Matematyka Dyskretna L
Lista 11

Krystian Jasionek

7 stycznia 2021

Zadanie 1.

Digraf D jest dany w postaci macierzy sąsiedztwa. Wykaż, że sprawdzenie, czy D zawiera źródło, czyli wierzchołek, z którego wychodzą łuki do wszystkich pozostałych wierzchołków, ale nie wchodzi do niego żaden łuk, może być wykonane w czasie liniowym względem liczby wierzchołków w D. Zapisz swój algorytm w jezyku programowania i określ dokładnie jego złożoność obliczeniową, jako funkcję zmiennej liczby wierzchołków w digrafie.

Rozwiązanie

Idea algorytmu polega na przechodzeniu przez kolejne elementy wiersza w macierzy sąsiedztwa. Korzystamy z obserwacji, że źródło musi zawierać same jedynki w swoim wierszu i same zera w swojej kolumnie (oraz zero na przekątnej macierzy). Przeglądając elementy wiersza sprawdzamy, czy nie natrafimy na 0 i jeśli tak, to przechodzimy do wiersza o indeksie równym indeksowi kolumny, w której obecnie jesteśmy i kontynnuujemy przeglądanie w prawo. Możemy to zrobić, bo źródło musi zawierać same zera w swojej kolumnie, jeśli wcześniej w sprawdzanym wierszu napotkaliśmy same jedynki, to taka kolumna nie występuje na lewo od obecnej kolumny.

```
graph[k][k] #macierz sąsiedztwa grafu o k wierzchołkach
            #Wierzchołki indeksujemy v_i

def isSource(graph):
    n = 0 #wiersz macierzy, indeks kandydata na źródło
    for i in range(len(graph[n])): #iterujemy po elementach wiersza
        if graph[n][i] == 0 and n != i:
            n = i #jeśli trafimy na zero w wierszu,
                  #ale nie będzie ono na przekątnej
                  #przesuwamy się do n-tego wiersza i kontynuujemy przechodzenie
                  #macierzy od elementu [n][n], znajdującego się na przekątnej.
                  #Możemy pominąć wiersze między poprzednim a obecnym n, ponieważ
                  #jeśli komórka o indeksie [p][q] zawiera jedynkę, to wszystkie
                  #wierzchołki indeksie od 0 do p nie mogą być źródłami, gdyż
                  #źródło zawiera w swojej kolumnie same 0 i w swoim wierszu
                  #same 1 (poza przekątną, tam też jest 0)

    #W tym momencie przeszliśmy przez wszystkie kolumny i nasz kandydat na źródło
    #to v_n. Ale nie sprawdziliśmy wszystkich wyrazów w n-tym wierszu i
    #n-tej kolumnie. Zrobimy to kolejną pętlą.


    #Najpierw sprawdźmy, czy v_n nie ma krawędzi do samego siebie.
    if graph[n][n] != 0:  #To oznacza, że istnieje krawędź v_n->v_n, czyli
                          #pętelka, zatem ten wierzchołek ma krawędź wchodzącą.
                          #Zatem nie jest to źródło.
        return False

    for i in range(len(graph[n])):
        if (graph[n][i] == 0 or graph[i][n] == 0) and n != i: #jeśli w n-tym
                #wierszu lub n-tej kolumnie jest 0, wtedy v_n nie jest źródłem.
                #Pomijamy przekątną, na niej musi być zero
            return False

    return True #graf zawiera źródło, jest nim wierzchołek v_n
```

Rysunek 1: Kod algorytmu w języku Python

Możemy przeanalizować ten algorytm pod względem złożoności czasowej. Pierwsza pętla przechodzi zawsze po k elementach, gdzie k to liczba wierzchołków, ponieważ zmieniamy w niej jedynie wiersz, po którym iterujemy w prawo po macierzy (po jej graficznej reprezentacji). W każdej iteracji sprawdza wartość jednego elementu tablicy co daje łącznie k operacji.

Sprawdzając czy graph[n][n] jest różny od 0 wykonujemy jedną operację.

Druga pętla przechodzi drugi raz po indeksach od 0 do k, w każdej iteracji podglądając wartości dwóch elementów tablicy. Mamy zatem $2k$ operacji.

Łącznie możemy powiedzieć, że złożoność czasową możemy przedstawić jako funkcję t zależną od liczby wierzchołków w grafie, określoną jako

$$t(k) = 3k + 1$$

.

Zadanie 3.

Digraf, w którym każda para różnych wierzchołków jest połączona dokładnie jedną krawędzią skierowną, nazywamy turniejem. Pokaż, że w każdym turnieju istnieje wierzchołek, z którego można dojść do każdego innego wierzchołka po drodze o długości co najwyżej 2.

