MOwNiT – Aproksymacja średniokwadratowa wielomianami algebraicznymi

Przygotował:
Szymon Budziak

Problem:

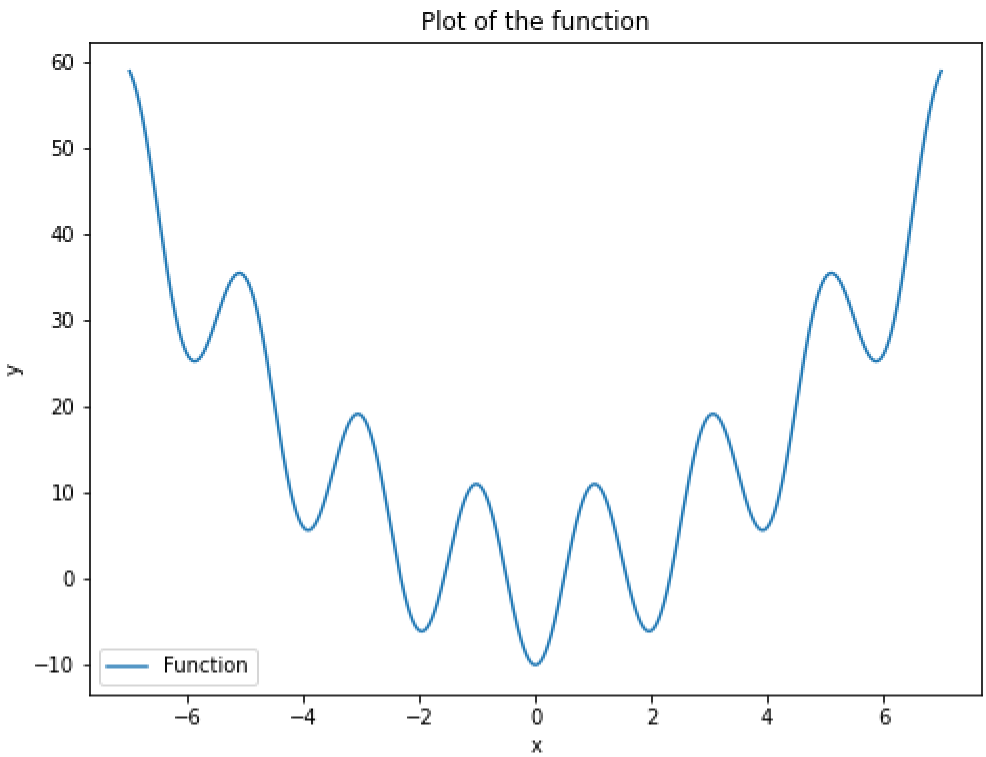
Dla poniższej funkcji:

$$f(x) = x^2 - m \cdot \cos\left(\frac{\pi x}{k}\right)$$

$$k=1, m=10, [-7, 7]$$

wyznaczyć jej wartości w n dyskretnych punktach. Następnie w oparciu o te punkty wyznaczyć przybliżenie funkcji wykorzystując aproksymację średniokwadratową wielomianami algebraicznymi. Wykonać eksperymenty numeryczne dla różnej liczby punktów dyskretyzacji oraz układów funkcji bazowych zawierających różną liczbę funkcji. Oszacować błędy przybliżenia. Graficznie zilustrować interesujące przypadki.

Wykres funkcji



Wykres 1: Wykres funkcji podanej w problemie

Aproksymacja średniokwadratowa wielomianami algebraicznymi

Do aproksymacji średniokwadratowej wielomianami algebraicznymi został użyty wzór w postaci macierzowej:

$$\begin{pmatrix} \sum w_i & \sum w_i x_i & \sum w_i x_i^2 & \dots & \sum w_i x_i^m \\ \sum w_i x_i & \sum w_i x_i^2 & \sum w_i x_i^3 & \dots & \sum w_i x_i^{m+1} \\ . & . & . & . & . \\ \sum w_i x_i^m & \sum w_i x_i^{m+1} & \sum w_i x_i^{m+2} & \dots & \sum w_i x_i^{2m} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \sum w_i F_i \\ \sum w_i F_i x_i \\ \vdots \\ \sum w_i F_i x_i^m \end{pmatrix}$$

$$\underline{G \cdot A = B}$$

Jeżeli:

