Algorytmy numeryczne - projekt

Szymon Gosk, Damian Górski, Niuta Godlewska

24 listopada 2020

Spis treści

1 Wstęp

Niniejszy dokument stanowi dokumentacje wszystkich części projektu przedmiotu *Algorytmy numeryczne*. Kolejne części projektu będą opisane w kolejnych sekcjach, a kolejne elementy poszczególnych częsci - w podsekcjach.

Dokument ten jest również podsumowaniem pracy członków zespołu **1.1**, w którego skład wchodzą **Szymon Gosk**, **Damian Górski** i **Niuta Godlewska**. Członkowie zespołu wspólnie oświadczają, iż projekt był realizowany przez każdego z nich w równym stopniu zaangażowania.

Kod wszystkich algorytmów można znaleźć na repozytorium projektu:

https://github.com/Szymon-Gosk/szymon-gosk.github.io

Kod umieszczony w tym dokumencie stałby się nieczytelny, tak więc - z uwagi na wygodę czytającego - zachęcamy do zapoznania się z programem na stronie zamieszczonej powyżej.

Zaimplementowany projekt można znaleźć pod adresem:

https://szymon-gosk.github.io/

2 Interpolacja wielomianowa : Przyrost naturalny

2.1 Opis metod obliczeniowych

Zadanie: Program, który oszacuje przyrost naturalnyna świecie w przyszłości. Węzły mają przedstawiać przyrost naturalny zmieniający się wczasie.

Metoda numeryczna użyta w tym zadaniu to **metoda newtona**. Początkowo posiadamy zbiór $n + 1$ danych:

$$\{(x_0, y_0), (x_1, y_1), ..., (x_n, y_n)\}$$

Metoda polega na interpolacji danych w wielomian w postaci:

$$P(x) = \sum_{k=0}^{n} \left(b_k \prod_{i=0}^{k-1} (x - x_i) \right)$$

która pozwala oszacować wartości dla argumentów spoza zbioru danych.

Współczynniki b_k można uzyskać korzystając z poniższego wzoru:

$$b_k = \left(\frac{y_k - \sum\limits_{i=0}^{k-1} \left(b_i \prod\limits_{j=0}^{i-1} (x_k - x_j) \right)}{\prod\limits_{i=0}^{k-1} (x_k - x_i)} \right)$$

Przykład: Dany jest następujący zbiór danych:

$$\{(2005, 6503), (2010, 6894), (2015, 7256)\}$$

Zbiór współczynników dla tego zbioru to:

$$b_0 = 6503$$
$$b_1 = 78.2$$
$$b_2 = -0.58$$

przez co uzyskujemy wielomian w postaci:

$$P(x) = 6503 + 78.2(x - 2005) - 0.58(x - 2005)(x - 2010)$$

lub po przekształceniach:

$$P(x) = -0.58x^2 + 2406.9x - 2487717$$

Korzystając z tego wielomianu można przybliżyć wynik dla dowolnej wartości x. Dla $x = 2020$ podstawiamy wartość:

$$P(2020) = -0.58 \cdot (2020)^2 + 2406.9 \cdot 2020 - 2487717 = 7589$$

Kolejnym krokiem jest metoda ogólna przekształcania wielomianu w postaci Newtona w postać ogólną:

$$\sum_{k=0}^{n} \left(b_k \prod_{i=0}^{k-1} (x - x_i) \right) = \sum_{k=0}^{n} \left(a_k x^k \right)$$

Obecnie, wielomian ma postać:

$$b_0 + b_1(x - x_0) + b_2(x - x_0)(x - x_1) + ... + b_n(x - x_0)...(x - x_{n-1})$$

Pierwszym krokiem będzie wymnożenie kolejnych iloczynów $(x - x_i)$ dla danego współczynnika b_k. W tym celu zdefiniujmy macierz $(n + 1) \times (n + 1)$:

$$M = \begin{pmatrix} \lambda_{(0,0)} & \lambda_{(0,1)} & \cdots & \lambda_{(0,j)} & \cdots & \lambda_{(0,n)} \\ \lambda_{(1,0)} & \lambda_{(1,1)} & \cdots & \lambda_{(1,j)} & \cdots & \lambda_{(1,n)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \lambda_{(i,0)} & \lambda_{(i,1)} & \cdots & \lambda_{(i,j)} & \cdots & \lambda_{(i,n)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \lambda_{(n,0)} & \lambda_{(n,1)} & \cdots & \lambda_{(n,j)} & \cdots & \lambda_{(n,n)} \end{pmatrix}$$