Rozwiązanie

Rozpatrzmy wierzchołek v o największej liczbie krawędzi wychodzących w tym digrafie. Niech liczba tych krawędzi to k. Załóżmy, że w digrafie istnieje pewien wierzchołek u, do którego nie da się dostać z v po drodze o długości co najwyżej 2. Zauważmy, że wtedy muszą istnieć krawędzie poprowadzone od wierzchołka u do wszystkich wierzchołków, do których da się dostać bezpośrednio z v, w przeciwnym wypadku nie wszystkie pary wierzchołków byłyby połączone (gdyby któraś z tych krawędzi nie istniała) lub istniałaby droga z v do u o długości 2 (gdyby któraś krawędź prowadziła do wierzchołka u). Zauważmy, że wtedy u jest wierzchołkiem o k krawędziach wychodzących, ale musi istnieć również krawędź skierowana między parą wierzchołków u oraz v. Taka krawędź musi wychodzić z u i prowadzić do v, inaczej istniałaby droga o długości 1 z v do u. Ale w takim wypadku z wierzchołka u wychodzi co najmniej $k+1$ krawędzi, zatem wiecej niż z wierzchołka v, który jest wierzchołkiem o maksymalnej liczbie krawędzi wychodzących. Otrzymaliście sprzeczność, zatem dla takiego v musi istnieć droga o długości co najwyżej 2 do każdego innego wierzchołka, czyli pokazaliśmy, że szukany w zadaniu wierzchołek istnieje.

Zadanie 4.

Podaj warunek konieczny na to, by graf dwudzielny był grafem hamiltonowskim. Zaczynając od dowolnego pola, czy można obejść ruchem skoczka (konika) szachowego wszystkie pola szachownicy 5×5, każde dokładnie raz, i wrócić do punktu początkowego? Odpowiedź uzasadnij.

Rozwiązanie

Szukamy warunku koniecznego, tzn. takiego zdania, które jeśli nie jest prawdziwe, to graf dwudzielny nie jest grafem hamiltonowskim. Weźmy dowolny graf dwudzielny $G = (V, E)$, w którym V możemy podzielić na rozłączne podzbiory W i U. Wtedy szukany warunek konieczny to $|W| = |U|$, tzn. zachodzi implikacja, że jeśli graf zawiera cykl Hamiltona, to $|W| = |U|$. Pokażmy, że w istocie tak jest.

Graf G jest dwudzielny, tzn. istnieją krawędzie tylko między wierzchołkami z osobnych zbiorów W i U. W takim razie cykl Hamiltona zawiera naprzemiennie wierzchołki z obu tych zbiorów − jest drogą zamkniętą, przechodzącą dokładnie raz przez każdy wierzchołek, postaci $w_1, u_1, w_2, u_2, ..., w_n, u_n, w_1$, gdzie $w_i \in W$, $u_i \in U$. Zauważmy, że otrzymamy krawędzie $(w_1, u_1), (w_2, u_2), ...,$ $(w_n, u_n), (u_n, w_1)$, które porządkują $2n$ wierzchołków w pary, czyli $|W| = n$ oraz $|U| = n$, zatem $|W| = |U|$.

Ustaliwszy warunek konieczny przejdźmy do rozwiązania problemu skoczka szachowego. Od razu możemy zauważyć, że szachownica 5×5 składa się z 25 pól, zatem zawiera odpowiednio 13 pól czarnych i 12 białych (lub odwrotnie, są to sytuacje symetryczne).

Przypatrzmy się temu, w jaki sposób skoczek porusza się po planszy. Od razu możemy zaobserwować, że w każdym ruchu konik przechodzi z pola o jednym kolorze na pole o drugim kolorze. Dzieje się tak, ponieważ figura ta porusza się 2 pola do przodu i 1 na bok, lub 2 pola w bok i 1 do przodu. W obu przypadkach jego jedna współrzędna zmienia się o 1, druga o 2, zatem musi znaleźć się na polu o innym kolorze.

Ta obserwacja pozwala nam patrzeć na ten problem jak na szukanie cyklu Hamiltona w grafie dwudzielnym, gdzie wierzchołkami grafu są pola, a ich podział na dwa rozłączne zbiory wyznaczają ich kolory. Możliwe ruchy konika z danego pola to krawędzie grafu.