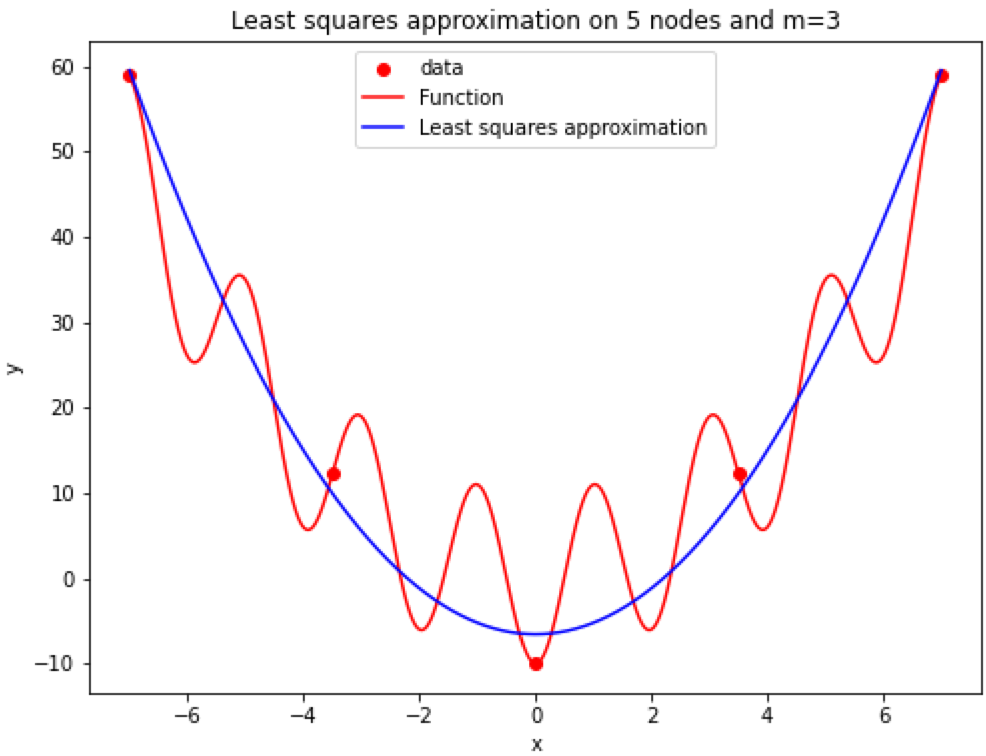
1) $x_0, x_1, \ldots, x_n$ - są różne
2) m <= n

to det(G) ≠ 0 -> układ ma jedno rozwiązanie

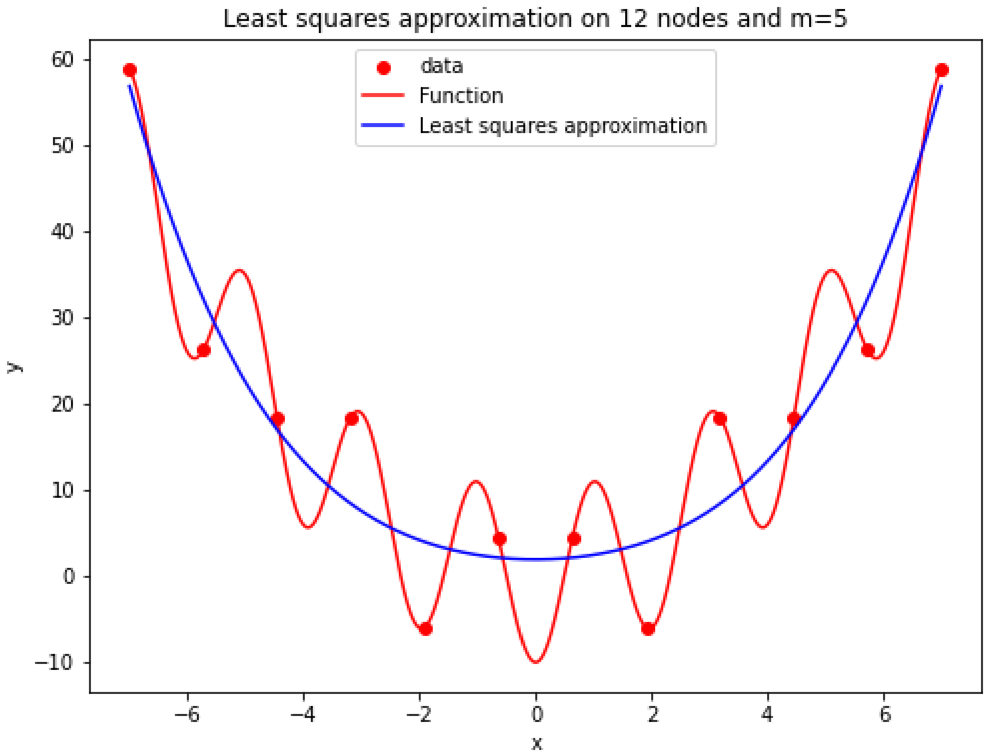
Jednak w praktyce:

1) m << n (korzystamy z dużej ilości informacji)
2) m - wysoki - by dobrze przybliżyć funkcję
3) m - niski - by wygładzić błędy
4) zwykle m <= 6