Zamysł elementów $\lambda_{(i,j)}$ jest następujący - zapiszmy wielomian w postaci opisanej wyżej:

$$b_0 + b_1(x - x_0) + b_2(x - x_0)(x - x_1) + ... + b_n(x - x_0)...(x - x_{n-1}) = b_0\lambda_{(0,0)} + b_1(\lambda_{(1,1)}x + \lambda_{(0,1)}) + ... + b_n(\lambda_{(n,n)}x^n + \lambda_{(n-1,1)}x^{n-1} + ... + \lambda_{(0,n)}x^0)$$

Innymi słowy, są to iloczyny kolejnych podwielomianów Newtona $\prod_{i=0}^{k-1}(x - x_i)$.

Konsekwencją tego jest fakt, iż:

$$\forall_{j<i} \lambda_{(i,j)} = 0$$

co pozwala nam zapisać macierz M jako:

$$M = \begin{pmatrix} \lambda_{(0,0)} & \lambda_{(0,1)} & \cdots & \lambda_{(0,j)} & \cdots & \lambda_{(0,n)} \\ 0 & \lambda_{(1,1)} & \cdots & \lambda_{(1,j)} & \cdots & \lambda_{(1,n)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_{(i,j)} & \cdots & \lambda_{(i,n)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & \lambda_{(n,n)} \end{pmatrix}$$

Dodatkowo, warto zauważyć, że:

$$\forall_{i=j} \lambda_{(i,j)} = 1$$

Do uzyskania postaci ogólnej wielomianu, należy dodać do siebie współczynniki λ odpowiadające danym potęgom, pomnożone przez odpowiednie współczynniki b. Wykorzystamy do tego układ liniowy:

$$\begin{pmatrix} \lambda_{(0,0)} & \lambda_{(0,1)} & \cdots & \lambda_{(0,j)} & \cdots & \lambda_{(0,n)} \\ 0 & \lambda_{(1,1)} & \cdots & \lambda_{(1,j)} & \cdots & \lambda_{(1,n)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_{(i,j)} & \cdots & \lambda_{(i,n)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & \lambda_{(n,n)} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \\ \vdots \\ b_i \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_i \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

Rozwiązaniem tego układu dla poszczególnych a_i jest:

$$a_i = \sum_{j=0}^{i} b_j \lambda_{(i,j)}$$

Do wyznaczenia wzoru na współczynniki λ posłużymy się kombinacjami. Niech zbiór X będzie zbiorem współczynników x_i, tzn. $X = \{x_0, x_1, ..., x_n\}$. Dodatkowo niech X_i oznacza zbiór pierwszych i współczynników zbioru X: $X_i = \{x_1, x_2, ..., x_i\}$

Niech C^i_j będzie zbiorem kombinacji o długości j ze zbioru X_i:

$$C^i_j = \binom{X_i}{j}$$

Moc zbioru C^i_j wyraża się przez $|C^i_j| = \binom{i}{j}$. Poniżej przedstawimy kilka kluczowych własności tego zbioru.

Zbiór C^i_j istnieje dla negatywnych wartości - przesłanka mówiąca za tym to fakt, że funkcja $\binom{i}{j} = \frac{\Gamma(i+1)}{\Gamma(j+1)\Gamma(i-y+1)}$ jest zdefiniowana dla ujemnych wartości.

Dodatkowo $\underset{n\in\mathbb{N}}{\forall} \underset{\alpha\in\mathbb{Z}^-}{\forall} C^n_\alpha = \varnothing$ i $|C^n_\alpha| = 0$

Zdefiniowawszy powyższe rzeczy, lambdę możemy otrzymać ze wzoru:

$$\lambda_{(i,j)} = (-1)^{(i+j)} \cdot \left(\sum_{K\in C^j_{j-i}} \prod_{x_k\in K} (x_k) \right)$$

co daje nam wzór ogólny na a_i:

$$a_i = \sum_{j=0}^{i} \left((-1)^{(i+j)} \cdot b_j \left(\sum_{K \in C_{j-i}^{j}} \prod_{x_k \in K} (x_k) \right) \right)$$