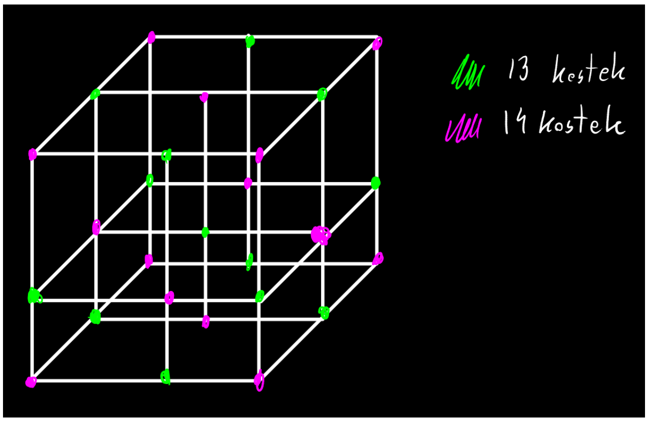
Przypomnijmy sobie, że liczba pól białych i czarnych różni się o 1, tzn. zbiory wierzchołków nie są równoliczne. Korzystając z wyznaczonego warunku koniecznego możemy stwierdzić, że cykl Hamilona nie istnieje w tym grafie, zatem nie można, zaczynając z dowolnego pola, obejść ruchem skoczka szachowego wszystkich pól i wrócić do punktu początkowego.

Zadanie 5.

Dana jest kostka sera $3 \times 3 \times 3$. Mysz rozpoczyna jedzenie kostki od dowolnego rogu. Po zdjedzeniu jednego pola przenosi się do kolejnego, mającego wspólną ścianę z ostatnio zjedzonym. Czy możliwe jest, aby mysz jako ostatnie zjadła środkowe pole?

Rozwiązanie

Zilustrujmy taką kostkę w uproszczony sposób. Niech wierzchołki poniższego grafu będą składowymi kostkami sera w dużej kostce $3\times3\times3$, a krawędzie między nimi oznaczają, że mysz może przejść między tymi kostkami.



Rysunek 2: Kostka sera $3 \times 3 \times 3$

Zauważmy, że możemy podzielić wierzchołki na dwa rozłączne zbiory tak, by sąsiedzi znajdowali się w oddzielnych zbiorach (na rysunku zaprezentowano to przez podział na dwa kolory). Chcemy dowiedzieć się, czy mysz jako ostatnie może zjeść pole środkowe, innymi słowy szukamy odpowiedzi na pytanie czy istnieje ścieżka Hamiltona taka, żeby zaczynała się w rogu i kończyła się w środkowym wierzchołku.

Zauważmy, że mysz zjada naprzemiennie kostki sera (wierzchołki) z dwóch zbiorów, które nie są równoliczne (14 kostek magenta i 13 kostek zielonych). W takim razie ścieżka, po jakiej przejdzie to $m_1, z_1, m_2, z_2, ..., m_{13}, z_{13}, m_{14}$, gdzie m_i to i-ty wierzchołek magenta, a z_i to i-ty zielony. Widzimy, że skoro zaczynamy ścieżkę od wierzchołka w kolorze magenta, i przechodzimy naprzemiennie przez rożne kolory, to musimy zakończyć ścieżkę na wierzchołku w kolorze magenta, inaczej nie przejdziemy wszystkich wierzchołków lub odwiedzimy któreś wielokrotnie, ponieważ wierzchołków magenta jest o jeden więcej. Patrząc na rysunek możemy zaobserwować, że środkowa kostka ma inny kolor od narożnika, zatem jasnym jest, że mysz nie może zjeść środkowego pola jako ostatniego.

Zadanie 6.

Pokaż, że każdy turniej zawiera (skierowaną) ścieżkę Hamiltona, tzn. przechodzącą wszystkie wierzchołki.

Rozwiązanie

Pokażmy przez indukcję, że każdy turniej o n wierzchołkach zawiera (skierowaną) ścieżkę Hamiltona.

Podstawa: Dla 0 wierzchołków możemy wskazać pustą ścieżkę, zatem istnieje ścieżka Hamiltona.

Krok: Załóżmy, że ścieżka Hamiltona istnieje dla turniejów o $0, 1, 2, ...n$ wierzchołkach i pokażmy, że wtedy istnieje też ścieżka Hamiltona w turnieju o $n + 1$ wierzchołkach.

W turnieju T o $n + 1$ wierzchołkach wyróżnijmy pewien wierzchołek, nazwijmy do s. Graf jest skierowany, zatem wierzchołki posiadają zarówno krawędzie wchodzące i wychodzące. Wykorzystajmy ten fakt i rozpatrzmy dwa zbiory wierzchołków V_{in} – zbiór wierzchołków połączanych z s krawędzią wchodzącą do s i V_{out} – wychodzącą z s. Od razu możemy spostrzec, że w ten sposób utworzyliśmy trzy miejsze turnieje – jeden składający się z wierzchołków z V_{in}, drugi z wierzchołków z V_{out} i trzeci o jednym wierzchołku s. Nazwijmy dwa pierwsze T_{in} i T_{out}. Wiemy, że są to turnieje, bo powstały przez usunięcie części wierzchołków, nie usuwaliśmy krawędzi między pozostałymi. Przed usunięciem tych wierzchołków, między każdą parą istniał łuk, zatem po usunięciu ich części dalej między każdą parą pozostałych istnieje łuk. Z kolei s jest turniejem, bo zawiera tylko jeden wierzchołek, więc między każdą parą wierzchołków istnieje krawędź skierowana.

