Matematyka Dyskretna L
Lista 14

Krystian Jasionek

28 stycznia 2021

Zadanie 1.

Udowodnij uogólnienie wzoru Eulera dla grafu planarnego z k składowymi spójności.

Rozwiązanie

Weźmy dowolny graf planarny $G = G_1 \cup G_2 \cup G_3 \cup ... \cup G_k$, gdzie G_i to i-ta spójna składowa grafu G.

Skoro G jest planarny, to każda jego składowa spójności musi być planarna, zatem dla G_i zachodzi $|V_i| + |F_i| - |E_i| = 2$, gdzie V_i, F_i, E_i to odpowiednio zbiory wierzchołków, ścian i krawędzi G_i. W takim razie dla całego grafu G zachodzi $\sum_{i=1}^{k} |V_i| + |F_i| - |E_i| = 2k$. Zauważmy, że wszystkie spójna składowe G mają jedną wspólną ścianę – płaszczyznę, na której narysowano graf, co oznacza, że w powyższej sumie dodaliśmy k razy tę ścianę. Po usunięciu powtórzeń otrzymujemy wzór: $\sum_{i=1}^{k} |V_i| + |F_i| - |E_i| - (k-1) = 2k - (k-1) = k+1$. Zauważmy, że skoro G_i to spójne składowe grafu, to ich zbiory wierzchołków i krawędzi są rozłączne. Możemy zatem zapisać uproszczony wzór:

$$|V| + |F| - |E| = k + 1,$$

gdzie V, E, F to zbiory wierzchołków, krawędzi i ścian całego grafu G. Ten wzór to uogólniony wzór Eulera.

Zadanie 2.

Wykaż, że graf i jego graf dopełniający nie mogą być jednocześnie grafami planarnymi, jeśli graf G ma co najmniej 11 wierzchołków.

Rozwiązanie

Weźmy dowolny graf $G = (V, E)$ o co najmniej 11 wierzchołkach i jego graf dopełniający $G' = (V', E')$ i niech $|V| = n$, $|E| = k$, $|V'| = n'$ oraz $|E'| = k'$. Załóżmy, że oba te grafy są planarne. Zauważmy, że graf pełny ma $\binom{n}{2}$ krawędzi, zatem $k' \leqslant \binom{n}{2}$ oraz $k' \leqslant \binom{n}{2} - k$. Wybierzmy ten z tych dwóch grafów, który ma więcej krawędzi, załóżmy że będzie to G, wtedy $k \geqslant \frac{\binom{n}{2}}{2}$.

Z wykładu wiemy, że dla planarnego grafu prostego o co najmniej trzech wierzchołkach zachodzi:

$$|E| \leqslant 3|V| - 6,$$

zatem dla G mamy $\frac{\binom{n}{2}}{2} \leqslant k \leqslant 3n - 6$. W takim razie powinna zachodzić poniższa nierówność:

$$\begin{aligned}
\frac{\binom{n}{2}}{2} &\leqslant 3n - 6 \\
\frac{n!}{4(n-2)!} &\leqslant 3n - 6 \\
n(n-1) &\leqslant 12n - 24 \\
n^2 - 13n + 24 &\leqslant 0
\end{aligned}$$

Nierówność ta jest spełniona dla $n \in [\frac{13-\sqrt{73}}{2}, \frac{13+\sqrt{73}}{2}]$. Zauważmy, że $\frac{13+\sqrt{73}}{2} \approx 10.77$, ale z założenia $n \geqslant 11$, więc otrzymaliśmy sprzeczność. W takim razie graf G oraz G' nie mogą być jednocześnie planarne, jeśli mają co najmniej 11 wierzchołków.

Zadanie 3.

Dla jakich wartości k kostka Q_k jest grafem planarnym? Odpowiedź uzasadnij.

Rozwiązanie

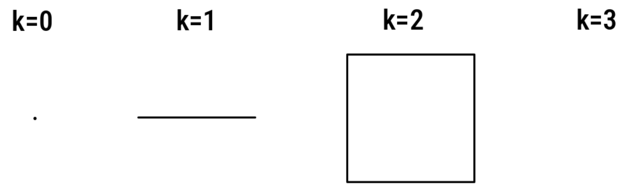
Rozpatrzmy kostki Q_k dla kilku pierwszych wartości k.

$k = 0$: Q_0 to punkt, zatem oczywiście jest grafem planarnym.

$k = 1$: Q_1 to odcinek, zatem również jest grafem planarnym.

