Raport 2

Szymon Stano, Jakub Kempa

4 lipca 2023

1 Zadanie 1.

1.1 Wstęp do zadania

Zadanie 1. polega na zweryfikowaniu na poziomie istotności $\alpha = 0.05$ trzech hipotez na konkretnym zbiorze danych. Hipotezy te to:

- $H_1 : \mu \neq 1.5$
- $H_1 : \mu > 1.5$
- $H_1 : \mu < 1.5$

Znając dokładnie statystykę odchylenia standardowego rozkładu testowanych zmiennych ($\sigma = 0.2$) możemy skorzystać ze wzoru na statystykę Z:

$$Z = \frac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}},$$

Dzięki użyciu tej statystyki będziemy mogli wyznaczyć wzory krytyczne oraz p - *wartości* dla każdej hipotezy, a następnie odpowiedzieć na pytanie co się stanie, gdy będziemy zwiększać lub zmniejszać poziom istotności α.

1.2 Obliczenia

Aby skorzystać z powyższej statystyki potrzebujemy średniej arytmetycznej, wartości dla hipotezy zerowej μ_0 oraz $\sqrt{n}$. Wartości te są równe:

- $\overline{X} = 1.45546595425 \approx 1.455$
- $\mu_0 = 1.5$
- $\sqrt{n} = \sqrt{1000} = 31.622776601683793 \approx 31.623$

Zatem wartość naszej statystyki Z jest równa

$$Z = \frac{1.455 - 1.5}{\frac{0.2}{31.623}} = -7.041450899607091 \approx -7.041$$

W następnym etapie należy wyznaczyć zbiory krytyczne dla trzech zadanych przypadków hipotezy alternatywnej. Poniżej zostały wyjaśnione oznaczenia zmiennych:

- $Z \sim N(0, 1)$
- $z = -7.041$ - otrzymana wartość statystyki testowej Z
- Φ - dystrybuanta rozkładu normalnego $N(0, 1)$

- **Pierwsza hipoteza alternatywna -** $H_1 : \mu \neq 1.5$

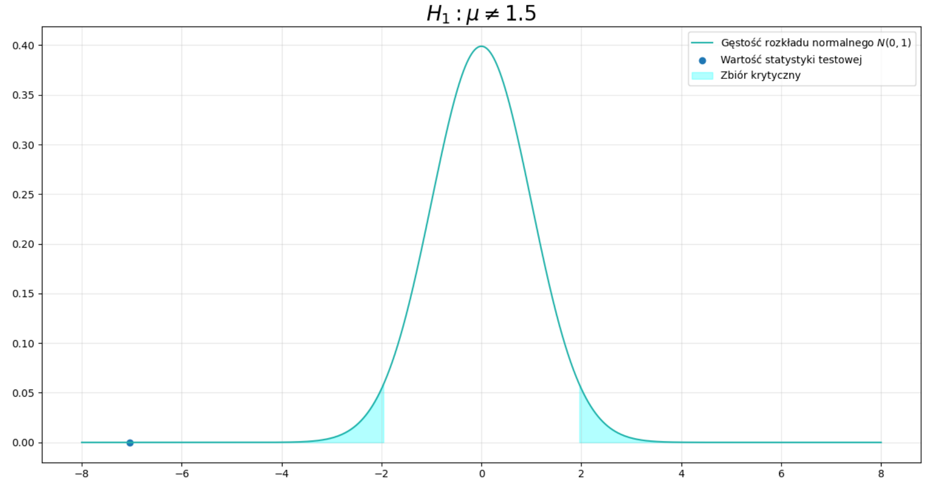
Zbiór krytyczny dla tej hipotezy alternatywnej jest określany poprzez:

$$Z \in (-\infty; -z_{1-\frac{\alpha}{2}}) \cup (z_{1-\frac{\alpha}{2}}; \infty)$$

Gdzie po wyznaczeniu kwantyla rzędu $1 - \frac{\alpha}{2}$ standardowego rozkładu normalnego:

$$z_{1-\frac{\alpha}{2}} = 1.959963984540054 \approx 1.96$$

$$p - value = 2P_{H_0}(Z \geqslant |z|) = 2(1 - \Phi(z)) = 1.9024781749976682 \cdot 10^{-12} \approx 1.902 \cdot 10^{-12}$$



Rysunek 1: Zbiory krytyczne dla $H_1 : \mu \neq 1.5$

Na powyższym wykresie (Rysunek 1) zostały przedstawione wyżej obliczone zbiory krytyczne oraz wartość statystyki testowej. Widzimy, że znajduje się ona w zbiorze krytycznym, zatem odrzucamy hipotezę zerową $H_0 : \mu = 1.5$ i przyjmujemy hipotezę alternatywną $H_1 : \mu \neq 1.5$.

