Zad. 1 (KO)

B - wypadną 2 orły, $P(B) = \frac{1}{4}$.

a) A - wypadnie orzeł w pierwszym rzucie, $P(A) = \frac{1}{2}$;

$$P(A|B) = \frac{1}{2}$$

b) A - w dowolnym rzucie wypadł orzeł, $P(A) = \frac{3}{4}$.

$$P(A|B) = \frac{1}{3}$$

Zad. 2 (KO)

Po rozdaniu dla pierwszysch 2 graczy zostaje 26 kart, w nich 5 trefli. Gracz E moze wylosowac swoje 13 kart na $\binom{26}{13}$. Żeby wsród wylosowanych kart mieć 3 trefli na $\binom{5}{3} \cdot \binom{23}{10}$

$$P = \frac{\binom{5}{3} \cdot \binom{23}{10}}{\binom{26}{13}}$$

Zad. 3 (MM)

a) Nie sa.
$P(E_1) = \frac{5}{36}, P(F) = \frac{1}{6}, P(E_1 \cap F) = \frac{1}{36}$
$P(E_1 \cap F) \neq P(E_1)P(F)$
b) Sa.
$P(E_2) = \frac{1}{6}, P(E_2 \cap F) = \frac{1}{36}$
$P(E_2 \cap F) = P(E_2)P(F)$

Zad. 4 (MK)

0.8 - moduł nie przeszedł inspekcji
0.2 - moduł przeszedł inspekcję
$P(A) = 0.2 \cdot 0.95 = 0.19$ - moduł bez wad po inspekcji
$P(B) = 0.8 \cdot 0.7 = 0.56$ - moduł bez wad bez inspekcji
$P(C) = 0.2 - 0.19 = 0.01$ - moduł wadliwy po inspekcji
$P(D) = 0.8 - 0.56 = 0.24$ - moduł wadliwy bez inspekcji
$P(E) = \frac{P(C)}{P(C)+(P(D)}$ - szansa na to, aby moduł wadliwy był po inspekcji
$\frac{0.01}{0.25} = 0.04$

Zad. 5 (MM)

b)
n_1 -ilosc kul w pierwszej urnie, b_1 -ilosc kul bialych w pierwszej urnie, c_1 -ilosc kul czarnych w pierwszej urnie, n_2, b_2, c_2 analogicznie tylko dla urny drugiej.
Mamy w sumie n losowan. Losowanie wyglada tak: Najpierw z Urny pierwszej losujemy kule i ja usuwamy z urny a potem z urny drugiej losujemy kule i ja wkladamy do urny pierwszej.

