MD L Lista 3 Krystian Jasionek

Zad. 1

1. Wykaż, że wśród $n+1$ różnych liczb wybranych spośród $2n$ kolejnych liczb naturalnych zaczynając od 1 istnieje przynajmniej jedna para, z których jedna liczba dzieli drugą.

Weźmy ciąg $2n$ kolejnych liczb naturalnych (zaczynając od 1), a następnie wybierzmy z nich wszystkie liczby nieparzyste. Takich liczb będzie n. Następnie każdej przypiszmy osobną szufladkę i włóżmy ją do środka. Pozostało nam n liczb parzystych, które rozmieścimy następująco: *do kolejnych szufladek wkładajmy liczby będące iloczynem liczby nieparzystej, której przypisano daną szufladkę, oraz potęgi dwójki.* Takie liczby można przedstawić wzorem

$$k = m2^p, \quad p > 0, \quad k, m \leqslant 2n, \tag{1}$$

gdzie, a m to liczba nieparzysta. Możemy łatwo udowodnić, że da się tak reprezentować dowolną liczbę naturalną.

Weźmy dowolną liczbę naturalną n większą od zera. Wtedy mamy dwa przypadki:

n jest liczbą nieparzystą, wtedy istnieje taka liczba naturalna $m \geqslant 0$, że

$$2m + 1 = n,$$

gdyż wystarczy, żeby

$$m = \frac{n-1}{2}$$

n jest liczbą parzystą, wtedy istnieją takie naturalne $m \geqslant 0, p \geqslant 0$, że

$$(2m + 1)2^p = n,$$

gdyż wystarczy, żeby

$$m = \frac{n - 2^p}{2^{p+1}} \tag{2}$$

$$m = \frac{n - 2^{\lfloor \log 2n \rfloor}}{2^{\lfloor \log 2n+1 \rfloor}}$$

Następnie, wybierzmy $n+1$ liczb, wyciągając je z szufladek w dowolny sposób. Mamy n szufladek, ale $n+1$ liczb, zatem będziemy musieli wyciągnąć co najmniej dwie liczby z tej samej szufladki. Jednak w tej samej szufladce znajdują się liczby podzielne przez siebie, zatem na pewno pośród $n+1$ wybranych w ten sposób liczb co najmniej dwie dzielą się przez siebie.

Przykład szufladek dla $n = 10$

[1, 2, 4, 8, 16] [11]

[3, 6, 12] [13]

[5, 10, 20] [15]

[7, 14] [17]

[9, 18] [19]

Zad 2

2. Na kartce w kratkę zaznaczono 5 punktów kratowych (czyli punktów o obu współrzędnych całkowitoliczbowych). Wykaż, że środek odcinka łączącego pewne dwa spośród tych punktów jest także punktem kratowym.

Kartkę w kratkę możemy przedstawić jako układ współrzędnych, gdzie punkty kratowe to punkty o współrzędnych całkowitych.

Rozważmy parzystość współrzędnych punktu $p = (x, y)$, będącego punktem kratowym.

1. x parzyste, y nieparzyste
2. x p., y p.
3. x n.p., y n.p.
4. x n.p., y p.

Możemy stworzyć 4 szufladki, do których włożymy punkty o odpowiedniej parzystości współrzędnych. Ale mamy 5 punktów, więc jakieś wpadną do tej samej szufladki. Wtedy oba te punkty mają odpowiednio współrzędne tej samej parzystości, zatem ich sumy będą parzyste. To znaczy, jeśli $p_1 = (x_1, y_1)$ oraz $p_2 = (x_2, y_2)$ to punkty z tej samej szufladki, wtedy

$s = \left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}\right)$ to punkt o obu współrzędnych całkowitych, zatem punkt kratowy. Zatem zawsze spośród 5 takich punktów można wybrać dwa, dla których środek łączącego je odcinka jest punktem kratowym. ■

3.

3. Dany jest ciąg liczb naturalnych $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Pokaż, że istnieją takie i oraz j, $i \leq j$, że suma $a_i + a_{i+1} + \ldots + a_j$ jest podzielna przez n.

Rozważmy wszystkie sumy liczb naturalnych od a_1 do a_n, tzn.

$S_1 = a_1$

$S_2 = a_1 + a_2$

$S_3 = a_1 + a_2 + a_3$

$\vdots$

$S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$

Mamy dwie możliwości.

1° Któraś z tych sum jest podzielna przez n, wtedy trywialnie wystarczy ją wskazać.

