MOwNiT – Interpolacja - zagadnienie Lagrange'a

Przygotował:
Szymon Budziak

Problem:

Dla poniższej funkcji:

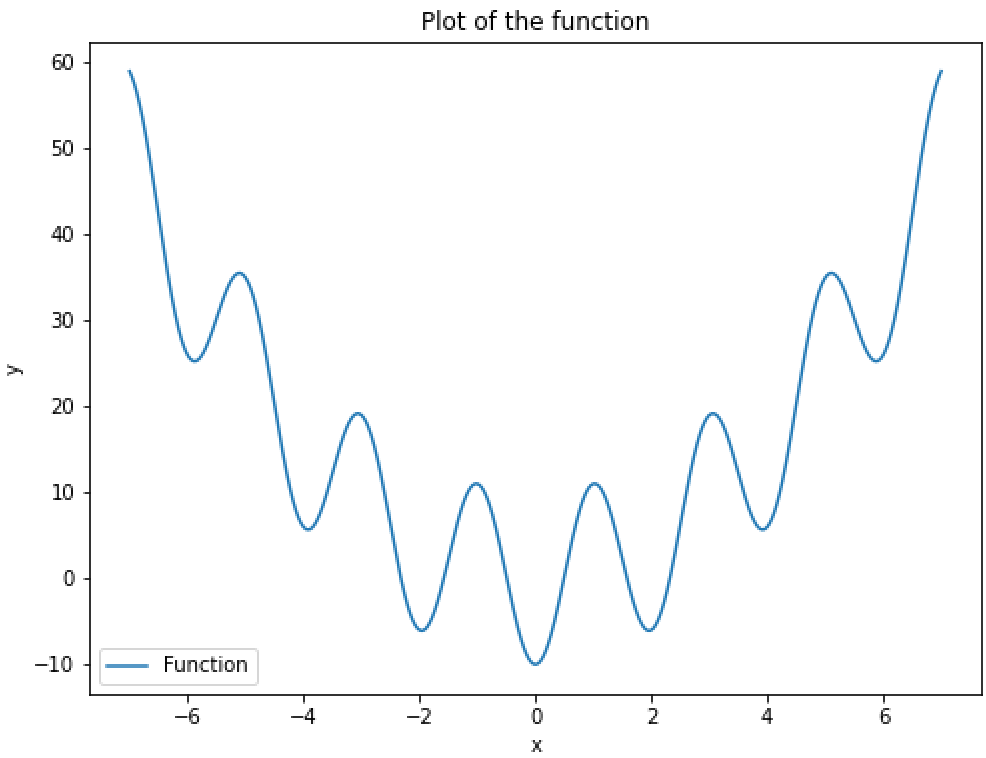
$$f(x) = x^2 - m \cdot \cos\left(\frac{\pi x}{k}\right)$$

k=1, m=10, [-7, 7]

wyznacz dla zagadnienia Lagrange'a wielomian interpolujący w postaci Lagrange'a i Newtona. Interpolację przeprowadź dla różnej liczby węzłów (np. n = 3, 4, 5, 7, 10, 15, 20). Dla każdego przypadku interpolacji porównaj wyniki otrzymane dla różnego rozmieszczenia węzłów: równoodległe oraz Czebyszewa. Oceń dokładność, z jaką wielomian przybliża zadaną funkcję. Poszukaj wielomianu, który najlepiej przybliża zadaną funkcję. Wyszukaj stopień wielomianu, dla którego można zauważyć efekt Runge'go (dla równomiernego rozmieszczenia węzłów). Porównaj z wyznaczonym wielomianem dla węzłów Czebyszewa.

Uwaga: Zalecane jest rysowanie wykresów funkcji, wielomianów interpolujących, …, czyli graficzne ilustrowanie przeprowadzonych eksperymentów numerycznych. W sprawozdaniu należy umieścić wykresy jedynie dla wybranych przypadków!

Wykres funkcji



Wykres 1: Wykres funkcji podanej w problemie

Interpolacja Lagrange'a

Do interpolacji Lagrange'a został użyty wzór:

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f(x_k) \cdot L_k(x)$$

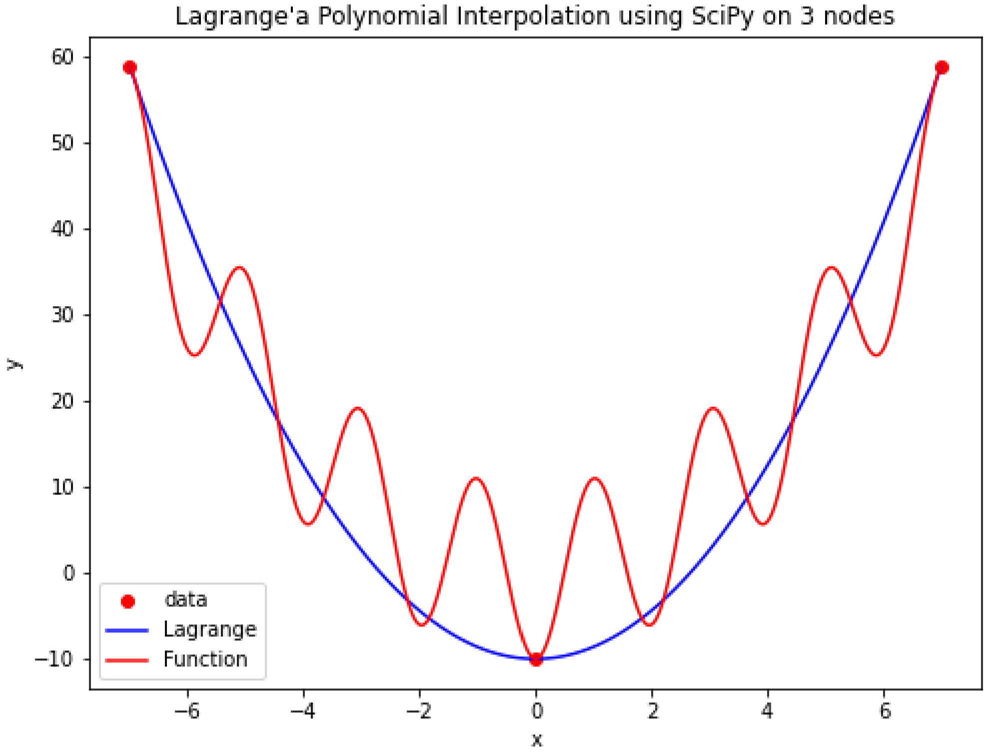
$$L_k(x) = \frac{d}{m} = \Pi_{i=0, i\neq k}^{n} \frac{x - x_i}{(x_k - x_i)}$$

$$d = (x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{k-1}) \downarrow (x - x_{k+1}) \dots (x - x_n)$$

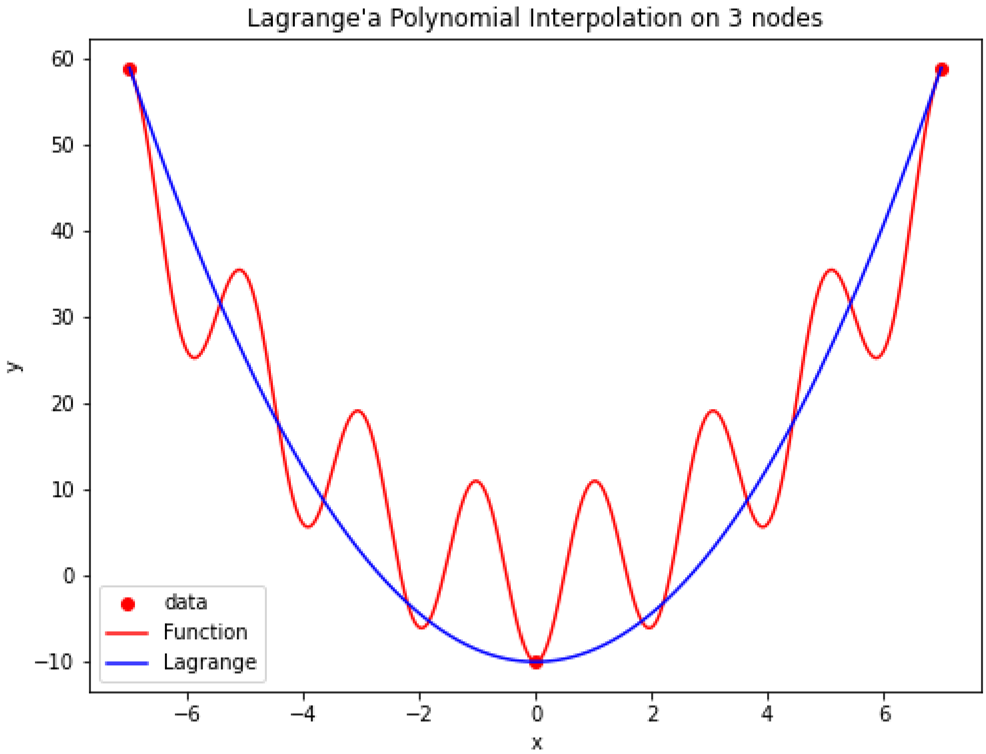
$$m = (x_k - x_0)(x_k - x_1) \dots (x_k - x_{k-1})(x_k - x_{k+1}) \dots (x_k - x_n)$$

Wykonanie interpolacji Lagrange'a zostało wykonane dla funkcji lagrange z pythonwej biblioteki Scipy oraz dla własnej implementacji. Wyniki obydwu funkcji zostały porównane i można zauważyć, że wyniki własnej implementacji niczym nie różnią się od wyników otrzymanych za pomocą funkcji z biblioteki SciPy. Można wysunąć wniosek, iż własna implementacja funkcji interpolacji Lagrange'a jest poprawna.

