Sfera jest rozmaitością

Na mocy homeomorfizmu pomiędzy 1) oraz 3) wiemy że po wyjęciu jednego punktu ze sfery S^n jest ona homeomorficzna z $\mathbb{R}^n$. Wyjmując dwa różne od siebie punkty otrzymamy dwa otwarte zbiory homeomorficzne z $\mathbb{R}^n$, których suma daje S^n.

Sfera jest łukowo spójnoa

Dla dowolnych dwóch różnych nieantypodycznych punktów na sferze możemy obrać odcinek między nimi, homeomorficzny z $[0, 1]$. Możemy później dokonać projekcji tego odcinka na współliniowe z nim i początkiem układu współrzędnych punkty sfery, co jak pokazaliśmy przy homeomorfizmie 1) z 6) jest przekształceniem homeomorficznym.

Dla punktów antypodycznych możemy obrać łuk do pewnego pośredniego punktu, co pokazaliśmy na wykładzie.

3 - 4

Homeomorfizm pomiędzy

3) $X = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$

4) $Y = D^n / \sim = D^n \setminus S^{n-1} \cup \{\delta\}$ - gdzie δ jest klasą abstrakcji S^{n-1}

Łatwo możemy obrać dwa ciągłe, ściśle monotoniczne i wzajemnie odwrotne przekształcenia pomiędzy $[0, 1)$ a $[0, +\infty)$ które zadają homeomorfizm między tymi przedziałami, zadane wzorami:

$$\begin{array}{ll} d_f(x) = \frac{x}{1-x} & d_f : [0, 1) \to [0, +\infty) \\ d_g(x) = \frac{x}{1+x} & d_g : [0, +\infty) \to [0, 1) \end{array}$$

I na ich podstawie tworzymy przekształcenia między A i B.

$$\begin{array}{llll} f(\delta) = \infty & \text{else} & f(x) = x \cdot \frac{d_f(||x||)}{||x||} & f : Y \to X \\ g(\infty) = \delta & \text{else} & g(x) = x \cdot \frac{d_g(||x||)}{||x||} & g : X \to Y \end{array}$$

Które są oczywiście ciągłe odpowiednio dla $Y \setminus \delta$ oraz $X \setminus \infty$, ponieważ obcięte do tych zbiorów są ich homeomorfizmami, ponieważ d_f i d_g są homeorfizmami długości ich wektorów.

$g \circ f = id_Y$ oraz $f \circ g = id_X$

Ponieważ superpozyca d_f oraz d_g są identycznościami, a f i g zmieniają jedynie za ich pomocą długości wektorów, to ich superpozycje też są identycznościami.

f jest ciągłe

Niech $U \subset X$ będzie otwarty. Pokażmy że $f^{-1}(U)$ też jest otwarty. Mamy dwie możliwości:

- $\infty \in U$ - Wtedy $\mathbb{R}^n \setminus U$ jest zwarty. Ponieważ jest on podzbiorem $\mathbb{R}^n$ to wiemy że jest on domknięty i ograniczony. Stąd na mocy ciągłości i monotoniczności $d_f(x)$ wiemy że $f^{-1}(\mathbb{R}^n \setminus U)$ też jest ograniczonym zbiorem, a ponieważ g jest domknięty
- $\infty \notin U$ - Już udowodnione.

g jest ciągłe

Niech $U \subset Y$ będzie otwarty. Pokażmy że $g^{-1}(U)$ też jest otwarty. Mamy dwie możliwości:

- $\delta \in U$ - Wtedy $\mathbb{R}^n \setminus U$ jest domknięty, a ponieważ
- $\infty \notin U$ - Już udowodnione.

1 - 6

Homeomorfizm pomiędzy

1) S^n
6) $A = (D^p \times S^q) \cup (S^{p-1} \times D^{q+1})$.

Ustalmy dla $z \in \mathbb{R}^{n+1}$ notację: $z = (x(z), y(z)) = (x_1, ..., x_p, y_1, ..., y_{q+1})$ gdzie jak łatwo zauważyć $x \in \mathbb{R}^p$ oraz $y \in \mathbb{R}^{q+1}$.

Zauważmy, że dla $z \in A$ zachodzi:

$$\begin{aligned}
z \in A &\implies z \in (D^p \times S^q) \vee z \in (S^{p-1} \times D^{q+1}) \\
z \in (D^p \times S^q) &\implies \sum x_i^2 \leqslant 1 \wedge \sum y_i^2 = 1 \\
z \in (S^{p-1} \times D^{q+1}) &\implies \sum x_i^2 = 1 \wedge \sum y_i^2 \leqslant 1 \\
z \in A &\implies 1 \leqslant ||z|| \leqslant \sqrt{2}
\end{aligned}$$

Obierzmy teraz przekształcenie $f : A \to S^n$ dane wzorem:

$$f((x_1, ..., x_p, y_1, ..., y_{q+1}) = z) = z \cdot \frac{1}{\sqrt{||x(z)||^2 + ||y(z)||^2}}$$

Ponieważ $||z|| = \sqrt{||x(z)||^2 + ||y(z)||^2}$

Łatwo znaleźć dla niego przekształcenie odwrotne $g : S^n \to A$ dane wzorem:

$$g((x(z), y(z)) = z) = z \cdot \frac{1}{\max(||x(z)||, ||y(z)||)}$$

Przekształcenia f oraz g są wzajemnie odwrotne i przekształcają punkty z jednego zbioru na współiniowe z nimi i początkiem układu współrzędnych punkty drugiego zbioru. Ciągłość tych przekształceń wynika z ciągłości przekształceń modyfikujących długość wektora.