Teraz możemy zapisać wzór wielomianu w postaci ogólnej:

$$P(x) = \sum_{i=0}^{n} \left(x^i \sum_{j=0}^{i} \left((-1)^{(i+j)} \cdot b_j \left(\sum_{K \in C_{j-i}^{j}} \prod_{x_k \in K} (x_k) \right) \right) \right)$$

Przykład: Posłużymy się wielomian newtona z przykładu pierwszego:

$$P(x) = 6503 + 78.2 \cdot (x - 2005) - 0.58 \cdot (x - 2005)(x - 2010)$$

Najpierw zapiszemy macierz współczynników lambda dla tego przykładu:

$$\begin{pmatrix} \lambda_{(0,0)} & \lambda_{(0,1)} & \lambda_{(0,2)} \\ 0 & \lambda_{(1,1)} & \lambda_{(1,2)} \\ 0 & 0 & \lambda_{(2,2)} \end{pmatrix}$$

Następnie, posługując się wcześniej zdefiniowanym zbiorem C_j^i, obliczamy:

$$C_0^0 = C_0^1 = C_0^2 = \{\varnothing\}$$

$$C_1^1 = \{\{x_0\}\}$$

$$C_2^2 = \{\{x_0, x_1\}\}$$

$$C_1^2 = \{\{x_0\}, \{x_1\}\}$$

Co pozwala obliczyć nam współczynniki lambda:

$$\lambda_{(0,0)} = \lambda_{(2,2)} = \lambda_{(1,1)} = \sum_{K \in C_0^1} \prod_{x_k \in K} (x_k) = \sum_{K \in \{\varnothing\}} \prod_{x_k \in K} (x_k) = \prod_{x_k \in \varnothing} (x_k) = 1$$

$$\lambda_{(0,1)} = -\sum_{K \in C_1^1} \prod_{x_k \in K} (x_k) = -\sum_{K \in \{\{x_0\}\}} \prod_{x_k \in K} (x_k) = -\prod_{x_k \in \{x_0\}} x_k = -x_0 = -2005$$

$$\lambda_{(0,2)} = \sum_{K \in C_2^2} \prod_{x_k \in K} (x_k) = \sum_{K \in \{\{x_0, x_1\}\}} \prod_{x_k \in K} (x_k) = \prod_{x_k \in \{x_0, x_1\}} x_k = x_0 x_1 = 4030050$$

$$\lambda_{(1,2)} = -\sum_{K\in C_2^3}\prod_{x_k\in K}(x_k) = -\sum_{K\in\{\{x_0\},\{x_1\}\}}\prod_{x_k\in K}(x_k) = -\left(\prod_{x_k\in\{x_0\}} x_k + \prod_{x_k\in\{x_1\}} x_k\right) = -(x_0+x_1) = -4015$$

Zapisujemy równanie liniowe z wyliczonymi współczynnikami λ:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2005 & 4030050 \\ 0 & 1 & -4015 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 6503 \\ 78.2 \\ -0.58 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$$

Z czego otrzymujemy:

$$a_0 = 6503 - 2005\cdot 78.2 - 0.58\cdot 4030050 = -2487717$$

$$a_1 = 78.2 + 4015\cdot 0.58 = 2406.9$$

$$a_2 = -0.58$$

A następnie podstawiając otrzymujemy poprawny wielomian w postaci ogólnej:

$$P(x) = -0.58x^2 + 2406.9x - 2487717$$

2.2 Opis implementacji algorytmu

Implementacja składowych całościowego algorytmu jest prosta z uwagi na matematyczny zapis obliczeń. Każda suma lub iloczyn, jest równaważny pętli w programie.

Pierwszym elementem algorytmu jest wyliczenie współczynników b. Program oblicza je zgodnie z podanym wzorem, a do liczenia każdej sumy lub iloczynu wykorzystuje pętlę.

Po obliczeniu współczynników b, program tworzy *String*, w którym zawiera dane współczynniki, wartości x_i i zwraca *String* zawierający postać Newtona wielomianu konkatenując współczynniki z nazwiasami i wartościami x_i.

Korzystając z powstałego wielomianu program pobiera argument wpisany przez użytkownika i wylicza wartośc wielomianu dla tego argumentu.

