MOwNiT – arytmetyka komputerowa

Przygotował:
Szymon Budziak

Problem:
Niech ciąg x_k będzie zdefiniowany:

$$x_1 = 4, \quad x_{k+1} = 2^{2(k+1)+1} \cdot \frac{\sqrt{1 + x_k^2 / 2^{2(k+1)}} - 1}{x_k}$$

Zaproponować inną postać tego związku i obliczyć x_{30} dwoma sposobami.
Skomentować i spróbować objaśnić otrzymane wyniki.

Inna postać związku:
Podany wzór przekształcamy mnożąc ułamek przez "sztuczną jedynkę" jaką jest licznik tego ułamka tylko ze zmienionym znakiem przy 1 (+ 1).

$$x_{k+1} = 2^{2(k+1)+1} \cdot \frac{\sqrt{1 + x_k^2 / 2^{2(k+1)}} - 1}{x_k} =$$

$$= 2 \cdot 2^{2(k+1)} \cdot \frac{\sqrt{1 + x_k^2 / 2^{2(k+1)}} - 1}{x_k} \cdot \frac{\sqrt{1 + x_k^2 / 2^{2(k+1)}} + 1}{\sqrt{1 + x_k^2 / 2^{2(k+1)}} + 1} =$$

$$= 2 \cdot 2^{2(k+1)} \cdot \frac{1 + x_k^2 / 2^{2(k+1)} - 1}{x_k \cdot (\sqrt{1 + x_k^2 / 2^{2(k+1)}} + 1)} = 2 \cdot 2^{2(k+1)} \cdot \frac{x_k^2}{x_k \cdot 2^{2(k+1)} \cdot (\sqrt{1 + x_k^2 / 2^{2(k+1)}} + 1)} =$$

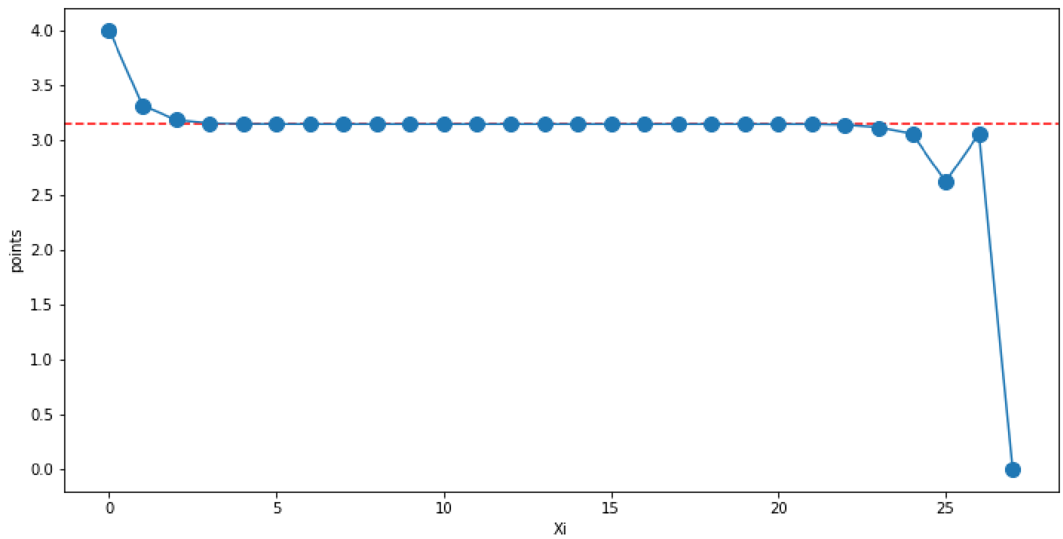
$$= \frac{2 \cdot x_k}{\sqrt{1 + x_k^2 / 2^{2(k+1)}} + 1}$$

W zadaniu zostały wykorzystane 3 typy danych z biblioteki numpy:

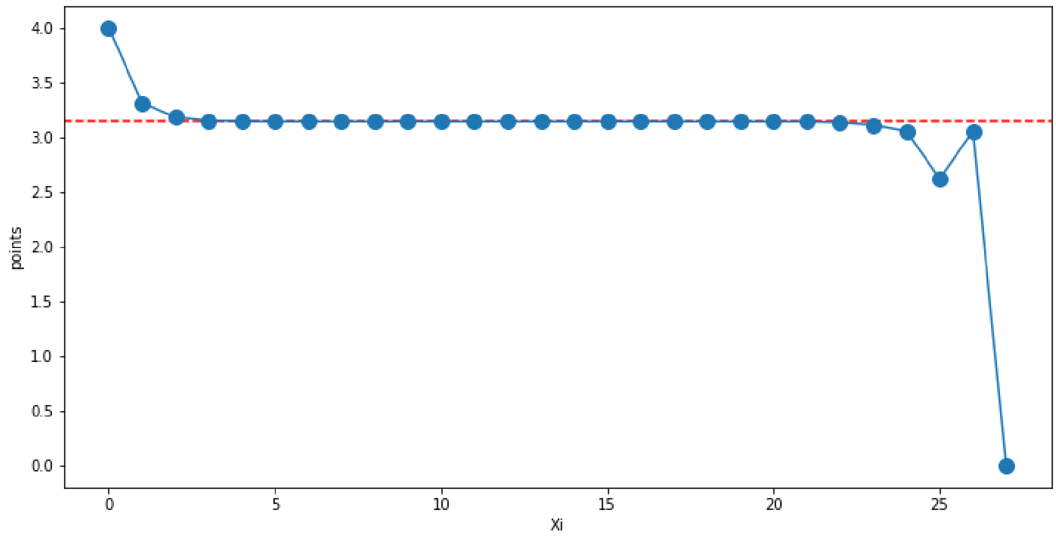
1) float32 - jest to typ liczby zmiennoprzecinkowej o pojedynczej precyzji, taki sam jak typ float z C, posiada on 32 bity precyzji, gdzie 8 przeznaczonych jest na cechę i 23 na mantysę,
2) double - w numpy jest to typ liczby zmiennoprzecinkowej o podwójnej precyzji, taki sam jak typ double z C, posiada on 64 bity precyzji z czego 11 przeznaczonych jest na cechę i 52 na mantysę,
3) long double - jest to typ liczby zmiennoprzecinkowej o rozszerzonej precyzji, taki sam jak typ long double z C, posiada on 80 bitów precyzji,

Dokładny opis tych zmiennych możemy otrzymać wywołując funkcję **np.finfo(zmienna)**, gdzie \`zmienna\` jest naszym typem danych. Funkcja ta użyta jest w jupyter notebooku.

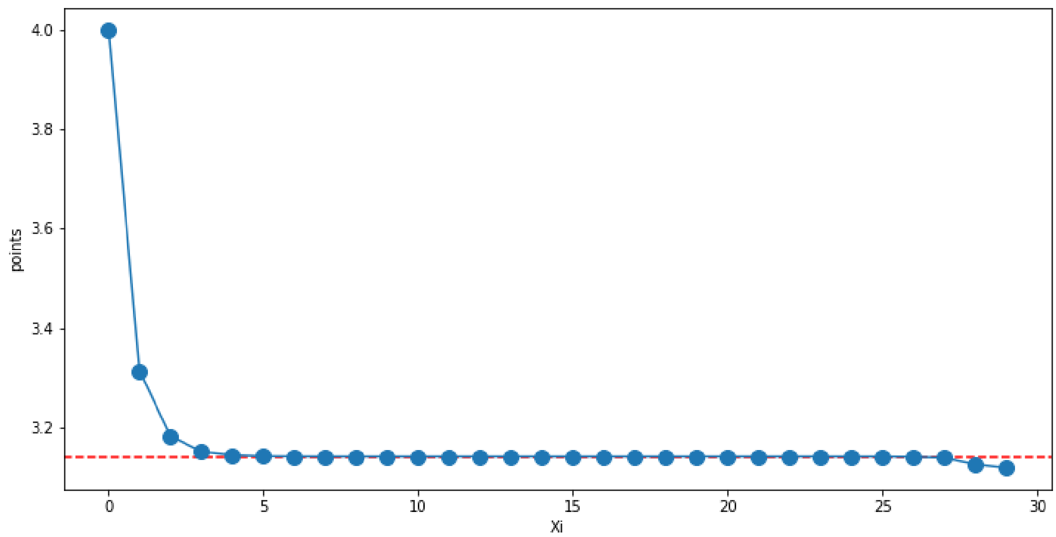
Obliczenia oraz wykresy dla kolejnych x przy pomocy podanego wzoru:



Wykres 1: Wykres dla 30 kolejnych wartości x obliczonych przy pomocy podanego wzoru dla typu float



Wykres 2: Wykres dla 30 kolejnych wartości x obliczonych przy pomocy podanego wzoru dla typu double



Wykres 3: Wykres dla 30 kolejnych wartości x obliczonych przy pomocy podanego wzoru dla typu long double

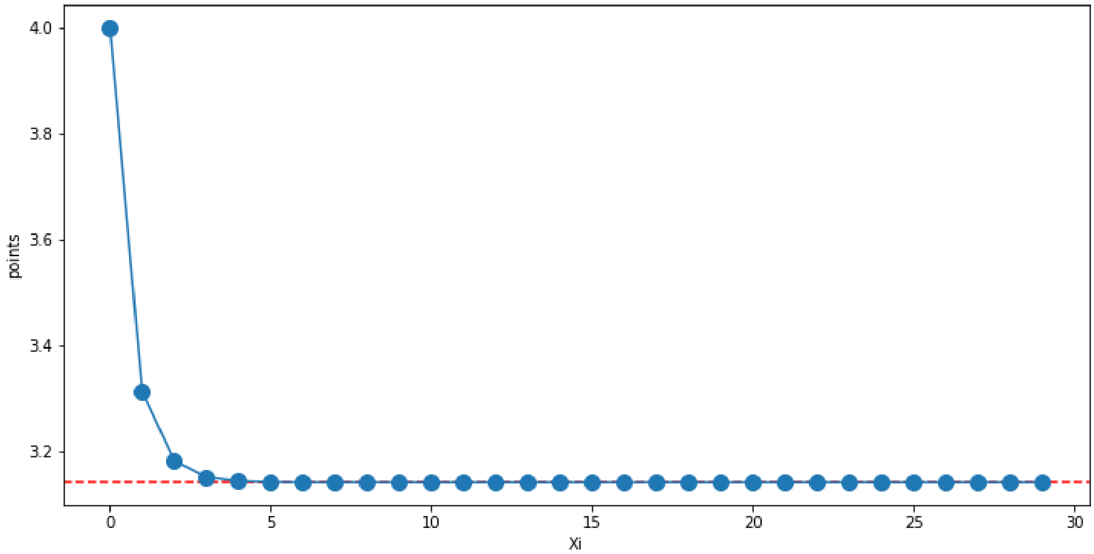
x_n	float	double	long double
x_1	4.0	4.0	4.0
x_2	3.3137085	3.313708498984761	3.3137084989847603901
x_3	3.1825979	3.1825978780745294	3.1825978780745281113
x_4	3.1517248	3.151724907429258	3.1517249074292560925
x_5	3.1441183	3.1441183852458665	3.1441183852459042777
…	…	…	…
x_{23}	3.1339834	3.1339832938853593	3.1415913641129355899
x_{24}	3.1110568	3.1110567880253206	3.1415823152036629893
x_{25}	3.0536246	3.0536247478882985	3.1415330796402149921
x_{26}	2.6198373	2.6198372951792175	3.1415046013554204743
x_{27}	3.0536249	3.0536247478882985	3.1409113632183586267
x_{28}	0.0	0.0	3.1390172659624233085
x_{29}	nan	nan	3.12597834564362792
x_{30}	nan	nan	3.1190235254148919498

