Topologia I*
Seria I.
Przestrzenie homeomorficzne ze sferą

Jacek Karwowski, Szymon Pajzert

Udowodnij, że dla $n > 0$ następujące przestrzenie są homeomorficzne:

1) Sfera S^n

2) $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}/\sim$ gdzie $\mathbf{v} \sim \mathbf{w} \iff \exists_{\lambda>0} \mathbf{v} = \lambda \mathbf{w}$

3) $(\mathbb{R}^n)^+$ - sfera Riemanna

4) $D^n/\sim$ gdzie $x \sim y \iff x = y$ lub $x, y \in S^{n-1}$

5) $S^p \times S^q$ z utożsamionym do punktu zbiorem $\alpha \times S^q \cup S^p \times \beta$, dla $p + q = n$ gdzie α oraz β są odpowiednio pewnymi wektorami z S^p oraz S^q.

6) $(D^p \times S^q) \cup (S^{p-1} \times D^{q+1})$ gdzie $p + q = n$

Udowodnij że sfera jest łukowo spójna oraz jest 2-rozmaitością.

Sfera jest rozmaitością

Na mocy homeomorfizmu pomiędzy 1) oraz 3) wiemy że po wyjęciu jednego punktu ze sfery S^n jest ona homeomorficzna z $\mathbb{R}^n$. Wyjmując dwa różne od siebie punkty otrzymamy dwa otwarte zbiory homeomorficzne z $\mathbb{R}^n$, których suma daje S^n.

Sfera jest łukowo spójnoa

Dla dowolnych dwóch różnych nieantypodycznych punktów na sferze możemy obrać odcinek między nimi, homeomorficzny z $[0, 1]$. Możemy później dokonać projekcji tego odcinka na współliniowe z nim i początkiem układu współrzędnych punkty sfery, co jak pokazaliśmy przy homeomorfizmie 1) z 6) jest przekształceniem homeomorficznym.

Dla punktów antypodycznych możemy obrać łuk do pewnego pośredniego punktu, co pokazaliśmy na wykładzie.

1 - 2

Homeomorfizm pomiędzy

1) Sferą S^n

2) $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}/\sim$ gdzie $\mathbf{v} \sim \mathbf{w} \iff \exists_{\lambda>0}\mathbf{v} = \lambda\mathbf{w}$

- **(zwartość dziedziny)** Sfera S^n jest zbiorem zwartym: jest domkniętą i ograniczoną podprzestrzenią przestrzeni euklidesowej.

- **(ciągłość g)** Weźmy przekształcenia

$$f : S^n \to \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$$

$$p : \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}/\sim$$

Przekształcenie f jest włożeniem homeomorficznym, przekształcenie jest przekształceniem ilorazowym.
Weźmy

$$g : S^n \to \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}/\sim$$

Jest ono ciągłe, ponieważ jest złożeniem f i p - przekształcenia ilorazowego z przekształceniem ciągłym

Weźmy dwa różne elementy $a, b \in X$ i wprowadźmy nowy układ współrzędnych - niech pierwsza będzie promieniem sfery o środku w 0, na której leży punkt, a pozostałe n będzie współrzędnymi biegunowymi punktu na tej sferze. Wtedy ich współrzędne to:

$$a = (a_1, ...a_n, r_a)$$

$$b = (b_1, ...b_n, r_b)$$

gdzie r_x wyznacza promień sfery, na której leży punkt x, $(ax_1, ...x_n)$ to współrzędne biegunowe punktu na tej sferze.
Przekształcenie p jest utożsamieniem punktów o tej samej ostatniej współrzędnej.

- **(bijektywność g)** Reprezentantami warstw w X mogą być więc wektory należące do sfery jednostkowej S^n - to pokazuje, że g jest bijekcją (każdej warstwie odpowiada jeden wektor na sferze jednostkowej).