Z racji na skomplikowanie algorytmu przekształcania postaci Newtona w postać ogólną, implementacja została pominięta, a metoda zostawiona w dokumencie jako ciekawostka.

2.3 Struktury danych i struktura programu

Program wykorzystuje proste listy, jeden z podstawowych typów danych w języku *Javascript*.

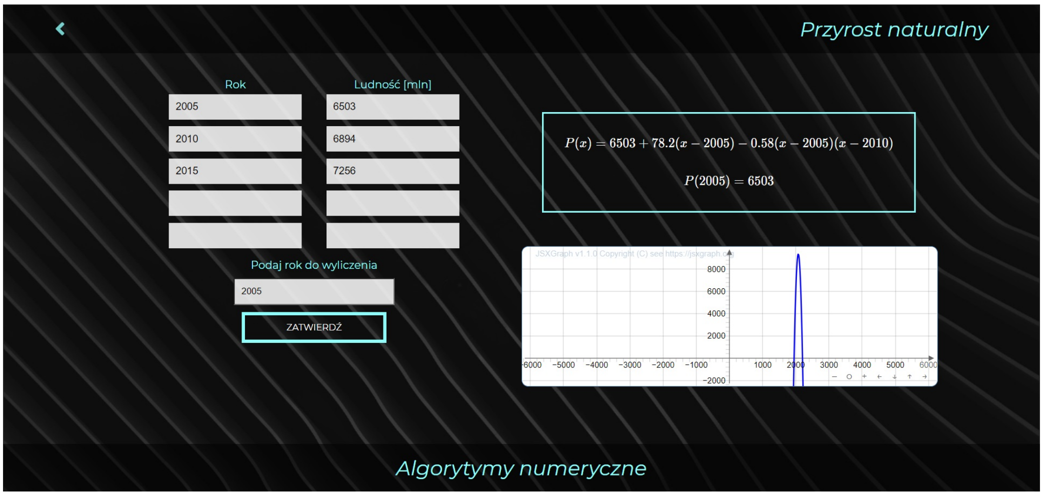
Dodatkowo przeprowadzane są operacje na liczbach - *float* - a także, w celu wyświetlania rezultatów, na danych typu *String*.

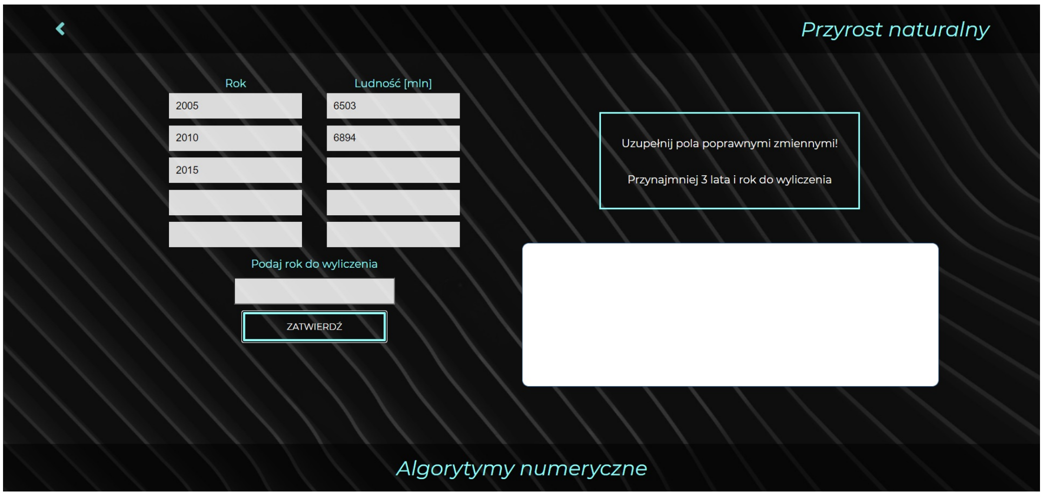
Struktura skryptu obliczeniowego odpowiada warstwie teoretycznej implementacji - tj. kolejnośc wykowywanych zadań w jednym skrypcie jest taka sama jak w sekcji **2.1** oraz **2.2**.