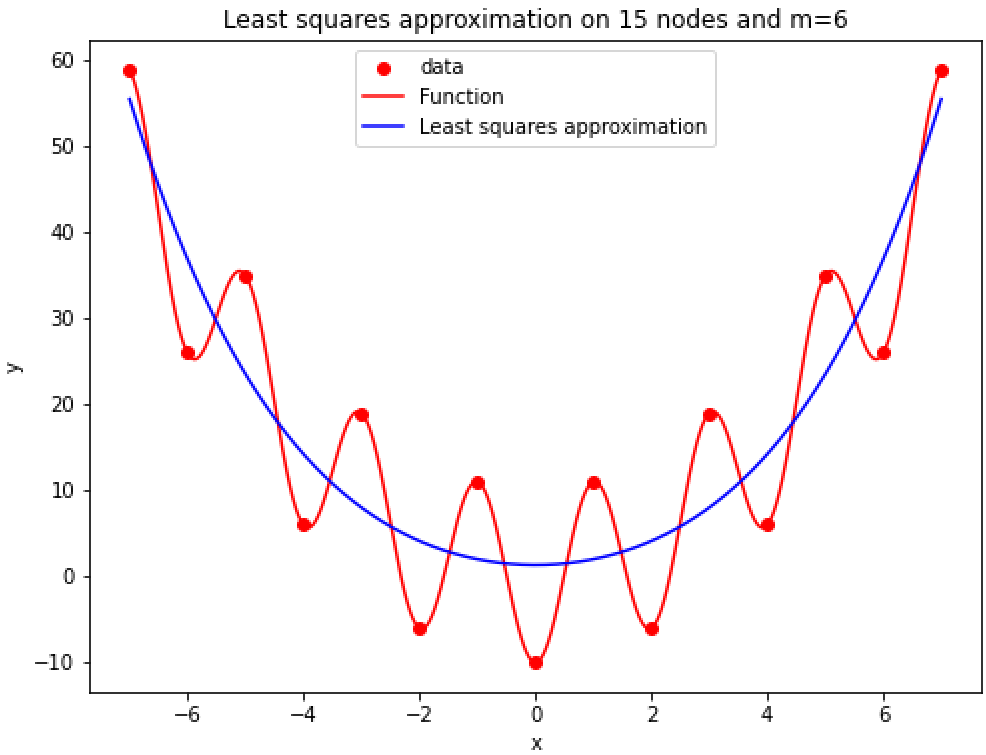
Przykładowe wykresy dla aproksymacji średniokwadratowej wielomianami algebraicznymi



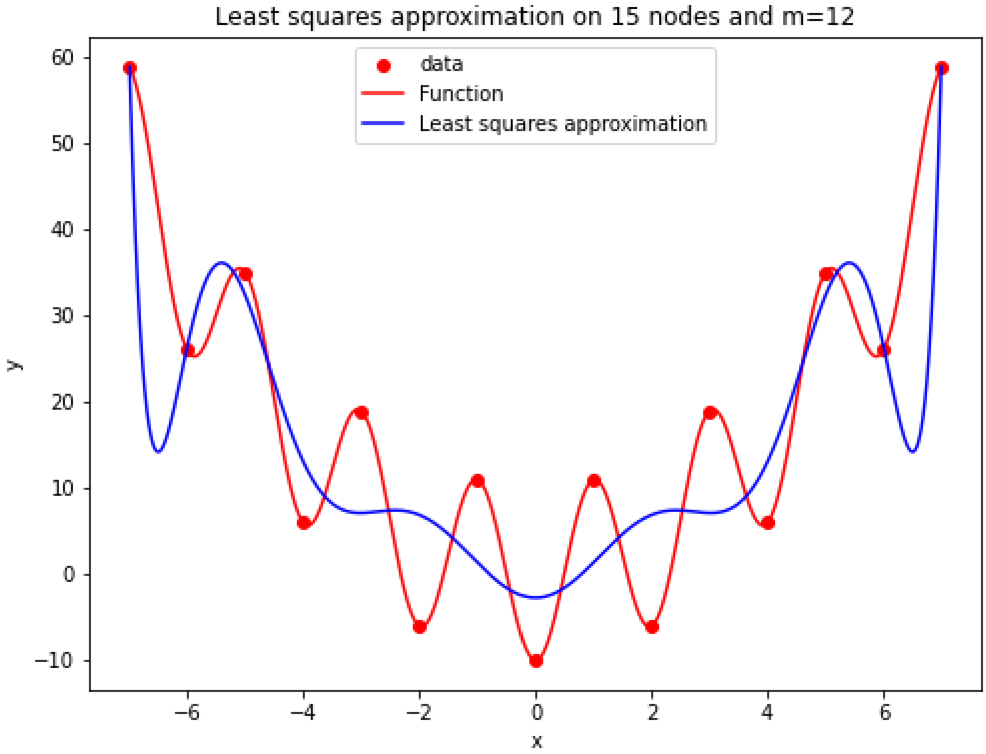
Wykres 2: Wykres aproksymacji średniokwadratowej wielomianami algebraicznymi dla 5 węzłów i stopnia wielomianu 3



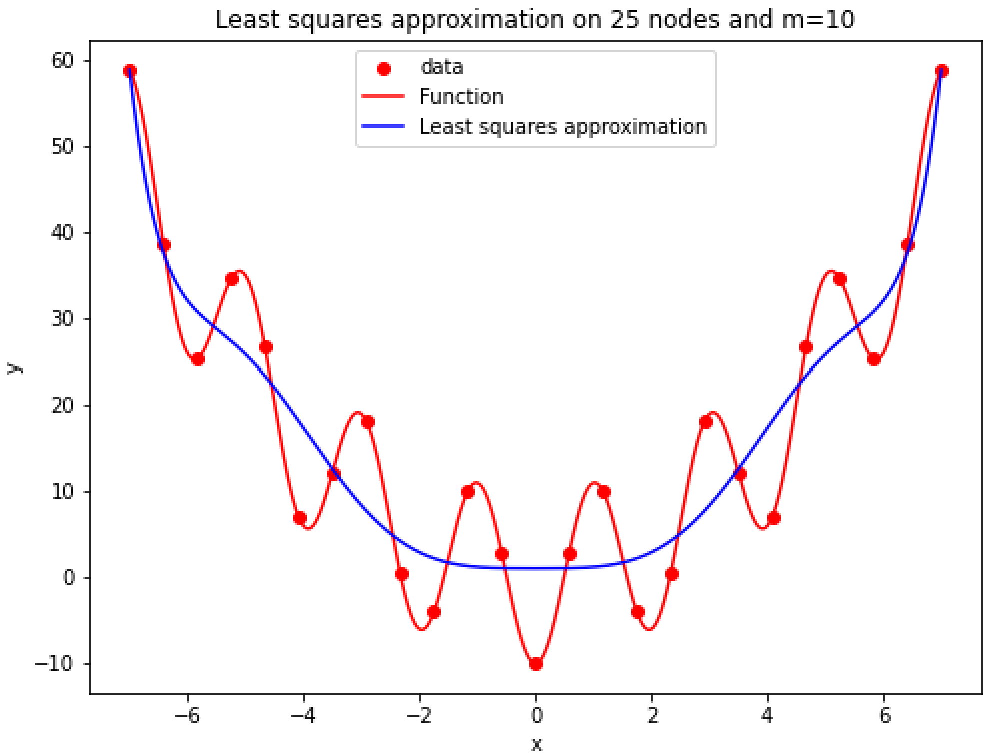
Wykres 3: Wykres aproksymacji średniokwadratowej wielomianami algebraicznymi dla 12 węzłów i stopnia wielomianu 5