- **Druga hipoteza alternatywna -** $H_1 : \mu > 1.5$

Zbiór krytyczny dla tej hipotezy alternatywnej jest określany poprzez:

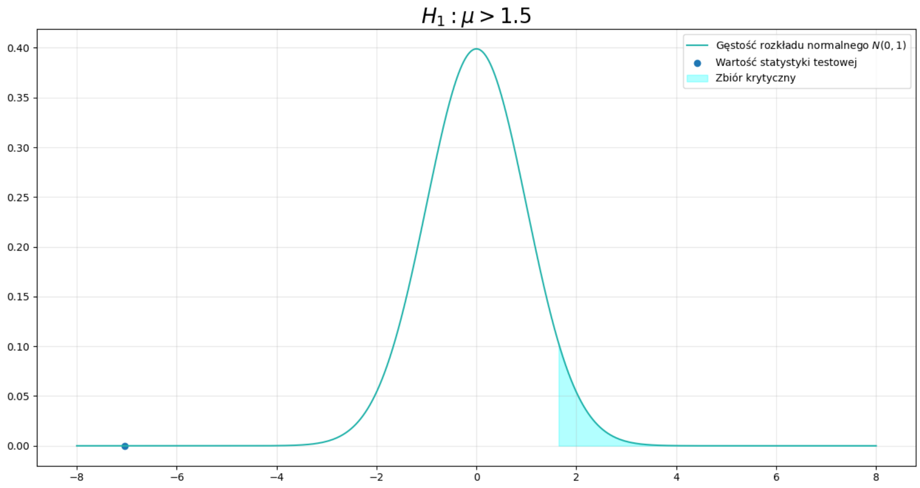
$$Z \in (z_{1-\frac{\alpha}{2}}; \infty)$$

Gdzie po wyznaczeniu kwantyla rzędu $1 - \alpha$ standardowego rozkładu normalnego:

$$z_{1-\alpha} = 1.6448536269514722 \approx 1.645$$

$$p - value = P_{H_0}(Z \geqslant z) = 1 - \Phi(z) = 0.9999999999990488 \approx 1.0$$

Na poniższym wykresie (Rysunek 2) został przedstawiony wyżej obliczony zbiór krytyczny oraz wartość statystyki testowej. Widzimy, że znajduje się ona poza zbiorem krytycznym, zatem nie mamy podstaw do odrzucenia hipotezy zerowej $H_0 : \mu = 1.5$.



Rysunek 2: Zbiory krytyczne dla $H_1 : \mu < 1.5$

- **Trzecia hipoteza alternatywna** - $H_1 : \mu < 1.5$

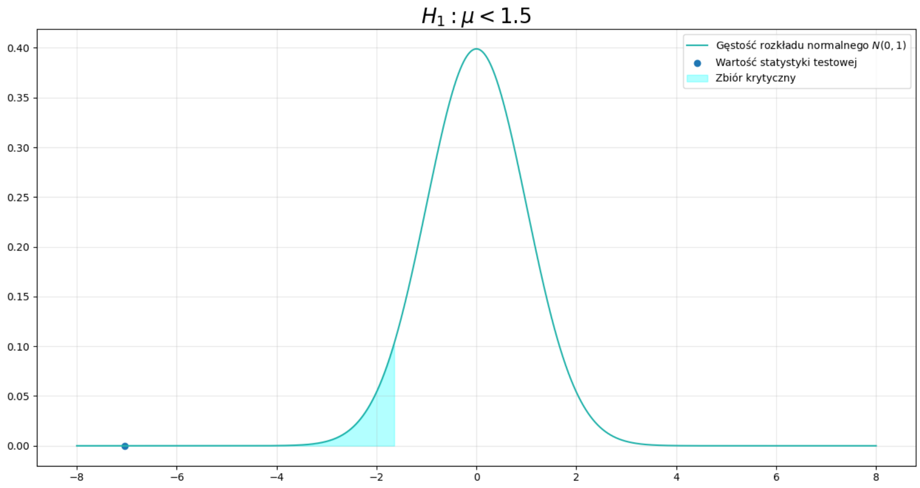
Zbiór krytyczny dla tej hipotezy alternatywnej jest określany poprzez:

$$Z \in (-\infty; -z_{1-\frac{\alpha}{2}})$$

Gdzie po wyznaczeniu kwantyla rzędu $1 - \alpha$ standardowego rozkładu normalnego z poprzedniego punktu:

$$z_{1-\alpha} \approx 1.645$$

$$p - value = P_{H_0}(Z \leqslant z) = \Phi(z) = 9.51241291241344 \cdot 10^{-13} \approx 9.512 \cdot 10^{-13}$$



Rysunek 3: Zbiory krytyczne dla $H_1 : \mu < 1.5$

Na powyższym wykresie (Rysunek 3) został przedstawiony wyżej obliczony zbiór krytyczny oraz wartość statystyki testowej. Widzimy, że znajduje się ona w zbiorze krytycznym, zatem, podobnie jak w pierwszym przypadku, odrzucamy hipotezę zerową $H_0 : \mu = 1.5$ i przyjmujemy hipotezę $H_1 : \mu < 1.5$.

