# Zastosowanie metody elementów skończonych do rozwiązania przybliżonego równania potencjału grawitacyjnego

Karol Szustakowski

January 7, 2021

## 1 Wstęp

Celem opracowania jest rozwiązanie następującego równania:

$$\frac{d^2\phi(x)}{dx^2} = 4\pi G\rho(x)$$

Z następującymi warunkami brzegowymi:

$$\phi(0) = 5$$

$$\phi(3) = 4$$

Gdzie $\phi$ jest funkcją poszukiwaną taką, że:

$$[0,3] \ni x \to \phi(x) \in \mathbb{R}$$

Funkcja $\rho$ jest dana:

$$\rho(x) = \begin{cases} 0, x \in [0,1] \\ 1, x \in (1,2] \\ 0, x \in (2,3] \end{cases}$$

## 2 Wyprowadzenia sformułowania wariacyjnego

Pomnożono obustronnie równanie przez funkcję testową:

$$\frac{d^2\phi(x)}{dx^2}v = 4\pi G\rho(x)v$$

Następnie, po całkowaniu obustronnym na dziedzinie:

$$\int_0^3 \frac{d^2\phi(x)}{dx^2}v(x)dx = 4\pi G\int_0^3 \rho(x)v(x)dx$$

Całkowanie przez części:

$$\phi'(x)v(x)|_0^3 - \int_0^3 \phi'(x)v'(x)dx = 4\pi G\int_1^2 v(x)dx$$

Ponieważ obustronnie zadano warunek Dirichleta, funkcje testowe $v$ zerują się na brzegu dziedziny:

$$-\int_0^3 \phi'(x)v'(x)dx = 4\pi G\int_1^2 v(x)dx$$

Będziemy poszukiwać rozwiązań w formie $\phi = w + u$, gdzie:

$$\phi(0) = 5$$

$$\phi(3) = 4$$

$$w(0) = 0$$

$$w(3) = 0$$

Przyjmujemy więc funkcję $u$:

$$u(x) = 5 - \frac{x}{3}$$

Oznaczmy:

$$B(\phi, v) = -\int_0^3 \phi'(x)v'(x)dx$$

$$L(v) = 4\pi G \int_1^2 v(x)dx$$

Korzystając z liniowości operatora całkowego:

$$B(\phi, v) = B(w + u, v) = B(w, v) + B(u, v)$$

Otrzymujemy więc:

$$B(w, v) = \bar{L}(v)$$

gdzie

$$\bar{L}(v) = L(v) - B(u, v)$$

# 3 Funkcje testowe

Obieramy N punktów podziałowych dla obszaru dziedziny, gdzie N zawiera również punkty brzegowe. Biorąc pod uwagę, że z każdej strony został określony brzeg Dirichleta, ostatnia oraz pierwsza funkcja testowa może zostać pominięta.

Niech $h = \frac{2}{(N-1)}$ oznacza długość przedziału.

Funkcje testowe definiujemy następująco:

Funkcje testujące testujące (gdzie $n \in \{1, 2, ...(N-2)\}$):

$$e_n(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{h} - n + 1, x \in [h(n-1), hn] \\ n - \dfrac{x}{h} + 1, x \in (hn, h(n+1)] \end{cases}$$

# 4 Równanie w postaci macierzowej

Otrzymujemy więc następujące równanie macierzowe: $A \cdot W = X$

$$A = \begin{bmatrix} B(e_1, e_1) & B(e_2, e_1) & ... & B(e_{N-2}, e_1)) \\ B(e_1, e_2) & B(e_2, e_2) & ... & B(e_{N-2}, e_2)) \\ & & ... & \\ B(e_1, e_{N-2}) & B(e_2, e_{N-2}) & ... & B(e_{N-2}, e_{N-2})) \end{bmatrix}$$

$W$ jest wektorem wag, a $X$ wektorem wartości $\bar{L}(e_n)$, gdzie $n$ jest numerem wiersza w wektorze.

# 5 Uproszczenie wartości $B(u, v)$

Warto zwrócić uwagę, że wartość całki w rozwinięciu $B(u, v)$ nie zależy od granic całkowania.

Można więc zdefiniować:

$B(e_1, e_1) = ... = B(e_k, e_k)$, dla dowolnych $e$ $B(e_k, e_k) = B(e_{k+1}, e_{k+1}) = ... = B(e_{N-2}, e_{N-2})$.

Dla każdej całki $B(e_a, e_b)$, gdzie $|a - b| > 1$, mamy $B(e_a, e_b) = 0$, ponieważ iloczyny takich funkcji sprowadzają się do zera.

Dla dowolnego $e_a$ i $e_b$ zachodzi $B(e_a, e_b) = B(e_b, e_a)$, ponieważ jest to forma symetryczna.

Biorąc pod uwagę, że funkcje są wspólnie niezerowe tylko w niewielkich przedziałach, mając zadaną funkcję $e_i$, niezerową na przedziale $[h(i - 1), h(i + 1)]$, oraz funkcję $e_{i+1}$, niezerową na analogicznym przedziale, wartość $B(e_i, e_{i+1})$ wystarczy obliczać całkując na przedziale $[hi, h(i + 1)]$.