

Zad. 1 (PGO)

Możemy wylosować k kul spośród n kul na tyle sposobów:

$$|\Omega| = \binom{n}{k}$$

Wyróżnioną kulę możemy wybrać na 1 sposób, pozostałe na $\binom{n-1}{k-1}$ sposobów.

$$P = \frac{\binom{n-1}{k-1}}{\binom{n}{k}} = \frac{\frac{(n-1)!}{(k-1)! \cdot (n-k)!}}{\frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}} = \frac{k}{n}$$

Zad. 2 (PGO)

Losowy dobór oznacza tyle możliwości umieszczenia w pokojach:

$$|\Omega| = \binom{40}{2} \cdot \binom{38}{2} \cdot \dots \cdot \binom{2}{2} = \frac{40!}{2^{20}}$$

Ilość umieszczeń w pokojach osobno księży, osobno zakonnic:

$$|A| = \left(\binom{20}{2} \cdot \binom{18}{2} \cdot \dots \cdot \binom{2}{2} \right)^2 \cdot \frac{20!}{10!^2} = \frac{20!^3}{2^{20} \cdot 10!^2}$$

Czynnik $\frac{20!}{10!^2}$ odpowiada za "wymieszanie pokoi".

$$P(A) = \frac{20!^3}{40! \cdot 10!^2} \approx 0,00013\%$$

Ilość takich umieszczeń w pokojach, że występuje dokładnie $2i$ mieszanych par:

$$|B| = \left(\binom{20-2i}{2} \cdot \binom{18-2i}{2} \cdot \dots \cdot \binom{2}{2} \right)^2 \cdot \left(\binom{4i}{2} \cdot \binom{4i-2}{2} \cdot \dots \cdot \binom{2}{2} \right) \cdot \frac{10!}{2i! \cdot (10-i)!^2} = \frac{(20-2i)!^2 \cdot 4i! \cdot 10!}{2^{20} \cdot 2i! \cdot (10-i)!^2}$$

$$P(B) = \frac{\frac{(20-2i)!^2 \cdot 4i! \cdot 10!}{2^{20} \cdot 2i! \cdot (10-i)!^2}}{\frac{40!}{2^{20}}} = \frac{(20-2i)!^2 \cdot 4i! \cdot 10!}{40! \cdot 2i! \cdot (10-i)!^2}$$

Zad. 3 (VB)

a) Dla dowolnego więźnia szansa znaleźć swój numer wynosi $\frac{50}{100} = \frac{1}{2}$. To dla 100 więźniów:

$$\frac{1}{2^{100}} = 7.8886091e^{-31}$$

b) Załóżmy, że relacja szufladka-numerek jest permutacja. Permutacja rozkłada się na cykle. Jeśli numerek więźnia należy do cyklu o długości ≤ 50 , czyli więzien będzie musiał sprawdzić co najwyżej 50 komurek, to on znajdzie swój numer. Jeśli numerek więźnia znajdzie się w cyklu o długości > 50 , to wszyscy umierają. Czyli prawdopodobieństwo sukcesu danej strategii jest równe prawdopodobieństwu wystąpienia cyklu o długości > 50 w 100-elementowym zbiorze numerków. Ilość różnych cykli o długości k dla zbioru n -elementów wynosi:

$$\binom{n}{k} \cdot (k-1)! \cdot (n-k)! = \frac{n!}{k}$$

Wybieramy k elementów na $\binom{n}{k}$ sposobów, k elementów w cyklu możemy ustawić na $(k-1)!$ sposobów, a resztę elementów nie należących do cyklu na $(n-k)!$ sposobów.

Ponieważ ogólnie możemy poukładać numery na $n!$ sposobów, to prawdopodobieństwo wystąpienia cyklu o długości k wynosi:

$$\frac{n!}{k \cdot (n!)} = \frac{1}{k}$$

Dla naszego zbioru 100 elementów możemy mieć cykle o długości 51, 52, ..., 99, 100.

Czyli w koncu prawdopodobieństwo ze taki cykl nie pojawi się w permutacji wynosi:

$$1 - \frac{1}{51} - \frac{1}{52} - \dots - \frac{1}{100} = 0.307$$

Zad. 4 (VB)

Przyporządkowanie mężczyznom kapeluszy jest permutacją $p(n)$, gdzie n -indeks osoby, a $p(n)$ -indeks kapelusza.

Ilość permutacji n -elementowych jest $n!$.

Ilość permutacji bez punktów stałych (czyli żaden mężczyzna nie ma swojego kapelusza) wynosi

$$!n = n! \cdot \sum_{i=1}^n \frac{(-1)^i}{i!}.$$

Prawdopodobieństwo zdarzenia, że żaden kapelusz nie trafi do właściwej osoby wynosi

$$\frac{n! \cdot \sum_{i=1}^n \frac{(-1)^i}{i!}}{n!} = \sum_{i=1}^n \frac{(-1)^i}{i!}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{!n}{n!} = \frac{1}{e} = 0,3679\dots$$

Zad. 5 (PGa)

x - godzina, w której zgłasza się pierwszy proces

y - godzina, w której zgłasza się drugi proces

$$x, y \in [10, 12]$$

$|x - y| \leq \frac{10}{60}$ - warunek zajścia awarii (zdarzenia A)

Skalujemy przedział do $[0, 1]$ i rozwiązujemy powyższą nierówność:

$$x - y \leq \frac{10}{120} \wedge x - y \geq -\frac{10}{120}$$

$$x \leq y + \frac{1}{12} \wedge x \geq y - \frac{1}{12}$$

W tym wypadku, do uzyskania prawdopodobieństwa zajścia awarii wystarczy policzyć pole figury znajdującej się między powyższymi prostymi ograniczonymi przez kwadrat zbudowany na podstawie przeskalowanego przedziału czasowego.

Najłatwiej zrobić to odejmując od pola kwadratu (1×1) dwa trójkąty stworzone przez te proste

$$P(A) = 1 \cdot 1 - 2 \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot \left(1 - \frac{1}{12}\right)^2\right) = 1 - 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{11}{12}\right)^2 = 1 - \frac{121}{144} = \frac{23}{144}$$