1.3 Wnioski

Dla dwóch hipotez alternatywnych $H_1 : \mu \neq 1.5$ oraz $H_1 : \mu < 1.5$ statystyka testowa znalazła się w obszarze krytycznym. Hipoteza zerowa $H_0 : \mu = 1.5$ została zatem przez nas w tym przypadkach odrzucona na rzecz odpowiednich hipotez alternatywnych.
Odmienne zachowanie przejawiała hipoteza alternatywna $H_1 : \mu > 1.5$. W tym przypadku statystyka testowa znalazła się poza zbiorem krytycznym, a zatem nie było podstaw do odrzucenia hipotezy zerowej. Biorąc pod uwagę te fakty można więc wnioskować, że nasza próba ma w rzeczywistości rozkład o średniej mniejszej niż 1.5.

Otrzymane *p-values* potwierdzają powyższe rozważania. Dla hipotez alternatywnych $H_1 : \mu \neq 1.5$ i $H_1 : \mu < 1.5$ *p-value* jest bardzo małą liczbą i prowadzi to do odrzucenia hipotezy zerowej. Natomiast dla $H_1 : \mu > 1.5$ *p-value* jest w przybliżeniu równa 1, zatem przyjmujemy hipotezę zerową za prawdziwą.

Zwiększenie poziomu istotności α spowoduje poszerzenie się obszarów krytycznych, a co za tym idzie: zwiększenie prawdopodobieństwa popełnienia błędu I rodzaju (odrzucenie prawdziwej hipotezy zerowej) i zmniejszenie prawdopodobieństwa popełnienia błędu II rodzaju (błędne nieodrzucenie hipotezy zerowej). Analogicznie, gdy zmniejszymy α, zmniejszy się prawdopodobieństwo popełnienia błędu I rodzaju oraz moc testu, a zwiększy prawdopodobieństwo popełnienia błędu II rodzaju.

2 Zadanie 2.

2.1 Wstęp do zadania

Zadanie 2. polega na zweryfikowaniu na takim samym jak w pierwszym zadaniu poziomie istotności $\alpha = 0.05$ trzech hipotez na konkretnym zbiorze danych. Hipotezy te to:

- $H_1 : \sigma^2 \neq 1.5$
- $H_1 : \sigma^2 > 1.5$
- $H_1 : \sigma^2 < 1.5$

Znając dokładnie statystykę średniej rozkładu testowanych zmiennych ($\mu = 0.2$) możemy skorzystać ze wzoru na statystykę χ^2:

$$\chi^2 = \frac{s^2(n-1)}{\sigma^2}$$

Dzięki użyciu tej statystyki będziemy mogli wyznaczyć wzory krytyczne oraz p - *wartości* dla każdej hipotezy, a następnie odpowiedzieć na pytanie co się stanie, gdy będziemy zwiększać lub zmniejszać poziom istotności α.

2.2 Obliczenia

Aby skorzystać z powyższej statystyki potrzebujemy empirycznej wartości wariancji, wartości dla hipotezy zerowej σ^2 oraz ilość testowanych danych n. Wartości te są równe:

- $s^2 = 1.6664526733522602 \approx 1.666$
- $\sigma^2 = 1.5$
- $n = 1000$

Zatem wartość statystyki χ^2 jest równa

$$\chi^2 = \frac{1.666 \cdot (1000-1)}{1.5} = 1109.8574804526054 \approx 1109.857$$

W następnym etapie należy wyznaczyć zbiory krytyczne dla trzech zadanych przypadków hipotezy alternatywnej. Poniżej wyjaśnione zostały oznaczenia zmiennych:

- $\chi \sim \chi^2(999)$
- $\chi^2 = 1109.857$ - otrzymana wartość statystyki testowej
- F_{χ^2} - dystrybuanta rozkładu $\chi^2(999)$

- **Pierwsza hipoteza alternatywna -** $H_1 : \sigma^2 \neq 1.5$

Zbiór krytyczny dla tej hipotezy alternatywnej jest określany poprzez:

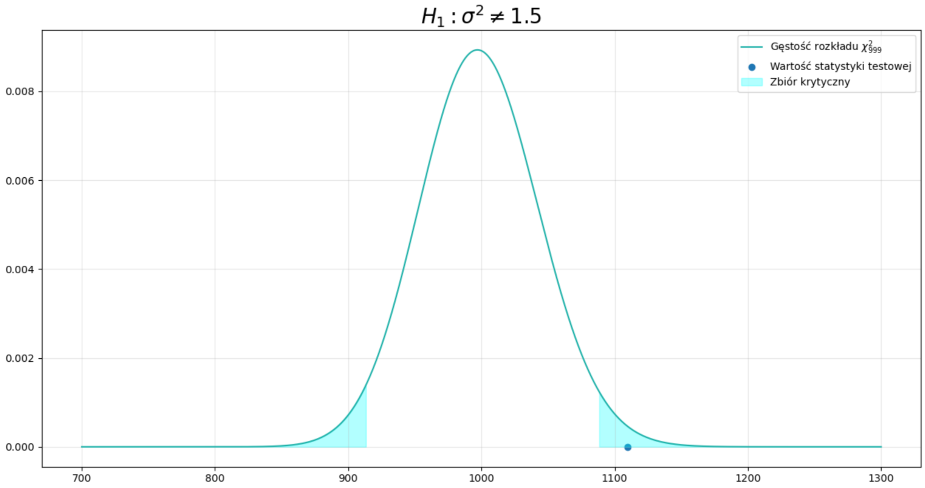
$$\chi^2 \in (0; \chi^2_{\frac{\alpha}{2},999}) \cup (\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2};999}; \infty)$$

