L12.1. 1 punkt Jak już wiadomo, język programowania `PWO++` ma obszerną bibliotekę funkcji i procedur numerycznych. Wśród nich znajduje się procedura `Integral(`f`)` znajdująca z dużą dokładnością wartość całki $\int_{-2}^{2} f(x)\mathrm{d}x$, gdzie $f \in C[-2,2]$. W jaki sposób użyć procedury `Integral` do obliczenia całki

$$\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x \qquad (a<b;\ g\in C[a,b])?$$

Zastosujmy podstawienie zmiennych, by zmienić granice całkowania.

$$\int_a^b g(x)\,dx = \left| \begin{array}{l} t = 2 - 4\frac{x-b}{a-b} \\ dt = \frac{4}{b-a}\,dx \end{array} \right| = \left| \begin{array}{l} x = \frac{(t-2)(a-b)}{-4} + b \\ dx = \frac{dt\,(b-a)}{4} \end{array} \right| = \int_{-2}^{2} g\left(\frac{(t-2)(a-b)}{-4} + b\right)\frac{(b-a)}{4}\,dt$$

$$\int_a^b g(x)\,dx = \frac{b-a}{4}\int_{-2}^{2} g\left(\frac{(t-2)(a-b)}{-4} + b\right)dt$$

Zatem by policzyć $\int_a^b g(x)\,dx$ wystarczy wywołać Integral (f), gdzie $f(t) = g\left(\frac{(t-2)(a-b)}{-4} + b\right)$

L12.2. 2 punkty Udowodnij, że kwadratura postaci

$$(1) \qquad Q_n(f) := \sum_{k=0}^{n} A_k f(x_k).$$

ma rząd $\geq n+1$ wtedy i tylko wtedy, gdy jest kwadraturą interpolacyjną.

Pokażmy implikacje w obie strony.

$\Leftarrow$) Załóżmy, że $Q_n(f)$ jest kwadraturą interpolacyjną, to znaczy, że $Q_n(f) = \int_a^b L_n^f(x)\,dx$.

Weźmy dowolne $w \in \Pi_n$.

Wiemy, że interpolacja Lagrange'a dokładnie przybliża wielomiany do n-tego stopnia, tzn

$L_n^w(x) = w(x)$, wtedy $Q_n(w) = \int_a^b w(x)\,dx$.

Zatem dla wielomianów do n-tego stopnia wynik kwadratury jest dokładny, zatem jej rząd $\geq n+1$.

$\Rightarrow$) Załóżmy, że Q_n ma rząd $\geq n+1$. Wtedy $Q_n(f) = \sum_{k=0}^{n} A_k f(x_k)dx$.

Weźmy dowolne $k \in [0,n]$. Wiemy, że λ_k z wielomianu Lagrange'a to $\lambda_k = \prod_{\substack{i=0 \\ i\neq k}}^{n} \frac{x-x_i}{x_k-x_i}$.

Widzimy, że $\lambda_k \in \Pi_n$. W takim razie

$$Q_n(\lambda_k) = \int_a^b \lambda_k(x)\,dx$$

$$Q_n(\lambda_k) = \sum_{j=0}^{n} A_j \lambda_k(x_j), \text{ ale } \lambda_k(x_j) = \prod_{\substack{i=0 \\ i\neq k}}^{n} \frac{x_j - x_i}{x_k - x_i}, \text{ czyli}$$

$\lambda_k(x_j) = 0$ dla $k \neq j$, $\lambda_k(x_j) = 1$ dla $k = j$. Zatem

$$Q_n(\lambda_k) = \sum_{j=0}^{n} A_j \lambda_k(x_j) = A_k \underbrace{\lambda_k(x_k)}_{=1} = A_k.$$

Widzimy, że dla $k \in [0,n]$ $A_k = \int_a^b \lambda_k(x)\,dx$, czyli

$$Q_n(f) = \sum_{k=0}^{n} A_k f(x_k)dx = \sum_{k=0}^{n} \int_a^b \lambda_k(x)dx \cdot f(x_k) = \int_a^b \sum_{k=0}^{n} \lambda_k(x) f(x_k)\,dx = \int_a^b L_n^f(x)\,dx.$$

Zatem kwadratura jest kwadraturą interpolacyjną.

