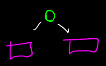
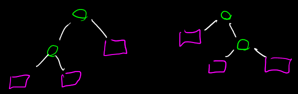
Krystian Jasionek
MDL
Lista 7

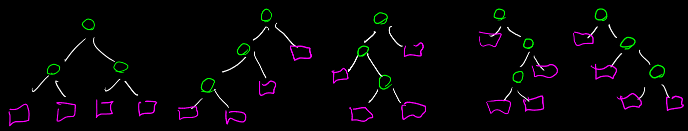
2. Określ liczbę drzew binarnych, zawierających n wierzchołków wewnętrznych. W drzewie binarnym każdy wierzchołek ma zero lub dwóch synów.

Rozpatrzmy kilka początkowych przypadków. Niech o to wierzchołek wewnętrzny, a ▭ zewnętrzny.

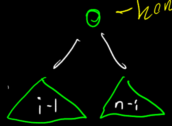
$n = 0$  – jedno możliwe drzewo

$n = 1$  – tylko jedno drzewo

$n = 2$  – dwa drzewa

$n = 3$  – pięć drzew

Zauważmy, że są to kolejne liczby Catalana. Wiemy, że liczby Catalana opisuje się wzorem $C_n = \sum_{i=1}^{n} C_{i-1} C_{n-i}$.
Sprawdźmy, jak możemy obliczyć ilość drzew rekurencyjnie.
Niech $T(n)$ to liczba sposobów, na jakie można zbudować drzewo o n wierzchołkach wewnętrznych.
Wtedy możemy zauważyć, że z korzenia takiego drzewa możemy wyprowadzić dwa poddrzewa zawierające $(i-1)$ oraz $(n-i)$ wierzchołków.

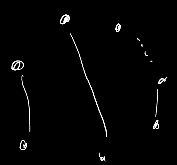


Dzielimy problem na dwa podproblemy. Wybieramy ile wierzchołków wewnętrznych na lewe poddrzewo ($i-1$, bo nie bierzemy pod uwagę korzenia drzewa) i prawe ($n-i$, bo tyle nam zostało). Zauważmy, że jedyne zmiany w ustawieniu wierzchołków mogą zajść dla poddrzew – korzeń jest nieruchomy – zatem wystarczy zbadać ile mamy możliwych poddrzew, w zależności od wyboru i.

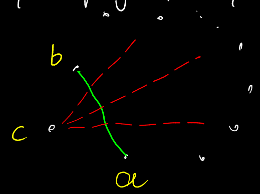
Widzimy, że wtedy liczba drzew o n wierzchołkach wewnętrznych możemy przedstawić jako liczbę drzew o $(i-1)$ oraz $(n-i)$ wierzchołkach wewnętrznych.
$T_i(n) = T(i-1) \cdot T(n-i)$, gdzie $T_i(n)$ to liczba drzew o n wierzchołkach wewnętrznych dla danego wyboru i. By policzyć $T(n)$ musimy zsumować przypadki dla różnych i, zatem $T(n) = \sum_{i=1}^{n} T(i-1) \cdot T(n-i)$, czyli otrzymaliśmy wzór na kolejne liczby Catalana.

3. Ile nie krzyżujących się uścisków dłoni może wykonać jednocześnie n par osób siedzących za okrągłym stołem?

Weźmy $2n$ osób wokół stołu. Niech osobę reprezentuje kropka, połączenie ręki krawędź między kropkami.

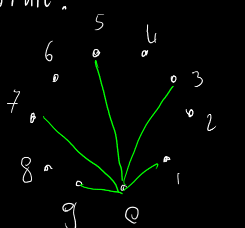


Zauważmy, że nie możemy pozwolić na uścisk między dwiema osobami, między którymi siedzi jeszcze jedna, w przeciwnym wypadku ta osoba mogłaby wykonać tylko uścisk krzyżujący się. Podobnie, gdy są oddalone o dowolną nieparzystą liczbę osób.

