

MOwNiT – Układy równań liniowych - metody iteracyjne

Przygotował:
Szymon Budziak

Dany jest układ równań liniowych $\mathbf{Ax}=\mathbf{b}$. Elementy macierzy A są zadane wzorem (m,k - parametry zadania podane indywidualnie):

$$\begin{cases} a_{i,i} = k \\ a_{i,j} = \frac{m}{n - i - j + 0.5} \quad \text{dla } i \neq j \end{cases}$$

parametry zadania: $\mathbf{k} = 8, \mathbf{m} = 3$.

Przyjmij wektor x jako dowolną n-elementową permutację ze zbioru $\{ 1, -1 \}$ i oblicz wektor \mathbf{b} .

Problem 1:

Metodą Jacobiego rozwiąż układ równań liniowych $\mathbf{Ax}=\mathbf{b}$ (przyjmując jako niewiadomą wektor x), przyjmując kolejno kryterium stopu:

1. $\|x^{(i+1)} - x^{(i)}\| < \rho$

2. $\|Ax^{(i)} - b\| < \rho$

Obliczenia wykonaj dla różnych rozmiarów układu n, dla różnych wektorów początkowych, a także różnych wartości ρ w kryteriach stopu. (Podaj, jak liczono normę.) Wyznacz liczbę iteracji oraz sprawdź różnicę w czasie obliczeń dla obu kryteriów stopu. Sprawdź dokładność obliczeń.

$$A = D + (L + U) \begin{cases} M = I - D^{-1}A \\ W = D^{-1}b \end{cases}$$

gdzie: L – poddiagonalna; U – naddiagonalna;
D = B – diagonalna, z diagonalnych elementów macierzy A.

$$Ax = (D + (L + U))x = b \implies Dx = -(L + U)x + b$$

Korzystając z zależności

$$Dx^{(t+1)} = -(L + U)x^{(t)} + b$$

otrzymujemy wzór roboczy:

$$x_i^{(t+1)} = \frac{1}{a_{ii}} \left[b_i - \sum_{j=1, j \neq i}^n a_{ij} x_j^{(t)} \right] ; \quad a_{ii} \neq 0, \forall i \in 1, \dots, n$$

Rozmiary układu, które zostały przetestowane w tym zadaniu to: 3, 4, 5, 7, 10, 12, 15, 20, 30, 50, 70, 100, 150, 200, 300. Typ dla którego zostały wykonane obliczenia to float128 z biblioteki numpy.

Wyniki z problemu pierwszego

| n | 1st condition iters | 2nd condition iters | 1st condition time [s] | 2nd condition time [s] | 1st condition norm | 2nd condition norm |
|-----|------------------------|------------------------|---------------------------|---------------------------|-----------------------|-----------------------|
| 3 | 40 | 52 | 0.000575 | 0.000593 | $4.763e^{-04}$ | $6.306e^{-05}$ |
| 4 | 2000 | 2000 | 0.021704 | 0.020694 | $1.494e^{+174}$ | $1.494e^{+174}$ |
| 5 | 2000 | 2000 | 0.017166 | 0.019737 | $4.184e^{+176}$ | $4.184e^{+176}$ |
| 7 | 2000 | 2000 | 0.017790 | 0.019931 | $5.859e^{+182}$ | $5.859e^{+182}$ |
| 10 | 2000 | 2000 | 0.018894 | 0.020406 | $8.543e^{+185}$ | $8.543e^{+185}$ |
| 12 | 2000 | 2000 | 0.018387 | 0.021878 | $1.778e^{+187}$ | $1.778e^{+187}$ |
| 15 | 2000 | 2000 | 0.018524 | 0.024469 | $1.476e^{+189}$ | $1.476e^{+189}$ |
| 20 | 2000 | 2000 | 0.020515 | 0.026933 | $1.035e^{+190}$ | $1.035e^{+190}$ |
| 30 | 2000 | 2000 | 0.024941 | 0.033163 | $2.445e^{+191}$ | $2.445e^{+191}$ |
| 50 | 2000 | 2000 | 0.034908 | 0.054496 | $2.803e^{+192}$ | $2.803e^{+192}$ |
| 70 | 2000 | 2000 | 0.052847 | 0.087299 | $7.774e^{+192}$ | $7.774e^{+192}$ |
| 100 | 2000 | 2000 | 0.087609 | 0.161552 | $1.658e^{+193}$ | $1.658e^{+193}$ |
| 150 | 2000 | 2000 | 0.168230 | 0.314478 | $2.938e^{+193}$ | $2.938e^{+193}$ |
| 200 | 2000 | 2000 | 0.279087 | 0.547227 | $3.933e^{+193}$ | $3.933e^{+193}$ |
| 300 | 2000 | 2000 | 0.600455 | 1.246455 | $5.226e^{+193}$ | $5.226e^{+193}$ |

