Heheheh

1 3 - 4

Homeomorfizm pomiędzy $A = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ a $B = D^n / \ = D^n$
$S^{n-1} \cup \{\delta\}$. Gdzie δ jest klasą abstrakcji S^{n-1}.

Łatwo możemy obrać dwa ciągłe przekształcenia pomiędzy $[0,1)$ a $[0,+\infty)$ dane wzorami:

$$\begin{array}{ll} f(x) = \frac{x}{1-x} & f : [0,1) \to [0,+\infty) \\ g(x) = \frac{x}{1+x} & g : [0,+\infty) \to [0,1) \end{array}$$

2 1 - 6

Homeomorfizm pomiędzy S^n a $A = (D^p \times S^q) \cup (S^{p-1} \times D^{q+1})$.

Ustalmy dla $z \in \mathbb{R}^{n+1}$ notację: $z = (x(z), y(z)) = (x_1, ..., x_p, y_1, ..., y_{q+1})$ gdzie jak łatwo zauważyć $x \in \mathbb{R}^p$ oraz $y\mathbb{R}^{q+1}$.

Zauważmy, że dla $z \in A$ zachodzi:

$$\begin{aligned} z \in A &\implies z \in (D^p \times S^q) \vee z \in (S^{p-1} \times D^{q+1}) \\ z \in (D^p \times S^q) &\implies \sum x_i^2 \leqslant 1 \wedge \sum y_i^2 = 1 \\ z \in (S^{p-1} \times D^{q+1}) &\implies \sum x_i^2 = 1 \wedge \sum y_i^2 \leqslant 1 \\ z \in A &\implies 1 \leqslant ||z|| \leqslant \sqrt{2} \end{aligned}$$

Obierzmy teraz przekształcenie $f : A \to S^n$ dane wzorem:

$$f((x_1, ..., x_p, y_1, ..., y_{q+1}) = z) = z \cdot \frac{1}{\sqrt{||x(z)||^2 + ||y(z)||^2}}$$

Ponieważ $||z|| = \sqrt{||x(z)||^2 + ||y(z)||^2}$

Łatwo znaleźć dla niego przekształcenie odwrotne $g : S^n \to A$ dane wzorem:

$$f((x_1, ..., x_p, y_1, ..., y_{q+1}) = z) = z \cdot \frac{1}{\max(||\mathrm{x(z)}||, ||\mathrm{y(z)}||)}$$

Ponieważ przekształcenia f oraz g modyfikują jedynie długość wektora z, do udowodnienia ich odwrotności wystarczy udowodnić że ich superpozycje zachowują długości.

2.1 $f \cdot g = id_{S^n}$