Gdzie po wyznaczeniu kwantyla rzędu $\alpha/2$ z 999 stopniami swobody oraz kwantyla rzędu $1-\alpha/2$ z 999 stopniami swobody rozkładu χ^2:

$$\chi^2_{\frac{\alpha}{2},999} = 913.3009983021134 \approx 913.301$$

$$\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2},999} = 1088.4870677259353 \approx 1088.487$$

$$p-value = P_{H_0}(\chi \geqslant |\chi^2|) = 2(1 - F_{\chi^2}(\chi^2)) = 0.016011673877854404 \approx 0.016$$



Rysunek 4: Zbiory krytyczne dla $H_1 : \sigma^2 \neq 1.5$

Na powyższym wykresie (Rysunek 4) został przedstawiony wyżej obliczony zbiór krytyczny oraz wartość statystyki testowej. Widzimy, że znajduje się ona w policzonym zbiorze krytycznym, zatem odrzucamy hipotezę zerową $H_0 : \sigma^2 = 1.5$ i przyjmujemy hipotezę alternatywną $H_1 : \sigma^2 \neq 1.5$

- **Druga hipoteza alternatywna -** $H_1 : \sigma^2 > 1.5$

Zbiór krytyczny dla tej hipotezy alternatywnej jest określany poprzez:

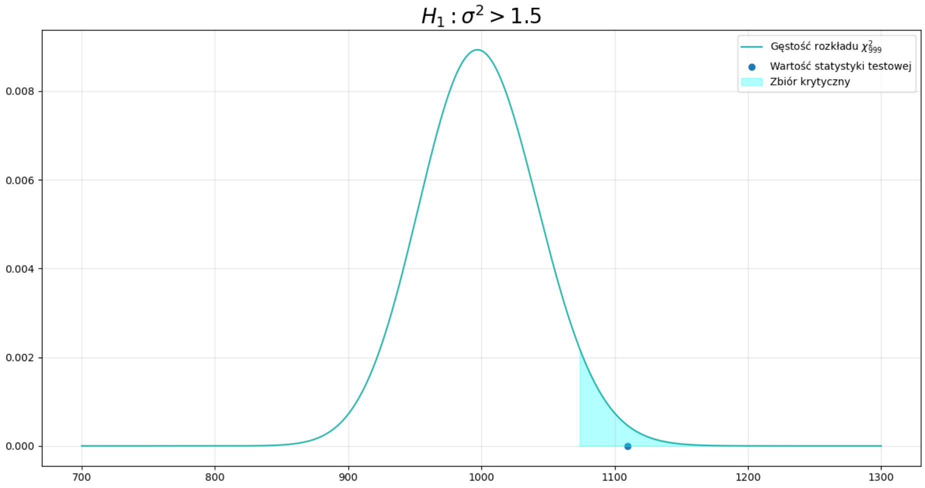
$$\chi^2 \in (\chi^2_{1-\alpha,999}; \infty)$$

Gdzie po wyznaczeniu kwantyla rzędu $1-\alpha$ z 999 stopniami swobody rozkładu χ^2 otrzymujemy:

$$\chi^2_{1-\alpha,999} = 1073.6426506574246 \approx 1073.643$$

$$p-value = P_{H_0}(\chi \geqslant \chi^2) = 1 - F_{\chi^2}(\chi^2) = 0.008005836938927202 \approx 0.008$$

Na poniższym wykresie (Rysunek 5) został przedstawiony wyżej obliczony zbiór krytyczny oraz wartość statystyki testowej. Widzimy, że znajduje się ona w policzonym zbiorze krytycznym, zatem odrzucamy hipotezę zerową $H_0 : \sigma^2 = 1.5$ i przyjmujemy hipotezę alternatywną $H_1 : \sigma^2 > 1.5$



Rysunek 5: Zbiory krytyczne dla $H_1 : \sigma^2 > 1.5$

- **Trzecia hipoteza alternatywna** - $H_1 : \sigma^2 < 1.5$

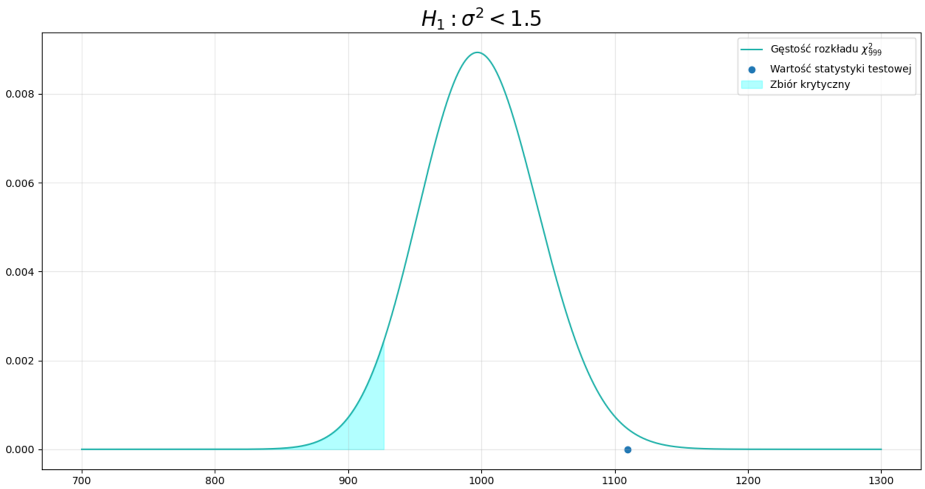
Zbiór krytyczny dla tej hipotezy alternatywnej jest określany poprzez:

$$\chi^2 \in (0;\ \chi^2_{\alpha,999})$$

Gdzie po wyznaczeniu kwantyla rzędu α z 999 stopniami swobody rozkładu χ^2 otrzymujemy:

$$\chi^2_{\alpha,999} = 926.6311609204329 \approx 926.631$$

$$p - value = P_{H_0}(\chi \leqslant \chi^2) = F_{\chi^2}(\chi^2) = 0.9919941630610728 \approx 0.992$$



Rysunek 6: Zbiory krytyczne dla $H_1 : \sigma^2 < 1.5$

Na powyższym wykresie (Rysunek 6) został przedstawiony wyżej obliczony zbiór krytyczny oraz wartość statystyki testowej. Widzimy, że znajduje się ona poza policzonym zbiorem krytycznym, zatem nie ma podstaw, aby odrzucić hipotezę zerową $H_0 : \sigma^2 = 1.5$.

2.3 Wnioski

Dla pierwszej oraz drugiej hipotezy alternatywnej (odpowiednio $H_1 : \sigma^2 \neq 1.5$ oraz $H_1 : \sigma^2 > 1.5$) można zauważyć, że wartość policzonej statystyki testowej zawiera się w zbiorach krytycznych, co powoduje, że odrzucamy hipotezę zerową ($H_0 : \sigma^2 = 1.5$) na rzecz hipotez alternatywnych. Jednak w przypadku trzeciej hipotezy alternatywnej $H_1 : \sigma^2 < 1.5$ wartość statystyki testowej znajduje się poza zbiorem krytycznym, sugerując przyjęcie hipotezy zerowej.
Powyższa analiza pozwala stwierdzić, że wartość wariancji σ^2 dla analizowanej przez nas próby jest większa od tej przyjętej w hipotezie zerowej.

Otrzymane *p-values* potwierdzają powyższe rozważania. Dla hipotez alternatywnych $H_1 : \sigma^2 \neq 1.5$ i $H_1 : \sigma^2 > 1.5$ *p-value* jest bardzo małą liczbą, co prowadzi to do odrzucenia hipotezy zerowej. Natomiast dla $H_1 : \sigma^2 < 1.5$ *p-value* jest w przybliżeniu równa 1, zatem przyjmujemy hipotezę zerową za prawdziwą.

Podobnie jak w pierwszym zadaniu, możemy stwierdzić, że zwiększając wartość poziomu istotności α będziemy poszerzać obszary krytyczne, a co za tym idzie, zwiększać prawdopodobieństwo odrzucenia hipotezy zerowej. Jednocześnie wzrośnie prawdopodobieństwo popełnienia błędu I rodzaju (błędne odrzucenie hipotezy zerowej), co byłoby sytuacją niekorzystną. Z drugiej strony zmaleje prawdopodobieństwo popełnienia błędu II rodzaju (przyjęcie hipotezy zerowej, gdy jest ona nieprawdziwa) przy jednoczesnym zwiększeniu mocy testu. W przypadku zmniejszania wartości α nastąpi sytuacja odwrotna.

3 Zadanie 3.

3.1 Wstęp do zadania

W zadaniu 3. korzystając z hipotez z zadań 1. oraz 2. należy symulacyjnie wyznaczyć prawdopodobieństwa popełnienia błędów I i II rodzaju. Dodatkowo należy sprawdzić moce testów.

3.2 Błąd I rodzaju

Aby symulacyjnie wyznaczyć wartości błędów I rodzaju dla zadania 1. wykonaliśmy następujące kroki:

1. Ustalenie α ze zbioru $\alpha \in \{0.01, 0.05, 0.1\}$.
2. Wygenerowanie $X_1, ..., X_n \sim N(\mu = 1.5,\ \sigma^2 = (0.02)^2)$, dla $n = 1000$.
3. Wyznaczenie zbiorów krytycznych dla każdej hipotezy alternatywnej i każdej wartości ze zbioru α.
4. Wyznaczenie statystyki Z (lub χ^2, w zależności od testowanej statystyki) i sprawdzenie czy znajduje się ona w obszarze krytycznym.
5. Powtórzenie kroków 2 - 4 $MC = 10^6$ razy i zliczenie ile razy statystyka testowa jest w obszarze krytycznym
6. Wartość $\frac{\#\{Z \text{ w obszarze krytycznym}\}}{MC}$ to błąd I rodzaju

Otrzymane wyniki dla zadania 1. przedstawiono w tabeli poniżej (Tabela 1).