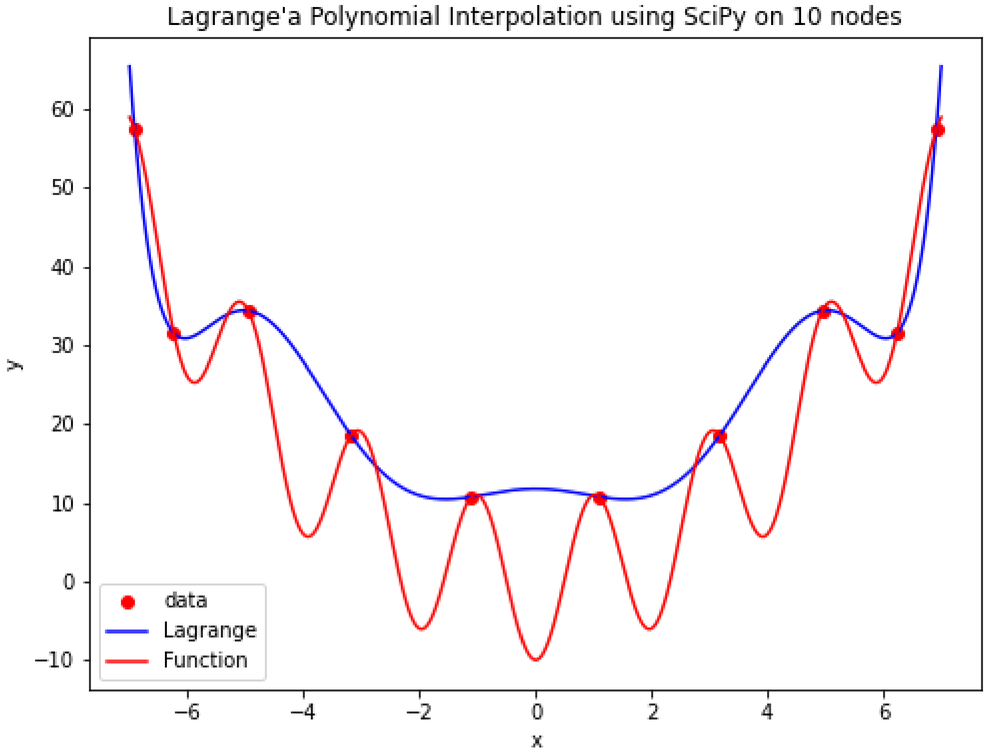
Przykładowe wykresy dla funkcji z biblioteki Scipy oraz z własnej implementacji dla interpolacji Lagrange'a



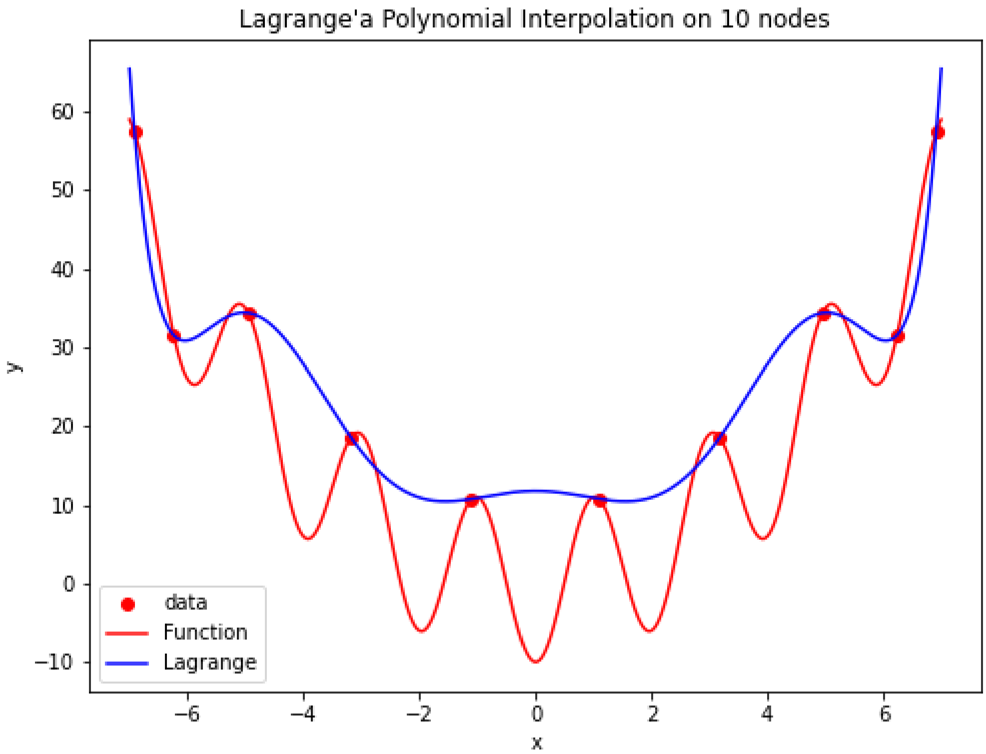
Wykres 2: Wykres interpolacji Lagrange'a dla funkcji z biblioteki SciPy i 3 węzłów rozmieszczonych równoodlegle