Wykorzystane zostały biblioteki KaTeX - do tworzenia tekstu matematycznego - i JsXGraph do tworzenia wykresów.

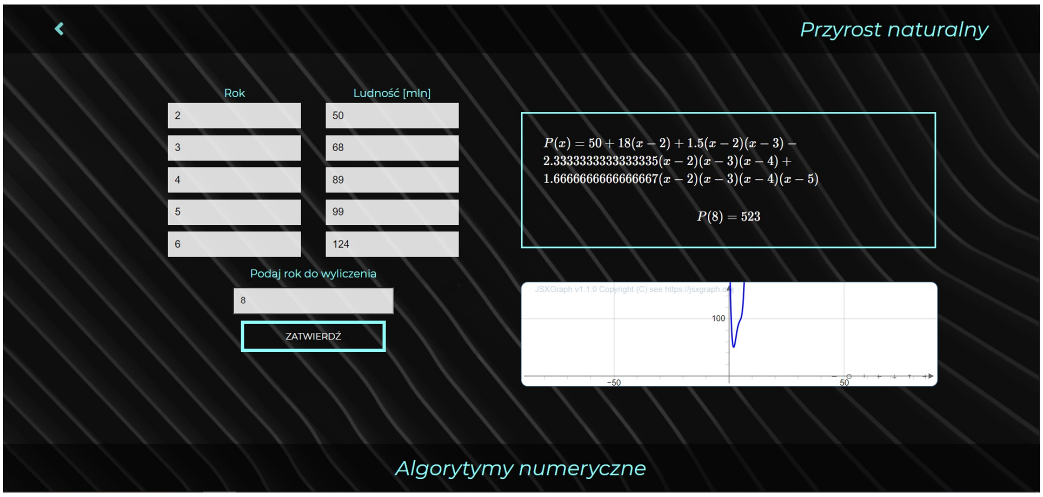
2.4 Program

Poniżej zostały zaprezentowane przykłady działania programu dla różnych przypadków:





Przyrost naturalny
Rok
Ludność [mln]
2005
6503
2010
6894
2015
Uzupełnij pola poprawnymi zmiennymi!
Przynajmniej 3 lata i rok do wyliczenia
Podaj rok do wyliczenia
ZATWIERDŹ
Algorytymy numeryczne



Przyrost naturalny
Rok
Ludność [mln]
2
50
3
68
4
89
5
99
6
124
$P(x) = 50 + 18(x-2) + 1.5(x-2)(x-3) -$
$2.3333333333333335(x-2)(x-3)(x-4) +$
$1.6666666666666667(x-2)(x-3)(x-4)(x-5)$
$P(8) = 523$
Podaj rok do wyliczenia
8
ZATWIERDŹ
JSXGraph v1.1.0 Copyright (C) see https://jsxgraph.org
100
−50
50
Algorytymy numeryczne

Przyrost naturalny
Rok
Ludność [mln]
Uzupełnij pola poprawnymi zmiennymi!
Przynajmniej 3 lata i rok do wyliczenia
Podaj rok do wyliczenia
ZATWIERDŹ
Algorytymy numeryczne

2.5 IO (wejście-wyjście)

Wejściowe dane w programie są podawane w kontenerach typu *input*:

```
<input type="number" (...) class="input-v">
```

I pobierane przez program w skrypcie *JQuery* po naciśnięciu przycisku. Akceptowane są tylko wartości liczbowe, które mimo wszystko przechodzą do programu jako *String* - skrypt zamienia je po ich wprowadzeniu na wartości liczbowe.

Program sprawdza, czy podano poprawne dane, tj. czy liczba podanych lat i wartości zgadza się, czy nie pozostawiono jednego z pól pustego, czy podano wartość do wyliczenia. Jeśli znaleziony zostanie błąd, program wyświetli odpowiedni komunikat w kontenerze.

Dane wyjściowe programu to wartości $String$ zawierające wzór wielomianu - wzór użyty do wyświetlenia wielomianu jest renderowany przez bibliotekę $KaTeX$ na podstawie "brzydkiego", wyliczonego wzoru. Program na podstawie "brzydkiego" wzoru generuje również wykres funkcji przez bibliotekę JsXGraph. Dodatkowo pojawia się wyliczona wartość aproksymacji dla podanego roku.

3 Projekt nr 2

4 Projekt nr 3