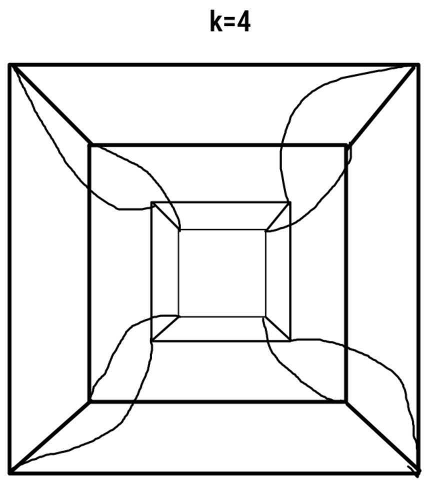
$k = 2$: Q_2 to kwadrat, zatem również jest grafem planarnym.

$k = 3$: Q_3 to sześcian, który mozemy przedstawić jako graf planarny, co widać na ilustracji 1.



Rysunek 1: Grafy Q_k dla $k \leqslant 3$

$k = 4$: Q_4 powstaje poprzez połączenie krawędziami odpowiadających sobie wierzchołków w dwóch grafach Q_3. Zauważmy, że graf Q_4 ma 16 wierzchołków i 32 krawędzie i nie zawiera trójkątów (rysunek 2). Z twierdzenia o liczbie krawędzi grafu planarnego (wykład 13, slajd 10) wiemy, że jeśli graf planarny $G = (V, E)$ o co najmniej 3 wierzchołkach nie zawiera żadnego trojkąta, wtedy $|E| \leqslant 2|V| - 4$. Ta nierówność dla Q_4 przyjmuje postać $32 \leqslant 28$, czyli nie jest spełniona. W takim razie Q_4 nie spełnia warunku koniecznego na bycie grafem planarnym, zatem nie jest planarny.



Rysunek 2: Graf Q_4

$k \geqslant 5$: W ogólności graf Q_k ma 2^k wierzchołków i $2^{k-1}k$ krawędzi (pokazaliśmy to na jednej z poprzednich list). W takim razie nierówność z poprzedniego podpunktu przyjmuje dla niego postać:

$$2^{k-1}k \leqslant 2^{k+1} - 4,$$

$$2^{k-1}k - 2^{k+1} + 4 \leqslant 0.$$

Pokażmy przez indukcje, że taka nierówność nie jest spełniona dla $k \geqslant 4$.

Podstawa: Dla $k - 4$ mamy:

$$2^3k - 2^5 + 4 \leqslant 0$$

$$4 \leqslant 0$$

. Zatem otrzymaliśmy sprzeczność.

Krok: Załóżmy, że dla nierówność jest niespełniona dla k i pokażmy, że wtedy nie jest spełniona dla $k + 1$.

Dla $k + 1$ mamy:

$$2^k(k + 1) - 2^{k+2} + 4 \leqslant 0 \mid \div 2$$

$$2^{k-1}(k + 1) - 2^{k+1} + 2 \leqslant 0,$$

ale z założenia indukcyjnego wiemy, że $2^{k-1}k - 2^{k+1} + 4 \leqslant 0$ jest sprzeczne, a dla $k \geqslant 4$:

$$2^{k-1}(k + 1) - 2^{k+1} + 2 \geqslant 2^{k-1}k - 2^{k+1} + 4$$

$$2^{k-1}k + 2^{k-1} \geqslant 2^{k-1}k + 2$$

$$2^{k-1} \geqslant 2$$

zatem nierówność jest sprzeczna dla $k + 1$.

W takim razie Q_k dla $k \geqslant 4$ nie spełnia warunku koniecznego na bycie grafem planarnym, zatem nie jest grafem planarnym.

Zadanie 5.

Niech G będzie spójnym grafem planarnym o n wierzchołkach ($n \geqslant 3$) i niech t_i oznacza liczbę wierzchołków stopnia i w grafie G, dla $i \geqslant 0$.

(a) Wykaż nierówność: $\sum_{i\in\mathbb{N}}(6-i)t_i \geqslant 12$.

(b) Wywnioskuj stąd, że graf G ma co najmniej trzy wierzchołki o stopniach 5 lub mniej.

