Zad. 1 (PGo)

a) $X \in \mathbb{N}_n$
b) Prawdopodobieństwa wynoszą:

- $P\{X=1\}=p$
- $P\{X=2\}=(1-p)\cdot p$

  ...
- $P\{X=i\}=(1-p)^{i-1}\cdot p$

  ...
- $P\{X=n-1\}=(1-p)^{n-2}\cdot p$
- $P\{X=n\}=(1-p)^{n-1}$

c) Można to udowodnić indukcyjnie.
Dla $n=1$ - $P\{X=1\}=1$
Dla $n=2$ - $P\{X=1\}=p$, $P\{X=2\}=1-p$. Ich suma jest równa 1.
Zakładamy, że dla $n=k$ suma prawdopodobieństw wynosi $\sum\limits_{j=1}^{k-1}(1-p)^{j-1}\cdot p+(1-p)^{k-1}=1$.
Zatem dla $n=k+1$ wynosi $\sum\limits_{j=1}^{k}(1-p)^{j-1}\cdot p+(1-p)^{k}=1+(1-p)^{k-1}\cdot(p-1)+(1-p)^{k}=1$.

Zad. 2 (VB)

3 białe (+1\$), 3 czerwone(-1\$), 5 czarnych(+0\$).
Losujemy 3 kule, to żeby całkowita suma byla dodatnia, jest 3 opcji:
1) 1\$: 1b+2czar $=\binom{3}{1}\cdot\binom{5}{2}$; 2b+1czer $=\binom{3}{2}\cdot\binom{3}{1}$;
2) 2\$: 2b+1czar $=\binom{3}{2}\cdot\binom{5}{1}$;
3) 3\$: 3b $=\binom{3}{3}$;
Ilość wszystkich mozliwych kombinacji wynosi $\binom{11}{3}$.
Prawdopodobieństwo wygranej wynosi:

$$\frac{\binom{3}{1}\cdot\binom{5}{2}+\binom{3}{2}\cdot\binom{3}{1}+\binom{3}{2}\cdot\binom{5}{1}+1}{\binom{11}{3}}$$

Zad. 6 (Spisał: PGo)

$Var(X)=E(X^2)-E^2(X)$
$Var(aX+b)=E\left((aX+b)^2\right)-E^2(aX+b)=E\left(a^2X^2+2abx+b^2\right)-(aE(X)+b)^2=a^2E\left(X^2\right)+2abE(X)-a^2E^2(X)-2abE(X)-b^2=a^2\cdot\left(E\left(X^2\right)-E^2(X)\right)=a^2Var(X)$

Zad. 7 (Spisał: PGo)

p - prawdopodobieństwo, że śrubka jest wadliwa
n - ilość śrubek w pakiecie
X - zmienna losowa oznaczająca ilość wadliwych śrubek

$P\{X=0\} = \binom{n}{0} \cdot p^0 \cdot (1-p)^n = 0,9044$
$P\{X=1\} = \binom{n}{1} \cdot p^1 \cdot (1-p)^{n-1} = 0,0914$
Prawdopodobieństwo tego, że nie będzie zwrotu pieniędzy wynosi: $1-(P\{X=0\}+P\{X=1\}) = 0,0042$

Zad. 8 (Spisał: PGo)

$\sum_{i=0}^{\infty} P\{X=i\} = e^{-\lambda} \cdot \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\lambda^i}{i!} = e^{-\lambda} \cdot e^{\lambda} = 1$