2. $\Omega = \{a, b, c\}$

(a) $\Sigma_1 = \{\emptyset, \{a, b, c\}\}$

$\Sigma_2 = \{\emptyset, \{a\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}$

$\Sigma_3 = \{\emptyset, \{b\}, \{a, c\}, \{a, b, c\}\}$

$\Sigma_4 = \{\emptyset, \{c\}, \{a, b\}, \{a, b, c\}\}$

$\Sigma_5 = \{\emptyset, \{a, b\}, \{c\}, \{a, b, c\}\}$ – powtarza się, tworzenie zbiorów z kolejnymi parami zdarzeń będzie generować kolejne powtórzenia.

(b) Def. $X : \Omega \to \mathbb{R}$. X - zmienna losowa $\iff \forall_{B \in \mathcal{B}}\ X^{-1}(B) \in \mathcal{F}$, gdzie $\mathcal{B}$ to σ-ciało borelowskie.

$\Omega = \{\text{orzeł}, \text{reszka}\}$ $\qquad \Sigma_1 = \{\emptyset, \{\text{orzeł}, \text{reszka}\}\}$

$$Y(z) = \begin{cases} 0, & \text{gdy } z = \text{orzeł} \\ 1, & \text{gdy } z = \text{reszka} \end{cases}$$

$Y^{-1}(0) = \{\text{orzeł}\}$, ale $\{\text{orzeł}\} \notin \Sigma_1$, zatem Y nie jest zmienną losową.

$\Sigma_2 = \{\emptyset, \{\text{orzeł}\}, \{\text{reszka}\}, \{\text{orzeł}, \text{reszka}\}\}$

$$X(z) = \begin{cases} 1, & \text{gdy } z = \{\text{orzeł}\} \\ 0, & \text{gdy } z = \{\text{reszka}\} \\ 2, & \text{gdy } z = \{\text{orzeł}, \text{reszka}\} \\ -1, & \text{w p.p.} \end{cases}$$

$X^{-1}(-1) = \emptyset$

$X^{-1}(0) = \{\text{reszka}\}$

$X^{-1}(1) = \{\text{orzeł}\}$

$X^{-1}(2) = \{\text{orzeł}, \text{reszka}\}$