Heheheh

1 3 - 4

Homeomorfizm pomiędzy

- $X = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$
- $Y = D^n/\sim = D^n \setminus S^{n-1} \cup \{\delta\}$ - gdzie δ jest klasą abstrakcji S^{n-1}

Łatwo możemy obrać dwa ciągłe, ściśle monotoniczne i wzajemnie odwrotne przekształcenia pomiędzy $[0,1)$ a $[0,+\infty)$ które zadają homeomorfizm między tymi przedziałami, zadane wzorami:

$$d_f(x) = \frac{x}{1-x} \qquad d_f : [0,1) \to [0,+\infty)$$
$$d_g(x) = \frac{x}{1+x} \qquad d_g : [0,+\infty) \to [0,1)$$

I na ich podstawie tworzymy przekształcenia między A i B.

$$f(\delta) = \infty \qquad \text{else} \qquad f(x) = x \cdot \frac{d_f(||x||)}{||x||} \qquad f : Y \to X$$
$$g(\infty) = \delta \qquad \text{else} \qquad g(x) = x \cdot \frac{d_g(||x||)}{||x||} \qquad g : X \to Y$$

Które są oczywiście ciągłe odpowiednio dla $Y \setminus \delta$ oraz $X \setminus \infty$, ponieważ obcięte do tych zbiorów są ich homeomorfizmami, ponieważ d_f i d_g są homeorfizmami długości ich wektorów.

$g \circ f = id_Y$ oraz $f \circ g = id_X$

Ponieważ superpozyca d_f oraz d_g są identycznościami, a f i g zmieniają jedynie za ich pomocą długości wektorów, to ich superpozycje też są identycznościami.

f jest ciągłe

Niech $U \subset X$ będzie otwarty. Pokażmy że $f^{-1}(U)$ też jest otwarty. Mamy dwie możliwości:

- $\infty \in U$ - Wtedy $\mathbb{R}^n \setminus U$ jest zwarty. Ponieważ jest on podzbiorem $\mathbb{R}^n$ to wiemy że jest on domknięty i ograniczony. Stąd na mocy ciągłości i monotoniczności $d_f(x)$ wiemy że $f^{-1}(\mathbb{R}^n \setminus U)$ też jest ograniczonym zbiorem, a ponieważ g jest domknięty
- $\infty \notin U$ - Już udowodnione.

g jest ciągłe

Niech $U \subset Y$ będzie otwarty. Pokażmy że $g^{-1}(U)$ też jest otwarty. Mamy dwie możliwości:

- $\delta \in U$ - Wtedy $\mathbb{R}^n \setminus U$ jest domknięty, a ponieważ
- $\infty \notin U$ - Już udowodnione.

2 1 - 6

Homeomorfizm pomiędzy S^n a $A = (D^p \times S^q) \cup (S^{p-1} \times D^{q+1})$.

Ustalmy dla $z \in \mathbb{R}^{n+1}$ notację: $z = (x(z), y(z)) = (x_1, ..., x_p, y_1, ..., y_{q+1})$ gdzie jak łatwo zauważyć $x \in \mathbb{R}^p$ oraz $y\mathbb{R}^{q+1}$.

Zauważmy, że dla $z \in A$ zachodzi:

$$\begin{aligned} z \in A &\implies z \in (D^p \times S^q) \vee z \in (S^{p-1} \times D^{q+1}) \\ z \in (D^p \times S^q) &\implies \sum x_i^2 \leqslant 1 \wedge \sum y_i^2 = 1 \\ z \in (S^{p-1} \times D^{q+1}) &\implies \sum x_i^2 = 1 \wedge \sum y_i^2 \leqslant 1 \\ z \in A &\implies 1 \leqslant ||z|| \leqslant \sqrt{2} \end{aligned}$$

Obierzmy teraz przekształcenie $f : A \to S^n$ dane wzorem:

$$f((x_1, ..., x_p, y_1, ..., y_{q+1}) = z) = z \cdot \frac{1}{\sqrt{||x(z)||^2 + ||y(z)||^2}}$$

Ponieważ $||z|| = \sqrt{||x(z)||^2 + ||y(z)||^2}$

Łatwo znaleźć dla niego przekształcenie odwrotne $g : S^n \to A$ dane wzorem:

$$f((x_1, ..., x_p, y_1, ..., y_{q+1}) = z) = z \cdot \frac{1}{\max(||\mathrm{x(z)}||, ||\mathrm{y(z)}||)}$$

Ponieważ przekształcenia f oraz g modyfikują jedynie długość wektora z, do udowodnienia ich odwrotności wystarczy udowodnić że ich superpozycje zachowują długości.

2.1 $f \cdot g = id_{S^n}$