

# Topologia I\*

## Seria I.

### Przestrzenie homeomorficzne ze sferą

Jacek Karwowski, Szymon Pajzert

**Uwaga wstępna:** Jeśli nie jest inaczej uściślone, wszelkie referencje odnoszą się do *Pomocnika studenta* [1]

#### Problem

Udowodnij, że dla  $n > 0$  następujące przestrzenie są homeomorficzne:

- 1) Sfera  $S^n$
- 2)  $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} / \sim$  gdzie  $\mathbf{v} \sim \mathbf{w} \iff \exists \lambda > 0 \mathbf{v} = \lambda \mathbf{w}$
- 3)  $(\mathbb{R}^n)^+$  - sfera Riemanna
- 4)  $D^n / \sim$  gdzie  $x \sim y \iff x = y$  lub  $x, y \in S^{n-1}$
- 5)  $S^p \times S^q$  z utożsamionym do punktu zbiorem  $\alpha \times S^q \cup S^p \times \beta$ , dla  $p + q = n$  gdzie  $\alpha$  oraz  $\beta$  są odpowiednio pewnymi wektorami z  $S^p$  oraz  $S^q$ .
- 6)  $(D^p \times S^q) \cup (S^{p-1} \times D^{q+1})$  gdzie  $p + q = n$

Udowodnij że sfera jest łukowo spójna oraz jest 2-rozmaitością.

#### Sfera jest rozmaitością

Na mocy homeomorfizmu pomiędzy 1) oraz 3) wiemy że po wyjęciu jednego punktu ze sfery  $S^n$  jest ona homeomorficzna z  $\mathbb{R}^n$ . Wyjmując dwa różne od siebie punkty otrzymamy dwa otwarte zbiory homeomorficzne z  $\mathbb{R}^n$ , których suma daje  $S^n$ .

## Sfera jest łukowo spójna

Dla dowolnych dwóch różnych nieantypodycznych punktów na sferze możemy obrać odcinek między nimi, homeomorficzny z  $[0, 1]$ . Możemy później dokonać projekcji tego odcinka na współliniowe z nim i początkiem układu współrzędnych punkty sfery, co jak pokazaliśmy przy homeomorfizmie 1) z 6) jest przekształceniem homeomorficznym.

Dla punktów antypodycznych możemy obrać łuk do pewnego pośredniego punktu, co pokazaliśmy na wykładzie.

## 1 - 2

Homeomorfizm pomiędzy

1) Sferą  $S^n$

2)  $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} / \sim$  gdzie  $\mathbf{v} \sim \mathbf{w} \iff \exists \lambda > 0 \mathbf{v} = \lambda \mathbf{w}$

- **(zwartość dziedziny)** Sfera  $S^n$  jest zbiorem zwartym: jest domkniętą i ograniczoną podprzestrzenią przestrzeni euklidesowej.

- **(ciągłość  $g$ )** Weźmy przekształcenia

$$f : S^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$$

$$p : \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} / \sim$$

Przekształcenie  $f$  jest włożeniem homeomorficznym, przekształcenie jest przekształceniem ilorazowym.

Weźmy

$$g : S^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} / \sim$$

Jest ono ciągle, ponieważ jest złożeniem  $f$  i  $p$  - przekształcenia ilorazowego z przekształceniem ciągłym

Weźmy dwa różne elementy  $a, b \in X$  i wprowadźmy nowy układ współrzędnych - niech pierwsza będzie promieniem sfery o środku w 0, na której leży punkt, a pozostałe  $n$  będzie współrzędnymi biegunowymi punktu na tej sferze. Wtedy ich współrzędne to:

$$a = (a_1, \dots, a_n, r_a)$$

$$b = (b_1, \dots, b_n, r_b)$$

gdzie  $r_x$  wyznacza promień sfery, na której leży punkt  $x$ ,  $(ax_1, \dots, ax_n)$  to współrzędne biegunowe punktu na tej sferze.

Przekształcenie  $p$  jest utożsamianiem punktów o tej samej ostatniej współrzędnej.

- **(bijektywność  $g$ )** Reprezentantami warstw w  $X$  mogą być więc wektory należące do sfery jednostkowej  $S^n$  - to pokazuje, że  $g$  jest bijekcją (każdej warstwie odpowiada jeden wektor na sferze jednostkowej).
- **(hausdorffowość przeciwdziedziny)** Sfera  $S^n$  jest Hausdorffa, można dla dwóch wektorów do niej należących można wybrać rozłączne otoczenia otwarte  $U_a$  i  $U_b$ . Zbiory

$$V_a = p[U_a]$$

$$V_b = p[V_b]$$

są rozłączne w  $X$ . Załóżmy że nie. Wtedy istnieją  $\alpha \in U_a, \beta \in U_b$  takie, że  $p(\alpha) = p(\beta)$ , czyli  $\alpha * t = \beta$  dla jakiegoś  $t > 0$ , ale oba należą do sfery jednostkowej, więc sprzeczność.

