数字信号处理的基本概念

---

1. $X(j\Omega)$：连续时间傅里叶变换 (CTFT)

这是模拟信号的频谱。

- 对象：连续信号 $x(t)$。
- 频率变量：Ω 称为模拟角频率，单位是 $\mathrm{rad/s}$ 。
- 特性：频率轴是从 $-\infty$ 到 $+\infty$ 的连续轴，没有周期性 。
- 数学形式：$X(j\Omega)=\int_{-\infty}^{\infty}x(t)e^{-j\Omega t}dt$。

2. $X(e^{j\omega})$：离散时间傅里叶变换 (DTFT)

这是离散序列在频域的连续表示。

- 对象：采样后的离散序列 $x(n)$ 。
- 频率变量：ω 称为数字角频率，单位是 rad 。
- 特性：具有 2π 周期性。这是因为它描述的是单位圆上的旋转 。

> **Note**
>
> 1. 强调周期性：$e^{j\omega}$ 本身就是周期的（$e^{j(\omega+2\pi)}=e^{j\omega}$），这能时刻提醒你 DTFT 是每隔 2π 重复一次的 。
> 2. 与 **Z** 变换的关系：它代表 Z 变换 $X(z)$ 在单位圆（即 $|z|=1$）上的取值 。即当 $z=e^{j\omega}$ 时的结果。
> 3. 区分模拟频率：为了避免和模拟频率 Ω 混淆。

---

3. $X()$：离散傅里叶变换 (DFT)

这是计算机真正能处理的东西。

- 对象：有限长序列 $x(n)$ 。
- 频率变量： 称为频率索引（离散频率点） 。
- 本质：它是 $X(e^{j\omega})$ 在 2π 范围内的 点等间隔采样 。
- 物理意义：第 个“频率仓”（Bin）。每个 对应的实际物理频率为 $=$ 。

总结与对比

符号	变换名称	变量类型	频率单位	物理含义
$X(j\Omega)$	CTFT	连续	$\mathrm{rad/s}$	模拟信号的连续频谱

符号	变换名称	变量类型	频率单位	物理含义
$X(e^{j\omega})$	DTFT	连续	rad	离散信号的连续周期频谱
$X()$	DFT	离散	索引	DTFT 的离散采样点（计算机用）

---

4. 它们之间的逻辑联系（DSP 核心工作流）

在你的研究或项目中，通常遵循这个链路：

1. 采样：通过 ADC 将模拟信号 $x(t)$（频域对应 $X(j\Omega)$）变为离散序列 $x(n)$ 。
2. 映射：此时信号在理论上拥有了连续周期的频谱 $X(e^{j\omega})$,频域连续信号。
3. 计算：为了在 MATLAB 中分析，我们只能取 个点进行计算，这就是 $X()$ 。

> 关键点：$\omega = \Omega$（其中 是采样周期）。这把模拟频率和数字频率通过采样率联系在了一起。

你想了解如何通过 MATLAB 的 `fft` 函数将计算出的 $X()$ 还原回真实的模拟频率 Ω 吗？

关键问题

Note

为什么引入DTFT，为什么用w=ΩT？

1. 实现“软硬件解耦”：脱离具体的物理采样率
- 统一性：如果不引入 ω，每当你改变硬件的采样频率 时，信号的频谱图和滤波器的截止频率（以 或 $\mathrm{rad/s}$ 为单位）都会随之改变 。
- 抽象化：定义了 ω 后，数字滤波器的特性只取决于相对频率 。一个设计好的“数字低通滤波器”（例如截止频率设为 $\omega = \pi$）在 1 采样率下滤波 2，在 2 采样率下滤波 ，其内部算法逻辑是一模一样的。、
2. 对应 Z 变换的单位圆
3. 简化运算：将“奈奎斯特频率”标准化
- 固定边界：根据采样定理，信号最高频率分量不能超过 $/2$（奈奎斯特频率） 。
- 归一化映射：通过 $\omega = \Omega$，我们将这个动态的物理边界 $/2$ 永远映射到了固定的数字点 $\omega = \pi$。
- 直观评估：在设计滤波器时，看到 $\omega = \pi$ 你立刻就能反应出这是一个“接近采样上限”的高通或低通滤波器，而不需要去计算具体的采样率 。

Note

在数字信号处理（DSP）中，时域参数与频域参数之间存在严密的数学对应关系。以下是参数关系图及核心公式详解：

---

1. 核心参数关系图

时域()　　频域()~~记录时间~~
$=1/$
~~频谱分辨率~~采样点数
$=$
采样频率
2_x
信号最高频率$_x$

2. 参数逻辑详解

- **频谱分辨率 () 与 记录时间 ()**：
  - 频谱分辨率定义为相邻频率格点（Bins）之间的间距 。
  - 核心公式： $= \;= 1$ 。
  - 结论：频谱分辨率仅取决于有效信号的记录时间 。若要提高频率分辨能力（减小 ），必须增加信号的观测时间 。
- **采样频率 () 与 信号最高频率 ($_x$)**：
  - 根据奈奎斯特采样定律，采样率必须至少是信号最高频率的两倍，以避免混叠 。
  - 公式： $2 \; _x$ 。
- **采样点数 ()**：
  - 点数是连接采样率与总时长的桥梁 。
  - 公式： $=$ 。
  - 进阶应用：在执行快速傅里叶变换（FFT）时，通常将 补零（Zero Padding）至 2 的整数次幂，这可以加速计算并使频谱图更平滑，但不会改变物理层面的频谱分辨率 。

3. 总结表

参数名称	符号	决定因素/约束	作用
记录时间		$/$	决定频谱分辨率
采样点数			决定计算量和FFT长度
采样频率		$2 \; _x$	决定能观察到的最高信号频率
频谱分辨率		$1/$ 或 $/$	决定区分相邻频率成分的能力
