Zad. 1 (KO)

Ilosc liter: 32.
Ilosc liter nadających sie dla pierwszej litery imienia/nazwiska: 25.
Zakładamy ze dla drugiej litery nadaje sie 32.
Ilosc roznych par imie-nazwisko, które maja dowolne pierwsze dwie litery: $(25 \cdot 32) \cdot (25 \cdot 32) = 640,000$.
Jesli w Krakowie mieszka przynajmniej 640,001 osób, to z podstawowej zadady zliczania wynika, ze przynajmniej 2 osoby maja 2 takie same pierwsze litery imienia i nazwiska.
Podobno w Krakowie jest 754,056 mieszkanców.

Zad. 2 (KO)

Zakładamy że mamy grupę n ludzi. Prawdopodobieństwo że dwie dowolne osoby mają wspolne urodziny wynosi $\frac{1}{365}$.
Prawdopodobieństwo że trzecia osoba ma wspolne urodziny z jedną z dwóch popzednich wynosi $\frac{2}{365}$.
Czyli dla n osob prawdopodobieństwo ze przynajmniej 2 osoby maja wspolne urodziny wynosi

$$P = \frac{1}{365} + \frac{2}{365} + \frac{3}{365} + ... + \frac{n-1}{365} = \frac{n \cdot (n-1)}{2 \cdot 365}$$

Jesli P $>$ 50%, to n $>$ 19.

Zad. 3 (IS)

Mamy za zadanie wybrać k elementów spośród n elementowego zbioru. Pierwszy element możemy wybrać na n sposobów, drugi na (n - 1) sposobów, ... , i ostatni na (n - k - 1) sposobów. W taki sposób otrzymamy liczbę wszystkich permutacji zbioru k, z racji tego musimy wynik podzielić przez liczbę permutacji zbioru k - k!.
Otrzymujemy wynik:

$$\frac{n \cdot (n-1) \cdot ... \cdot (n-k-1)}{k!} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} = \binom{n}{k}$$

Zad. 4 (SS)

A - liczby podzielne przez 2
B - liczby podzielne przez 3
C - liczby podzielne przez 5

$$|A| = 150$$

$$|B| = 100$$

$$|C| = 60$$

$$|A \cap B| = 50$$

$$|A \cap C| = 30$$

$|B \cap C| = 20$

$|A \cap B \cap C| = 10$

$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - (|A \cap B| + |A \cap C| + |B \cap C|) + |A \cap B \cap C| = 220$

Zad. 5 (KA)

a) Ile jest możliwych różnych ścieżek tego punktu?

$$(PGPPG...) \qquad (\underbrace{PPP...P}_{\text{8 razy}}\underbrace{GGG...G}_{\text{5 razy}})$$

W każdej trasie jest 8 kroków w prawo i 5 kroków do góry, łącznie 13 kroków.

$$\binom{13}{8} \cdot \binom{5}{5} = \binom{13}{8} \cdot 1 = \binom{13}{8} = \frac{13!}{8!5!} = \frac{9 \cdot \cancelto{2}{10} \cdot 11 \cdot \cancelto{1}{12} \cdot 13}{1 \cdot 2 \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{4} \cdot \cancel{5}} = \frac{2574}{2} = 1287$$

Odp. 1287 ścieżek.

b) Ile jest ścieżek z a) przechodzących przez punkt $(5, 2)$?

$$(PGPPG...) \qquad (\underbrace{PPP...P}_{\text{5 razy}}\underbrace{GGG...G}_{\text{2 razy}})$$

$$\binom{7}{5} \cdot \binom{2}{2} = \binom{7}{5} \cdot 1 = \binom{7}{5} = \frac{7!}{5!2!} = \frac{\cancel{5!} \cdot 6 \cdot 7}{\cancel{5!} \cdot 1 \cdot 2} = \frac{42}{2} = 21$$

$$(PGPPG...) \qquad (\underbrace{PPP...P}_{\text{3 razy}}\underbrace{GGG...G}_{\text{3 razy}})$$

$$\binom{6}{3} \cdot \binom{3}{3} = \binom{6}{3} \cdot 1 = \binom{6}{3} = \frac{6!}{3!3!} = \frac{\cancel{3!} \cdot 4 \cdot 5 \cdot \cancel{6}}{\cancel{3!} \cdot 1 \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{3}} = 20$$

$21 \cdot 20 = 420$

Odp. 420 ścieżek.

Zad. 6 (JK)

$$\binom{n}{k}$$

Zad. 7 (KO)

S = $\{$1, 2, .., 20 $\}$.
S' = S - $\{$1, 2, 3, 4, 5 $\}$ = $\{$6, 7, .., 20 $\}$.
Ilość wszystkich 4-elementowych podzbiorów S wynosi $\binom{20}{4}$.
Ilość wszystkich 4-elementowych podzbiorów S' wynosi $\binom{15}{4}$. Są to podzbiory niezawierające zadnego elementu ze zbioru $\{$1, 2, 3, 4, 5 $\}$.
Stąd ilosc wszystkich podzbiorów S zawierających co najmniej jeden element z $\{$1, 2, 3, 4, 5 $\}$ wynosi $\binom{20}{4}$ - $\binom{15}{4}$.

Zad. 8 (SS)

$$\frac{6!}{4! \cdot 2!}$$

Zad. 9 (KO)

m wadliwych anten ustawiamy w taki sposob, żeby między każde dwie ustawić przynajmniej jedną działającą. Czyli $(n-m)$ działających anten ukladamy na $(m-1)$ miejscach.
Jest to równe liczbie surjekcji z $\{1, 2, .., (n-m)\}$ do $\{1, 2, .., (m-1)\}$.

$$(m-1)! \cdot S((n-m), (m-1)$$

Zad. 10 (KO)

a) Są 4 mecze, kazdy ma 2 mozliwe wyniki. Czyli 2^4.
b) W trzech turach łącznie jest 7 meczy, kazdy po 2 możliwe wyniki, czyli 2^7

Zad. 11 (KO)

$$x_1 + x_2 + ... + x_r = n$$

Jest równe liczbie surjekcji z $\{1, 2, .., n\}$ do $\{1, 2, .., r\}$.

$$r! \cdot S(n, r)$$

Zad. 12 (SS)

$$\binom{5}{2}\binom{6}{2}\binom{4}{3}$$

Zad. 13 (IS)

$\binom{n}{k}$ to jest ilosc sposobow wyboru k elementowego podzbioru ze zbioru n elementowego

Zamiast wybierać elementy, które należą do zbioru mozemy rowniez wybrac elementy, ktore nie beda nalezec do zbioru k, ilosc takich sposobow jest rowna. Zatem musimy wybrac (n - k) elementów, które nie będa należec do zbioru k. Ilosc tych sposobow wynosi

$$\binom{n}{n-k}$$

Zatem zachodzi rownosc:

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

Zad. 14 (JK)

$$\frac{n!}{(n-r)!}$$