L12.3. $\boxed{\text{1 punkt}}$ Udowodnij, że rząd kwadratury postaci (1) nie przekracza $2n+2$.

Weźmy $Q_n(f) = \sum_{k=0}^{n} A_k f(x_k)$ oraz $f(x) = \prod_{k=0}^{n} (x-x_k)^2 \in \Pi_{2n+2}$. Mamy $n+1$ podwójnych miejsc zerowych, zatem $f(x) \geq 0$ dla każdego x. Zauważmy, że $Q_n(f) = \sum_{k=0}^{n} A_k f(x_k) = 0$, bo x_k to miejsce zerowe funkcji f. Ale skoro $f(x) \geq 0$ to $\int_a^b f(x)\,dx > 0$ (wykres jest stale ponad lub na osi X), to kwadratura jest niedokładna. Zatem rząd kwadratury nie przekracza $2n+2$.

L12.5. $\boxed{\text{1 punkt}}$ Jak upraszcza się wzór interpolacyjny Lagrange'a dla węzłów równoodległych?

$$h = \frac{b-a}{n} \qquad x_i = a + ih$$

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i)\lambda_i(x)$$

$$\lambda_i(x) = \prod_{\substack{k=0\\k\neq i}}^{n} \frac{(x-x_k)}{(x_i - x_k)}$$

możemy podstawić x_k, x_i ze wzoru

$$\lambda_i(x) = \prod_{\substack{k=0\\k\neq i}}^{n} \frac{(x-a-kh)}{(a+ih-a-kh)} = \prod_{\substack{k=0\\k\neq i}}^{n} \frac{(x-a-kh)}{h(i-k)}$$

iza x weźmy $x = a+th$ dla pewnego t

$$\lambda_i(a+th) = \prod_{\substack{k=0\\k\neq i}}^{n} \frac{a+th-a-kh}{h(i-k)} = \prod_{\substack{k=0\\k\neq i}}^{n} \frac{h(t-k)}{h(i-k)} = \prod_{\substack{k=0\\k\neq i}}^{n} \frac{t-k}{i-k}$$

Zauważmy, że

$$\prod_{\substack{k=0\\k\neq i}}^{n} (i-k) = \underbrace{(i)(i-1)(i-2)\cdots(i-i+1)}_{i(i-1)\ldots 2\cdot 1 = i!}\underbrace{(i-i-1)\cdots(i-n+1)(i-n)}_{(-1)(-2)\ldots(i-n+1)(i-n) = (-1)^{n-i}\cdot(n-i)!}$$

$$\prod_{\substack{k=0\\k\neq i}}^{n} (i-k) = (-1)^{n-i}\, i!\,(n-i)!$$

Wtedy

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i) \prod_{\substack{k=0\\k\neq i}}^{n} \frac{t-k}{i-k} = \underbrace{\sum_{i=0}^{n} \frac{f(x_i)}{(-1)^{n-i}\, i!\,(n-i)!} \cdot \prod_{\substack{k=0\\k\neq i}}^{n} (t-k)}$$

Możemy obliczyć silnię raz, zapisać w pamięci i odczytywać, zamiast liczyć ponownie.

L12.6. $\boxed{\text{1 punkt}}$ Sprawdź, że współczynniki kwadratury Newtona-Cotesa

$$N_n(f) := \sum_{k=0}^{n} A_k f(a + k\cdot h_n) \qquad \left(h_n := \frac{b-a}{n}\right) \tag{2}$$

są takie, że $A_k = A_{n-k}$ $(k = 0, 1, \ldots, n)$.

$$A_k = \frac{h}{k!\,(n-k)!}(-1)^{n-k}\int_0^n \prod_{\substack{i=0\\i\neq k}}^{n} (t-i)\,dt \quad \text{, niech } \frac{h}{k!\,(n-k)!} = \alpha_k$$

Stosujemy takie podstawienie, bo zauważmy, że A_k jest symetryczne do A_{n-k} i iloczyny będą posiadały te same wyrazy, ale w odwrotnej kolejności. Podstawienie odwróci granice całkowania.