Pozostaje jedynie sprawdzić, że  $V_a$  i  $V_b$  są otwarte w  $X$ .

Weźmy  $W = p^{-1}[V_a]$  oraz  $x = (x_1, \dots, x_n, 1) \in W$ . Zrzutujmy  $W$  na sferę o promieniu 1 i weźmy otwartą kulę wokół punktu  $x$  na tej sferze zawierającą się w rzucie  $W$  o promieniu  $r_x$  - można to zrobić, bo ten rzut jest otwarty.

Weźmy teraz kulę o promieniu  $\min(1, r_x)$  - jest ona zawarta w zbiorze  $W$ , bo punkty do niej należące po zrzutowaniu na sferę  $S^n$  zawierają się w rzucie  $W$ . Wobec tego  $W$  jest otwarty i przestrzeń  $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} / \sim$  jest przestrzenią Hausdorffa.

Wiemy zatem, że  $g$  jest ciągłą bijekcją z przestrzeni zwartej w przestrzeni Hausdorffa, więc jest homeomorfizmem.

## 1-3

Homeomorfizm pomiędzy

- 1) Sferą  $S^n$
- 3)  $(\mathbb{R}^n)^+$  - sfera Riemanna

- **Sfera  $S^n$  bez punktu jest homeomorficzna z  $\mathbb{R}^n$**

Zanurzamy wszystko w  $\mathbb{R}^{n+1}$ , bierzemy sferę o środku w  $(0, \dots, 0, 1)$  promieniu 1 oraz hiperpłaszczyznę  $n$ -wymiarową taką, że ostatnia współrzędna jest równa 0, tzn zbiór  $\{(a_1, \dots, a_n, 0) : a_i \in \mathbb{R}\}$ . Weźmy teraz rzut stereograficzny  $h : S^n \setminus \{(0, \dots, 0, 1)\} \rightarrow \mathbb{R}^n$  takie, że  $h(x) = y \iff x, y, (0, \dots, 0, 2)$  są współliniowe, czyli zapisując wzorem

$$h((x_1, \dots, x_n)) = \left( \frac{x_1}{2 - x_n}, \frac{x_2}{2 - x_n}, \dots, \frac{x_{n-1}}{2 - x_n}, 0 \right)$$

Funkcja ta jest ciągła, bo jest ciągła na każdej współrzędnej, z arytmetycznych własności funkcji ciągłych. Jest różnowartościowa, bo prosta albo jest cała zawarta w hiperpłaszczyźnie (niemożliwe, bo przecina punkt nienależący do niej), albo przecina ją w jednym punkcie, albo jest z nią rozłączna (nie jest, bo przecina punkty o różnych współrzędnych  $x_{n+1}$ ). Można więc mówić o funkcji odwrotnej na obrazie  $h[S^n]$  - jest ona dana wzorem

$$h^{-1}((p_1, \dots, p_n, 0)) = (p_1 * (2 - S), p_2 * (2 - S), \dots, p_{n-1} * (2 - S), S)$$

$$S = \frac{2 * (p_1^2 + \dots + p_n^2)}{1 + p_1^2 + \dots + p_n^2}$$

$h^{-1}$  jest różnowartościowa - widać to ze wzoru, więc  $h$  jest bijekcją. Z drugiej strony,  $h^{-1}$  jest ciągła (każda z funkcji współrzędnych jest ciągła), więc  $h$  jest homeomorfizmem.

- **Sfera  $S^n$  jest zwarta**

Jest domkniętą i ograniczoną podprzestrzenią przestrzeni euklidesowej, więc jest zwarta.

- **Dołożenie punktu jest uzwarceniem sfery bez punktu**

Sfera  $S^n \setminus (0, 0, \dots, 1)$  jest zbiorem gęstym w  $S^n$  oraz jest zanurzone w niej homeomorficznie. W takim razie  $S^n$  jest uzwarceniem  $S^n \setminus (0, 0, \dots, 1)$ .

