4.2 Wibracje akustyczne warstwy materiału:

$$-\frac{d^2u(x)}{dx^2} - u = \sin x$$

$u(0)=0$ - warunek brzegowy Dirichleta w $x=0$

$\frac{du(2)}{dx} - u(2) = 0$ - warunek brzegowy Cauchy'ego w $x=2$

$x \in [0;2]$, $\Omega = (0,2)$ $\quad [0,2] \ni x \to u(x) \in \mathbb{R}$

Występuje warunek Dirichleta, ale jest on równy 0, więc nie muszę wprowadzać shiftu.

$$-u'' - u = \sin x \;/\cdot v, \quad u'(2) - u(2) = 0 \Rightarrow u'(2) = u(2)$$

$$-\int_0^2 u''v\,dx - \int_0^2 uv\,dx = \int_0^2 \sin x\, v\,dx$$

$$\int_0^2 u''v\,dx = -\int_0^2 u'v'\,dx + u'(2)v(2) - u'(0)v(0)$$

$$-\left(-\int_0^2 u'v'\,dx + u'(2)v(2) - u'(0)v(0)\right) - \int_0^2 uv\,dx = \int_0^2 \sin x\, v\,dx$$

$$\int_0^2 u'v'\,dx - \int_0^2 uv\,dx - \underbrace{u'(2)}_{\boxed{u(2)}} v(2) + u'(0)v(0) = \int_0^2 \sin x\, v\,dx$$

Ponieważ mamy warunek Dirichleta, to nasza funkcja testująca v na brzegu będzie arbitralnie równa 0.

$$v(0)=0$$

$$\underbrace{\int_0^2 u'v'\,dx - \int_0^2 uv\,dx - u(2)v(2)}_{B(u,v)} = \underbrace{\int_0^2 \sin x\, v\,dx}_{L(v)}$$

$$B(u,v) = \int_0^2 u'v'\,dx - \int_0^2 uv\,dx - u(2)v(2)$$

$$L(v) = \int_0^2 \sin x\, v\,dx$$