	Błąd I rodzaju (zadanie 1)		
	$H_1 : \mu \neq 1.5$	$H_1 : \mu > 1.5$	$H_1 : \mu < 1.5$
$\alpha = 0.01$	0.010037	0.009944	0.009942
$\alpha = 0.05$	0.049975	0.050002	0.050467
$\alpha = 0.1$	0.100334	0.099895	0.100038

Tabela 1: Błędy I rodzaju dla różnych wartości α dla zadania 1.

Procedura liczenia wartości dla zadania 2. wygląda dokładnie tak samo, z wyjątkiem generowania wartości w 2. punkcie ($X_1, ..., X_n$ powinny być wygenerowane z rozkładu normalnego $N(\mu = 0.2,\ \sigma^2 = 1.5)$). Wyniki przedstawiono w tabeli poniżej (Tabela 2)

	Błąd I rodzaju (zadanie 2)		
	$H_1 : \sigma^2 \neq 1.5$	$H_1 : \sigma^2 > 1.5$	$H_1 : \sigma^2 < 1.5$
$\alpha = 0.01$	0.010082	0.009446	0.010775
$\alpha = 0.05$	0.050100	0.047875	0.052072
$\alpha = 0.1$	0.100461	0.096066	0.104207

Tabela 2: Błędy I rodzaju dla różnych wartości α dla zadania 2.

3.3 Błąd II rodzaju oraz moc testu

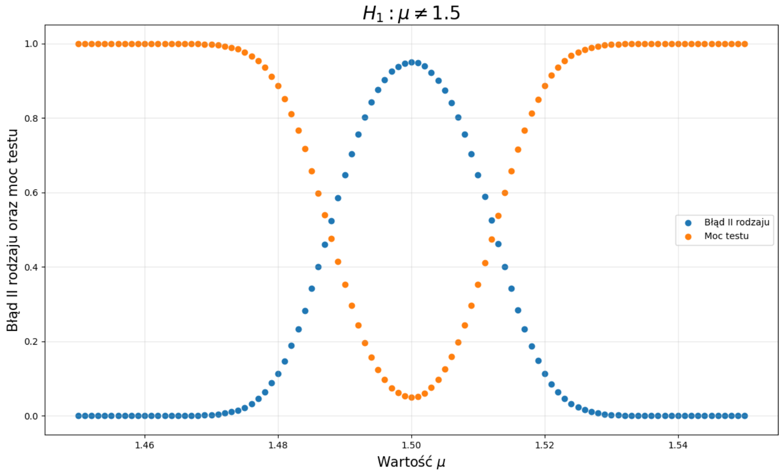
Aby symulacyjnie wyznaczyć wartości błędów II rodzaju dla zadania 1. wykonaliśmy następujące kroki:

1. Ustalenie $\alpha = 0.05$, wybranie μ_0 ze zbioru $\mu \in \{1.45, 1.451, ..., 1.549, 1.55\}$.
2. Wygenerowanie $X_1, ..., X_n \sim N(\mu = \mu_0,\ \sigma^2 = (0.02)^2)$, dla $n = 1000$.
3. Wyznaczenie zbiorów krytycznych dla każdej hipotezy alternatywnej.
4. Wyznaczenie statystyki Z (lub χ^2, w zależności od testowanej statystyki) i sprawdzenie czy znajduje się ona w obszarze krytycznym.
5. Powtórzenie kroków 2 - 4 $MC = 10^5$ razy i zliczenie ile razy statystyka testowa jest poza obszarem krytycznym.
6. Wartość $\frac{\#\{Z \text{ poza obszarem krytycznym}\}}{MC}$ to błąd II rodzaju.
7. Wartość $1 - \frac{\#\{Z \text{ poza obszarem krytycznym}\}}{MC}$ to moc testu.

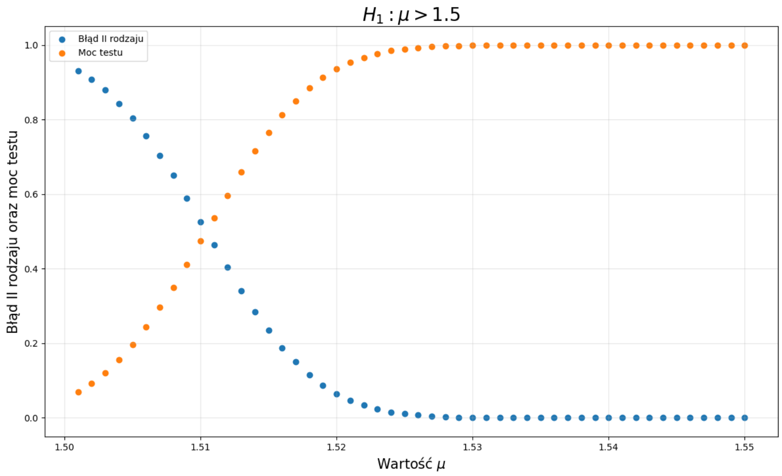
Otrzymane wyniki dla zadania 1. przedstawiono na wykresach poniżej, gdzie Rysunki 7, 8, 9 to wykresy dla hipotezy H_1 odpowiednio $\mu \neq 1.5,\ \mu > 1.5,\ \mu < 1.5$.