Tabela 1: Obliczenia dla kolejnych wartości x przy pomocy podanego wzoru

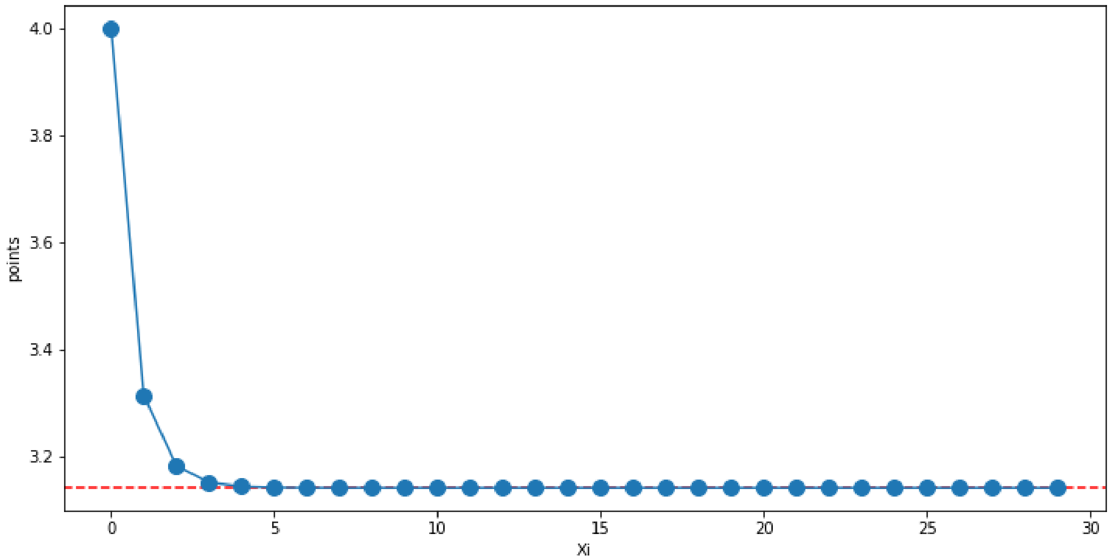
Ciąg który mamy zadany w zdaniu zbiega do wartości π.

Możemy zauważyć, że dla różnych typów danych mamy mniej więcej zbliżone wartości, co można zauważyć w tabeli oraz na wykresach. Jednak w tabeli widać różnice w ostatnich liczbach, które wynikają z różnych precyzji. Typy float i double nie zwracają już poprawnych wyników dla liczby π od 23 miejsca w obydwu przypadkach. Jeśli chodzi o typ long double tutaj od 28 miejsca możemy zauważyć błąd w dokładności drugiej cyfry po przecinku. Wynika z tego, że wszystkie przetestowane typy są za mało precyzyjne aby określić 28, 29 i 30 wyraz ciągu. W przypadku typu float i double 28 wyraz jest już równy 0.0, co powoduje błędy w obliczaniu kolejnych wyrazów, ponieważ to 0.0 zostaje użyte w mianowniku.

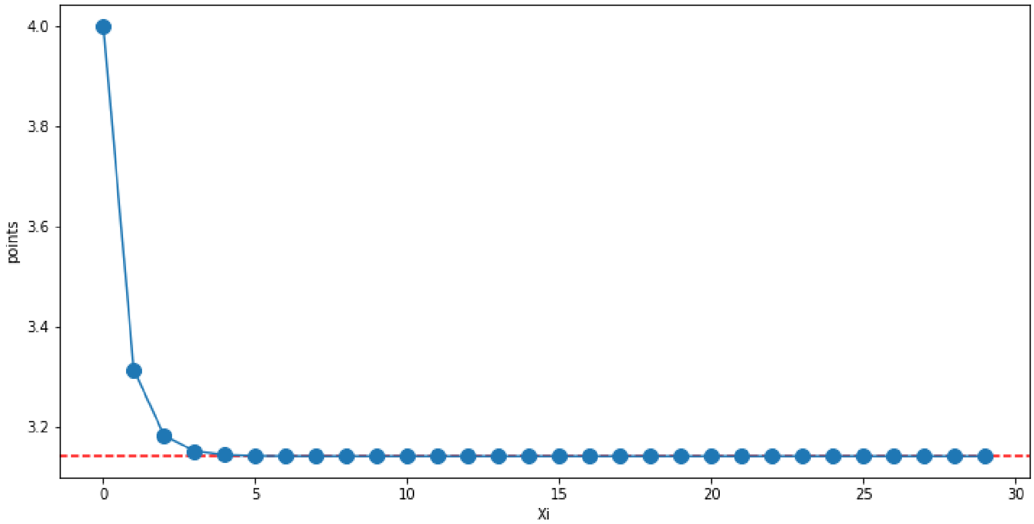
Obliczenia dla kolejnych x przy pomocy przekształconego wzoru:



Wykres 4: Wykres dla 30 kolejnych wartości x obliczonych przy pomocy przekształconego wzoru dla typu float



Wykres 5: Wykres dla 30 kolejnych wartości x obliczonych przy pomocy przekształconego wzoru dla typu double



Wykres 6: Wykres dla 30 kolejnych wartości x obliczonych przy pomocy przekształconego wzoru dla typu long double

x_n	float	double	long double
x_1	4.0	4.0	4.0
x_2	3.3137085	3.3137084989847607	3.3137084989847603905
x_3	3.1825979	3.1825978780745285	3.1825978780745281106
x_4	3.1517248	3.151724907429256	3.1517249074292560986
x_5	3.1441183	3.1441183852459047	3.1441183852459042628
…	…	…	…
x_{23}	3.1415927	3.1415926535898313	3.1415926535898299572
x_{24}	3.1415927	3.1415926535898033	3.141592653589802418
x_{25}	3.1415927	3.1415926535897962	3.1415926535897955331
x_{26}	3.1415927	3.141592653589795	3.141592653589793812
x_{27}	3.1415927	3.141592653589795	3.1415926535897933818
x_{28}	3.1415927	3.141592653589795	3.1415926535897932743
x_{29}	3.1415927	3.141592653589795	3.1415926535897932474
x_{30}	3.1415927	3.141592653589795	3.1415926535897932407

Tabela 2: Obliczenia dla kolejnych wartości x przy pomocy przekształconego wzoru

Możemy zauważyć, że dla różnych typów danych mamy mniej więcej zbliżone wartości, a nawet w niektórych przypadkach takie same. Dzięki zlikwidowaniu wyrazu x w mianowniku, poprzez przekształcenie wzoru program może zakończyć obliczenia i uzyskać wszystkie wyniki. Wyniki też są różne w zależności od użytego typu danych i ich precyzji. Jednak dzięki przekształceniu wzoru wyniki do 30 wyrazu są poprawne i bliskie prawdziwej wartości liczby π. Dodatkowo wyraz x_{30} dla typu double oraz long double jest równy wartości π z dokładnością do 11 miejsc po przecinku.

Podsumowując, nie udało się otrzymać poprawnych wyników dla x_{30} przy niezmienionej formie wzoru dla typów float i double. Zmiana typu danych na typ o większej precyzji poprawiła dokładność wyników. Jeśli chodzi o wzór o przekształconej postaci to dla każdego typu danych udało uzyskać się poprawne wyniki do kilku miejsc po przecinku. Najlepszyu wynik bo dokładność aż do 15 miejsc po przecinku uzyskaliśmy przy typie long double. Dzięki mniejszej liczbie operacji w przekształconym wzorze mogliśmy otrzymać dokładniejsze wyniki od wzoru który nie był zmieniony. Możemy więc zauważyć, że przekształcenie wzoru może znacząco zmniejszyć błąd precyzji i obliczeń.

Literatura:

[1] Wykłady nr 1 oraz nr 2 dr Rycerz z przedmiotu MOwNiT
[2] Oficjalna dokumentacja Numpy na temat typów danych