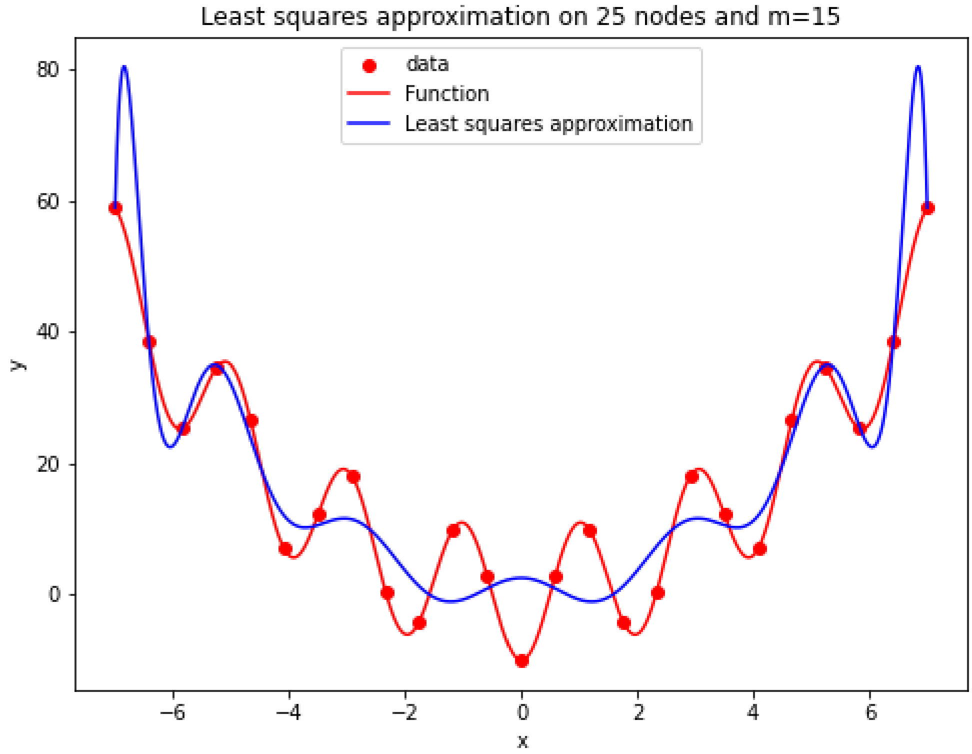
Wykres 4: Wykres aproksymacji średniokwadratowej wielomianami algebraicznymi dla 15 węzłów i stopnia wielomianu 6



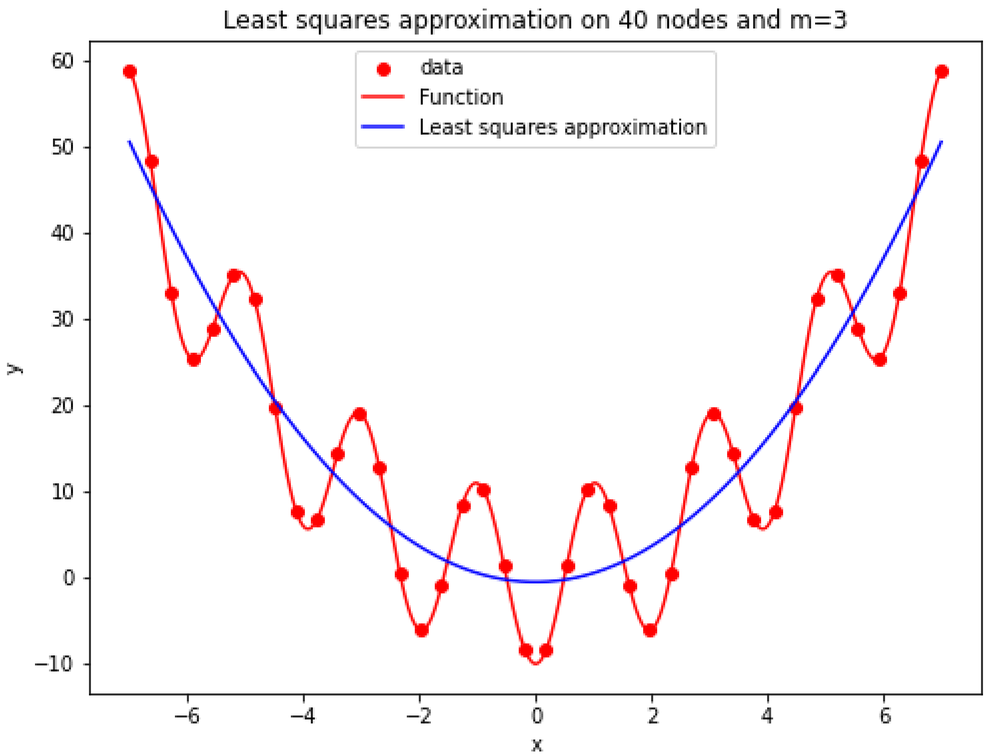
Wykres 5: Wykres aproksymacji średniokwadratowej wielomianami algebraicznymi dla 15 węzłów i stopnia wielomianu 12