Różniące się rozmiary wektora wartości μ biorą się ze względnej bezużyteczności wartości błędów II rodzaju dla $\mu > 1.5$ oraz $\mu < 1.5$. Na rysunku 8 wartości błędu I rodzaju dla μ_0 mniejszych od 1.5 wynoszą w przybliżeniu 1 - tak samo jak na rysunku 9 dla μ_0 większych od 1.5.

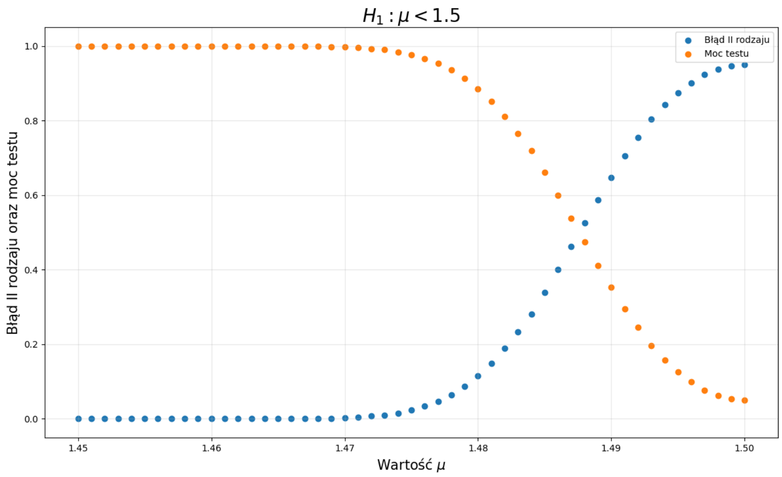
Dla wygody i przejrzystości na jednym wykresie został zamieszczony jednocześnie błąd II rodzaju, jak i moc testu, zdefiniowana w 7. punkcie powyżej.



Rysunek 7: Wartości błędów II rodzaju oraz moce testów w zależności od μ dla $H_1 : \mu \neq 1.5$



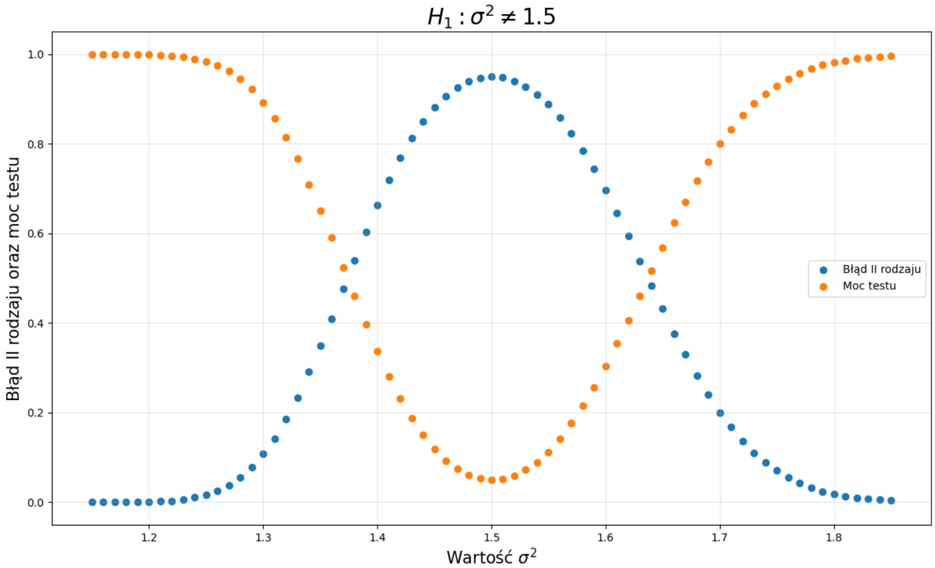
Rysunek 8: Wartości błędów II rodzaju oraz moce testów w zależności od μ dla $H_1 : \mu > 1.5$



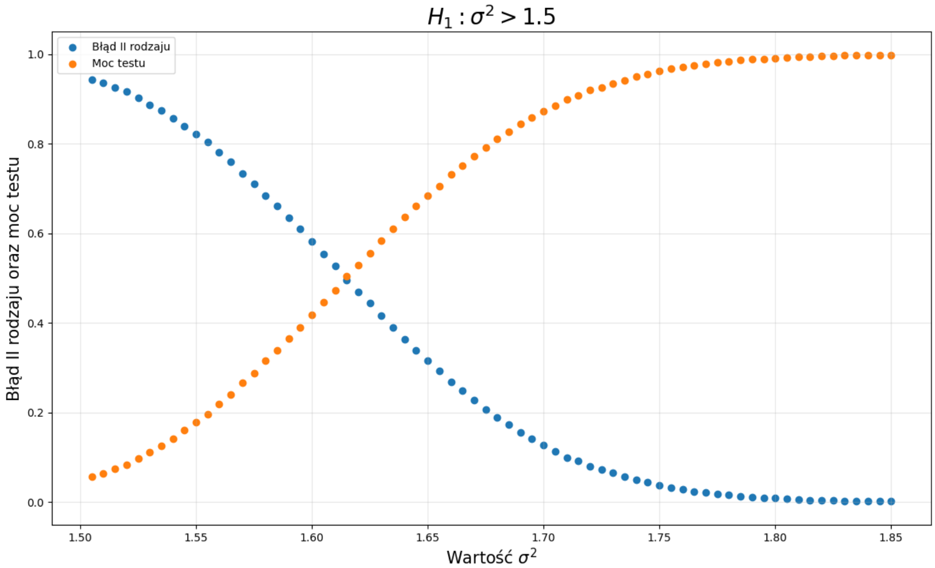
Rysunek 9: Wartości błędów II rodzaju oraz moce testów w zależności od μ dla $H_1 : \mu < 1.5$

