

Zad. 2 (MM)

Ogólniej zamiast liczyć funkcje gęstości dla $2X$ policzmy dla aX gdzie $a \neq 0$.
 zachodzi: $\frac{\partial F_X}{\partial c}(c_0) = f_X(c_0)$ dla dowolnej zmiennej losowej ciągłej X . Niech $a > 0$.

$F_{aX}(c) = P(aX < c) = P(X < \frac{c}{a}) = F_X(\frac{c}{a})$ Zgodnie z wcześniejszym wzorem:

$$f_{aX}(c_0) = \frac{\partial F_{aX}}{\partial c}(c_0) = \frac{\partial F_X}{\partial c}(\frac{c_0}{a}) = f_X(\frac{c_0}{a}) \frac{\partial(\frac{c_0}{a})}{\partial c} = \frac{1}{a} f_X(\frac{c_0}{a})$$

Analogicznie liczymy dla $a < 0$ (Trzeba odwrócić nierówność w prawdopodobieństwie). Wychodzi:

$$f_{aX}(c_0) = -\frac{1}{a} f_X(\frac{c_0}{a})$$

Zatem ostateczny wzór to:

$$f_{aX}(c_0) = \frac{1}{|a|} f_X(\frac{c_0}{a})$$

Zad. 5 (SS)

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \leq \alpha, \\ \frac{1}{b-a} & \alpha < x < \beta \\ 0 & \beta \leq x \end{cases}$$

$$EX = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx = \int_{\alpha}^{\beta} xf(x)dx \quad \text{Var } X = EX^2 - EX \text{Var } X = \int_{\alpha}^{\beta} x^2 f(x)dx - \left(\int_{\alpha}^{\beta} xf(x)dx\right)^2$$

Zad. 6 (MM)

Zmienna losowa Y o rozkładzie jednostajnym będzie przyjmować wartości z przedziału $(0, 30)$ i oznaczać to będzie moment w którym pasażer przyszedł na przystanek (0 to 7:00, 15 to 7:15 itd)

a)

Szukana wartość to: $P(((Y + 5 > 15) \cap (Y < 15)) \cup ((Y > 15) \cap (Y + 5 > 30)))$

$$P(((Y + 5 > 15) \cap (Y < 15)) \cup ((Y > 15) \cap (Y + 5 > 30))) = P(Y \in (10, 15)) + P(Y > 25) = \\ = F_Y(15) - F_Y(10) + 1 - F_Y(25) = \frac{15}{30} - \frac{10}{30} + 1 - \frac{25}{30} = \frac{1}{3}$$

b)

Szukana wartość to: $1 - P(((Y + 10 > 15) \cap (Y < 15)) \cup ((Y > 15) \cap (Y + 10 > 30)))$

$$1 - P(((Y + 10 > 15) \cap (Y < 15)) \cup ((Y > 15) \cap (Y + 10 > 30))) = 1 - (P(Y \in (5, 15)) + P(Y > 20)) = \\ = 1 - (F_Y(15) - F_Y(5) + 1 - F_Y(20)) = 1 - (\frac{15}{30} - \frac{5}{30} + 1 - \frac{20}{30}) = \frac{1}{3}$$