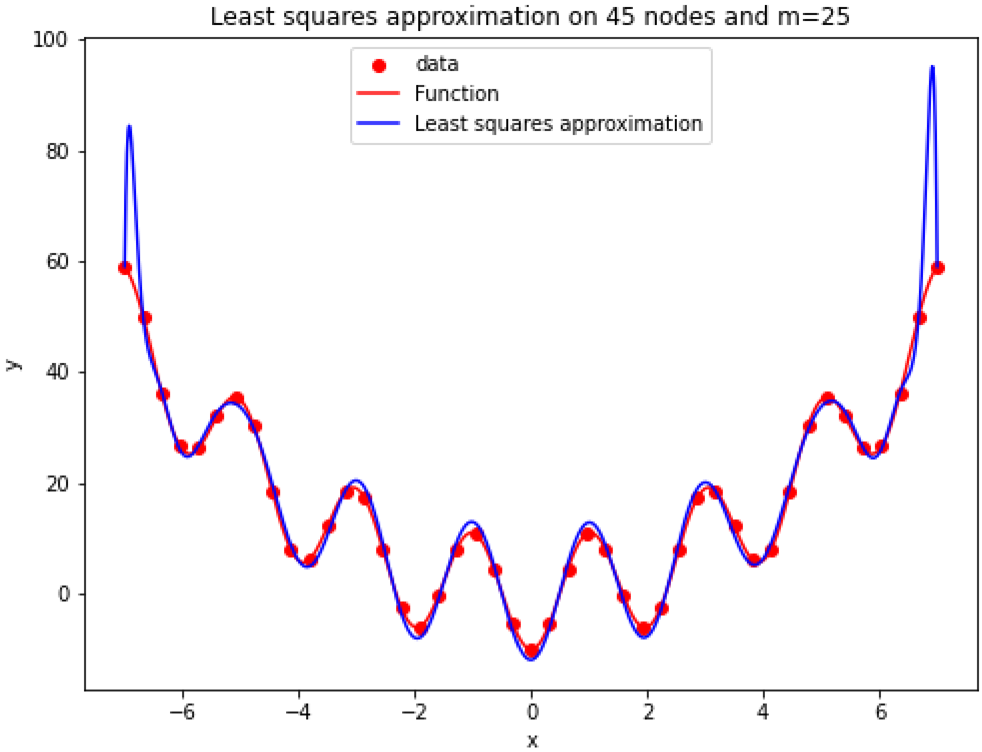
Wykres 6: Wykres aproksymacji średniokwadratowej wielomianami algebraicznymi dla 25 węzłów i stopnia wielomianu 10



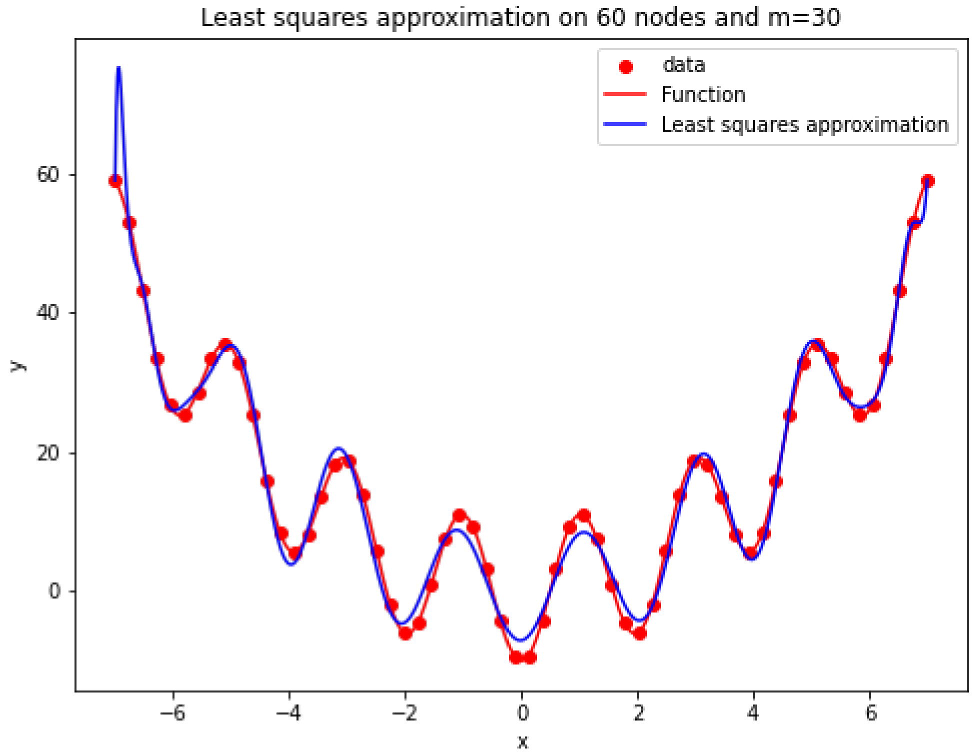
Wykres 7: Wykres aproksymacji średniokwadratowej wielomianami algebraicznymi dla 25 węzłów i stopnia wielomianu 15



