8. Mamy $2n$ uczniów, z których każdy ma przynajmniej n przyjaciół. Pokaż, że można ich usadzić w n ławkach tak, by każdy z nich siedział z przyjacielem. Pokaż też, że jeśli $n > 1$, to może być to zrobione na co najmniej dwa sposoby.

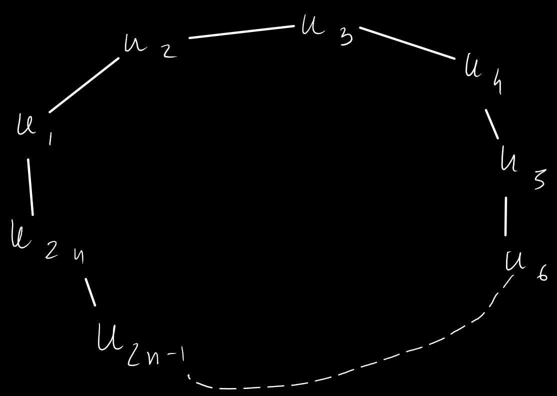
Dla $n=1$ mamy 2 przyjaciół, wystarczy usadowić ich na jednej ławce.

Dla $n>1$ przeprowadzimy inne rozumowanie. Rozważmy graf $G=(V,E)$, gdzie wierzchołki to uczniowie, a krawędzie między nimi oznaczają, że się przyjaźnią. Zauważmy, że mamy $2n \geq 4$ uczniów oraz każdy z nich ma co najmniej n przyjaciół, w szczególności $\forall (v,u) \in E \; deg(v)+deg(u) \geq n+n \geq 2n$. Zatem spełnione jest następujące twierdzenie Ore'a, czyli graf zawiera cykl Hamiltona.

Twierdzenie Ore'a

Jeśli $G=(V,E)$ jest grafem prostym o co najmniej trzech wierzchołkach i takim, że dla każdych dwóch wierzchołków u i v niepołączonych krawędzią zachodzi $deg(u)+deg(v) \geq |V|$, to G zawiera cykl Hamiltona.

Cykl ten wygląda w podobny co narysowany sposób (krawędzie są między przyjaciółmi):

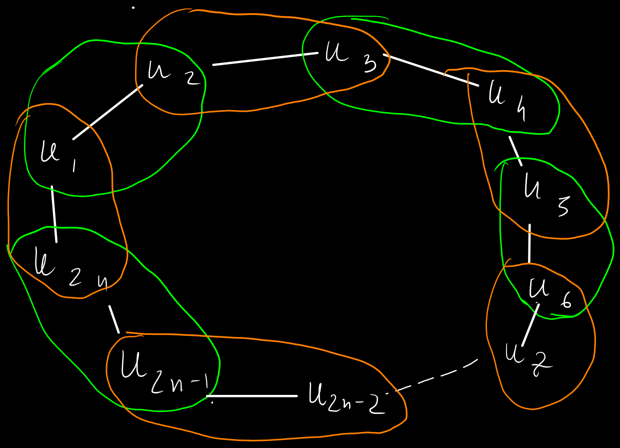


Zauważmy, że mamy parzystą liczbę wierzchołków, zatem możemy podzielić sąsiadów w pary na dwa sposoby:

1° Sadzamy w pierwszej ławce u_1 i u_2, w drugiej u_3 i u_4 itd. aż do u_{2n-1} i u_{2n} w ostatniej.

2° Sadzamy w pierwszej ławce u_{2n} i u_1, w drugiej u_2, u_3, itd. aż do u_{2n-2} i u_{2n-1} w ostatniej.

Takie rozsadzenie zapewnia, że w jednej ławce siedzą przyjaciele (bierzemy sąsiadów na cyklu Hamiltona w grafie G) i posadzimy wszystkich uczniów. Możemy zilustrować ten sposób parowania uczniów:



Zatem udowodniliśmy prawdziwość, że dla $n \geq 1$ możemy posadzić $2n$ uczniów w sposób opisany w zadaniu, a dla $n>1$ zrobić to na co najmniej dwa sposoby.