- **Przestrzeń  $(\mathbb{R}^n)^+$  jest uzwarceniem przestrzeni  $\mathbb{R}^n$**

Przestrzeń  $(\mathbb{R}^n)^+$  jest zwarta: załóżmy, że mamy pokrycie zbiorami  $U_{i \in I}$ . Wybierzmy spośród nich taki, który zawiera punkt w nieskończoności. Wtedy pozostałe z nich są pokryciem zwartej podprzestrzeni

$\mathbb{R}^n$  (z definicji  $(\mathbb{R}^n)^+$ ), więc można z nich wybrać podpokrycie skończone. Dodatkowo  $\mathbb{R}^n$  jest gęsta w  $(\mathbb{R}^n)^+$ , bo jeśli dopełnienie każdego zbioru otwartego zawierającego punkt w nieskończoności jest zwarte, to w szczególności nie jest całą przestrzenią  $\mathbb{R}^n$ , więc każdy taki zbiór ma z nią niepuste przecięcie.  $\mathbb{R}^n$  jest zanurzony homeomorficznie w  $(\mathbb{R}^n)^+$ , bo topologia w  $(\mathbb{R}^n)^+$  zawiera topologię  $\mathbb{R}^n$ . W takim razie  $(\mathbb{R}^n)^+$  jest jednopunktowym uzwarceniem  $\mathbb{R}^n$ .

$S^n \setminus \{(0, \dots, 0, 1)\}$  jest więc homeo z  $\mathbb{R}^n$ , więc z twierdzenia ich jednopunktowe uzwarcenia są homeomorficzne.

### 3 - 4

Homeomorfizm pomiędzy

3)  $(\mathbb{R}^n)^+$  - sferą Riemanna

4)  $D^n / \sim$  gdzie  $x \sim y \iff x = y$  lub  $x, y \in S^{n-1}$

Łatwo możemy obrać dwa ciągle, ściśle monotoniczne i wzajemnie odwrotne przekształcenia pomiędzy  $[0, 1)$  a  $[0, +\infty)$  które zadają homeomorfizm między tymi przedziałami, zadane wzorami:

$$\begin{aligned} d_f(x) &= \frac{x}{1-x} & d_f : [0, 1) &\rightarrow [0, +\infty) \\ d_g(x) &= \frac{x}{1+x} & d_g : [0, +\infty) &\rightarrow [0, 1) \end{aligned}$$

I na ich podstawie tworzymy przekształcenia między  $A$  i  $B$ .

$$\begin{aligned} f(\delta) &= \infty & \text{else} & & f(x) &= x \cdot \frac{d_f(\|x\|)}{\|x\|} & f : Y &\rightarrow X \\ g(\infty) &= \delta & \text{else} & & g(x) &= x \cdot \frac{d_g(\|x\|)}{\|x\|} & g : X &\rightarrow Y \end{aligned}$$

Które są ciągle obcięte odpowiednio do  $Y \setminus \delta = \text{int} D^n$  oraz  $X \setminus \infty = \mathbb{R}^n$ , ponieważ są ich homeomorfizmami - rozciąganie wnętrza kuli do przestrzeni działa tak samo jak udowodnione na wykładzie rozciąganie odcinka otwartego do prostej.

$$g \circ f = id_Y \text{ oraz } f \circ g = id_X$$

Ponieważ superpozycja  $d_f$  oraz  $d_g$  są identycznościami, a  $f$  i  $g$  zmieniają jedynie za ich pomocą długości wektorów, to ich superpozycje też są identycznościami.

#### **$f$ jest ciągle**

Niech  $U \subset X$  będzie otwarty. Pokażmy że  $f^{-1}(U)$  też jest otwarty. Mamy dwie możliwości:

- $\infty \in U$  - Wtedy  $\mathbb{R}^n \setminus U$  jest zwarty. Ponieważ jest on podzbiorem  $\mathbb{R}^n$  to wiemy że jest on domknięty i ograniczony. Stąd na mocy ciągłości i monotoniczności  $d_f(x)$  wiemy że  $f^{-1}(\mathbb{R}^n \setminus U)$  też jest ograniczonym zbiorem przez promień z przedziału  $[0, 1)$  więc nie należy do niego  $\delta$ . Otwartość  $f^{-1}(\mathbb{R}^n \setminus U)$  otrzymujemy z ciągłości  $d_f$ .
- $\infty \notin U$  - Już udowodnione.

**$g$  jest ciągłe**

Niech  $U \subset Y$  będzie otwarty. Pokażmy że  $g^{-1}(U)$  też jest otwarty. Mamy dwie możliwości:

- $\delta \in U$  - Wtedy  $\mathbb{R}^n \setminus U$  jest domknięty, jest też więc ograniczony, ponieważ supremum metryk wektorów z  $\mathbb{R}^n \setminus U$  jest ostro mniejsze od 1, w przeciwnym wypadku do tego zbioru należałaby  $\delta$ . Stąd  $g^{-1}(\mathbb{R}^n \setminus U)$  jest domknięte (ponieważ  $d_g$  jest ciągłe) oraz ograniczone czyli zwarte, więc  $U$  jest otwarte.
- $\infty \notin U$  - Już udowodnione.