Wykres 3: Wykres interpolacji Lagrange'a dla własnej implementacji i 3 węzłów rozmieszczonych równoodlegle



Wykres 4: Wykres interpolacji Lagrange’a dla funkcji z biblioteki SciPy i 10 węzłów Czebyszewa



Wykres 5: Wykres interpolacji Lagrange’a dla własnej implementacji i 10 węzłów Czebyszewa

Interpolacja Newtona

Do interpolacji Newtona został użyty wzór:

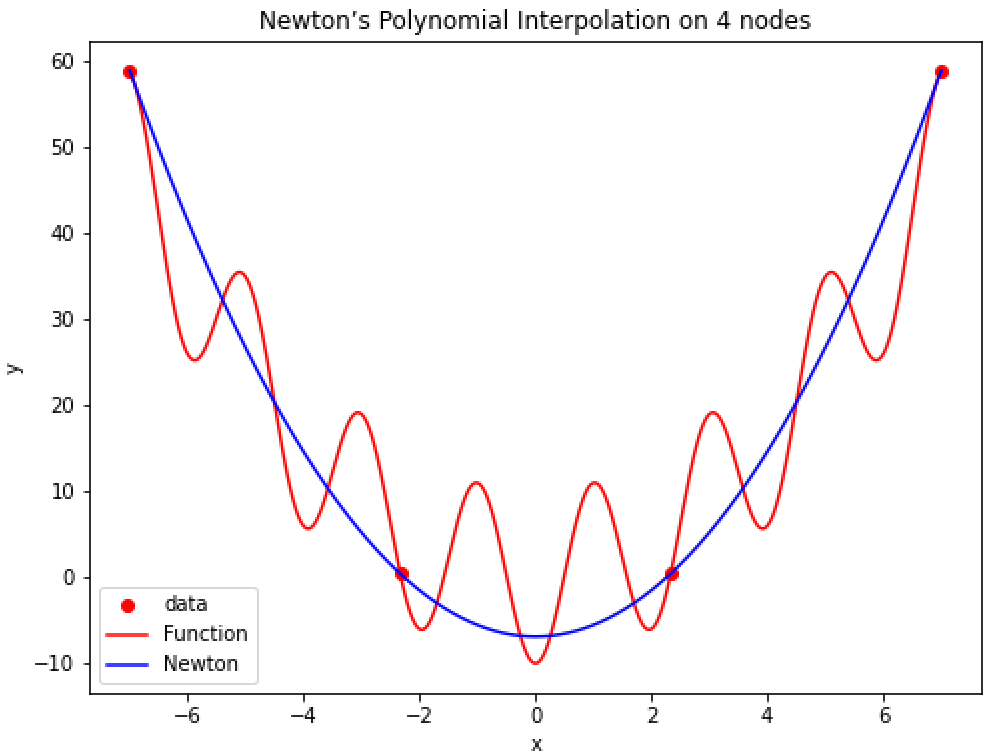
$$P_n(x) = f[x_0] + \sum_{k=1}^{n} f[x_0, x_1, ..., x_k] (x - x_0) ... (x - x_{k-1})$$

Budowanie tablicy ilorazów różnicowych:

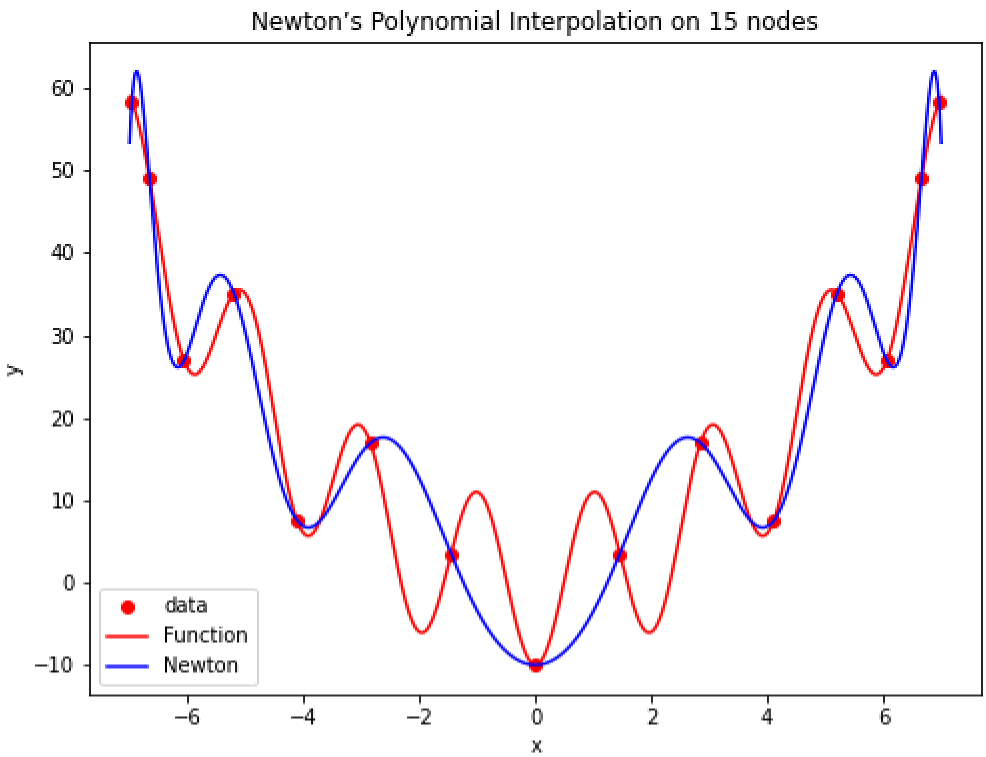
$$\begin{array}{llllll}
x_0 & f(x_0) & & & & \\
x_1 & f(x_1) & f[x_0, x_1] & & & \\
x_2 & f(x_2) & f[x_0, x_1] & f[x_0, x_1, x_2] & & \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \\
x_n & f(x_n) & f[x_{n-1}, x_n] & .... & ... & f[x_0, ..., x_n]
\end{array}$$

Wykonanie interpolacji Newtona zostało wykonane tylko przez własną implementację.

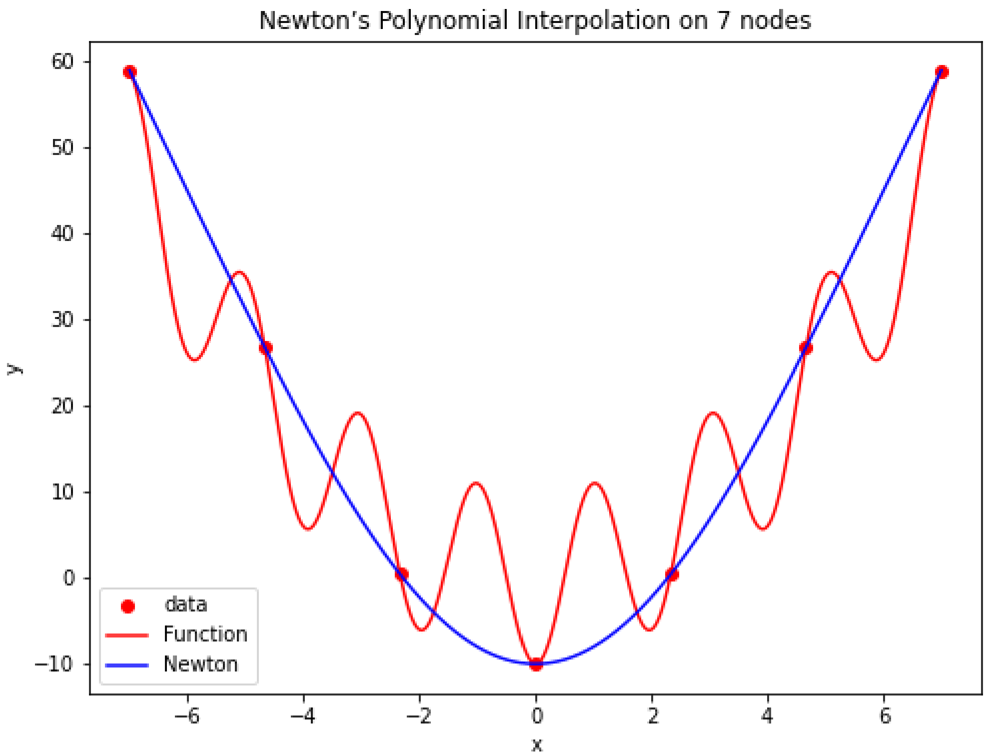
Przykładowe wykresy dla interpolacji Newtona



Wykres 6: Wykres interpolacji Newtona dla własnej implementacji i 4 węzłów rozmieszczonych równoodlegle



Wykres 7: Wykres interpolacji Newtona dla własnej implementacji i 15 węzłów Czebyszewa



Wykres 8: Wykres interpolacji Newtona dla własnej implementacji i 7 węzłów rozmieszczonych równoodlegle

