Zad. 1 (PGo)

Możemy wylosować k kul spośród n kul na tyle sposobów:
$|\Omega| = \binom{n}{k}$
Wyróżnioną kulę możemy wybrać na 1 sposób, pozostałe na $\binom{n-1}{k-1}$ sposobów.
$P = \frac{\binom{n-1}{k-1}}{\binom{n}{k}} = \frac{\frac{(n-1)!}{(k-1)!\cdot(n-k)!}}{\frac{n!}{k!\cdot(n-k)!}} = \frac{k}{n}$

Zad. 2 (PGo)

Losowy dobór oznacza tyle możliwości umieszczenia w pokojach:
$|\Omega| = \binom{40}{2} \cdot \binom{38}{2} \cdot ... \cdot \binom{2}{2} = \frac{40!}{2^{20}}$
Ilość umieszczeń w pokojach osobno księży, osobno zakonnic:
$|A| = \left(\binom{20}{2} \cdot \binom{18}{2} \cdot ... \cdot \binom{2}{2}\right)^2 \cdot \frac{20!}{10!^2} = \frac{20!^3}{2^{20} \cdot 10!^2}$
Czynnik $\frac{20!}{10!^2}$ odpowiada za "wymieszanie pokoi".
$P(A) = \frac{20!^3}{40! \cdot 10!^2} \approx 0,00013\%$
Ilość takich umieszczeń w pokojach, że występuje dokładnie 2i mieszanych par:
$|B| = \left(\binom{20-2i}{2} \cdot \binom{18-2i}{2} \cdot ... \cdot \binom{2}{2}\right)^2 \cdot \left(\binom{4i}{2} \cdot \binom{4i-2}{2} \cdot ... \cdot \binom{2}{2}\right) \cdot \frac{10!}{2i! \cdot (10-i)!^2} = \frac{(20-2i)!^2 \cdot 4i! \cdot 10!}{2^{20} \cdot 2i! \cdot (10-i)!^2}$
$P(B) = \frac{\frac{(20-2i)!^2 \cdot 4i! \cdot 10!}{2^{20} \cdot 2i! \cdot (10-i)!^2}}{\frac{40!}{2^{20}}} = \frac{(20-2i)!^2 \cdot 4i! \cdot 10!}{40! \cdot 2i! \cdot (10-i)!^2}$

Zad. 3 (VB)

a) Dla dowolnego więznia szansa znalezc swoj numer wynosi $\frac{50}{100} = \frac{1}{2}$. To dla 100 wiezniow:

$$\frac{1}{2^{100}} = 7.8886091e^{-31}$$

b) Założmy, ze relacja szufladka-numerek jest permutacja. Permutacja rozklada sie na cykle. Jesli numerek więznia nalezy do cyklu o dlugosci $<=$ 50, czyli więzien bedzie musial sprawdzic co najwyzej 50 komurek, to on znajdzie swoj numerek. Jesli numerek więznia znajdzie sie w cyklu o dlugosci $>$ 50, to wszyscy umierają. Czyli prawdopodobientwo sukcesu danej strategii jest rowne prawdopodobieństwu wystąpienia cyklu o dlugosci $>$ 50 w 100-elementowym zbiorze numerków. Ilosc roznych cykli o dlugosci k dla zbioru n-elementow wynosi:

$$\binom{n}{k} \cdot (k-1)! \cdot (n-k)! = \frac{n!}{k}$$

Wybieramy k elementów na $\binom{n}{k}$ sposobow, k elementow w cyklu możemy ustawic na $(k-1)!$ sposobów, a reszte elementów nie należacych do cyklu na $(n-k)!$ sposobów.
Poniewaz ogolnie mozemy poukladac numerki na $n!$ sposobow, to prawdopodobieństwo wystąpienia cyklu o dlugosci k wynosi:

$$\frac{n!}{k \cdot (n!)} = \frac{1}{k}$$

Dla naszego zbioru 100 elementow mozemy miec cykle o dlugosci 51, 52, ... 99, 100.

Czyli w koncu prawdopodobieństwo ze taki cykl nie pojawi sie w permutacji wynosi:

$$1 - \frac{1}{51} - \frac{1}{52} - ... - \frac{1}{100} = 0.307$$

Zad. 4 (VB)

Przyporządkowanie mężczyznom kapeluszy jest permutacją $p(n)$, gdzie n-indeks osoby, a $p(n)$-indeks kapelusza.
Ilosc permutacji n-elementowych jest $n!$.
Ilosc permutacji bez punktów stałych (czyli żaden meżczyzna nie ma swojego kapelusza) wynosi $!n = n! \cdot \sum_{i=1}^{n} \frac{(-1)^i}{i!}$.
Prawdopodobieństwo zdarzenia, że żaden kapelusz nie trafi do właściwej osoby wynosi

$$\frac{n! \cdot \sum_{i=1}^{n} \frac{(-1)^i}{i!}}{n!} = \sum_{i=1}^{n} \frac{(-1)^i}{i!}$$

$$\lim_{n \to \infty} \frac{!n}{n!} = \frac{1}{e} = 0,3679...$$

Zad. 5 (PGa)

x - godzina, w której zgłasza się pierwszy proces
y - godzina, w której zgłasza się drugi proces
$x, y \in [10, 12]$
$|x - y| \leq \frac{10}{60}$ - warunek zajścia awarii (zdarzenia A)
Skalujemy przedział do [0,1] i rozwiązujemy powyższą nierówność:
$x - y \leq \frac{10}{120} \ \wedge \ x - y \geq -\frac{10}{120}$
$x \leq y + \frac{1}{12} \ \wedge \ x \geq y - \frac{1}{12}$
W tym wypadku, do uzyskania prawdopodobieństwa zajścia awarii wystarczy policzyć pole figury znajdującej się między powyższymi prostymi ograniczonymi przez kwadrat zbudowany na podstawie przeskalowanego przedziału czasowego.
Najłatwiej zrobić to odejmując od pola kwadratu (1x1) dwa trójkąty stworzone przez te proste
$P(A) = 1 \cdot 1 - 2 \cdot (\frac{1}{2} \cdot (1 - \frac{1}{12})^2) = 1 - 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot (\frac{11}{12})^2 = 1 - \frac{121}{144} = \frac{23}{144}$

Zad. 6 (VB)

a) Jesli cieciwa i jeden z wiezcholkow trojkata wychodza z tego samego punktu, to cieciwa bedzie dluzsza niz bok trojkąta tylko jesli jej drugi koniec lezy na łuku miedzy dwoma przciwnymi wierzcholkami trojkata. Dlugosc tego łuku wynosi $\frac{1}{3}$ długosci koła. Czyli prawdopodobieństwo takiego zdarzenia wynosi 30%.
b) Poniewaz bok trojkata rownobocznego przecina promien tego kola w srodku promienia, to połowa cieciw prostopadlych do promienia bedzie lezala poza punktem przeciecia promienia i boku trojkata, dlatego prawdopodobienstwo wyniesie 50%.
c) Poniewaz promien mniejszego okregu wynosi $\frac{1}{2}$ promienia wiekszego, to pole mniejszego wynosi $\frac{1}{4}$ pola wiekszego, dlatego prawdopodobienstwo ze wybrany punkt lezy w mniejszym okregu wynosi 25%.