Zauważmy, że turnieje T_{in} i T_{out} składają się z co najwyżej n wierzchołków, ponieważ do żadnego z nich nie należy s, czyli z założenia indukcyjnego oba zawierają ścieżkę Hamiltona. Turniej składający się tylko z wierzchołka s także zawiera ścieżkę Hamiltona na mocy założenia indukcyjnego.

Rozpatrzmy ścieżkę Hamiltona w T_{in}, powiedzmy, że kończy się ona na wierzchołku v. Wtedy z definicji T_{in} wiemy, że istnieje krawędź skierowana od v do s (T_{in} zawiera wierzchołki, połączone z s krawędzią wchodzącą do s). Jeśli rozpatrzymy ścieżkę Hamiltona w T_{out}, która kończy się na wierzchołku w z tego samego powodu mamy, że istnieje krawędź skierowana z s do w. Możemy w takim razie połączyć ścieżki Hamiltona poprzez ścieżkę v, s, w. Taka ścieżka przechodzi przez wszystkie $n + 1$ wierzchołków tylko raz, zatem jest to ścieżka Hamiltona. Zatem taka ścieżka istnieje w turnieju o $n + 1$ wierzchołkach.

Zadanie 7.

Czy n-wymiarowa kostka zawiera ścieżkę Hamiltona?

Rozwiązanie

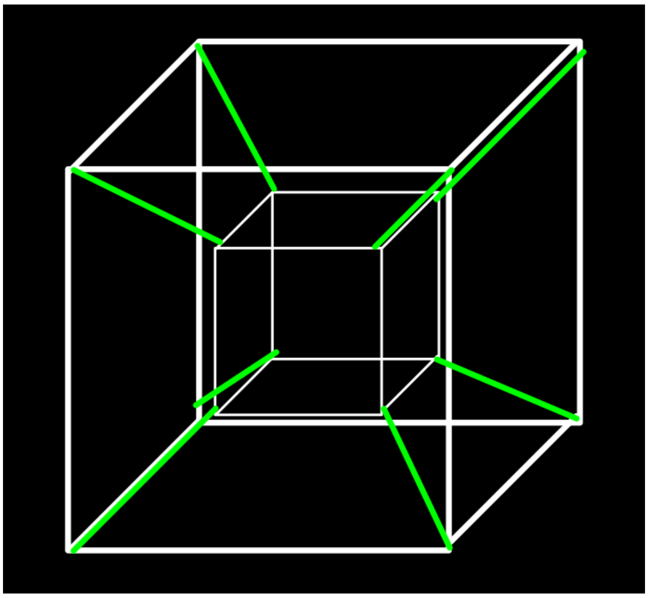
Pokażmy przez indukcję, że każda n-wymiarowa kostka zawiera ścieżkę Hamiltona.

Kostkę możemy reprezentować w postaci grafu, gdzie każdy jej wierzchołek jest wierzchołkiem grafu, a jej każda krawędź krawędzią grafu.

Podstawa: Dla 0 wymiarów mamy kostkę będącą pojedynczym punktem. Zatem oczywiście istnieje dla niej ścieżka przechodząca przez wszystkie wierzchołki (jeden), czyli ścieżka Hamiltona.

Krok: Załóżmy, że ścieżka Hamiltona istnieje dla kostki n-wymiarowej i pokażmy, że wtedy istnieje też ścieżka Hamiltona dla kostki $n+1$-wymiarowej.

Weźmy kostkę n-wymiarową. Z założenia indukcyjnego istnieje dla niej ścieżka Hamiltona. Wiemy, że kostkę $n+1$-wymiarową możemy skonstruować biorąc dwie kostki n-wymiarowe i łącząc ich odpowiadające sobie wierzchołki krawędziami.



Rysunek 3: Konstrukcja kostki 4-wymiarowej z dwóch kostek 3-wymiarowych

Niech ścieżka w zewnętrznej kostce (odwołujemy się teraz do uogólnionej wersji powyższego rysunku) kończy się na wierzchołku v, z kolei ścieżka w wewnętrznej kostce zaczyna się w wierzchołku w. Zauważmy, że łącząc obie te ścieżki krawędzią między v i w otrzymamy ścieżkę przechodzącą jednokrotnie przez wszystkie wierzchołki, czyli ścieżkę Hamiltona. Zatem taka ścieżka istnieje w kostce $n+1$-wymiarowej.