2° Wszystkie sumy dzielą się przez n z resztą. Mamy n takich sum, ale tylko $n-1$ reszt z dzielenia (odrzucamy resztę "0"), zatem pewna reszta r powtarza się dla dwóch sum. Weźmy te dwie sumy i nazwijmy S_j i S_k, gdzie $S_k > S_j$, wtedy

$S_j = a_1 + a_2 + \ldots + a_j$ $\quad S_k = a_1 + a_2 + \ldots + a_k$

$L = S_k - S_j = a_{j+1} + a_{j+2} + \ldots + a_k$, ale S_j i S_k dzielą się przez n z resztą r, zatem

$S_k = \alpha n + r$ $\quad S_j = \beta n + r$, czyli

$L = S_k - S_j = \alpha n + r - \beta n - r = (\alpha - \beta) n$, zatem suma $L = a_{j+1} + a_{j+2} + \ldots + a_k$ jest podzielna przez n. Czyli istnieją takie $i = j+1$ i k, że $a_i + a_{i+1} + \ldots + a_k$ dzieli się przez n. ■

4\. 4. Wykaż, że dla każdej liczby naturalnej n istnieje liczba podzielna przez n, której zapis dziesiętny złożony jest tylko z zer i jedynek. .

Weźmy dowolną liczbę $n \in \mathbb{N}$.

Rozważmy liczby złożone z samych jedynek o zapisie dziesiętnym długości od 1 do n.

$L_1 = 1$

$L_2 = 11$

$L_3 = 111$

$\vdots$

$L_n = \underbrace{111\ldots111}_{n \text{ jedynek}}$

Mamy dwa przypadki:

1° któraś z tych liczb dzieli się przez n. Wtedy widzimy, że istnieje taka liczba podzielna przez n, której zapis składa się tylko z 0 i 1.

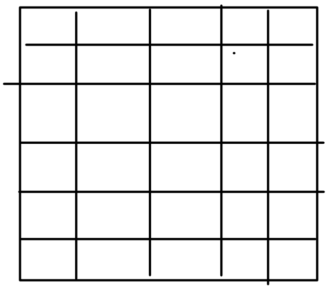
2° Żadna z tych liczb nie dzieli się przez n bez reszty. Wtedy mamy n liczb i $n-1$ reszt z dzielenia, zatem jakieś dwie liczby L_i oraz L_k dzielą się przez n z resztą r.

Wtedy $L_i = xn + r$, $L_k = yn + r$. Załóżmy, że $L_k > L_i$, wtedy

$$L = L_k - L_i = \underbrace{1111}_{\substack{k-i \\ \text{jedynek}}}\ldots\underbrace{0000}_{i \text{ zer}}$$

Zauważmy, że $L = yn + r - xn - r = (y-x)n$, zatem jest podzielna przez n oraz $L = 111\ldots00$, zatem jej zapis dziesiętny składa się z samych 0 i 1. Zatem istnieje szukana przez nas liczba. ∎

5\. 5. W każde pole szachownicy $n \times n$ wpisujemy jedną z liczb: $-1, 0, 1$. Następnie dodajemy do siebie liczby stojące w tej samej kolumnie, w tym samym wierszu i na tej samej przekątnej. Udowodnij, że wśród otrzymanych sum co najmniej dwie są równe.



Zastanówmy się ile jest takich sum na szachownicy.

Mamy n kolumn, n wierszy oraz 2 przekątne, na każdej z tych linii jedną sumę, zatem łącznie $2n+2$ sumy.

Każda z tych sum składa się z n czynników. Jakie wartości może przyjąć każda z tych sum? Możemy sumować same jedynki, to da nam maksymalną sumę $S_{max} = n \cdot 1 = n$ lub same -1, co da nam minimalną sumę $S_{min} = -1 \cdot n = -n$. Możemy też mieć sumę złożoną z dowolnego innego ciągu liczb $0, 1, -1$, zatem możemy osiągnąć każdą sumę S t. że $-n \leq S \leq n$. Mamy zatem $2n+1$ możliwych wartości sum ($2n+1$, bo dodajemy zero jako możliwy wynik sumy).

Skoro mamy $2n+2$ sum i tylko $2n+1$ możliwych wartości, to zgodnie z zasadą szufladkową Dirichleta, któreś dwie sumy muszą być sobie równe. ∎

7\. 7. Niech a i b będą dowolnymi liczbami naturalnymi takimi, że $a+b>0$. Pokaż, że liczby $\frac{a}{NWD(a,b)}, \frac{b}{NWD(a,b)}$ są względnie pierwsze.

Załóżmy nie wprost, że te liczby nie są względnie pierwsze. Wtedy istnieje pewne $d \neq 1$ t. że

$d \mid \frac{a}{nwd(a,b)}$ oraz $d \mid \frac{b}{nwd(a,b)}$. Ale to oznacza, że

$d \cdot nwd(a,b) \mid a$ oraz $d \cdot nwd(a,b) \mid b$, czyli $d \cdot nwd(a,b)$ jest wspólnym dzielnikiem a i b oraz $d \cdot nwd(a,b) > nwd(a,b)$. Ale $nwd(a,b)$ to największy wspólny dzielnik, więc mamy sprzeczność — takie d nie istnieje. Zatem $\frac{a}{nwd(a,b)} \perp \frac{b}{nwd(a,b)}$. ∎