Błędy obliczeniowe

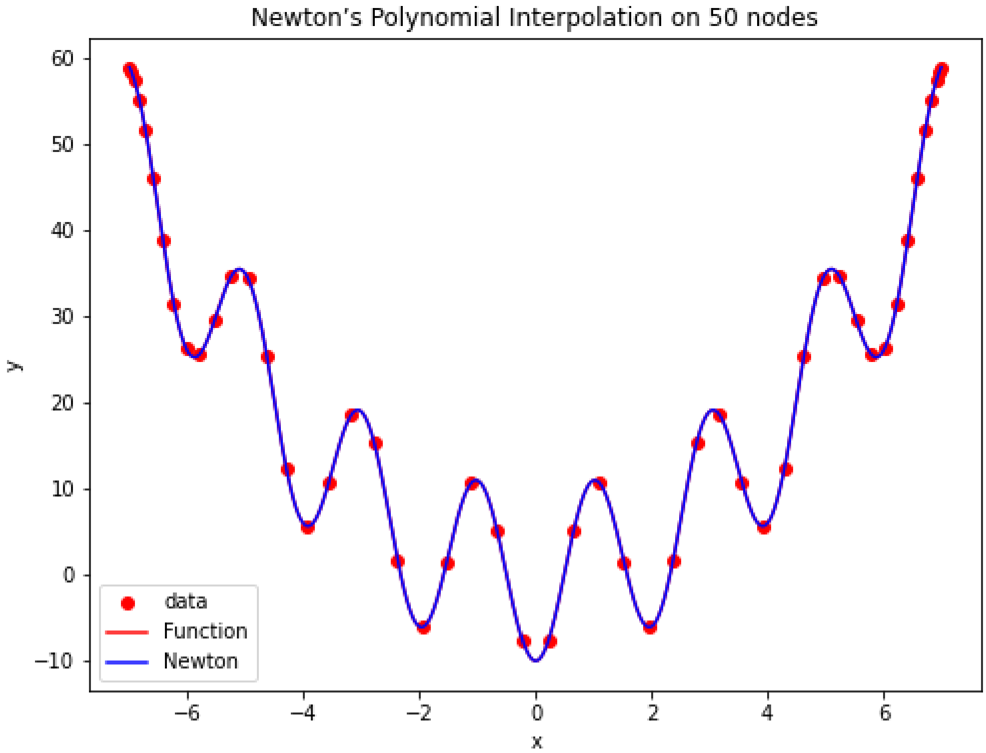
Błędy obliczeniowe zostały wykonane dla błędu maksymalnego punktów (maksymalny błąd z wartości bezwzględnej różnicy pomiędzy kolejnymi punktami) oraz dla błędu sumy kwadratów punktów (suma kwadratów różnic kolejnych punktów). Liczby węzłów jakie zostały wzięte pod uwagę to: 3, 4, 5, 7, 8, 9, 10, 15, 20, 25, 30, 40, 50, 60, 70, 80.

Wyniki dla błędu interpolacji Lagrange'a

Liczba węzłów	Błąd maksymalny (równoodlegle)	Błąd sumy kwadratów (równoodlegle)	Błąd maksymalny (Czebyszew)	Błąd sumy kwadratów (Czebyszew)
3	$1.959 * 10^{1}$	$1.999 * 10^{1}$	$9.491 * 10^{4}$	$1.485 * 10^{5}$
4	$1.653 * 10^{1}$	$1.663 * 10^{1}$	$7.540 * 10^{4}$	$7.130 * 10^{4}$
5	$1.990 * 10^{1}$	$2.042 * 10^{1}$	$1.049 * 10^{5}$	$1.220 * 10^{5}$
7	$1.902 * 10^{1}$	$2.159 * 10^{1}$	$9.961 * 10^{4}$	$9.420 * 10^{4}$
8	$1.999 * 10^{1}$	$2.211 * 10^{1}$	$1.498 * 10^{5}$	$9.713 * 10^{4}$
9	$1.903 * 10^{1}$	$1.873 * 10^{1}$	$9.991 * 10^{4}$	$7.306 * 10^{4}$
10	$1.996 * 10^{1}$	$2.194 * 10^{1}$	$9.640 * 10^{4}$	$1.120 * 10^{5}$
15	$2.830 * 10^{3}$	$1.907 * 10^{1}$	$4.910 * 10^{8}$	6.619 * 104
20	$4.460 * 10^{3}$	$1.498 * 10^{1}$	$8.529 * 10^{8}$	$3.593 * 10^{4}$
25	$3.055 * 10^{3}$	$7.031 * 10^{-1}$	$2.963 * 10^{8}$	$1.607 * 10^{2}$
30	$3.272 * 10^{2}$	$2.720 * 10^{-2}$	$2.754 * 10^{6}$	$2.475 * 10^{-1}$
40	$2.585 * 10^{-1}$	$5.998 * 10^{-7}$	$1.227 * 10^{0}$	$1.460 * 10^{-10}$
50	$2.653 * 10^{-3}$	$7.407 * 10^{-13}$	$4.215 * 10^{-5}$	$2.392 * 10^{-22}$
60	$1.654 * 10^{0}$	$8.526 * 10^{-14}$	$1.300 * 10^{1}$	$2.736 * 10^{-25}$
70	$2.482 * 10^{3}$	$1.207 * 10^{-13}$	$2.562 * 10^{7}$	$3.752 * 10^{-25}$
80	$2.054 * 10^{6}$	$1.278 * 10^{-13}$	$1.656 * 10^{13}$	$4.536 * 10^{-25}$