- **(hausdorffowość przeciwdziedziny)** Sfera S^n jest Hausdorfa, można dla dwóch wektorów do niej należących można wybrać rozłączne otoczenia otwarte U_a i U_b. Zbiory

$$V_a = p[U_a]$$

$$V_b = p[V_b]$$

są rozłączne w X. Załóżmy że nie. Wtedy istnieją $\alpha \in U_a, \beta \in U_b$ takie, że $p(\alpha) = p(\beta)$, czyli $\alpha * t = \beta$ dla jakiegoś $t > 0$, ale oba należą do sfery jednostkowej, więc sprzeczność.
Pozostaje jedynie sprawdzić, że V_a i V_b są otwarte w X.

Weźmy $W = p^{-1}[V_a]$ oraz $x = (x_1, ...x_n, 1) \in W$. Zrzutujmy W na sferę o promieniu 1 i weźmy otwartą kulę wokół punktu x na tej sferze zawierającą się w rzucie W o promieniu r_x - można to zrobić, bo ten rzut jest otwarty.
Weźmy teraz kulę o promieniu $min(1, r_x)$ - jest ona zawarta w zbiorze W, bo punkty do niej należące po zrzutowaniu na sferę S^n zawierają się w rzucie W. Wobec tego W jest otwarty i przestrzeń $\mathbb{R}^{n+1} \backslash \{0\} / \sim$ jest przestrzenią Hausdorffa.

Wiemy zatem, że g jest ciągłą bijekcją z przestrzeni zwartej w przestrzeń Hausdorffa, więc jest homeomorfizmem.

1-3

Homeomorfizm pomiędzy

1) Sfera S^n

3) $(\mathbb{R}^n)^+$ - sfera Riemanna

- **Sfera S^n bez punktu jest homeomorficzna z $\mathbb{R}^n$**
  Zanurzamy wszystko w $\mathbb{R}^{n+1}$, bierzemy sferę o środku w $(0,..0,1)$ promieniu 1 oraz hiperpłaszczyznę n-wymiarową taką, że ostatnia współrzędna jest równa 0, tzn zbiór $\{(a_1,...a_n,0) : a_i \in \mathbb{R}\}$. Weźmy teraz rzut stereograficzny $h : S^n \backslash \{(0,...0,1)\} \to \mathbb{R}^n$ takie, że $h(x) = y \iff x, y, (0,...0,2)$ są współliniowe, czyli zapisując wzorem

  $$h((x_1,...x_n)) = (\frac{x_1}{2-x_n}, \frac{x_2}{2-x_n}, ..\frac{x_{n-1}}{2-x_n}, 0)$$

  Funkcja ta jest ciągła, bo jest ciągła na każdej współrzędnej, z arytmetycznych własności funkcji ciągłych. Jest różnowartościowa, bo prosta albo jest cała zawarta w hiperpłaszczyźnie (niemożliwe, bo przecina punkt nienależący do niej), albo przecina ją w jednym punkcie, albo jest z nią rozłączna (nie jest, bo przecina punkty o różnych współrzędnych x_{n+1}. Można więc mówić o funkcji odwrotnej na obrazie $h[S^n]$ - jest ona dana wzorem

  $$h^{-1}((p_1,...,p_n,0)) = (p_1 * (2-S), p_2 * (2-S), ..p_{n-1} * (2-S), S)$$

  $$S = \frac{2 * (p_1^2 + ... + p_n^2)}{1 + p_1^2 + ... + p_n^2}$$

  h^{-1} jest różnowartościowa - widaćto ze wzoru, więc h jest bijekcją. Z drugiej strony, h^{-1} jest ciągła (każda z funkcji współrzędnych jest ciągła), więc h jest homeomorfizmem.

- **Sfera S^n jest zwarta**
  Jest domkniętą i ograniczoną podprzestrzenią przestrzeni euklidesowej, więc jest zwarta.

- **Dołożenie punktu jest uzwarceniem sfery bez punktu**
  Sfera $S^n \backslash (0,0,...1)$ jest pozbiorem gęstym w S^n oraz jest zanurzone w niej homeomorficznie. W takim razie S^n jest uzwarceniem $S^n \backslash (0,0,...1)$.