Rozwiązanie

(a) Niech $G = (V, E)$ będzie spójnym grafem planarnym o $n \geqslant 3$ wierzchołkach. Przekształśćmy nierówność:

$$\sum_{i\in\mathbb{N}}(6-i)t_i \geqslant 12$$

$$6\sum_{i\in\mathbb{N}} t_i - \sum_{i\in\mathbb{N}} it_i \geqslant 12$$

Zauważmy, że $\sum_{i\in\mathbb{N}} t_i = |V| = n$ oraz $\sum_{i\in\mathbb{N}} it_i = 2|E| = 2m$. Z twierdzenia o liczbie krawędzi w prostym grafie planarnym o $n \geqslant 3$ wierzchołkach i m krawędziach (wykład 13, slajd 10) wiemy, że:

$$m \leqslant 3n - 6.$$

W takim razie możemy napisać, że:

$$6\sum_{i\in\mathbb{N}} t_i - \sum_{i\in\mathbb{N}} it_i \geqslant 12$$

$$6n - 2m \geqslant 12$$

$$6n - 2m \geqslant 6n - 3n + 6 \geqslant 12$$

$$3n \geqslant 6$$

$$n \geqslant 2,$$

a z założenia wiemy, że $n \geqslant 3$, zatem nierówność jest spełniona.

(b) Załóżmy, że graf $G = (V, E)$ ma mniej niż 3 wierzchołki stopnia 5 i pokażmy, że prowadzi to do sprzeczności.

Zauważmy, że wtedy G musi składać się z co najmniej $n - 2$ wierzchołków stopnia 6 lub więcej, zatem:

$$\sum_{i\in\mathbb{N}}(6-i)t_i = \sum_{i=0}^{5}(6-i)t_i + \sum_{i=6}^{n}(6-i)t_i \geqslant 12.$$

Skoro graf ma co najwyżej dwa wierzchołki stopnia 5 lub mniej, to $\sum_{i=0}^{5}(6-i)t_i \leqslant 10$, gdzie jest równa 10 dla $i = 1$, $t_i = 2$ ($i \neq 0$, bo G jest spójny) oraz $\sum_{i=6}^{n}(6-i)t_i \leqslant 0$. To oznacza, że:

$$\sum_{i\in\mathbb{N}}(6-i)t_i \leqslant 10,$$

ale przecież $\sum_{i\in\mathbb{N}}(6-i)t_i \geqslant 12$, zatem mamy sprzeczność. W takim razie G musi zawierać co najmniej trzy wierzchołki stopnia 5 lub mniej.

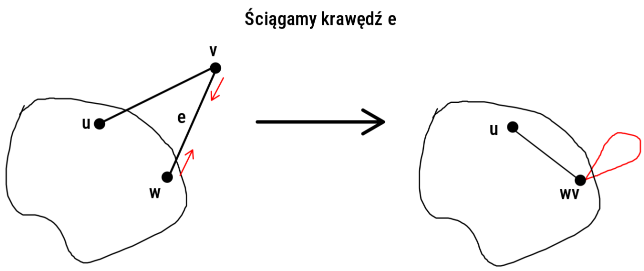
Zadanie 8.

Czy w dowodzie wzoru Eulera można by ściągnąć do jednego wierzchołka końce jakiejś krawędzi e, ale e nie usuwać?

Rozwiązanie

Na wykładzie przeprowadzono dowód indukcyjny tego twierdzenia. Zakładaliśmy tam, że ściąganie wierzchołka nie zmienia planarności grafu, za to zmniejsza liczbę wierzchołków i krawędzi o jeden, co pozwalało nam skorzystać w kroku indukcyjnym z tezy, i zauważyć, że wzór faktycznie jest poprawny.

Przeanalizujmy co się stanie, jeśli będziemy ściągać krańce krawędzi do wierzchołka, ale nie usuniemy tej krawędzi. Po takiej operacji wierzchołek ten będzie miał pętlę do samego siebie. W ten sposób liczba krawędzi grafu się nie zmienia, zmniejszy liczba wierzchołków zmniejszy się o 1, a liczba ścian rośnie o 1 (ilustracja 3).



Rysunek 3: Ściąganie krawędzi do wierzchołka bez jej usuwanie

By pokazać do czego prowadzi taka zmiana, przeprowadźmy jeszcze raz dowód z wykładu.

Podstawa: Niech liczba wierzchołków grafu $n = 1$. Jeśli liczba krawędzi tego grafu $m = 0$, to mamy tylko jedną ścianę, tzn. $f = 1$, wtedy $n+f-m = 2$. Jednak w takim grafie mogą pojawić się pętle, wtedy załóżmy, że mamy m krawędzi. Każda pętla dodaje jedną nową ścianę, zatem $f = m+1$, bo doliczamy początkową ścianę. Zatem $n + f - m = n + m + 1 - m = 2$.