## 1-5

Homeomorfizm pomiędzy

1) Sferą  $S^n$

5)  $S^p \times S^q$  z utożsamionym do punktu zbiorem  $\alpha \times S^q \cup S^p \times \beta$ , dla  $p + q = n$  gdzie  $\alpha$  oraz  $\beta$  są odpowiednio pewnymi wektorami z  $S^p$  oraz  $S^q$ .

Z samego rachunku na zbiorach i z zadania 1-3 (sfera  $S^n$  bez punktu homeomorficzna z  $R^n$ ) otrzymujemy

$$\begin{aligned} S^p \times S^q / \sim &= (S^p \times (R^q \cup \{1\})) / \sim \\ &= (S^p \times R^q \cup S^p \times \{1\}) / \sim \\ &= ((R^p \cup \{1\}) \times R^q \cup S^p \times \{1\}) / \sim \\ &= (R^p \cup R^q \cup \{1\} \times R^q \cup S^p \times \{1\}) / \sim \end{aligned}$$

ale

$$\{1\} \times R^q \subset \{1\} \times S^q$$

więc

$$(R^p \cup R^q \cup \{1\} \times R^q \cup S^p \times \{1\}) / \sim = R^p \times R^q \cup \{c\} = R^n \cup \{c\}$$

Po usunięciu  $\{c\}$  (punktu, do którego utożsamiliśmy  $S^p \times \{1\} \cup \{1\} \times S^q$ ) dostajemy homeomorfizm między  $S^p \times S^q / \sim \setminus \{c\}$  a  $R^n$ . Ale po dodaniu tego punktu  $S^p \times S^q / \sim$  jest zwarte, więc homeomorficzne z jednopunktowym uzwarceniem  $R^n$  - a to, z punktu 1.3 jest homeomorficzne z  $S^n$ .

## 1 - 6

Homeomorfizm pomiędzy

1) Sferą  $S^n$

6)  $A = (D^p \times S^q) \cup (S^{p-1} \times D^{q+1})$  gdzie  $p + q = n$

Zauważmy, że dla  $z \in A$  zachodzi:

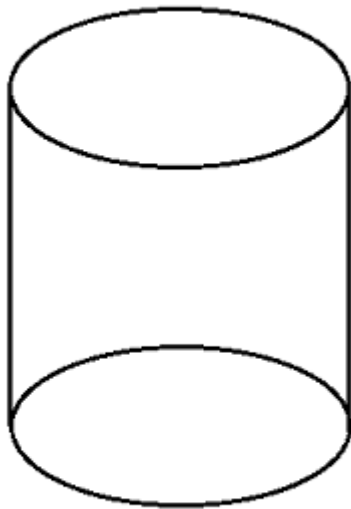
$$\begin{aligned} z \in A &\implies z \in (D^p \times S^q) \vee z \in (S^{p-1} \times D^{q+1}) \\ z \in (D^p \times S^q) &\implies \sum x_i^2 \leq 1 \wedge \sum y_i^2 = 1 \\ z \in (S^{p-1} \times D^{q+1}) &\implies \sum x_i^2 = 1 \wedge \sum y_i^2 \leq 1 \\ z \in A &\implies 1 \leq \|z\| \leq \sqrt{2} \end{aligned}$$

oraz

$$z \in (D^p \times S^q) \wedge z \in (S^{p-1} \times D^{q+1}) \implies z \in (S^{p-1} \times S^q)$$

Stąd widzimy że zbiór  $A$  jest sumą dwóch rozmaitości, przecinających się w  $S^{p-1} \times S^q$ . Jest także prawdą, że zbiór punktów  $A$  jest izomorficzny ze zbiorem półprostych o środku w początku układu współrzędnych. Stąd istnieje projekcja punktów ze zbioru  $A$  na sferę  $S^n$  przeprowadzająca punkty na przecięcia odpowiadających im półprostych ze sferą. Przekształcenie to jest bijekcją i na podobnie jak w dowodzie homeomorfizmu pomiędzy sferą a sześciannem [2] jest homeomorfizmem.

Przykładowo, dla  $(p, q) = (1, 1)$  mamy:



**Literatura**

- [1] prof. dr hab. Stefan Jackowski, *TOPOLOGIA I\**, *Pomocnik studenta*,  
Notatki do wykładu na Wydziale MIM UW, 30 listopada 2016
- [2] Amidora Idris, *Homeomorphism between Sphere and Cube*, Tahir Ahmad, Normah Maan, Article for Journal of Fundamental Sciences, October 2008