Zad. 2 (MM)

Ogolniej zamiast liczyc funkcje gestosci dla $2X$ policzmy dla aX gdzie $a \neq 0$.
zachodzi: $\frac{\partial F_X}{\partial c}(c_0) = f_X(c_0)$ dla dowolnej zmiennej losowej ciągłej X. Niech $a > 0$.
$F_{aX}(c) = P(aX < c) = P(X < \frac{c}{a}) = F_X(\frac{c}{a})$ Zgodnie z wczesniejszym wzorem:
$f_{aX}(c_0) = \frac{\partial F_{aX}}{\partial c}(c_0) = \frac{\partial F_X}{\partial c}(\frac{c_0}{a}) = f_X(\frac{c_0}{a})\frac{\partial(\frac{c_0}{a})}{\partial c} = \frac{1}{a}f_X(\frac{c_0}{a})$
Anologicznie liczymy dla $a < 0$ (Trzeba odwrocic nierownosc w prawdopodobienstwie). Wychodzi:
$f_{aX}(c_0) = -\frac{1}{a}f_X(\frac{c_0}{a})$
Zatem ostateczny wzór to:
$f_{aX}(c_0) = \frac{1}{|a|}f_X(\frac{c_0}{a})$

Zad. 5 (SS)

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \leq \alpha, \\ \dfrac{1}{b-a} & \alpha < x < \beta \\ 0 & beta \leq x \end{cases}$$

$$EX = \int\limits_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx = \int\limits_{\alpha}^{\beta} xf(x)dx = \int\limits_{\alpha}^{\beta} \frac{x}{b-a} = \frac{a+b}{2}$$

$\mathrm{VarX} = \mathrm{EX}^2 - EX$
$VarX = \int\limits_{\alpha}^{\beta} x^2 f(x)dx - \int\limits_{\alpha}^{\beta} xf(x)dx = \frac{(b-a)^2}{12}$

Zad. 6 (MM)

Zmienna losowa Y o rozkladzie jednostajnym bedzie przyjmowac wartosci z przedziału $(0, 30)$ i oznaczac to bedzie moment w ktorym pasazer przyszedl na przystanek (0 to 7:00, 15 to 7:15 itd)
a)
Szukana wartosc to: $P(((Y + 5 > 15) \cap (Y < 15)) \cup ((Y > 15) \cap (Y + 5 > 30)))$
$P(((Y + 5 > 15) \cap (Y < 15)) \cup ((Y > 15) \cap (Y + 5 > 30))) = P(Y \in (10, 15)) + P(Y > 25) =$
$= F_Y(15) - F_Y(10) + 1 - F_Y(25) = \frac{15}{30} - \frac{10}{30} + 1 - \frac{25}{30} = \frac{1}{3}$
b)
Szukana wartosc to: $1 - P(((Y + 10 > 15) \cap (Y < 15)) \cup ((Y > 15) \cap (Y + 10 > 30)))$
$1 - P(((Y+10 > 15) \cap (Y < 15)) \cup ((Y > 15) \cap (Y+10 > 30))) = 1 - (P(Y \in (5, 15)) + P(Y > 20)) =$
$= 1 - (F_Y(15) - F_Y(5) + 1 - F_Y(20)) = 1 - (\frac{15}{30} - \frac{5}{30} + 1 - \frac{20}{30}) = \frac{1}{3}$