B_k -Zdazenie ze w k-tym losowaniu z urny pierwszej wylosujemy kule biala
C_k -Zdarzenie ze w k-tym losowaniu z urny pierwszej wylosujemy kule czarna
$\tilde{B}_k$ -Zdazenie ze w k-tym losowaniu z urny drugiej wylosujemy kule biala
$\tilde{C}_k$ -Zdarzenie ze w k-tym losowaniu z urny drugiej wylosujemy kule Czarna
D_k - Zdarzenie ze w k-tym losowaniu z urny pierwszej wylosujemy te sama kule co w k-1-szym losowaniu z urny drugiej(wylosujemy te kule co wlasnie swiezo dodalismy do urny pierwszej)
D_k^{-1} - Zdarzenie przeciwne do D_k: Zdarzenie ze w k-tym losowaniu z urny pierwszej wylosujemy inna kule niz te co w k-1-szym losowaniu z urny drugiej.
Oczywiscie:
$P(B_k) + P(C_k) = 1 = P(\tilde{B}_k) + P(\tilde{C}_k)$, dla kazdego k.
Chcemy znalesc ogolny wzor na $P(B_k)$.
Obliczmy $P(\tilde{B}_k)$:
Kulki w drugiej Urnie sa inteligentne i zanim zaczelismy je wyciagac ustawily się w kolejke do wyciagania. Ustalily to w sposob losowy Wiec $P(\tilde{B}_k)$ Mozemy traktowac jako: Prawdobodobienstwo że na k-tym miejscu w kolejce ustawila sie kulka biala. Oczywiscie numer pozycji k, nie ma wplywu na wynik bo wszystkie pozycje w kolejce sa jednakowo uprzywilejowane. Prawdobodobienstwo że na k-tym miejscu w kolejce ustawila sie kulka biala wynosi $\frac{b_2}{n_2}$ bo z n_2 potencjalnych kul interesuja nas tylko b_2 bialych. Zatem:
$P(\tilde{B}_k) = \frac{b_2}{n_2}$, analogicznie: $P(\tilde{C}_k) = \frac{c_2}{n_2}$ Zachodza nastepujace wlasnosci:
$P(B_k \mid D_k) = P(\tilde{B}_{k-1})$
$P(B_k \mid D_k^{-1}) = P(B_{k-1})$, bo jesli nie wylosowalismy swiezo dodanej to niejako robimy to samo co w losowaniu k-1
$P(D_k) = \frac{1}{n_1}$, bo z n-kul w urnie pierwszej tylko jedna jest ta swiezo dodana
$P(D_k^{-1}) = 1 - P(D_k) = \frac{n_1-1}{n_1}$
Ze wzoru na prawdopodobienstwo warunkowe:
$P(B_k) = P(B_k \mid D_k)P(D_k) + P(B_k \mid D_k^{-1})P(D_k^{-1})$
Po podstawieniu powyzszych:
$P(B_k) = P(\tilde{B}_{k-1})\frac{1}{n_1} + P(B_{k-1})\frac{n_1-1}{n_1} = \frac{b_2}{n_2 n_1} + P(B_{k-1})\frac{n_1-1}{n_1}$
Dostalismy wzor rekurencyjny. Po rozwiazaniu go dla warunku poczatkowego: $P(B_1) = \frac{b_1}{n_1}$ Otrzymujemy ostatecznie wzor:
$P(B_k) = \left(\frac{n_1-1}{n_1}\right)^{k-1} \cdot \left(\frac{b_1}{n_1} - \frac{b_2}{n_2}\right) + \frac{b_2}{n_2}$
Mozna sprawdzic poprawnosc indukcyjnie.
Odpowiedz do podpunktu b) to $P(B_n)$
a) Podstawiamy do wzoru $n_1 = n_2 = b_1 = n$, $b_2 = 0$. Odpowiedz to: $\left(\frac{n-1}{n}\right)^{n-1}$

Zad. 6 (IS)

Klasyczny problem Monty Halla psychopatycznie sprowadzony do zabijania wiezniow...

Musimy udowodnić, że niezależnie od tego co mówi więzień, szansa na przezycie to zawsze $\frac{1}{3}$

Zalozmy ze A bedzie oznaczało sytuacje, kiedy wiezien 1 jest ulaskawiony, a B bedzie oznaczac sytuacje kiedy straznik powie, że inny wiezien bedzie skazany.

Z twierdzenia Bayesa:
$\mathcal{P}(A \mid B) = \frac{P(B|A)\mathcal{P}(A)}{P(B|A)P(A)+P(B|A')P(A')}$.

$P(A)$ to prawdopodobienstwo z jakim ulaskawiony jest pierwszy wiezen bez zadnych informacji - $\frac{1}{3}$

$P(A')$ to prawdopodobiensto z jakim pierwszy wiezien umiera (bez zadnych informacji) - $\frac{2}{3}$

$P(B \mid A)$ to prawdopodobienstwo ze straznik powie, ze inny wiezen umiera, jesli pierwszy przezywa. Straznik zawsze mowi ze inny umiera - prawdopodobienstwo wynosi 1

$P(B \mid A')$ to prawdopodobienstwo ze straznik powie, ze inny wiezen umiera, jesli pierwszy tez umrze. Straznik zawsze mowi ze inny umiera - prawdopodobienstwo wynosi 1