Tabela 1: Błąd obliczeniowy dla interpolacji Lagrange'a

Z tabeli można zauważyć, że najmniejszy błąd przy interpolacji Lagrange'a funkcja ma dla 50 węzłów.



Wykres 9: Wykres interpolacji Newtona dla własnej implementacji i 50 węzłów rozmieszczonych równoodlegle

Wykres dla interpolacji Lagrange'a jest identyczny oraz dla 50 węzłów Czebyszewa.

Wyniki dla błędu interpolacji Newtona

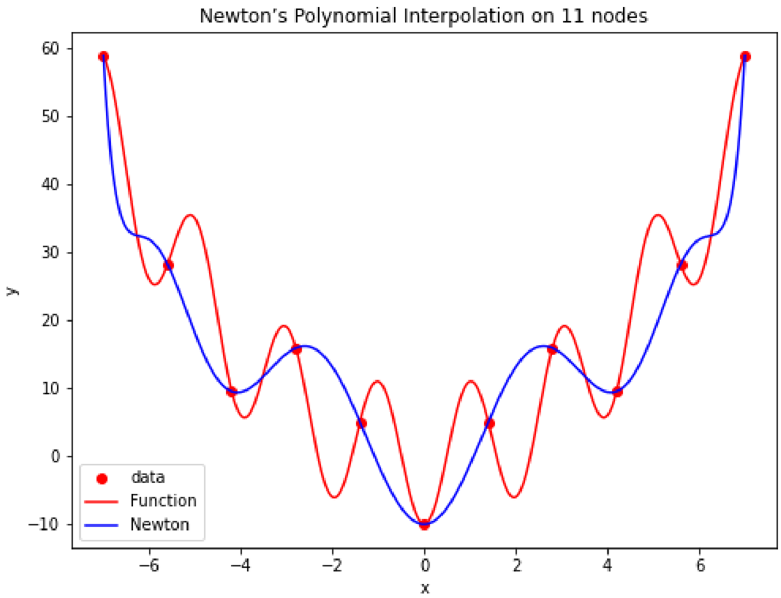
Liczba węzłów	Błąd maksymalny (równoodlegle)	Błąd sumy kwadratów (równoodlegle)	Błąd maksymalny (Czebyszew)	Błąd sumy kwadratów (Czebyszew)
3	19.594	$1.999 * 10^{1}$	$9.491 * 10^{4}$	$1.485 * 10^{5}$
4	16.531	$1.663 * 10^{1}$	$7.540 * 10^{4}$	$7.130 * 10^{4}$
5	19.908	$2.042 * 10^{1}$	$1.049 * 10^{5}$	$1.220 * 10^{5}$
7	19.027	$2.159 * 10^{1}$	$9.961 * 10^{4}$	$1.220 * 10^{4}$
8	19.999	$2.211 * 10^{1}$	$1.498 * 10^{5}$	$9.713 * 10^{4}$
9	19.030	$1.873 * 10^{1}$	$9.991 * 10^{4}$	$7.306 * 10^{4}$
10	19.960	$2.194 * 10^{1}$	$9.640 * 10^{4}$	$1.120 * 10^{5}$
15	2830.654	$1.907 * 10^{1}$	$4.910 * 10^{8}$	$6.619 * 10^{4}$
20	4460.178	$1.498 * 10^{1}$	$8.529 * 10^{8}$	$3.593 * 10^{4}$
25	3055.353	$7.031 * 10^{-1}$	$2.963 * 10^{8}$	$1.607 * 10^{2}$
30	327.215	$2.720 * 10^{-2}$	$2.754 * 10^{6}$	$2.475 * 10^{-1}$
40	0.258	$1.679 * 10^{-3}$	$1.22 * 10^{0}$	$2.228 * 10^{-5}$
50	0.005	$2.497 * 10^{-2}$	$1.832 * 10^{-4}$	$4.509 * 10^{-3}$
60	0.217	$2.164 * 10^{-1}$	$4.346 * 10^{-1}$	$3.495 * 10^{-1}$
70	356.157	$1.740 * 10^{3}$	$1.050 * 10^{6}$	$8.142 * 10^{6}$
80	157778.405	$5.294 * 10^{7}$	$1.457 * 10^{11}$	$9.969 * 10^{15}$