Krok: Załóżmy, że dla grafów planarnych o n wierzchołkach teza jest spełniona ($|V| + |F| - |E| = 2$). Pokażmy, że wtedy spełniona jest dla grafów planarnych o $n + 1$ wierzchołkach.

Weźmy dowolny graf planarny o $n + 1$ wierzchołkach. Powiedzmy, że ma on m krawędzi i f ścian. Wtedy możemy ściągnąć jedną jego krawędź do pewnego wierzchołka, jednak nie usuwajmy tej krawędzi. Zauważmy (rysunek 3, że po takiej modyfikacji liczba wierzchołków grafu to n, krawędzi m oraz ścian $f + 1$, w takim razie spełniona jest dla niego teza indukcyjna, tzn. $n + f + 1 - m = 2$. Oznacza to, że graf o $n + 1$ wierzchołkach spełnia równanie Eulera, ponieważ dla niego $n + 1 + f - m = 2$.

Zatem widzimy, że wprowadzenie takiej zmiany nie wpływa na poprawność dowodu.

Zadanie 13.

Zbiór wierzchołków jest *niezależny* w grafie G, jeśli żadne dwa wierzchołki nie są w nim połączone krawędzią. Zbiór wierzchołków jest *pokryciem wierzchołkowym* grafu G, jeśli każda krawędź ma przynajmniej jeden z końców w tym zbiorze. Niech $\alpha(G)$ i $\beta(G)$ oznaczają odpowiednio moc największego zbioru niezależnego G i moc najmniejszego pokrycia wierzchołkowego G.

(a) Pokaż, że $\alpha(G) + \beta(G) = n$, gdzie n to liczba wierzchołków grafu G.

(b) Pokaż, jak obliczyć $\alpha(G)$, gdy G jest dwudzielny.

Rozwiązanie

(a) Weźmy najmniejsze pokrycie wierzchołkowe B grafu G. Zauważmy, że $G \backslash B$, czyli G z usuniętymi wierzchołkami z B i wychodzącymi z nich krawędziami, zawiera $n - \beta$ wierzchołków. Zauważmy, że te wierzchołki nie mogły być sąsiadami w G, inaczej należałyby do B, zatem $A = G \backslash B$ jest zbiorem wierzchołków niezależnych. Pokażmy, że A to największy taki zbiór w G.

Załóżmy nie wprost, że $A = G \backslash B$ nie jest największym zbiorem wierzchołków niezależnych i B jest najmniejszym pokryciem wierzchołkowym w G. Oznacza to, że istnieje jakiś zbiór wierzchołków niezależnych A', zawierający więcej wierzchołków od A. Skoro $A = G \backslash B$, to A' musi zawierać wierzchołki z B. Spróbujmy skonstruować taki zbiór. Weźmy A oraz $k \geqslant 2$ (inaczej nie stworzymy zbioru większego niż A) wierzchołków należących do B takich, że nie mają one krawędzi do żadnych wierzchołków w A poza $v \in A$. Nazwijmy zbiór takich wierzchołków jako U_k. Oznacza to, że możemy wziąć zbiór A bez v, tzn. $A - v$, i dodać do niego k sąsiadów v w B, tzn. U_k. Nazwijmy ten zbiór A' i zauważmy, że jest on większy od A i jest zbiorem wierzchołków niezależnych. Zauważmy jednak, że skoro v zawiera krawędzie do wierzchołków z U_k, to możemy wziąć pokrycie B', które powstało z B przez usunięcie U_k i dodanie wierzchołka v. Zauważmy, że taki B' jest pokryciem wierzchołkowym i jest mniejszy niż B, ale założyliśmy, że B jest najmniejszym pokryciem, zatem otrzymaliśmy sprzeczność. W takim razie A jest największym zbiorem wierzchołków niezależnych.

W takim razie możemy powiedzieć, że $|A| = \alpha = n - \beta$. Przekształcając tę równość otrzymujemy, że $\alpha + \beta = n$.

(b) Jeśli G jest grafem dwudzielnym, to możemy użyć twierdzenia Königa (podane na wykładzie), mówiącego, że w grafie dwudzielnym $|M_{max}| = |W_{min}|$, gdzie M_{max} to największe skojarzenie, a W_{min} to najmniejsze pokrycie wierzchołkowe w tym grafie. Zauważmy, że wtedy wystarczy obliczyć wartość β algorytmem na szukanie maksymalnego skojarzenia w grafie i wyznaczając moc tego skojarzenia. Wtedy możemy zastosować wzór dowiedziony w (a) i obliczyć $\alpha = n - \beta$.