

Zad. 1 (KO)

Ilość liter: 32.

Ilość liter nadających się dla pierwszej litery imienia/nazwiska: 25.

Zakładamy że dla drugiej litery nadaje się 32.

Ilość różnych par imię-nazwisko, które mają dowolne pierwsze dwie litery: $(25 \cdot 32) \cdot (25 \cdot 32) = 640,000$.

Jeśli w Krakowie mieszka przynajmniej 640,001 osób, to z podstawowej zadaty zliczania wynika, że przynajmniej 2 osoby mają 2 takie same pierwsze litery imienia i nazwiska.

Podobno w Krakowie jest 754,056 mieszkańców.

Zad. 2 (KO)

Zakładamy że mamy grupę n ludzi. Prawdopodobieństwo że dwie dowolne osoby mają wspólne urodziny wynosi $\frac{1}{365}$.

Prawdopodobieństwo że trzecia osoba ma wspólne urodziny z jedną z dwóch poprzednich wynosi $\frac{2}{365}$.

Czyli dla n osób prawdopodobieństwo że przynajmniej 2 osoby mają wspólne urodziny wynosi

$$P = \frac{1}{365} + \frac{2}{365} + \frac{3}{365} + \dots + \frac{n-1}{365} = \frac{n \cdot (n-1)}{2 \cdot 365}$$

Jeśli $P > 50\%$, to $n > 19$.

Zad. 3 (IS)

Mamy za zadanie wybrać k elementów spośród n elementowego zbioru. Pierwszy element możemy wybrać na n sposobów, drugi na $(n-1)$ sposobów, ..., i ostatni na $(n-k+1)$ sposobów. W taki sposób otrzymamy liczbę wszystkich permutacji zbioru k , z racji tego musimy wynik podzielić przez liczbę permutacji zbioru $k - k!$.

Otrzymujemy wynik:

$$\frac{n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-k+1)}{k!} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} = \binom{n}{k}$$

Zad. 4 (SS)

A - liczby podzielne przez 2

B - liczby podzielne przez 3

C - liczby podzielne przez 5

$$|A| = 150$$

$$|B| = 100$$

$$|C| = 60$$

$$|A \cap B| = 50$$

$$|A \cap C| = 30$$

$$|B \cap C| = 20$$

$$|A \cap B \cap C| = 10$$

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - (|A \cap B| + |A \cap C| + |B \cap C|) + |A \cap B \cap C| = 220$$

Zad. 5 (KA)

a) Ile jest możliwych różnych ścieżek tego punktu?

$$(PGPPG...) \quad (\underbrace{PPP...P}_{8 \text{ razy}} \underbrace{GGG...G}_{5 \text{ razy}})$$

W każdej trasie jest 8 kroków w prawo i 5 kroków do góry, łącznie 13 kroków.

$$\binom{13}{8} \cdot \binom{5}{5} = \binom{13}{8} \cdot 1 = \binom{13}{8} = \frac{13!}{8!5!} = \frac{9 \cdot \cancel{10}^2 \cdot 11 \cdot \cancel{12}^1 \cdot 13}{1 \cdot 2 \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{4} \cdot \cancel{5}} = \frac{2574}{2} = 1287$$

Odp. 1287 ścieżek.

b) Ile jest ścieżek z a) przechodzących przez punkt (5, 2)?

$$(PGPPG...) \quad (\underbrace{PPP...P}_{5 \text{ razy}} \underbrace{GGG...G}_{2 \text{ razy}})$$

$$\binom{7}{5} \cdot \binom{2}{2} = \binom{7}{5} \cdot 1 = \binom{7}{5} = \frac{7!}{5!2!} = \frac{\cancel{5}! \cdot 6 \cdot 7}{\cancel{5}! \cdot 1 \cdot 2} = \frac{42}{2} = 21$$

$$(PGPPG...) \quad (\underbrace{PPP...P}_{3 \text{ razy}} \underbrace{GGG...G}_{3 \text{ razy}})$$

$$\binom{6}{3} \cdot \binom{3}{3} = \binom{6}{3} \cdot 1 = \binom{6}{3} = \frac{6!}{3!3!} = \frac{\cancel{3}! \cdot 4 \cdot 5 \cdot \cancel{6}}{\cancel{3}! \cdot 1 \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{3}} = 20$$

$$21 \cdot 20 = 420$$

Odp. 420 ścieżek.

Zad. 6 (JK)

$$\binom{n}{k}$$

Zad. 7 (KO)

$S = \{1, 2, \dots, 20\}$.

$S' = S - \{1, 2, 3, 4, 5\} = \{6, 7, \dots, 20\}$.

Ilość wszystkich 4-elementowych podzbiorów S wynosi $\binom{20}{4}$.

Ilość wszystkich 4-elementowych podzbiorów S' wynosi $\binom{15}{4}$. Są to podzbiory niezawierające żadnego elementu ze zbioru $\{1, 2, 3, 4, 5\}$.

Stąd ilość wszystkich podzbiorów S zawierających co najmniej jeden element z $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ wynosi $\binom{20}{4} - \binom{15}{4}$.

Zad. 8 (SS)

$$\frac{6!}{4! \cdot 2!}$$

Zad. 9 (KO)

m wadliwych anten ustawiamy w taki sposób, żeby między każde dwie ustawić przynajmniej jedną działającą. Czyli $(n - m)$ działających anten układamy na $(m - 1)$ miejscach.

Jest to równe liczbie surjekcji z $\{1, 2, \dots, (n - m)\}$ do $\{1, 2, \dots, (m - 1)\}$.

$$(m - 1)! \cdot S((n - m), (m - 1))$$

Zad. 10 (KO)

a) Z 8 graczy możemy wybrać $\binom{8}{2}$ par, oraz każda para może mieć 2 różne wyniki. Czyli $\binom{8}{2}^2$.

b)

Pierwsza runda: $\binom{8}{2}$ par oraz $\binom{8}{2}^2$ różnych wyników.

Druga runda: $\binom{4}{2}$ par oraz $\binom{4}{2}^2$ różnych wyników.

Trzecia runda: $\binom{2}{2}$ par oraz $\binom{2}{2}^2$ różnych wyników.

$$\binom{8}{2}^2 \cdot \binom{4}{2}^2 \cdot \binom{2}{2}^2$$

Zad. 11 (KO)

$$x_1 + x_2 + \dots + x_r = n$$

Jest równe liczbie surjekcji z $\{1, 2, \dots, n\}$ do $\{1, 2, \dots, r\}$.

$$r! \cdot S(n, r)$$

Zad. 12 (SS)

$$\binom{5}{2} \binom{6}{2} \binom{4}{3}$$

Zad. 13 (IS)

$\binom{n}{k}$ to jest ilość sposobów wyboru k elementowego podzbioru ze zbioru n elementowego

Zamiast wybierać elementy, które należą do zbioru możemy również wybrać elementy, które nie będą należeć do zbioru k , ilość takich sposobów jest równa. Zatem musimy wybrać $(n - k)$ elementów, które nie będą należeć do zbioru k . Ilość tych sposobów wynosi

$$\binom{n}{n-k}$$

Zatem zachodzi równość:

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

Zad. 14 (JK)

$$\frac{n!}{(n-r)!}$$