MOwNiT – arytmetyka komputerowa

1. Wyznaczyć doświadczalnie parametry reprezentacji liczb zmiennoprzecinkowych (**float**, **double**, **long double**) i porównać uzyskane wartości dla różnych architektur, systemów operacyjnych i kompilatorów. Sprawdzić, czy reprezentacje są zgodne ze standardem IEEE.

   Parametry do wyznaczenia:

   - liczba bajtów używana do przechowywania zmiennej danego typu,
   - liczba bitów na mantysę,
   - liczba bitów na cechę (wliczając znak),
   - "maszynowe epsilon" - najmniejsza liczba, dla której 1.0+e > 1.0,
   - występowanie i sposób reprezentacji wartości specjalnych (±0, ±Inf, NaN).

2. Wykonać obliczenia wg podanych poniżej wzorów dla 101 równoodległych wartości x z przedziału [0.99, 1.01]:

   - $f(x) = x^8 - 8x^7 + 28x^6 - 56x^5 + 70x^4 - 56x^3 + 28x^2 - 8x + 1$
   - $f(x) = (((((((x - 8)x + 28)x - 56)x + 70)x - 56)x + 28)x - 8)x + 1$
   - $f(x) = (x - 1)^8$
   - $f(x) = e^{(8\ln(\mathrm{abs}(x-1)))}$, $x \neq 1$

   Porównać wyniki. Objaśnić różnice w wynikach.

3. Wyznaczyć wartości funkcji $f(x) = \mathrm{sqrt}(x^2 + 1) - 1$, $g(x) = x^2 / (\mathrm{sqrt}(x^2 + 1) + 1)$, dla argumentu $x = 8^{-1}, 8^{-2}, 8^{-3}, \ldots$. Sprawdzić, czy wyznaczone wartości dla obu funkcji (matematycznie tożsamych) są takie same i spróbować uzasadnić ewentualne różnice. Jak obliczać z kolei wartości dla dużych argumentów (np. x bliskiego największej liczbie typu *double*) ?

4. Moduł liczby zespolonej $z = x + iy$ może być obliczany przy pomocy wzorów:

   - $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$
   - $|z| = v\left[1 + \left(\frac{w}{v}\right)^2\right]^{1/2}$
   - $|z| = 2v\left[\frac{1}{4} + \left(\frac{w}{2v}\right)^2\right]^{1/2}$

   gdzie $v = \max\{|x|, |y|\}$, $w = \min\{|x|, |y|\}$. Porównać wyniki dla dużych i małych liczb x i y. Dobrać dane tak, aby widoczne były różnice pomiędzy wynikami uzyskanymi różnymi wzorami.

5. Rozważmy funkcję $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = (\boldsymbol{e}^{\boldsymbol{x}} - \mathbf{1}) / \boldsymbol{x}$. Można wykazać (jak?), że $\lim_{x\to 0} f(x) = 1$

   a) Sprawdzić tę własność obliczając na komputerze wartość funkcji dla $x = 10^{-k}$ dla $k = 1, \ldots ,15$. Czy rezultaty są zgodne z oczekiwaniami?

   b) Powtórzyć obliczenia tym razem korzystając ze wzoru:

   $$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = (\boldsymbol{e}^{\boldsymbol{x}} - \mathbf{1}) / \ln(\boldsymbol{e}^{\boldsymbol{x}}) .$$

   Porównać rezultaty z tymi uzyskanymi w punkcie a). Spróbować wyjaśnić ewentualne różnice.

   W obu przypadkach podać, dla jakiej precyzji liczb robiono obliczenia oraz zwrócić uwagę na typ argumentów i wyników dla funkcji bibliotecznych wykorzystywanych w obliczeniach.

6. W dokładnej arytmetyce ciąg $x_{k+1} = 111 - (1130 - 3000/x_{k-1})/x_k$, $x_0 = 11/2$, $x_1 = 61/11$ jest rosnący i zbieżny do 6. Obliczyć na swoim komputerze x_{34} (dla zmiennych typu *float, double, long double*) i spróbować wyjaśnić uzyskane wyniki. Dokładna wartość (zaokrąglona do 4 cyfr znaczących) jest równa $x_{34} = 5.998$.