Podstawiajac wszystko do wzoru:

$$P(A|B) = \frac{1 \cdot \frac{1}{3}}{1 \cdot \frac{1}{3} + 1 \cdot \frac{2}{3}} = \frac{1}{3}$$

Zad. 7 (MM) Prawdopodobienstwo ze informacja nie dojdze do celu:

$P(E \cap (A \cup B \cup (C \cap D))) = P(E)P(A \cup B \cup (C \cap D)) =$
$= P(E)(P(A) + P(B) + P(C \cap D) - P(A \cap B) - P(A \cap (C \cap D)) - P(B \cap (C \cap D)) + P(A \cap B \cap (C \cap D))) =$
$= P(E)(P(A)+P(B)+P(C)P(D)-P(A)P(B)-P(A)P(C)P(D)-P(B)P(C)P(D)+P(A)P(B)P(C)P(D)) = 0.01 \cdot (0.05 + 0.1 + 0.05 \cdot 0.01 - 0.05 \cdot 0.1 - 0.05 \cdot 0.05 \cdot 0.01 - 0.1 \cdot 0.05 \cdot 0.01 + 0.05 \cdot 0.1 \cdot 0.05 \cdot 0.01) = 0.001454275$ Odpowiedz to: 1-0.001454275=0.998545725

Zad. 8 (MK)

A - moduł A zawiera błędy
B - moduł B zawiera błędy
AB - oba moduły zawierają błędy
$P(A) = 0.2$ $P(B) = 0.4$
wydarzenia A i B są od siebie niezależne
$P(AB) = P(A) \cdot P(B) = 0.2 \cdot 0.4 = 0.08$
AwA - awaria wywołana błędem w samym A
AwB - awaria wywołana błędem w samym B
AwAB - awaria wywołana wadliwościa obu modułów
$P(AwA) = 0.5$
$P(AwB) = 0.8$
$P(AwAB) = 0.9$
moduł A był wadliwy i wywołał awarię:
$P(A) \cdot P(AwA) = 0.1$
moduł B był wadliwy i wywołał awarię:
$P(B) \cdot P(AwB) = 0.32$
oba moduły były wadliwe i nastąpiła awaria:

$P(AB) \cdot P(AwAB) = 0.08 \cdot 0.9 = 0.072$
zatem:
$\frac{0.072}{0.1+0.32+0.072} = \frac{0.072}{0.492} = 0.146$
Odpowiedź: 0.146

Zad. 9 (SS)

1) Strategia: liczymy na to, że ostatnia karta to as pik.
Prawdopodobieństwo, że w ostatnia karta to as pik wynosi: $\frac{1}{n}$

2) Strategia: liczymy na to, że kolejna karta to as pik. Więc:
$E_1 = \frac{1}{n+1-1}$
$E_2 = \frac{1}{n+1-2}$
...
$E_n = \frac{1}{n+1-n}$

Z reguły łańcuchowej:
$P(E_1E_2...E_N) = P(E_1) \cdot P(E_2|E_1) \cdot P(E_3|E_1E_2) \cdot ... \cdot P(E_n|E_1...E_{n-1})$
$P(E_1E_2...E_N) = \frac{1}{n} \cdot \frac{\frac{1}{n-1}}{\frac{1}{n}} \cdot ... \cdot \frac{\frac{n}{n}}{P(E_1...E_{n-1})}$
$P(E_1E_2...E_N) < \frac{1}{n}$ Więc, lepiej przyjąć strategie 1).

Zad. 10 (SS)
Wybieramy k mężczyzn, do których trafi ich kapulesz (k punktów stałych permutacji): $\binom{n}{k}$
Wybieramy n - k mężczyzn do których nie trafi ich kapelusz:
$\sum_{i=0}^{n-k} \binom{n-k}{i} \cdot (n-k-i)! \cdot (-1)^{i-1}$
P $= \frac{\binom{n}{k} \cdot \sum_{i=0}^{n-k} \binom{n-k}{i} \cdot (n-k-i)! \cdot (-1)^{i-1}}{n!}$