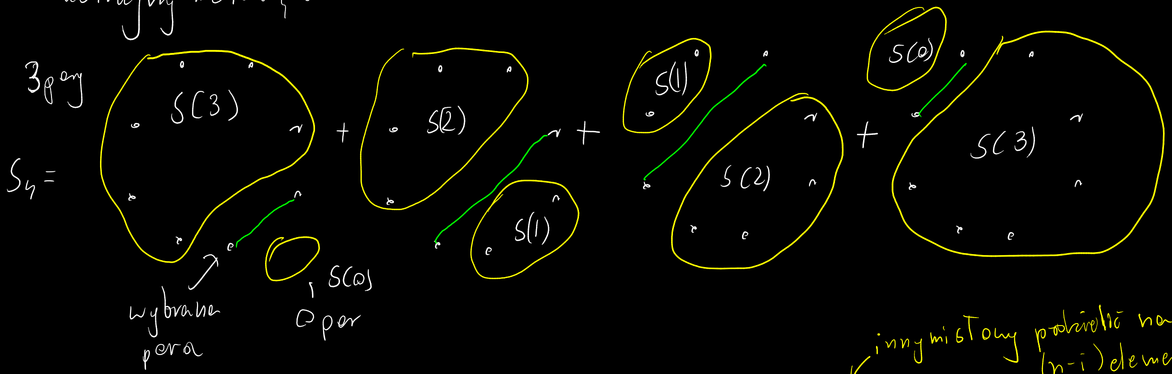


Jeśli a podaje rękę b, wtedy c może wykonać tylko uścisk krzyżujące (czerwone).

Zatem możemy pozwolić tylko na uścisk między osobami oddalonymi o parzystą liczbę osób. Innymi słowy jeśli indeksowalibyśmy osoby, wtedy osoba o indeksie nieparzystym może podać rękę tylko osobie o indeksie parzystym, i odwrotnie.



Niech $S(n)$ oznacza liczbę uścisków dłoni, jakie może wykonać n par osób siedzących przy okrągłym stole.
Wtedy zauważmy, że problem dla n par możemy podzielić na dwa podproblemy: $(i-1)$ par oraz $(n-i)$ par. Możemy to zrobić wybierając jedną parę spośród n i wybór dwa podzbiory par rozdzielone przez tę parę.
Zilustrujmy metodę dla $n = 4$.



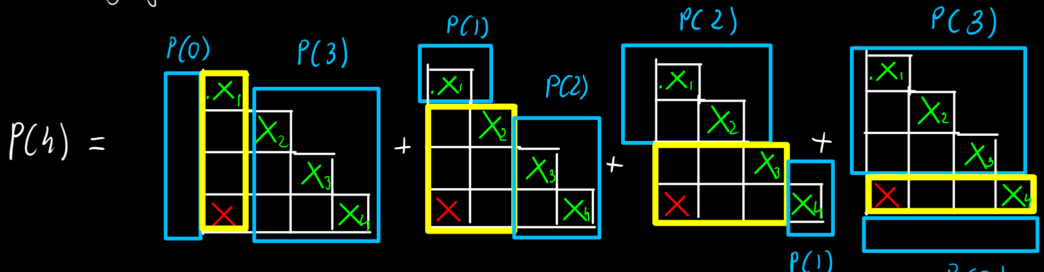
innymi słowy podzielić na dwa podzbiory $(i-1)$ i $(n-i)$ elementowe.

Analogicznie możemy postąpić dla n par. Wtedy i-tą parę rozdzielającą możemy wybrać na n sposobów, stąd

$$S(n) = \sum_{i=1}^{n} S(i-1)\cdot S(n-i).$$

4. Z macierzy $n \times n$ usuwamy część nad przekątną otrzymując macierz "schodkową". Na ile sposobów można ją podzielić na n prostokątów?

Jak w poprzednich zadaniach, chcemy podzielić problem na dwa podproblemy, tzn. schody wysokości n podzielić na dwoje mniejszych schodów wysokości $(i-1)$ oraz $(n-i)$. Zastanówmy się, jak zrobić to w sposób jednoznaczny. Wyszczególnijmy elementy na przekątnej (x) i w lewym dolnym rogu (x). Elementy (x) ponumerujmy od 1 do n, licząc od najwyższego do najniższego stopnia. Wtedy każdą parę $(x)(x)$ umieśćmy w jednym prostokącie, taki prostokąt jest jedyny. Stworzy to podział na dwoje „podschodów" wysokości $(i-1)$ oraz $(n-i)$, gdzie i to indeks (x), który jest zawarty w wydzielonym prostokącie z parą $(x)(x)$.
Zilustrujmy metodę dla $n = 4$. Niech $P(n)$ to liczba prostokątów dla schodów wysokości n.



Metodę możemy uogólnić dla dowolnego n. Wtedy $P(n) = \sum_{i=1}^{n} P(i-1)\,P(n-i)$.

