Zadanie 1

Pośrednik kupuje towar u dwóch dostawców (podaż: 20 i 30, jednostkowe koszty zakupu 10 i 12), przewozi go i sprzedaje trzem odbiorcom (popyt: 10, 28 i 27, ceny sprzedaży: 30, 25 i 30). Jednostkowe koszty transportu podaje tabela:

	O_1	O_2	O_3
D_1	**8**	**14**	**17**
D_2	**12**	**9**	**19**

a) wyznacz plan dostaw maksymalizujący zysk całkowity pośrednika
b) dla wyznaczonego rozwiązania oblicz całkowity koszt zakupu, całkowity koszt transportu, przychód i zysk pośrednika
c) czy uzyskane rozwiązanie jest jedynym rozwiązaniem optymalnym
d) wyznacz plan dostaw maksymalizujący zysk całkowity pośrednika, przy założeniu, że podpisał on umowę z trzecim odbiorcą, w której zobowiązał się zaspokoić w całości jego popyt
e) dla powtórnie wyznaczonego rozwiązania oblicz całkowity koszt zakupu, całkowity koszt transportu, przychód i zysk pośrednika

Rozwiązanie zadania

1. Krok

Tym razem naszym celem jest, nie tak, jak w przypadku typowego zadania transportowego – minimalizowanie kosztów, tylko maksymalizowanie całkowitego zysku, jaki może osiągnąć pośrednik. Można więc zapisać, iż:

FC: ZC -> max

Wiemy także, iż całkowity zysk jest różnicą między osiąganymi przychodami i ponoszonymi kosztami, czyli:

ZC = PC – KC

Sekwencja czynności wykonywanych przez pośrednika jest następująca:

a) kupuje towar u dostawców (ponosi **koszt** w postaci zapłaty ceny zakupu)
b) przewozi go do odbiorców (ponosi **koszt** transportu)
c) sprzedaje towar odbiorcom (osiąga **przychód** w postaci zapłaty, jaką za to otrzymuje, która ma wysokość ceny sprzedaży)

Widzimy zatem, iż koszty całkowite są sumą kosztów zakupu (cen zakupu) i kosztów transportu)

KC = KZ + KT

W pierwszym kroku należy zatem **skonstruować macierz zysków jednostkowych**, które osiąga pośrednik, przeprowadzając poszczególne transakcje. Dla przykładu opisana zostanie jedna transakcja.

Pośrednik kupuje towar od D1, przewozi go na trasie między D1 a O1, a następnie sprzedaje O1. Osiągany z tego tytułu zysk jednostkowy kształtuje się następująco:

Cena sprzedaży jednostki towaru O1 – (koszt zakupu towaru u D1 + koszt transportu towaru na trasie D1 –> O1)

30 – (10+8) = 30-18 = **12**

Otrzymana wartość jest wartością zysku jednostkowego, jaki osiąga pośrednik pośrednicząc w transakcji między D1 a O1. Analogicznie do pow. przykładu uzupełniamy całą tabelę.

	O_1	O_2	O_3
D_1	12	1	3
D_2	6	4	-1

Uwaga! Może się pojawić sytuacja, w której zyski z przeprowadzenia danej transakcji będą ujemne.

2. Krok

Rozbudowujemy otrzymaną macierz zysków o dodatkowy wiersz i kolumnę. W wierszu umieszczamy fikcyjnego dostawcę (o podaży równej popytowi wszystkich odbiorców), w kolumnie natomiast fikcyjnego odbiorcę (o popycie równym podaży wszystkich dostawców). Automatycznie bilansuje nam to całkowitą podaż z całkowitym popytem. Zyski jednostkowe z „transakcji" z fikcyjnymi „bohaterami" będą każdorazowo równe zero. Umieszczone na tych trasach wolumeny przewozu odzwierciedlają niezaspokojony popyt odbiorców lub niewykorzystaną podaż dostawców (w zależności od sytuacji).

	O_1 (10)	O_2 (28)	O_3 (27)	OF (50)
D_1 (20)	12	1	3	0
D_2 (30)	6	4	-1	0
DF (65)	0	0	0	0

3. Krok

Dla tak skonstruowanej macierzy rozpoczynamy rozpisywanie pierwszej propozycji optymalnego planu przewozów, tym razem kierując się regułą **maksymalnego elementu macierzy**. Czyli rozpoczynamy rozpisywanie przewozów od tras, na których osiągany zysk jest największy. Pamiętamy przy tym o regule, iż w pierwszej kolejności rozpisujemy trasy między dostawcami i odbiorcami rzeczywistymi, a gdy te zostaną już uzupełnione, dopiero przechodzimy do wiersza i kolumny „bohaterów" fikcyjnych (rozpoczynamy od lewej strony).