7. Wyznaczyć kolejne elementy ciągu $x_{k+1} = x_k + 3x_k\,(1 - x_k)$, $x_0 = 0.1$, i porównać otrzymane wartości dla różnej precyzji zmiennych (*float*, *double*, *long double*). Powtórzyć doświadczenie dla przekształconej postaci wzoru: $x_{k+1} = 4x_k - 3x_kx_k$. Spróbować wyjaśnić otrzymane wyniki.

8. Dana jest zależność rekurencyjna $3x_{k-1} - 10x_k + 3x_{k+1} = 0$. Wartości początkowe $x_0 = 1$, $x_1 = 1/3$. Wyznaczyć wartości x_k i x_{k+1} dla $k = 45$. Następnie korzystając z wyznaczonych wartości x_k i x_{k+1} obliczyć x_1 i x_0, wykonując rekurencję w tył. Porównać wyznaczone wartości x_1 i x_0 z dokładnymi wartościami początkowymi 1 i 1/3. Wykonać obliczenia dla różnej precyzji zmiennych (*float*, *double*, *long double*). Skomentować różnice. Co będzie, jeśli wszędzie liczbę 3 zastąpimy przez liczbę 2 lub 20, lub 30?

9. Niech ciąg x_k będzie zdefiniowany:

   $$x_1 = 4, \quad x_{k+1} = 2^{2(k+1)+1} \cdot \frac{\sqrt{1 + x_k^2 / 2^{2(k+1)}} - 1}{x_k}$$

   Zaproponować inną postać tego związku i obliczyć x_{30} dwoma sposobami. Skomentować i spróbować objaśnić otrzymane wyniki.

10. Dla $x_0 > 1$ ciąg

    $$x_{k+1} = 2^{k+1}(\sqrt{1 + 2^{-k} x_k} - 1)$$

    jest zbieżny do $\log(x_0+1)$. Przekształcić wzór tak, by uniknąć utraty dokładności. Porównać dwa sposoby liczenia wyrazów ciągu.

11. Dany jest wielomian Wilkinsona $W(x) = (x-1)(x-2)...(x-20)$. Przekształcić wielomian do postaci $W(x) = x^{20} + a_{19}x^{19} + ... + a_1\, x + a_0$. Podać wyznaczone wartości współczynników a_i. Dla $x = 1$ oraz $x = 20$ dokładna wartość wielomianu wynosi 0. Obliczyć wartość wielomianu dla $x = 1$ oraz $x = 20$. Do wyznaczenia wartości wielomianu wykorzystać schemat Hornera oraz dowolny schemat sumacyjny.

12. Niech

$$x_n = \int_0^1 t^n (t+5)^{-1} dt$$

Wiadomo, że $x_0 = \ln 6 - \ln 5 = \ln 1.2$. Całka powyższa może być obliczona za pomocą wzoru rekurencyjnego: $x_n = n^{-1} - 5x_{n-1}$. Stosując ten wzór rekurencyjny obliczyć x_0, x_1, … , x_{20}. Zwrócić uwagę, czy i dla jakich n obliczony wynik jest ujemny. Czy tak powinno być? Obliczyć analitycznie x_{20} wykorzystując do funkcji podcałkowej szereg Taylora, a następnie na podstawie tego wzoru wyliczyć w komputerze wartość x_{20}. Po wyznaczeniu x_{20} zastosować rekurencję wstecz, tj. obliczyć kolejno x_{19}, x_{18}, … , x_0. Czy otrzymane x_0 jest poprawne? Wykonać obliczenia dla różnej precyzji zmiennych (*float*, *double*, *long double*). Skomentować i spróbować objaśnić otrzymane wyniki.

13. Przybliżoną wartość pochodnej funkcji $f(x)$ w punkcie x można obliczyć ze wzoru:

$$f'(x) \approx \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Wykorzystać ten wzór do obliczenia pochodnej funkcji $f(x) = sin(x) + cos(3x)$ w punkcie $x = 1$ dla $h = 2^{-n}$ ($n = 0, 1, 2, \ldots, 40$). Wykonać obliczenia dla różnej precyzji zmiennych. Zwrócić uwagę na typ argumentów i wyników dla funkcji bibliotecznych wykorzystywanych w obliczeniach. Jak wytłumaczyć, że od pewnego momentu zmniejszenie wartości h nie poprawia przybliżenia wartości pochodnej? Jak zachowują się wartości $1+h$? Obliczone przybliżenia pochodnej porównać z dokładną wartością pochodnej.