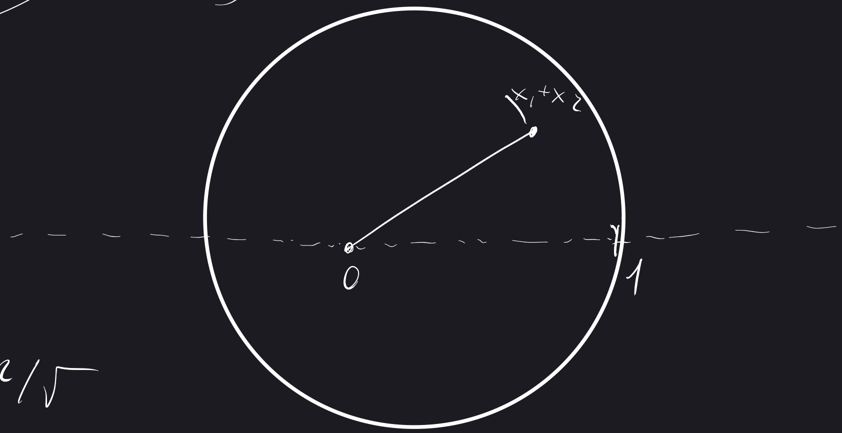
6. Znaleźć gęstości brzegowe zmiennych X_1, X_2.

[Do zadań 6–8] Niech (X_1, X_2) będzie dwuwymiarową zmienną losową o gęstości $f(x_1, x_2) = \frac{1}{\pi}$, dla $0 < x_1^2 + x_2^2 < 1$.

Definicja 2. *Gęstościami brzegowymi zmiennej losowej (X, Y) o gęstości $f(x, y)$ nazywamy funkcje $f_1(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x, y)dy$ oraz $f_2(y) = \int_{\mathbb{R}} f(x, y)dx$.*
W wypadku dyskretnym używamy oznaczeń $p_{i\bullet} = \sum_{j\in\mathbb{N}} p_{ij}$ oraz $p_{\bullet j} = \sum_{i\in\mathbb{N}} p_{ij}$.

$0<x_1^2+x_2^2<1$

$x_1^2+x_2^2<1$ → Punkty leżą w obrębie okręgu jednostkowego



Wyznaczamy granice całkowania.

$x_1^2+x_2^2<1 \Rightarrow x_1^2<1-x_2^2 \,/\sqrt{\ }$

$-\sqrt{1-x_2^2}<x_1<\sqrt{1-x_2^2}$

$x_1^2+x_2^2<1 \Rightarrow x_2^2<1-x_1^2 \,/\sqrt{\ }$

$-\sqrt{1-x_1^2}<x_2<\sqrt{1-x_1^2}$

Wyznaczamy gęstości.

$f_1(x_1)=\int_{\mathbb{R}} f(x_1,x_2)\,dx_2$

$f_1(x_1)=\int_{-\sqrt{1-x_2^2}}^{\sqrt{1-x_2^2}} \frac{1}{\pi}\,dx_2=\frac{1}{\pi}\Big[x_2\Big]_{-\sqrt{1-x_1^2}}^{\sqrt{1+x_1^2}}=\frac{1}{\pi}\Big[\sqrt{1-x_1^2}+\sqrt{1-x_1^2}\Big]=\frac{2\sqrt{1-x_1^2}}{\pi}$

$f_2(x_2)=\int_{-\sqrt{1-x_2^2}}^{\sqrt{1-x_2^2}} \frac{1}{\pi}\,dx_1=\frac{2\sqrt{1-x_2^2}}{\pi}$