- **Przestrzeń $(\mathbb{R}^n)^+$ jest uzwarceniem przestrzeni $\mathbb{R}^n$**
  Przestrzeń $(\mathbb{R}^n)^+$ jest zwarta: załóżmy, że mamy pokrycie zbiorami $U_{i i \in I}$. Wybierzmy spośród nich taki, który zawiera punkt w nieskończoności. Wtedy pozostałe z nich są pokryciem zwartej podprzestrzeni

$\mathbb{R}^n$ (z definicji $(\mathbb{R}^n)^+$), więc można z nich wybrać podpokrycie skończone. Dodatkowo $\mathbb{R}^n$ jest gęsta w $(\mathbb{R}^n)^+$, bo jeśli dopełnienie każdego zbióru otwartego zawierającego punkt w nieskończoności jest zwarte, to w szczególności nie jest całą przestrzenią $\mathbb{R}^n$, więc każdy taki zbiór ma z nią niepuste przecięcie. $\mathbb{R}^n$ jest zanurzony homeomorficznie w $(\mathbb{R}^n)^+$, bo topologia w $(\mathbb{R}^n)^+$ zawiera topologię $\mathbb{R}^n$. W takim razie $(\mathbb{R}^n)^+$ jest jednopunktowym uzwarceniem $\mathbb{R}^n$.

$S^n \backslash \{(0, ...0, 1)\}$ jest więc homeo z $\mathbb{R}^n$, więc z twierdzenia ich jednopunktowe uzwarcenia są homeomorficzne.

3 - 4

Homeomorfizm pomiędzy

3) $(\mathbb{R}^n)^+$ - sfera Riemanna

4) $D^n/\sim$ gdzie $x \sim y \iff x = y$ lub $x, y \in S^{n-1}$

Łatwo możemy obrać dwa ciągłe, ściśle monotoniczne i wzajemnie odwrotne przekształcenia pomiędzy $[0, 1)$ a $[0, +\infty)$ które zadają homeomorfizm między tymi przedziałami, zadane wzorami:

$$\begin{array}{ll} d_f(x) = \frac{x}{1-x} & d_f : [0,1) \to [0,+\infty) \\ d_g(x) = \frac{x}{1+x} & d_g : [0,+\infty) \to [0,1) \end{array}$$

I na ich podstawie tworzymy przekształcenia między A i B.

$$\begin{array}{llll} f(\delta) = \infty & \text{else} & f(x) = x \cdot \frac{d_f(||x||)}{||x||} & f : Y \to X \\ g(\infty) = \delta & \text{else} & g(x) = x \cdot \frac{d_g(||x||)}{||x||} & g : X \to Y \end{array}$$

Które są ciągłe obcięte odpowiednio do $Y \setminus \delta = \text{int}D^n$ oraz $X \setminus \infty = \mathbb{R}^n$, ponieważ są ich homeomorfizmami - rozciąganie wnętrza kuli do przestrzeni działa tak samo jak udowodnione na wykładzie rozciąganie odcinka otwartego do prostej.

$g \circ f = id_Y$ oraz $f \circ g = id_X$

Ponieważ superpozyca d_f oraz d_g są identycznościami, a f i g zmieniają jedynie za ich pomocą długości wektorów, to ich superpozycje też są identycznościami.

f jest ciągłe

Niech $U \subset X$ będzie otwarty. Pokażmy że $f^{-1}(U)$ też jest otwarty. Mamy dwie możliwości:

- $\infty \in U$ - Wtedy $\mathbb{R}^n \setminus U$ jest zwarty. Ponieważ jest on podzbiorem $\mathbb{R}^n$ to wiemy że jest on domknięty i ograniczony. Stąd na mocy ciągłości i monotoniczności $d_f(x)$ wiemy że $f^{-1}(\mathbb{R}^n \setminus U)$ też jest ograniczonym zbiorem przez promień z przedziału $[0, 1)$ więc nie należy do niego δ. Otwartość $f^{-1}(\mathbb{R}^n \setminus U)$ otrzymujemy z ciągłości d_f.