	O_1 ~~(10)~~ 0	O_2 ~~(28)~~ 0	O_3 ~~(27)~~ ~~17~~ ~~15~~ 0	OF ~~(50)~~ 0
D_1 ~~(20)~~ ~~10~~ 0	12 10	1 x	3 10	0 x
D_2 ~~(30)~~ ~~2~~ 0	6 x	4 28	-1 2	0 x
DF ~~(65)~~ ~~50~~ 0	0 x	0 x	0 15	0 50

Opracowano na podstawie: *Ekonometria i badania operacyjne. Zagadnienia podstawowe,* red. naukowy B. Guzik, wyd. AE W Poznaniu, Poznań 2002 oraz M. Anholcer, H. Gaspars, A. Owczarkowski *Przykłady i zadania z badań operacyjnych i ekonometrii,* red. naukowy W. Sikora, wyd. AE w Poznaniu, Poznań 2005.

4. Krok

Skoro zaspokoiliśmy już, na tyle, na ile było to możliwe, popyt odbiorców, wykorzystując podaż dostawców i maksymalizując zysk pośrednika, sprawdźmy, czy zaproponowane rozwiązanie jest optymalne. Czyli, czy spełnia warunek funkcji celu, jakim jest maksymalizacja zysków pośrednika, przy danych ograniczeniach. Pomoże nam w tym wyliczenie współczynników α_i i β_j dla kolejnych wartości c_{ij}. Schemat obliczania jest identyczny, jak dla zagadnienia transportowego, z tą różnicą, iż tym razem najwygodniej zaczynać od przyjęcia, że $\alpha_m = 0$ (ostatnia α).

	O_1 ~~(10)~~ 0	O_2 ~~(28)~~ 0	O_3 ~~(27)~~ ~~17~~ ~~15~~ 0	OF ~~(50)~~ 0	α_i
D_1 ~~(20)~~ ~~10~~ 0	12 / 10	1 / x	3 / 10	0 / x	3
D_2 ~~(30)~~ ~~2~~ 0	6 / x	4 / 28	-1 / 2	0 / x	-1
DF ~~(65)~~ ~~50~~ 0	0 / x	0 / x	0 / 15	0 / 50	0
β_j	9	5	0	0	

5. Krok

Sprawdzamy, o ile zmieni się wartość funkcji celu (o ile wzrośnie zysk), jeśli przesuniemy jedną jednostkę towaru na trasę, na której do tej pory nie mamy przewozu (analogicznie, jak dla zagadnień transportowych). W tym celu liczymy wskaźnik $\Delta_{ij} = c_{ij} - \alpha_i - \beta_j$ dla tras NIEBAZOWYCH.

D_1 -> O_2 $\Delta_1 = 1-5-3 = -7$

D_1 -> OF $\Delta_2 = 0-3-0 = -3$

D_2 -> O_1 $\Delta_3 = 6+1-9 = -2$

D_2 -> OF $\Delta_4 = 0+1-0 = 1$

DF -> O_1 $\Delta_5 = 0-0-9 = -9$

DF -> O_2 $\Delta_6 = 0-0-5 = -5$

6. Krok

Naszym celem jest maksymalizacja zysków osiąganych przez pośrednika. Podoba nam się, że przesuwając towar na trasę **D_2 -> OF** zwiększymy ten zysk o 1 jednostkę pieniężną za każdą jednostkę przewiezionego towaru. Musimy jednak zdecydować, co i skąd chcemy przesunąć. W tym celu tworzymy tablicę zawierającą **Δ_{ij}** i wyznaczamy schemat poprawy rozwiązania**.**

Następnie rysujemy drogę zaczynającą się w trasie **D_2 -> OF** (bo to tam chcemy coś przesunąć) i zmieniającą kierunek na trzech sąsiednich trasach bazowych (DF -> OF, DF -> O_3, D_2 -> O_3).

Dodawanie i odejmowanie na kolejnych trasach zapewni równowagę. Zabrać możemy maksymalnie tyle, ile wynosi minimum z tras, z których odejmujemy, czyli:

min {(D_2 -> O_3), (DF -> OF)} = min {2, 50} = 2

	O_1 (10)	O_2 (28)	O_3 (27)	OF (50)
D_1 (20)	x	-7	x	-3
D_2 (30)	-2	x	x	1
DF (65)	-9	-5	x	x

7. Krok

Rozpisujemy nową propozycję rozwiązania, dla której wyliczamy α_i i β_j.