5. Podaj funkcję tworzącą dla ciągu $(0, 0, 0, 1, 3, 7, 15, 31, \ldots)$.

Zauważmy, że $(1, 3, 7, 15 \ldots)$ to kolejne potęgi dwójki zmniejszone o 1. Nazwijmy ten ciąg b_n, niech a_n to ciąg kolejnych potęg dwójki: $b_n = (0, 1, 3, 7 \ldots)$ $a_n = (1, 2, 4, 8 \ldots)$. Funkcja tworząca a_n to

$$A(x) = 2^0x^0 + 2^1x^1 + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} 2^n x^n = \frac{1}{1-2x},$$ wtedy $$B(x) = \sum_{n=0}^{\infty} 2^n x^n - \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-2x} - \frac{1}{1-x} = \frac{x}{(1-2x)(1-x)}.$$

$(0, 0, 0, 1, 3, 7, 15 \ldots)$ to ciąg b_n przesunięty o dwie pozycje w prawo, nazwijmy taki ciąg w_n. Wtedy jego funkcja tworząca $W(x) = \frac{x^2\, x}{(1-2x)(1-x)}$

$$W(x) = \frac{x^3}{(1-2x)(1-x)}$$

6. Niech $A(x)$ będzie funkcją tworzącą ciągu a_n. Pokaż, że funkcją tworząca ciągu b_n postaci $(0, 0, \ldots, 0, a_0, a_1, a_2, \ldots)$, takiego, że $b_{k+i} = a_i$ oraz $b_0 = \ldots = b_{k-1} = 0$ jest funkcja $x^k A(x)$.

A jak otrzymać funkcję tworzącą ciągu c_n postaci $(a_k, a_{k+1}, \ldots,)$, czyli takiego, że $c_i = a_{k+i}$?

$$A(x) = a_0 x^0 + a_1 x^1 + a_2 x^2 + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

$b_n = (0, 0, \ldots, 0, a_0, a_1, a_2, \ldots)$, $b_{k+i} = a_i$, $b_0 = \ldots = b_{k-1} = 0$. Pokażemy, że funkcja tworząca b_n jest $B(x) = x^k A(x)$.

Zauważmy, że ciąg b_n to ciąg a_n przesunięty w prawo o k pozycji. Wtedy

$$B(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n = \underbrace{b_0 x^0 + b_1 x^1 + b_2 x^2 + \ldots + b_{k-1} x^{k-1}}_{=0} + b_k x^k + b_{k+1} x^{k+1} + \ldots =$$

$$= a_0 x^k + a_1 x^{k+1} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+k} = x^k \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = x^k A(x),$$ co chcieliśmy pokazać.

Dla ciągu $c_n = (a_k, a_{k+1}, \ldots)$, tzn. $c_i = a_{k+i}$ chcemy otrzymać funkcję tworzącą. Możemy to zrobić usuwając k pierwszych elementów a_n i przesuwając otrzymany ciąg w lewo o k. Zatem możemy napisać, powyższy ciąg przekształceń

$$A(x) = a_0 x^0 + a_1 x^1 + \ldots$$

$$A'(x) = A(x) - (a_0 x^0 + a_1 x^1 + \ldots + a_{k-1} x^{k-1}) = a_k x^k + a_{k+1} x^{k+1} + \ldots = A(x) - \sum_{i=0}^{k-1} a_i x^i$$

$$C(x) = \frac{A'(x)}{x^k} = \frac{A(x) - \sum_{i=0}^{k-1} a_i x^i}{x^k},$$ gdzie

$$C(x) = \frac{A(x) - \sum_{i=0}^{k-1} a_i x^i}{x^k}$$ to funkcja tworząca $c_n = (a_k, a_{k+1}, \ldots)$

7. Podaj postać funkcji tworzącej dla liczby podziałów liczby naturalnej n (czyli rozkładów liczby n na sumę składników naturalnych, gdy rozkładów różniących się kolejnością nie uważamy za różne):
   (a) na dowolne składniki,
   (b) na różne składniki nieparzyste,
   (c) na składniki mniejsze od m,
   (d) na różne potęgi liczby 2.