$$A_k = \frac{h}{k!\,(n-k)!}(-1)^{n-k}\int_0^n \prod_{\substack{i=0\\i\neq k}}^{n} (t-i)\,dt = \left|\begin{aligned} t &= n-u \\ dt &= -du \end{aligned}\right| = \alpha_k(-1)^{n-k}\int_0^n \prod_{\substack{i=0\\i\neq k}}^{n} (n-u-i)\,du$$

$$A_k = \alpha_k(-1)^{n-k}\int_0^n \prod_{\substack{i=0\\i\neq k}}^{n} (n-u-i)\,du = \alpha_k(-1)^{n-k}\int_0^n \prod_{\substack{i=0\\i\neq k}}^{n} -(u-(n-i))\,du = \alpha_k(-1)^{2n-k}\int_0^n \prod_{\substack{i=0\\i\neq k}}^{n} (u-(n-i))\,du = \alpha_k(-1)^{2n-k}\int_0^n \prod_{\substack{j=0\\j\neq n-k}}^{n} (u-j)\,du$$

$$A_{n-k} = \alpha_{n-k}(-1)^k \int_0^n \prod_{\substack{i=0\\ i\neq n-k}}^{n} (t-i)\,dt$$

Zauważmy, że $\frac{(-1)^{2n-k}}{(-1)^k} = (-1)^{2n-2k} = 1$, zatem $(-1)^{2n-k} = (-1)^k$.

oraz, że $\alpha_k = \frac{h}{k!(n-k)!}$ $\quad \alpha_{n-k} = \frac{h}{(n-k)!\,(n-n+k)!} = \frac{h}{k!(n-k)!}$

$$\alpha_k = \alpha_{n-k}$$

Wtedy $A_{n-k} = \alpha_{n-k}(-1)^k \int_0^n \prod_{\substack{i=0\\ i\neq n-k}}^{n} (t-i)\,dt$

$$A_k = \alpha_k(-1)^{2n-k} \int_0^n \prod_{\substack{j=0\\ j\neq n-k}}^{n} (u-j)\,du = \left| \begin{matrix} u=t \\ du=dt \end{matrix} \right| = \alpha_{n-k}(-1)^k \int_0^n \prod_{\substack{i=0\\ i\neq n-k}}^{n} (t-i)\,dt = A_{n-k}$$

L12.7. $\boxed{\text{1 punkt}}$ Niech A_k $(k = 0, 1, \ldots, n)$ oznaczają współczynniki kwadratury Newtona-Cotesa (2). Udowodnij, że $A_k/(b-a)$ $(0 \le k \le n)$ są liczbami wymiernymi.

$$\frac{A_k}{b-a} = \frac{(-1)^{n-k}h}{k!\,(n-k)!} \int_0^n \prod_{\substack{j=0\\ j\neq k}}^{n} (t-j)\,dt \cdot \frac{1}{b-a} \qquad h = \frac{b-a}{n}$$

$$\frac{A_k}{b-a} = \frac{(-1)^{n-k}(b-a)}{n \cdot k!\,(n-k)!\,(b-a)} \int_0^n \prod_{\substack{j=0\\ j\neq k}}^{n} (t-j)\,dt$$

$$\frac{A_k}{b-a} = \frac{(-1)^{n-k}}{n \cdot k!\,(n-k)!} \int_0^n \prod_{\substack{j=0\\ j\neq k}}^{n} (t-j)\,dt$$

, gdzie każdy wielomian możemy przedstawić w postaci potęgowej, więc

$$\frac{A_k}{b-a} = \frac{(-1)^{n-k}}{n \cdot k!\,(n-k)!} \int_0^n \sum_{i=0}^{n} a_i t^i\,dt = \frac{(-1)^{n-k}}{n \cdot k!\,(n-k)!} \sum_{i=0}^{n} a_i \left. \frac{t^{i+1}}{i+1} \right|_0^n$$

$$\frac{A_k}{b-a} = \frac{\overbrace{(-1)^{n-k}}^{\in \mathbb{Z}}}{\underbrace{n \cdot k!\,(n-k)!}_{\in \mathbb{Z}}} \sum_{i=0}^{n} a_i \frac{n^{i+1} \leftarrow \in \mathbb{Z}}{i+1 \leftarrow \in \mathbb{Z}}$$

$\uparrow$ $\in \mathbb{Q}$, bo a_i to iloczyn liczb całkowitych z $\prod_{\substack{j=0\\ j\neq k}}^{n} (t-j)$

Zatem $\frac{A_k}{b-a} \in \mathbb{Q}$.