Wykres 8: Wykres aproksymacji średniokwadratowej wielomianami algebraicznymi dla 40 węzłów i stopnia wielomianu 3



Wykres 9: Wykres aproksymacji średniokwadratowej wielomianami algebraicznymi dla 45 węzłów i stopnia wielomianu 25



Wykres 10: Wykres aproksymacji średniokwadratowej wielomianami algebraicznymi dla 60 węzłów i stopnia wielomianu 30

Błędy obliczeniowe

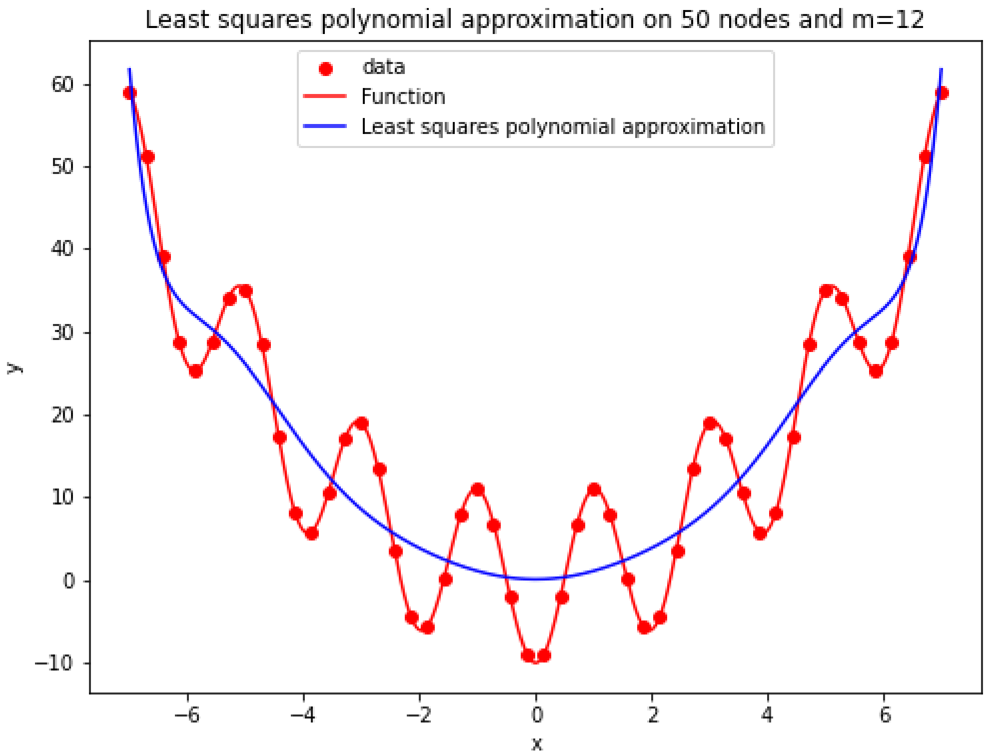
Błędy obliczeniowe zostały wykonane dla błędu maksymalnego punktów (maksymalny błąd z wartości bezwzględnej różnicy pomiędzy kolejnymi punktami) oraz dla błędu sumy kwadratów punktów (suma kwadratów różnic kolejnych punktów). Liczby węzłów jakie zostały wzięte pod uwagę to: 4, 5, 7, 10, 15, 20, 30, 50 oraz m (stopień wielomianu): 2, 5, 8, 10, 12, 15.

n	m	ls approximation max error	ls approximation sum square error
4	2	39,720	447149,781
4	5	74,296	1558274,095
4	8	42,603	243926,195
4	10	32,913	163247,870
4	12	24,697	103360,347
4	15	82,606	2021834,928
5	2	36,498	371523,720
5	5	19,908	104959,515
5	8	18,921	88175,076
5	10	19,235	101736,768
5	12	18,898	69355,518
5	15	29,640	179831,513
7	2	35,794	315682,230
7	5	19,548	101917,018
7	8	21,556	100850,157
7	10	19,404	79095,846
7	12	19,288	84321,192
7	15	26,093	116412,574
10	2	38,037	290068,935
10	5	15,138	60604,467
10	8	19,134	110209,233
10	10	19,961	96402,768
10	12	19,899	90047,612
10	15	19,962	96899,836
15	2	39,667	277774,633
15	5	11,474	50945,622
15	8	12,348	48299,409
15	10	12,615	49284,785
15	12	32,044	107582,077
15	15	2830,673	491020100,309
20	2	40,447	273766,589
20	5	11,116	50430,088
20	8	11,848	47777,983
20	10	11,623	45002,097