Tabela 1: Błędy otrzymane w problemie pierwszym dla różnych wartości rozmiarów układów oraz różnych wektorów początkowych oraz dla epsilon 0.001

| n | 1st condition iters | 2nd condition iters | 1st condition time [s] | 2nd condition time [s] | 1st condition norm | 2nd condition norm |
|-----|------------------------|------------------------|---------------------------|---------------------------|-----------------------|-----------------------|
| 3 | 53 | 66 | 0.000804 | 0.001056 | $5.329e^{-05}$ | $5.969e^{-06}$ |
| 4 | 2000 | 2000 | 0.025071 | 0.024974 | $1.494e^{+174}$ | $1.494e^{+174}$ |
| 5 | 2000 | 2000 | 0.018147 | 0.020184 | $4.184e^{+176}$ | $4.184e^{+176}$ |
| 7 | 2000 | 2000 | 0.017775 | 0.019789 | $5.859e^{+182}$ | $5.859e^{+182}$ |
| 10 | 2000 | 2000 | 0.018203 | 0.021215 | $8.543e^{+185}$ | $8.543e^{+185}$ |
| 12 | 2000 | 2000 | 0.018488 | 0.021833 | $1.778e^{+187}$ | $1.778e^{+187}$ |
| 15 | 2000 | 2000 | 0.020829 | 0.023294 | $1.476e^{+189}$ | $1.476e^{+189}$ |
| 20 | 2000 | 2000 | 0.020935 | 0.025683 | $1.035e^{+190}$ | $1.035e^{+190}$ |
| 30 | 2000 | 2000 | 0.024437 | 0.032995 | $2.445e^{+191}$ | $2.445e^{+191}$ |
| 50 | 2000 | 2000 | 0.035752 | 0.055910 | $2.803e^{+192}$ | $2.803e^{+192}$ |
| 70 | 2000 | 2000 | 0.052548 | 0.087668 | $7.774e^{+192}$ | $7.774e^{+192}$ |
| 100 | 2000 | 2000 | 0.087870 | 0.155721 | $1.658e^{+193}$ | $1.658e^{+193}$ |
| 150 | 2000 | 2000 | 0.170660 | 0.319692 | $2.938e^{+193}$ | $2.938e^{+193}$ |
| 200 | 2000 | 2000 | 0.280881 | 0.547057 | $3.933e^{+193}$ | $3.933e^{+193}$ |
| 300 | 2000 | 2000 | 0.603831 | 1.242740 | $5.226e^{+193}$ | $5.226e^{+193}$ |

Tabela 2: Błędy otrzymane w problemie pierwszym dla różnych wartości rozmiarów układów oraz różnych wektorów początkowych oraz dla epsilon 0.0001

| n | 1st condition iters | 2nd condition iters | 1st condition time [s] | 2nd condition time [s] | 1st condition norm | 2nd condition norm |
|-----|------------------------|------------------------|---------------------------|---------------------------|-----------------------|-----------------------|
| 3 | 67 | 79 | 0.000856 | 0.001021 | $5.044e^{-06}$ | $6.687e^{-07}$ |
| 4 | 2000 | 2000 | 0.031109 | 0.024247 | $1.494e^{+174}$ | $1.494e^{+174}$ |
| 5 | 2000 | 2000 | 0.017991 | 0.020845 | $4.184e^{+176}$ | $4.184e^{+176}$ |
| 7 | 2000 | 2000 | 0.017567 | 0.020053 | $5.859e^{+182}$ | $5.859e^{+182}$ |
| 10 | 2000 | 2000 | 0.017468 | 0.021236 | $8.543e^{+185}$ | $8.543e^{+185}$ |
| 12 | 2000 | 2000 | 0.017783 | 0.021732 | $1.778e^{+187}$ | $1.778e^{+187}$ |
| 15 | 2000 | 2000 | 0.020179 | 0.022893 | $1.476e^{+189}$ | $1.476e^{+189}$ |
| 20 | 2000 | 2000 | 0.021055 | 0.025920 | $1.035e^{+190}$ | $1.035e^{+190}$ |
| 30 | 2000 | 2000 | 0.023774 | 0.032545 | $2.445e^{+191}$ | $2.445e^{+191}$ |
| 50 | 2000 | 2000 | 0.035492 | 0.054577 | $2.803e^{+192}$ | $2.803e^{+192}$ |
| 70 | 2000 | 2000 | 0.053219 | 0.086926 | $7.774e^{+192}$ | $7.774e^{+192}$ |
| 100 | 2000 | 2000 | 0.086811 | 0.155564 | $1.658e^{+193}$ | $1.658e^{+193}$ |
| 150 | 2000 | 2000 | 0.168075 | 0.314512 | $2.938e^{+193}$ | $2.938e^{+193}$ |
| 200 | 2000 | 2000 | 0.279010 | 0.556357 | $3.933e^{+193}$ | $3.933e^{+193}$ |
| 300 | 2000 | 2000 | 0.611762 | 1.280206 | $5.226e^{+193}$ | $5.226e^{+193}$ |

