

6. Zmienna losowa $X \sim U[-1; 1]$. Znaleźć gęstość zmiennej losowej $Y = |X|$.

$$X \sim U[-1, 1]$$

$$f_X(x) = \frac{1}{1-(-1)} = \frac{1}{2} \quad x \in [-1, 1]$$

Szukamy $f_Y(y)$, tzn.: $f_Y(y) = F_Y'(y)$. Znajdźmy dystrybucję $F_Y(y)$.

$$F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(|X| \leq y) = P(-y \leq X \leq y) = \int_{-y}^y f_X(x) dx = \int_{-y}^y \frac{1}{2} dx =$$

$$= \left[\frac{1}{2}x \right]_{-y}^y = \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}y = y$$

$$\underbrace{F_Y'(y) = 1 = f_Y(y)}$$

9. Zmienna losowa X ma gęstość $f_X(x) = xe^{-x}$, dla $x \geq 0$. Znaleźć gęstość zmiennej losowej $Y = X^2$.

$$Y = X^2, \quad f_X(x) = xe^{-x}, \quad x \geq 0.$$

Znajdźmy

$$f_Y(y) = \frac{f_X(\sqrt{y}) + f_X(-\sqrt{y})}{2\sqrt{y}} = \frac{\sqrt{y} \cdot e^{-\sqrt{y}} - \sqrt{y} \cdot e^{\sqrt{y}}}{2\sqrt{y}} = \frac{e^{-\sqrt{y}} - e^{\sqrt{y}}}{2}$$