

Sfera jest rozmaitością

Na mocy homeomorfizmu pomiędzy 1) oraz 3) wiemy że po wyjęciu jednego punktu ze sfery S^n jest ona homeomorficzna z \mathbb{R}^n . Wyjmując dwa różne od siebie punkty otrzymamy dwa otwarte zbiory homeomorficzne z \mathbb{R}^n , których suma daje S^n .

3 - 4

Homeomorfizm pomiędzy

- $X = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$
- $Y = D^n / \sim = D^n \setminus S^{n-1} \cup \{\delta\}$ - gdzie δ jest klasą abstrakcji S^{n-1}

Łatwo możemy obrać dwa ciągle, ściśle monotoniczne i wzajemnie odwrotne przekształcenia pomiędzy $[0, 1)$ a $[0, +\infty)$ które zadają homeomorfizm między tymi przedziałami, zadane wzorami:

$$\begin{aligned} d_f(x) &= \frac{x}{1-x} & d_f : [0, 1) &\rightarrow [0, +\infty) \\ d_g(x) &= \frac{x}{1+x} & d_g : [0, +\infty) &\rightarrow [0, 1) \end{aligned}$$

I na ich podstawie tworzymy przekształcenia między A i B .

$$\begin{aligned} f(\delta) &= \infty & \text{else} & & f(x) &= x \cdot \frac{d_f(\|x\|)}{\|x\|} & f : Y &\rightarrow X \\ g(\infty) &= \delta & \text{else} & & g(x) &= x \cdot \frac{d_g(\|x\|)}{\|x\|} & g : X &\rightarrow Y \end{aligned}$$

Które są oczywiście ciągle odpowiednio dla $Y \setminus \delta$ oraz $X \setminus \infty$, ponieważ obcięte do tych zbiorów są ich homeomorfizmami, ponieważ d_f i d_g są homeomorfizmami długości ich wektorów.

$$g \circ f = id_Y \text{ oraz } f \circ g = id_X$$

Ponieważ superpozycja d_f oraz d_g są identycznościami, a f i g zmieniają jedynie za ich pomocą długości wektorów, to ich superpozycje też są identycznościami.

f jest ciągle

Niech $U \subset X$ będzie otwarty. Pokażmy że $f^{-1}(U)$ też jest otwarty. Mamy dwie możliwości:

- $\infty \in U$ - Wtedy $\mathbb{R}^n \setminus U$ jest zwarty. Ponieważ jest on podzbiorem \mathbb{R}^n to wiemy że jest on domknięty i ograniczony. Stąd na mocy ciągłości i monotoniczności $d_f(x)$ wiemy że $f^{-1}(\mathbb{R}^n \setminus U)$ też jest ograniczonym zbiorem, a ponieważ g jest domknięty
- $\infty \notin U$ - Już udowodnione.

g jest ciągłe

Niech $U \subset Y$ będzie otwarty. Pokażmy że $g^{-1}(U)$ też jest otwarty. Mamy dwie możliwości:

- $\delta \in U$ - Wtedy $\mathbb{R}^n \setminus U$ jest domknięty, a ponieważ
- $\infty \notin U$ - Już udowodnione.

1 - 6

Homeomorfizm pomiędzy S^n a $A = (D^p \times S^q) \cup (S^{p-1} \times D^{q+1})$.

Ustalmy dla $z \in \mathbb{R}^{n+1}$ notację: $z = (x(z), y(z)) = (x_1, \dots, x_p, y_1, \dots, y_{q+1})$ gdzie jak łatwo zauważyć $x \in \mathbb{R}^p$ oraz $y \in \mathbb{R}^{q+1}$.

Zauważmy, że dla $z \in A$ zachodzi:

$$\begin{aligned} z \in A &\implies z \in (D^p \times S^q) \vee z \in (S^{p-1} \times D^{q+1}) \\ z \in (D^p \times S^q) &\implies \sum x_i^2 \leq 1 \wedge \sum y_i^2 = 1 \\ z \in (S^{p-1} \times D^{q+1}) &\implies \sum x_i^2 = 1 \wedge \sum y_i^2 \leq 1 \\ z \in A &\implies 1 \leq \|z\| \leq \sqrt{2} \end{aligned}$$

Obierzmy teraz przekształcenie $f : A \rightarrow S^n$ dane wzorem:

$$f((x_1, \dots, x_p, y_1, \dots, y_{q+1}) = z) = z \cdot \frac{1}{\sqrt{\|x(z)\|^2 + \|y(z)\|^2}}$$

Ponieważ $\|z\| = \sqrt{\|x(z)\|^2 + \|y(z)\|^2}$

Łatwo znaleźć dla niego przekształcenie odwrotne $g : S^n \rightarrow A$ dane wzorem:

$$f((x_1, \dots, x_p, y_1, \dots, y_{q+1}) = z) = z \cdot \frac{1}{\max(\|x(z)\|, \|y(z)\|)}$$

Ponieważ przekształcenia f oraz g modyfikują jedynie długość wektora z , do udowodnienia ich odwrotności wystarczy udowodnić że ich superpozycje zachowują długości.

$$0.1 \quad f \cdot g = id_{S^n}$$

Łukowa spójność

Dla dowolnych dwóch różnych nieantypodycznych punktów na sferze możemy obrać odcinek między nimi, homeomorficzny z $[0, 1]$. Możemy później dokonać projekcji tego odcinka na współliniowe z nim i początkiem układu współrzędnych punkty sfery, co jak pokazaliśmy przy homeomorfizmie 1) z 6) jest przekształceniem homeomorficznym.

Dla punktów antypodycznych możemy obrać łuk do pewnego pośredniego punktu, co pokazaliśmy na wykładzie.