Tabela 2: Błąd obliczeniowy dla interpolacji Newtona

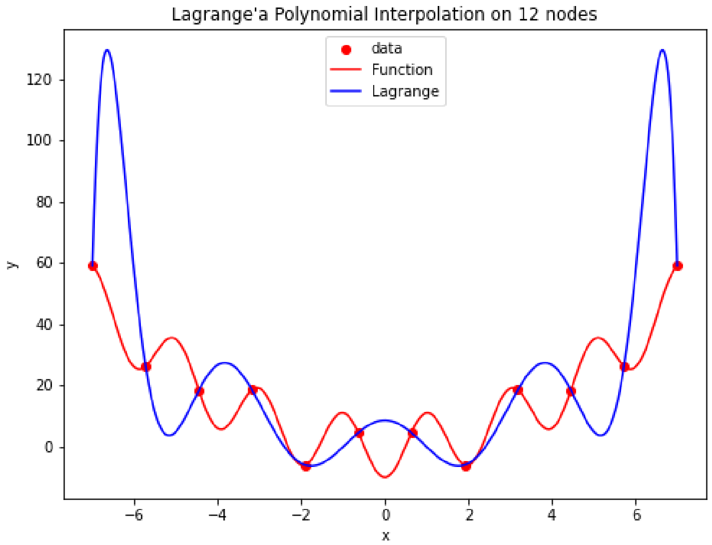
Z tabeli 2 możemy zauważyć, że minimalny błąd jest również dla liczby węzłów równej 50, tak jak w tabeli 1. Co więcej możemy zauważyć, iż do 50 węzłów błędy interpolacji dla metod Lagrange'a i Newtona są mniej więcej równe, jednak po 50 węźle wyniki zaczynają się rozbiegać. Z tabel oraz wykresów możemy wywnioskować, że interpolacja Newtona od 50 węzła zaczyna błędnie interpolować naszą funkcję.

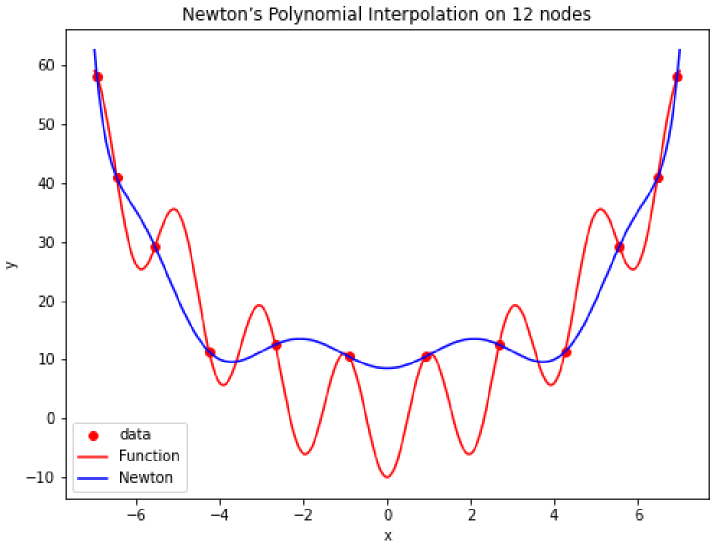
Efekt Rungego

Efekt Rungego jest to pogorszenie jakości interpolacji wielomianowej, mimo zwiększenia liczby jej węzłów. Początkowo ze wzrostem liczby węzłów *n* przybliżenie poprawia się, jednak po dalszym wzroście *n,* zaczyna się pogarszać, co jest szczególnie widoczne na końcach przedziałów.
Dla naszej funkcji efekt Rungego możemy już zaobserwować dla liczby węzłów 12 przy ich równoodległym rozmieszczeniu. Sprawdźmy jednak jak wygląda nasza funkcja dla 11 węzłów interpolacyjnych przy ich równoodległym rozmieszczeniu.



Wykres 10: Wykres interpolacji Newtona dla własnej implementacji i 11 węzłów rozmieszczonych równoodlegle





Wykres 11: Wykres interpolacji Lagrange'a dla własnej implementacji i 12 węzłów rozmieszczonych równoodlegle (po lewo) oraz 12 węzłów Czebyszewa (po prawo)

Dla liczby węzłów interpolacji równej 12 mamy pierwsze wystąpienie efektu Rungego. Wraz ze wzrastającą liczbą węzłów efekt ten się powiększa (więcej przykładów wykresów w jupyter notebooku).

Literatura:

[1] Wykłady nr 2 oraz nr 3 dr Rycerz z przedmiotu MOwNiT

[2] Wikipedia na temat interpolacji Lagrange'a, Newtona oraz efektu Rungego