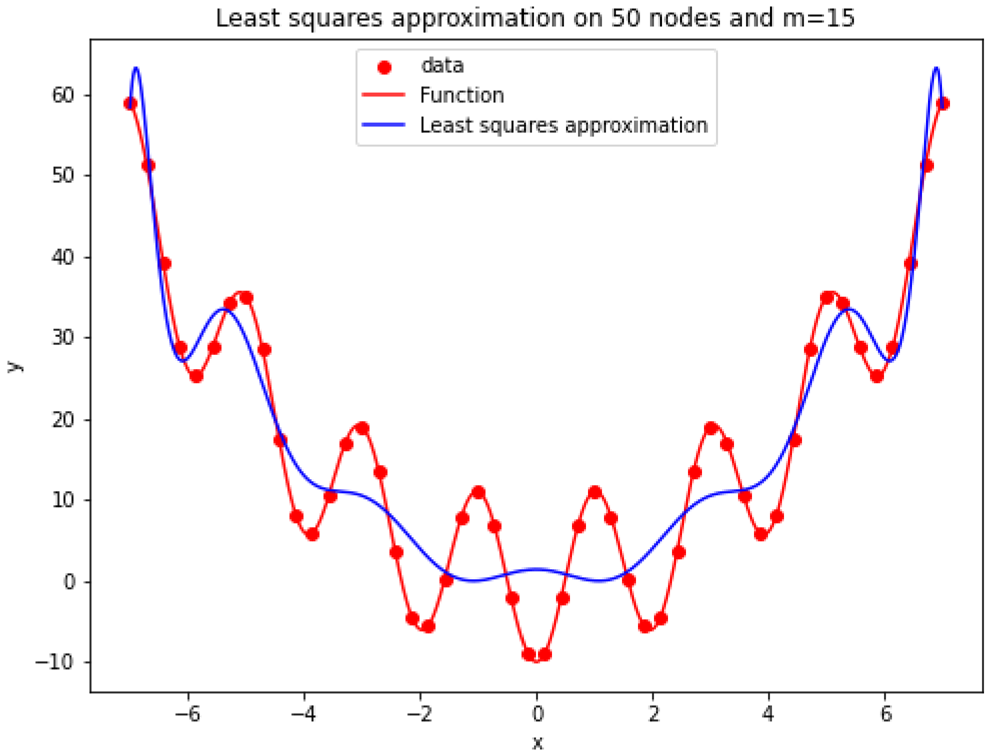
20	12	12,239	47608,040
20	15	50,619	147139,629
30	2	41,207	271037,096
30	5	10,936	50079,650
30	8	11,682	47713,814
30	10	11,322	44425,729
30	12	10,442	43922,945
30	15	14,575	39017,646
50	2	41,800	269707,928
50	5	10,825	49830,512
50	8	11,630	47703,101
50	10	11,334	44180,081
50	12	10,434	43353,587
50	15	11,386	34251,633

Tabela 1: Błąd obliczeniowy dla aproksymacji średniokwadratowej wielomianami algebraicznymi

Z tabeli 1 możemy zauważyć, że minimalny błąd jest dla liczby węzłów 50 oraz stopnia wielomianu równego 12 dla max error. Natomiast dla max square error minimalny błąd jest dla liczby węzłów 50 i stopnia wielomianu 15.



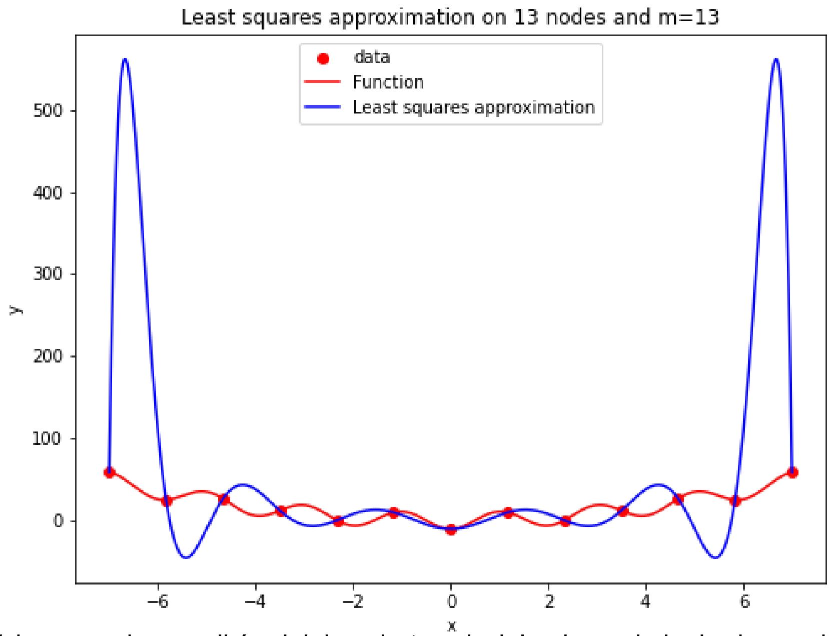
Wykres 11: Wykres aproksymacji średniokwadratowej wielomianami algebraicznymi dla 50 węzłów i stopnia wielomianu 12



