Zad. 1 (PGo)

a) $X \in \mathbb{N}_n$
b) Prawdopodobieństwa wynoszą:

- $P\{X = 1\} = p$
- $P\{X = 2\} = (1-p) \cdot p$

  ...

- $P\{X = i\} = (1-p)^{i-1} \cdot p$

  ...

- $P\{X = n-1\} = (1-p)^{n-2} \cdot p$
- $P\{X = n\} = (1-p)^{n-1}$

c) Można to udowodnić indukcyjnie.
Dla $n = 1$ - $P\{X = 1\} = 1$
Dla $n = 2$ - $P\{X = 1\} = p$, $P\{X = 2\} = 1 - p$. Ich suma jest równa 1.
Zakładamy, że dla $n = k$ suma prawdopodobieństw wynosi $\sum_{j=1}^{k-1} (1-p)^{j-1} \cdot p + (1-p)^{k-1} = 1$.
Zatem dla $n = k+1$ wynosi $\sum_{j=1}^{k} (1-p)^{j-1} \cdot p + (1-p)^{k} = 1 + (1-p)^{k-1} \cdot (p-1) + (1-p)^{k} = 1$.

Zad. 2 (VB)

3 białe (+1$), 3 czerwone(-1$), 5 czarnych(+0$).
Losujemy 3 kule, to żeby całkowita suma byla dodatnia, jest 3 opcji:
1) 1$: 1b+2czar $= \binom{3}{1} \cdot \binom{5}{2}$; 2b+1czer $= \binom{3}{2} \cdot \binom{3}{1}$;
2) 2$: 2b+1czar $= \binom{3}{2} \cdot \binom{5}{1}$;
3) 3$: 3b $= \binom{3}{3}$;
Ilość wszystkich mozliwych kombinacji wynosi $\binom{11}{3}$.
Prawdopodobieństwo wygranej wynosi:

$$\frac{\binom{3}{1} \cdot \binom{5}{2} + \binom{3}{2} \cdot \binom{3}{1} + \binom{3}{2} \cdot \binom{5}{1} + 1}{\binom{11}{3}}$$

Zad. 4 (Spisał: PGo)

Załóżmy, że uczestnik najpierw odpowiada na pytanie i, a potem na pytanie j. Mamy 3 sytuacje:

- Uczestnik nie zna odpowiedzi na pytanie i.

  Prawdopodobieństwo: $1 - p_i$. Wygrana: 0

- Uczestnik zna odpowiedź na pytanie i, ale nie zna na j.

  Prawdopodobieństwo $p_i \cdot (1 - p_j)$. Wygrana: V_i.

- Uczestnik zna odpowiedź na pytanie i oraz j.

  Prawdopodobieństwo: $p_i \cdot p_j$. Wygrana: $V_i + V_j$

Gdy uczestnik najpierw odpowiada na pytanie 1, potem 2 (i=1, j=2), to oczekiwana wartość wygranej wynosi:

$$0 \cdot (1 - p_1) + V_1 \cdot P_1 + (V_1 + V_2) \cdot P_1 \cdot P_2 = V_1 \cdot P_1 + (V_1 + V_2) \cdot P_1 \cdot P_2$$

Gdy uczestnik najpierw odpowiada na pytanie 2, potem 1, to oczekiwana wartość wygranej wynosi:

$$0 \cdot (1 - p_2) + V_2 \cdot P_2 + (V_1 + V_2) \cdot P_1 \cdot P_2 = V_2 \cdot P_2 + (V_1 + V_2) \cdot P_1 \cdot P_2$$

Uczestnik powinien wybrać tę strategię, gdzie oczekiwana wartość wygranej jest większa dla danych p_1, p_2, V_1, V_2.

Zad. 6 (Spisał: PGo)

$Var(X) = E(X^2) - E^2(X)$
$Var\,(aX + b) = E\left((aX + b)^2\right) - E^2\,(aX + b) = E\left(a^2X^2 + 2abx + b^2\right) - (aE\,(X) + b)^2 = a^2E\left(X^2\right) + 2abE\,(X) - a^2E^2\,(X) - 2abE\,(X) - b^2 = a^2 \cdot \left(E\left(X^2\right) - E^2\,(X)\right) = a^2Var\,(X)$

Zad. 7 (Spisał: PGo)

p - prawdopodobieństwo, że śrubka jest wadliwa
n - ilość śrubek w pakiecie
X - zmienna losowa oznaczająca ilość wadliwych śrubek
$P\{X = 0\} = \binom{n}{0} \cdot p^0 \cdot (1 - p)^n = 0,9044$
$P\{X = 1\} = \binom{n}{1} \cdot p^1 \cdot (1 - p)^{n-1} = 0,0914$
Prawdopodobieństwo tego, że nie będzie zwrotu pieniędzy wynosi: $1-(P\{X = 0\} + P\{X = 1\}) = 0,0042$

Zad. 8 (Spisał: PGo)

$\sum_{i=0}^{\infty} P\{X = i\} = e^{-\lambda} \cdot \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\lambda^i}{i!} = e^{-\lambda} \cdot e^{\lambda} = 1$

Zad. 9 (Spisał: PGo)

$X\tilde{}Pois\,(\lambda = 3,2)$
$P\{X = 0\} + P\{X = 1\} + P\{X = 2\} = \frac{(3,2)^0 \cdot e^{-3,2}}{0!} + \frac{(3,2)^1 \cdot e^{-3,2}}{1!} + \frac{(3,2)^2 \cdot e^{-3,2}}{2!}$

Zad. 10 (Spisał: PGo)

$E(X) = \sum_{i=0}^{\infty} i \cdot P\{X = i\} = \sum_{i=0}^{\infty} i\frac{\lambda^i e^{-i}}{i!} = e^{-\lambda} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\lambda^i}{(i-1)!} = e^{-\lambda} \cdot \lambda \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\lambda^{i-1}}{(i-1)!} = e^{-\lambda}\lambda e^{\lambda} = \lambda$