Tabela 3: Błędy otrzymane w problemie pierwszym dla różnych wartości rozmiarów układów oraz różnych wektorów początkowych oraz dla epsilon 0.00001

Wnioski

Możemy zauważyć, że w tym przypadku jedynym sensownym rozwiązaniem błędu dla każdej z wartości epsilon jest dla rozmiaru układu równego 3. Reszta błędów przy maksymalnej iteracji równej 2000 zwraca bardzo duże wyniki, w których cecha ma wartości od 174. Wyniki te wydają się być wynikami błędnymi.

Problem 2:

Dowolną metodą znajdź promień spektralny **macierzy iteracji** (dla różnych rozmiarów układu – takich, dla których znajdowane były rozwiązania układu). Sprawdź, czy spełnione są założenia o zbieżności metody dla zadanego układu. Opisz metodę znajdowania promienia spektralnego.

Twierdzenie: Zbieżność procesu iteracyjnego

Teza:

Ciąg (\star) z dowolnym wektorem startowym $x^{(0)}$ jest zbieżny do jedyne granicznego $x^{(\text{inf})}$ wtedy i tylko wtedy, gdy *promień spektralny* (*spectral radius*) macierzy iteracji jest mniejszy od 1

$$\rho(M) < 1$$

Promień spektralny macierzy - wartość własna o maksymalnej wartości bezwzględnej.

Rozmiary układu, które zostały przetestowane w tym zadaniu to: 3, 4, 5, 7, 10, 12, 15, 20, 30, 50, 70, 100, 150, 200, 300.

Promień spektralny to maksymalna wartość spośród wartości bezwzględnych wartości własnych macierzy. Wartościami własnymi macierzy nazywamy pierwiastki wielomianu charakterystycznego dla tej macierzy.

$$w_A(\lambda) = \det(A - \lambda I)$$

gdzie I to macierz jednostkowa. Do obliczania wartości własnych wielomianu została użyta funkcja z biblioteki numpy `linalg.eigvals`.

Wartości promienia spektralnego

| n | spectral radius | condition |
|-----|-----------------|-----------|
| 3 | 0.845024 | True |
| 4 | 1.222999 | False |
| 5 | 1.226308 | False |
| 7 | 1.235106 | False |
| 10 | 1.239509 | False |
| 12 | 1.241462 | False |
| 15 | 1.244205 | False |
| 20 | 1.245401 | False |
| 30 | 1.247352 | False |
| 50 | 1.248878 | False |
| 70 | 1.249516 | False |
| 100 | 1.249986 | False |
| 150 | 1.250347 | False |
| 200 | 1.250525 | False |
| 300 | 1.250703 | False |

Tabela 4: Wyniki promieni spektralnych macierzy iteracji oraz sprawdzenie czy są spełnione założenia o zbieżności metody dla danego układu

Wnioski

Możemy zauważyć, że dla wartości rozmiaru układu większej od 3 twierdzenie o zbieżności procesu iteracyjnego nie zachodzi. Dla rozmiaru układu 3 wartość ta wynosi 0.845024. Dla pozostałych rozmiarów przekracza ona 1. Możemy również zauważyć to po pierwszym zadaniu w którym otrzymane błędy były sensowny tylko dla $n=3$, dla reszty były one absurdalnie duże.

Literatura

- Wykład nr 9 dr Rycerz z przedmiotu MOwNiT
- Wikipedia na temat metody Jacobiego oraz promienia spektralnego