Zad. 1 (PGo)

Możemy wylosować k kul spośród n kul na tyle sposobów:
$|\Omega| = \binom{n}{k}$
Wyróżnioną kulę możemy wybrać na 1 sposób, pozostałe na $\binom{n-1}{k-1}$ sposobów.
$P = \frac{\binom{n-1}{k-1}}{\binom{n}{k}} = \frac{\frac{(n-1)!}{(k-1)!\cdot(n-k)!}}{\frac{n!}{k!\cdot(n-k)!}} = \frac{k}{n}$

Zad. 2 (PGo)

Losowy dobór oznacza tyle możliwości umieszczenia w pokojach:
$|\Omega| = \binom{40}{2} \cdot \binom{38}{2} \cdot ... \cdot \binom{2}{2} = \frac{40!}{2^{20}}$
Ilość umieszczeń w pokojach osobno księży, osobno zakonnic:
$|A| = \left(\binom{20}{2} \cdot \binom{18}{2} \cdot ... \cdot \binom{2}{2}\right)^2 \cdot \frac{20!}{10!^2} = \frac{20!^3}{2^{20}\cdot 10!^2}$
Czynnik $\frac{20!}{10!^2}$ odpowiada za "wymieszanie pokoi".
$P(A) = \frac{20!^3}{40!\cdot 10!^2} \approx 0,00013\%$
Ilość takich umieszczeń w pokojach, że występuje dokładnie 2i mieszanych par:
$|B| = \left(\binom{20-2i}{2} \cdot \binom{18-2i}{2} \cdot ... \cdot \binom{2}{2}\right)^2 \cdot \left(\binom{4i}{2} \cdot \binom{4i-2}{2} \cdot ... \cdot \binom{2}{2}\right) \cdot \frac{10!}{2i!\cdot(10-i)!^2} = \frac{(20-2i)!^2\cdot 4i!\cdot 10!}{2^{20}\cdot 2i!\cdot(10-i)!^2}$
$P(B) = \frac{\frac{(20-2i)!^2\cdot 4i!\cdot 10!}{2^{20}\cdot 2i!\cdot(10-i)!^2}}{\frac{40!}{2^{20}}} = \frac{(20-2i)!^2\cdot 4i!\cdot 10!}{40!\cdot 2i!\cdot(10-i)!^2}$

Zad. 4 (VB)

Przyporządkowanie mężczyznom kapeluszy jest permutacją $p(n)$, gdzie n-indeks osoby, a $p(n)$-indeks kapelusza.
Ilosc permutacji n-elementowych jest $n!$.
Ilosc permutacji bez punktów stałych (czyli żaden meżczyzna nie ma swojego kapelusza) wynosi $!n = n! \cdot \sum_{i=1}^{n} \frac{(-1)^i}{i!}$.
Prawdopodobieństwo zdarzenia, że żaden kapelusz nie trafi do własciwej osoby wynosi

$$\frac{n! \cdot \sum_{i=1}^{n} \frac{(-1)^i}{i!}}{n!} = \sum_{i=1}^{n} \frac{(-1)^i}{i!}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{!n}{n!} = \frac{1}{e} = 0,3679...$$

Zad. 5 (PGa)

x - godzina, w której zgłasza się pierwszy proces
y - godzina, w której zgłasza się drugi proces
$x, y \in [10, 12]$
$|x - y| \leq \frac{10}{60}$ - warunek zajścia awarii (zdarzenia A)
Skalujemy przedział do [0,1] i rozwiązujemy powyższą nierówność:
$x - y \leq \frac{10}{120} \ \wedge \ x - y \geq -\frac{10}{120}$
$x \leq y + \frac{1}{12} \ \wedge \ x \geq y - \frac{1}{12}$
W tym wypadku, do uzyskania prawdopodobieństwa zajścia awarii wystarczy policzyć pole figury znajdującej się między powyższymi prostymi ograniczonymi przez kwadrat zbudowany na podstawie przeskalowanego przedziału czasowego.

Najłatwiej zrobić to odejmując od pola kwadratu (1x1) dwa trójkąty stworzone przez te proste
$P(A) = 1 \cdot 1 - 2 \cdot (\frac{1}{2} \cdot (1 - \frac{1}{12})^2) = 1 - 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot (\frac{11}{12})^2 = 1 - \frac{121}{144} = \frac{23}{144}$