- $\infty \notin U$ - Już udowodnione.

g jest ciągłe

Niech $U \subset Y$ będzie otwarty. Pokażmy że $g^{-1}(U)$ też jest otwarty. Mamy dwie możliwości:

- $\delta \in U$ - Wtedy $\mathbb{R}^n \setminus U$ jest domknięty, jest też więc ograniczony, ponieważ supremum metryk wektorów z $\mathbb{R}^n \setminus U$ jest ostro mniejsze od 1, w przeciwnym wypadku do tego zbioru należałaby δ. Stąd $g^{-1}(\mathbb{R}^n \setminus U)$ jest domnkięte (ponieważ d_g jest ciągłe) oraz ograniczone czyli zwarte, więc U jest otwarte.
- $\infty \notin U$ - Już udowodnione.

1 - 6

Homeomorfizm pomiędzy

1) Sfera S^n

6) $A = (D^p \times S^q) \cup (S^{p-1} \times D^{q+1})$ gdzie $p + q = n$

Ustalmy dla $z \in \mathbb{R}^{n+1}$ notację: $z = (x(z), y(z)) = (x_1, ..., x_p, y_1, ..., y_{q+1})$ gdzie jak łatwo zauważyć $x \in \mathbb{R}^p$ oraz $y \in \mathbb{R}^{q+1}$.

Zauważmy, że dla $z \in A$ zachodzi:

$$\begin{aligned} z \in A &\implies z \in (D^p \times S^q) \vee z \in (S^{p-1} \times D^{q+1}) \\ z \in (D^p \times S^q) &\implies \sum x_i^2 \leqslant 1 \wedge \sum y_i^2 = 1 \\ z \in (S^{p-1} \times D^{q+1}) &\implies \sum x_i^2 = 1 \wedge \sum y_i^2 \leqslant 1 \\ z \in A &\implies 1 \leqslant ||z|| \leqslant \sqrt{2} \end{aligned}$$

Obierzmy teraz przekształcenie $f : A \to S^n$ dane wzorem:

$$f((x_1, ..., x_p, y_1, ..., y_{q+1}) = z) = z \cdot \tfrac{1}{\sqrt{||x(z)||^2 + ||y(z)||^2}}$$

Ponieważ $||z|| = \sqrt{||x(z)||^2 + ||y(z)||^2}$

Łatwo znaleźć dla niego przekształcenie odwrotne $g : S^n \to A$ dane wzorem:

$$g((x(z), y(z)) = z) = z \cdot \tfrac{1}{\max(||\mathrm{x(z)}||, ||\mathrm{y(z)}||)}$$

Przekształcenia f oraz g są wzajemnie odwrotne i przekształcają punkty z jednego zbioru na wspóliniowe z nimi i początkiem układu współrzędnych punkty drugiego zbioru. Ciągłość tych przekształceń wynika z ciągłości przekształceń modyfikujących długość wektora.

1-5

Homeomorfizm pomiędzy

1) Sfera S^n

5) $S^p \times S^q$ z utożsamionym do punktu zbiorem $\alpha \times S^q \cup S^p \times \beta$, dla $p + q = n$ gdzie α oraz β są odpowiednio pewnymi wektorami z S^p oraz S^q.

Z samego rachunku na zbiorach i z zadania 1-3 (sfera S^n bez punktu homeomorficzna z R^n) otrzymujemy

$$S^p \times S^q / \sim = (S^p \times (R^q \cup \{1\}))/ \sim = (S^p \times R^q \cup S^p \times \{1\})/ \sim = ((R^p \cup \{1\}) \times R^q \cup S^p \times \{1\})/ \sim = (R^p \cup \times R^q \cup$$

ale

$$\{1\} \times R^q \subset \{1\} \times S^q$$

więc

$$(R^p \cup \times R^q \cup \{1\} \times R^q \cup S^p \times \{1\})/ \sim = R^p \times R^q \cup \{c\} = R^n \cup \{c\}$$

Po usunięciu $\{c\}$ (punktu, do którego utożsamiliśmy $S^p \times \{1\} \cup \{1\} \times S^q$) dostajemy homeomorfizm między $S^p \times S^q / \sim \setminus \{c\}$ a R^n. Ale po dodaniu tego punktu $S^p \times S^q / \sim$ jest zwarte, więc homeomorficzne z jednopunktowym uzwarceniem R^n - a to, z punktu 1.3 jest homeomorficzne z S^n.