)(x-0.8)$$

$$\lambda_2(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_3)} = -\frac{1}{0.048}(x-0.0)(x-0.2)(x-0.8)$$

$$\lambda_3(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_0)(x_3-x_1)(x_3-x_2)} = \frac{1}{0.096}(x-0.0)(x-0.2)(x-0.6)$$

$$L_3(0.4) = 1.4914242\ldots \qquad f(0.4) = 1.49182\ldots$$

$$|f(0.4) - L_3(0.4)| \approx 0.4 \cdot 10^{-3} \qquad \max_{0 \le x \le 0.8} |f(x) - L_3(x)| \approx 0.4 \cdot 10^{-3}$$

Przykłady

- $f(x) = \sin x$, $\quad x_k := \frac{2k\pi}{n}$ $(k = 0, 1, \ldots, n; \; n = 1, 2, \ldots, 15)$
- $f(x) = |x|$, $\quad x_k := -1 + \frac{2k}{n}$ $(k = 0, 1, \ldots, n; \; n = 1, 2, \ldots, 15)$
- $f(x) = x^6$, $\quad x_k := -1 + \frac{2k}{n}$ $(k = 0, 1, \ldots, n; \; n = 1, 2, \ldots, 6)$
$L_6(x) = x^6$

Zadanie
$x_0, x_1, \ldots, x_{2020}$ – losowo wybrane, ale parami różne
$\Downarrow$
$L_{2020}(x) = x^6$

A co na to Maple? $\Rightarrow$

Podsumowanie

- Czasami interpolacja Lagrange'a działa, a czasami nie.
- Pojawiają się problemy numeryczne (za dużo „odwiertów").
- Pytania
  - Czy liczba węzłów ma znaczenie?
  - Czy rozkład węzłów ma znaczenie?
  - Czy używanie postaci Lagrange'a
$$\begin{cases} L_n(x) = \sum_{k=0}^{n} y_k \cdot \lambda_k(x) \\ \lambda_k(x) := \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq k}}^{n} \frac{x - x_j}{x_k - x_j} \quad (k = 0, 1, \ldots, n) \end{cases}$$
to dobry pomysł?