a) Chcemy podzielić liczbę $n \in \mathbb{N}$ na dowolne składniki. Zastosujmy do tego funkcje tworzące. Sprawdźmy za pomocą jakich liczb k możemy przedstawić liczbę n. Zaprezentujmy ten sposób tabelką. Zakładamy, że $n = 0$ możemy przedstawić każdą liczbą k, wystarczy wziąć $0k$. Zauważmy, że możemy reprezentować n jako kombinację kilku liczb (podobnie jak przy przykładzie o wydawaniu reszt z wykładu). Jeśli chcemy wyznaczyć liczbę podziałów n możemy zapisać iloczyn funkcji tworzących kolejnych liczb k, wtedy współczynnik α_n stojący przy x^n jest równy tej liczbie podziałów. Np. dla $n = 3$ przy $k = 1, 2$, gdzie $F_k(x)$ oznacza funkcję tworzącą ciągu $(0, k, 2k, 3k \ldots)$

$$F_1(x) \cdot F_2(x) = (x^0 + x^1 + x^2 + x^3 + \ldots) \cdot (x^0 + x^2 + x^4 + \ldots) = (\ldots + 2x^3 + \ldots),$$ zatem mamy dwa takie sposoby.

Możemy tę metodę uogólnić dla dowolnych kombinacji liczb k. Wtedy liczba podziałów liczby n to α_n stojąca przy x^n w iloczynie funkcji tworzących F_k. Taki iloczyn możemy zapisać jako

$k \backslash n$	0	1	2	3	4	
1	1	1	1	1	1	... , $F_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$
2	1	0	1	0	1	... $F_2(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^{2n}$
3	1	0	0	1	0	... $F_3(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^{3n}$
4	1	0	0	0	1	... $F_4(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^{4n}$
⋮						

$$P(x) = \prod_{i=1}^{\infty} F_i(x) = \prod_{i=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} x^{in} = \prod_{i=1}^{\infty} \frac{1}{1 - x^i}$$

i jest to funkcja tworząca, opisująca liczbę podziałów n.

b) Możemy postąpić analogicznie co w a). Musimy tylko ograniczyć się do różnych liczb nieparzystych $2k+1$. Zatem w tabeli każde k może reprezentować tylko 0 i swoją pierwszą wielokrotność.

$k \backslash n$	0	1	2	3	4	
1	1	1	0	0	0	... , $F_1(x) = (1 + x^1)$
~~2~~	~~1~~	~~0~~	~~1~~	~~0~~	~~0~~	...
3	1	0	0	1	0	... $F_3(x) = (1 + x^3)$
~~4~~	~~1~~	~~0~~	~~0~~	~~0~~	~~1~~	...
⋮						

Bierzemy tylko $(1 + x^{2k+1})$, bo nie dopuszczamy podziałów, w których powtarza się dane k, np. odrzucamy $2 = 1 + 1$ lub $5 = 1 + 2 + 2$.

Po zastosowaniu rozumowania podobnego co w a) otrzymujemy funkcję tworzącą

$$P(x) = \prod_{i=1}^{\infty} (1 + x^{2i+1})$$

c) Znów, mamy analogiczne podejście co w a), tylko ograniczamy się do $k < m$.

$k \backslash n$	0	1	2	3	4	...	$m-1$	m
1	1	1	1	1	1	...		
2	1	0	1	0	1	...		
3	1	0	0	1	0	...		
4	1	0	0	0	1	...		
⋮								
$m-1$	1	0	0	0	0	...	1	0
~~m~~	~~1~~	~~0~~	~~0~~	~~0~~	~~0~~	~~...~~	~~0~~	~~1~~

$$F_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

$$F_2(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^{2n}$$

$$\vdots$$

$$F_{m-1}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^{(m-1)n}$$

Stąd funkcja tworząca to

$$P(x) = \prod_{i=1}^{m-1} F_i(x) = \prod_{i=1}^{m-1} \frac{1}{1-x^i}$$

d) Analogicznie jak w b), odrzucamy inne k niż potęgi dwójki. Musimy też ograniczyć się do brania danego k tylko jeden raz. Zatem tabela i funkcje tworzące wyglądają następująco.

$k \backslash n$	0	1	2	3	4	...	8	9
1	1	1	0	0	0	...	0	0
2	1	0	1	0	0	...	0	0
~~3~~	~~1~~	~~0~~	~~0~~		~~0~~	~~...~~	~~0~~	
4	1	0	0	0	1	...	0	0
⋮	⋮						⋮	
8	0	0	0	0	0	...	1	0
⋮								

$F_1(x) = 1 + x^1$

$F_2(x) = 1 + x^2$

$F_4(x) = 1 + x^4$

$F_8(x) = 1 + x^8$

Stąd szukana funkcja tworząca wygląda następująco

$$P(x) = \prod_{i=1}^{\infty} F_{2^i} = \prod_{i=1}^{\infty} (1 + x^{2^i})$$

$$P(x) = \prod_{i=1}^{\infty} (1 + x^{2^i})$$