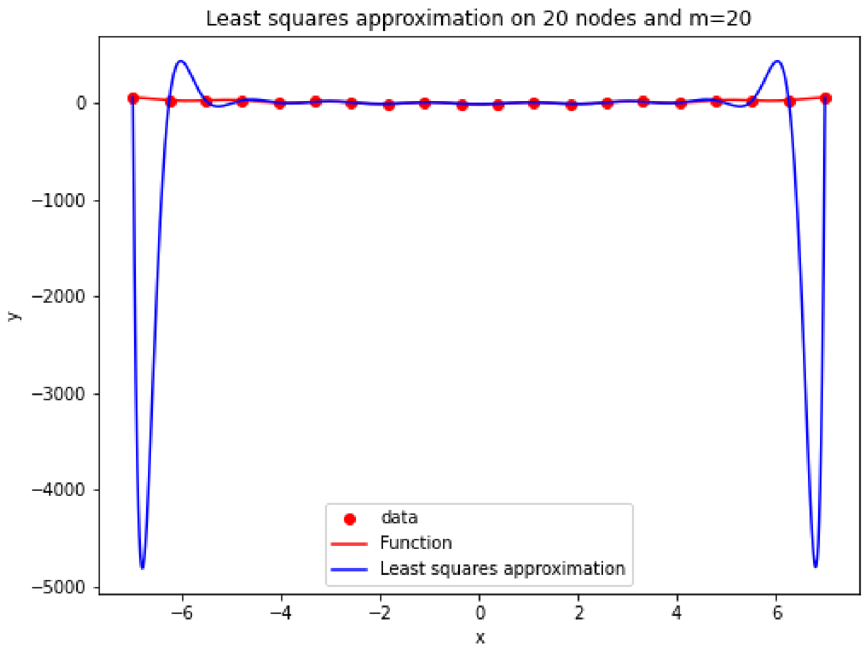
Wykres 12: Wykres aproksymacji średniokwadratowej wielomianami algebraicznymi dla 50 węzłów i stopnia wielomianu 15

Efekt Rungego

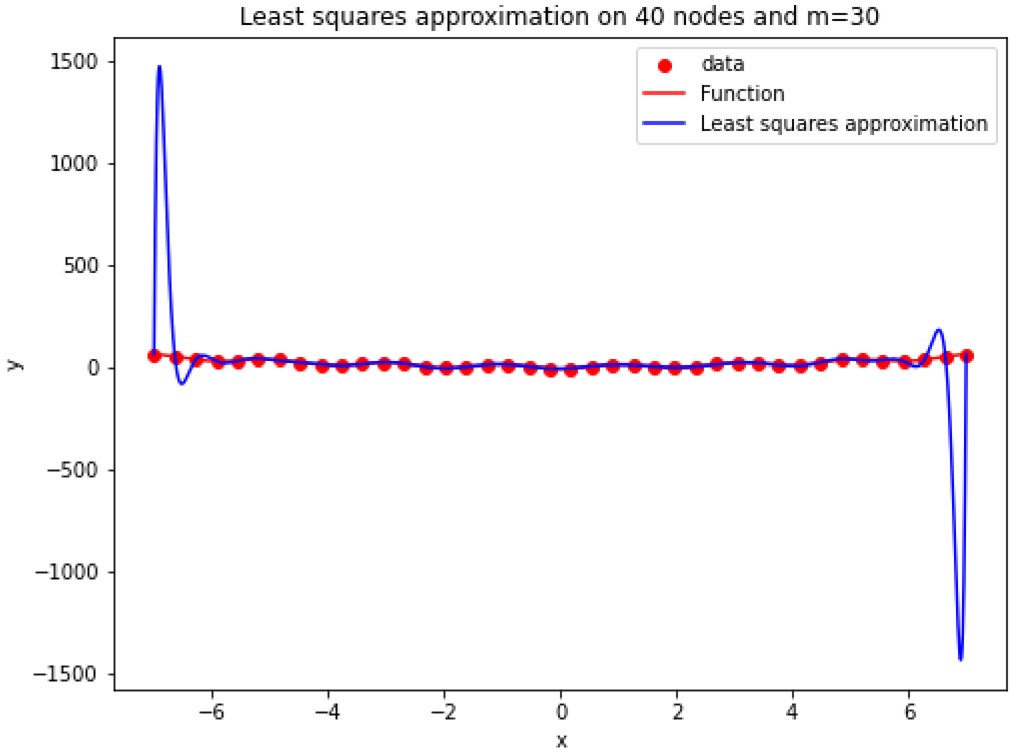
W przypadku aproksymacji średniokwadratowej wielomianami algebraicznymi możemy zaobserwować efekt Rungego. Efekt Rungego jest to pogorszenie jakości interpolacji (aproksymacji) wielomianowej, mimo zwiększenia liczby jej węzłów. Początkowo ze wzrostem liczby węzłów *n* przybliżenie poprawia się, jednak po dalszym wzroście *n,* zaczyna się pogarszać, co jest szczególnie widoczne na końcach przedziałów. Dla naszej funkcji efekt Rungego możemy już zaobserwować dla liczby węzłów 13 i stopnia wielomianu równego 13.



Wykres 13: Wykres aproksymacji średniokwadratowej wielomianami algebraicznymi dla 13 węzłów i stopnia wielomianu 13



Wykres 14: Wykres aproksymacji średniokwadratowej wielomianami algebraicznymi dla 20 węzłów i stopnia wielomianu 20



Wykres 15: Wykres aproksymacji średniokwadratowej wielomianami algebraicznymi dla 40 węzłów i stopnia wielomianu 30

Na przedstawionych wykresach można zauważyć odgięcia na krańcach przedziałów, które są właśnie efektem Rungego, czyli w naszym przypadku błędem aproksymacji.

Literatura:

[1] Wykłady nr 4 dr Rycerz z przedmiotu MOwNiT
[2] Wikipedia na temat Aproksymacji średniokwadratowej