W zadaniach 2–10 zakładamy, że zmienne losowe są ciągłe, stosujemy też oznaczenia: gęstość i dystrybuanta zmiennej losowej X to – odpowiednio – $f_X(x)$ oraz $F_X(x)$.

2. Czy można tak dobrać stałą C, aby funkcja $f_{XY}(x,y) = Cxy + x + y$, dla $0 \leqslant x \leqslant 3$, $1 \leqslant y \leqslant 2$, była gęstością dwuwymiarowej zmiennej losowej?

Chcemy, aby $\int_0^3 \int_1^2 (Cxy + x + y)\,dy\,dx = 1$ i $Cxy + x + y \geqslant 0$.

$Cxy + x + y \geqslant 0 \Rightarrow C \geqslant 0$, bo $3 \geqslant x \geqslant 0$ oraz $1 \leqslant y \leqslant 2$.

$$\int_0^3 \int_1^2 Cxy + y + x\,dy\,dx = \int_0^3 \int_1^2 Cxy + y + x\,dy\,dx = \int_0^3 \left[\frac{Cxy^2}{2} + \frac{y^2}{2} + xy\right]_1^2 dx =$$

$$= \int_0^3 \left[\frac{Cx4}{2} + \frac{4}{2} + 2x - \frac{Cx}{2} - \frac{1}{2} - x\right] dx = \int_0^3 \frac{Cx3}{2} + \frac{3}{2} + x\,dx = \left[\frac{3Cx^2}{4} + \frac{3}{2}x + \frac{x^2}{2}\right]_0^3 =$$

$$= \frac{27C}{4} + \frac{9}{2} + \frac{9}{2} = \frac{27C}{4} + 9 = 1$$

$$\frac{27C}{4} = -8 \quad / \cdot \frac{4}{27}$$

$$C = -\frac{32}{27},$$ ale C musi być $\geqslant 0$, więc takie C nie istnieje.