	O_1	O_2	O_3	OF	α_i
D_1	12 10	1 x	3 10	0 x	**3**
D_2	6 x	4 28	-1	0 2	**0**
DF	0 x	0 x	0 17	0 48	**0**
β_j	**9**	**4**	**0**	**0**	

8. Krok

Sprawdzamy, czy zaproponowane rozwiązanie jest optymalne.

D_1 -> O_2 $\Delta_1 = 1-3-4 = -6$

D_1 -> OF $\Delta_2 = 0-3-0 = -3$

D_2 -> O_1 $\Delta_3 = 6-0-9 = -3$

D_2 -> O_3 $\Delta_4 = -1-0-0 = -1$

DF -> O_1 $\Delta_5 = 0-0-9 = -9$

DF -> O_2 $\Delta_6 = 0-0-4 = -4$

Z powyższych obliczeń wynika, iż nie da się polepszyć ww. planu transportu tak, aby pośrednik osiągał jeszcze większe zyski.

9. Krok

Obliczamy zatem wysokość osiąganego zysku, ponoszone koszty i wysokość osiąganego przychodu:

a) Zysk, jaki pośrednik może maksymalnie osiągnąć, to suma iloczynów zysków jednostkowych na danych trasach i realizowanych na nich przewozów:

ZC = 12*10 + 10*3 + 28*4 = **262**

Opracowano na podstawie: *Ekonometria i badania operacyjne. Zagadnienia podstawowe,* red. naukowy B. Guzik, wyd. AE W Poznaniu, Poznań 2002 oraz M. Anholcer, H. Gaspars, A. Owczarkowski *Przykłady i zadania z badań operacyjnych i ekonometrii,* red. naukowy W. Sikora, wyd. AE w Poznaniu, Poznań 2005.

b) Koszty transportu, jakie dla tak zaproponowanego rozwiązania poniesie pośrednik. Aby je obliczyć posługujemy się tabelą kosztów w treści zadania i sprawdzamy jak, na trasach bazowych z rozwiązania ostatecznego kształtowały się koszty transportu. Następnie, zgodnie ze znaną regułą, mnożymy wolumen przewozów razy koszt transportu na danej trasie.

KT = 10*8 + 10*17 + 28*9 = **502**

c) Koszty zakupu, to suma iloczynów jednostkowych kosztów zakupów u danych dostawców i ilości zakupionych u nich towarów:

KZ = (10+10)*10 + 28*12 = **536**

d) Przychód, to suma iloczynów cen sprzedaży towaru poszczególnym odbiorcom i ilości towaru im sprzedanej:
PC = 10*30 + 28*25 + 10*30 = **1300**

e) Dla pewności możemy sprawdzić, czy obliczony przez nas wcześnie zysk, został obliczony prawidłowo. Sprawdzimy to odejmując od przychodów sumę kosztów:
ZC = 1300 – (502+536) = **262**

10. Krok

Wskazujemy, czy zaproponowane rozwiązanie jest jedynym optymalnym. Robimy to na podstawie analizy obliczonych wartości Δ_{ij}, gdyby którakolwiek z nich przyjmowała wartość równą 0, wtedy byłoby to dla nas informacją, iż istnieje jeszcze co najmniej jedno inne rozwiązanie optymalne, dla którego maksymalny zysk przewoźnika jest taki sam, ale inne są trasy bazowe i wolumen realizowanych na nich przewozów. Dla naszego przykładu nie mamy takiej sytuacji, zaproponowane przez nas rozwiązanie jest więc jedynym rozwiązaniem optymalnym.

11. Krok

Niespodzianka☺ Znając reguły, jakimi rządzi się zagadnienie pośrednika i zasady jego rozwiązywania, spróbujcie Państwo sami rozwiązać podpunkty d) i e) zadania (posługując się wiedzą z ćwiczeń oraz stosownymi analogiami do zadań transportowych).

Podpowiem tylko, że rozwiązanie optymalne powinno wyglądać następująco:

	O_1	O_2	O_3	OF
D_1	12 / 10	1 / x	3 / 10	0 / x
D_2	6 / x	4 / 13	-1 / 17	0 / x
DF	0 / x	0 / 15	-M / x	0 / 50

PC = 1435

KZ = 560

KT = 690

ZC = 185

Opracowano na podstawie: *Ekonometria i badania operacyjne. Zagadnienia podstawowe,* red. naukowy B. Guzik, wyd. AE W Poznaniu, Poznań 2002 oraz M. Anholcer, H. Gaspars, A. Owczarkowski *Przykłady i zadania z badań operacyjnych i ekonometrii,* red. naukowy W. Sikora, wyd. AE w Poznaniu, Poznań 2005.