Laplace 变换

定义式：单边 Laplace：$F(s)=\int_{0^-}^{+\infty} f(t)e^{-st}dt$.　　$f(t)=\frac{1}{2\pi j}\int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty}F(s)e^{st}ds$.

常用信号的 Laplace 变换

① $\varepsilon(t)\longleftrightarrow\frac{1}{s}$　$Re[s]>0$

② $e^{-\alpha t}\longleftrightarrow\frac{1}{s+\alpha}$，$Re[s]>-\alpha$　极点的实部.

$e^{j\beta t}\varepsilon(t)\longleftrightarrow\frac{1}{s-j\beta}$，$Re[s]>0$.

③ $t^n\longleftrightarrow\frac{n!}{s^{n+1}}$，$Re[s]>0$

④ $\delta(t)\longleftrightarrow 1$　$Re[s]>-\infty$

$\delta'(t)\longleftrightarrow s$　$Re[s]>-\infty$

⑤ $\cos\beta t\cdot\varepsilon(t)\longleftrightarrow\frac{s}{s^2+\beta^2}$，$Re[s]>0$

$\sin\beta t\cdot\varepsilon(t)\longleftrightarrow\frac{\beta}{s^2+\beta^2}$，$Re[s]>0$.

⑥ $\sum_{n=0}^{\infty}\delta(t-nT)\longleftrightarrow\frac{1}{1-e^{-sT}}$，$Re[s]>0$.

⑦ $\sum_{n=0}^{\infty}f_0(t-nT)\longleftrightarrow\frac{F_0(s)}{1-e^{-sT}}$，$Re[s]>0$.

单边 Laplace 变换性质

① 线性　$f_1(t)\leftrightarrow F_1(s)$．$Re[s]>\sigma_1$　$f_2(t)\leftrightarrow F_2(s)$　$Re[s]>\sigma_2$　$af_1(t)+bf_2(t)\leftrightarrow aF_1(s)+bF_2(s)$.　$Re[s]>\max\{\sigma_1,\sigma_2\}$

② 尺度变换　$f(t)\leftrightarrow F(s)$．$Re[s]>\sigma_0$.　$f(at)\leftrightarrow\frac{1}{a}F(\frac{s}{a})$，$Re[s]>a\sigma_0$.　$a>0$ 因果.

③ 时移特性　$f(t)\varepsilon(t)\longleftrightarrow F(s)$．$Re[s]>\sigma_0$.

$f(t-t_0)\varepsilon(t-t_0)\longleftrightarrow F(s)e^{-st_0}$，$Re[s]>\sigma_0$.

④ 复频移特性　$f(t)\leftrightarrow F(s)$，$Re[s]>\sigma_0$.　$s_a=\sigma_a+j\omega_a$.

$f(t)\cdot e^{s_at}\leftrightarrow F(s-s_a)$　$Re[s]>\sigma_0+\sigma_a$.

⑤ 时域微分特性.

$f'(t)\leftrightarrow sF(s)-f(0_-)$

$f''(t)\leftrightarrow s^2F(s)-sf(0_-)-f'(0_-)$

$f'''(t)\leftrightarrow s^3F(s)-s^2f(0_-)-sf'(0_-)-f''(0_-)$

$f'(t)\leftrightarrow sF(s)-f(0_-)$

$f''(t)\leftrightarrow s^2F(s)-sf(0_-)-f'(0_-)$

⑥ 时域积分特性　$\int_{0^-}^{t}f(x)dx\longleftrightarrow\frac{F(s)}{s}$.　$\int_{-\infty}^{t}f(x)dx\leftrightarrow\frac{F(s)}{s}+\frac{1}{s}f^{(-1)}(0_-)$.　$f^{(-1)}(0_-)=\int_{-\infty}^{0^-}f(x)dx$.

⑦ 卷积定理：(1) 时域卷积：$f_1(t)*f_2(t)\longleftrightarrow F_1(s)\cdot F_2(s)$

(2) 频域卷积：$f_1(t)\cdot f_2(t)\longleftrightarrow\frac{1}{2\pi j}[F_1(s)*F_2(s)]$　$\frac{1}{2\pi j}$

⑧ S域微分和积分.　$(-t)^nf(t)\leftrightarrow\frac{d^nF(s)}{ds^n}$，$Re[s]>\sigma_0$.

$\frac{f(t)}{t}\longleftrightarrow\int_s^{\infty}F(\eta)d\eta$，$Re[s]>\sigma_0$.

⑨ 初值定理　$f(t)\leftrightarrow F(s)$　$Re[s]>\sigma_0$.

$f(t)$ 不含 $\delta(t)$ 及其导数，则

$f(0_+)=\lim_{s\to\infty}s\cdot F(s)$.

$f'(0_+)=\lim_{s\to\infty}s[sF(s)-f(0_+)]$

$f''(0_+)=\lim_{s\to\infty}s[s^2F(s)-sf(0_+)-f'(0_+)]$.

$f(0_+)=\lim_{s\to\infty}sF(s)$

$f'(0_+)=\lim_{s\to\infty}s[sF(s)-f(0_+)]$

$\lim_{s\to\infty}s[s^2F(s)-sf(0_+)-f'(0_+)]$.

注. a. 若 $F(s)$ 为真分式，则 $f(t)$ 不含 $\delta(t)$ 的表达式

b. 若 $F(s)$ 为假分式，$F(s)=s$ 的多项式 $+F_1(s)$．对 $F_1(s)$ 应用初值定理.

⑩ 终值定理　$f(\infty)$ 存在　即 $f(\infty)=\lim_{t\to\infty}f(t)$

有 $f(\infty)=\lim_{s\to0}sF(s)$

① $F(s)$ 在虚轴右半平面（实部大于0）

② $F(s)$ 除 $s=0$ 处有一阶极点.

虚轴在左半平面，

稳定

临界

Laplace 逆变换、单实极点、共轭复根、重根.

一、定义式

(1)