Błąd II rodzaju dla zadania 2. liczymy dokładnie tą samą procedurą, jednak tym razem wybieramy w 1. punkcie σ_0^2 ze zbioru $\sigma^2 \in \{1.15, 1.155, ..., 1.845, 1.85\}$ oraz generujemy w punkcie 2. $X_1, ..., X_n \sim N(\mu = 0.2,\ \sigma^2 = \sigma_0^2)$. Otrzymane wyniki dla zadania 2. również przedstawiliśmy na wykresach poniżej, gdzie Rysunki 10, 11, 12 to wykresy dla hipotezy H_1 odpowiednio $\sigma^2 \neq 1.5,\ \sigma^2 > 1.5,\ \sigma^2 < 1.5$.

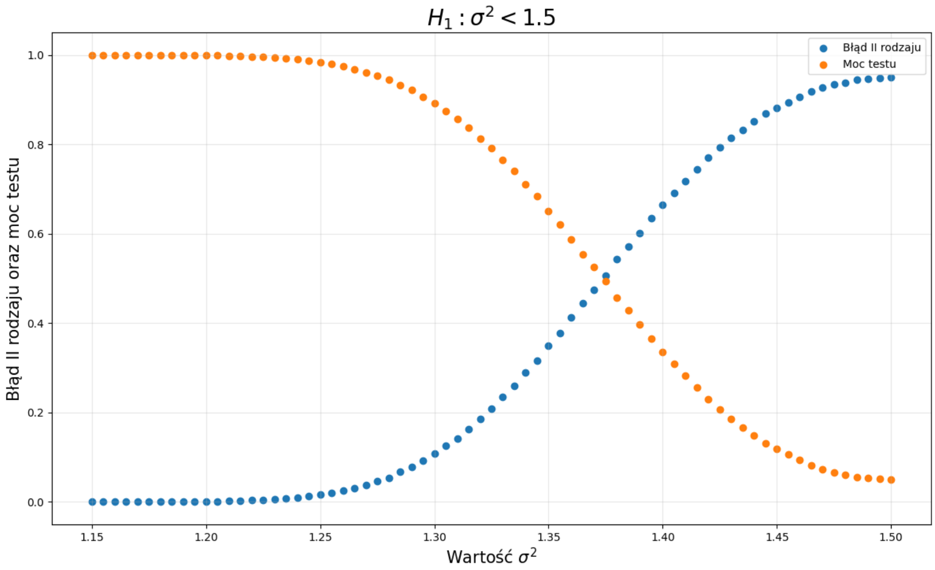
Różniące się rozmiary wektora wartości σ^2 ponownie biorą się ze względnej bezużyteczności wartości błędów II rodzaju dla $\sigma^2 > 1.5$ oraz $\sigma^2 < 1.5$. Podobnie, jak dla pierwszego zadania, na rysunku 11 wartości błędu I rodzaju dla σ_0^2 mniejszych od 1.5 wynoszą w przybliżeniu 1 - tak samo jak na rysunku 12 dla σ_0^2 większych od 1.5.



Rysunek 10: Wartości błędów II rodzaju oraz moce testów w zależności od σ^2 dla $H_1 : \mu \neq 1.5$



Rysunek 11: Wartości błędów II rodzaju oraz moce testów w zależności od σ^2 dla $H_1 : \mu > 1.5$



Rysunek 12: Wartości błędów II rodzaju oraz moce testów w zależności od σ^2 dla $H_1 : \mu < 1.5$

3.4 Wnioski

Błąd I rodzaju - Błędy I rodzaju dla każdej hipotezy alternatywnej oraz wartości α w obu zadaniach oscylują wokół teoretycznej wartości poziomu istotności α. Dzięki temu można stwierdzić, że symulacja została przeprowadzona prawidłowo. W rezultacie prawdopodobieństwo popełnienia błędu I rodzaju rośnie wraz ze wzrostem poziomu istotności testu α i maleje analogicznie wraz ze zmniejszeniem się α.

Błąd II rodzaju i moc testu - W zadaniu 1. widzimy, że dla μ (analogicznie σ^2) oddalonych o więcej niż 0.2 od wartości teoretycznej $\mu = 1.5$ (analogicznie $\sigma^2 = 1.5$) uzyskiwaliśmy wartość 0 oraz moc testu równą 1. Dowodzi to dużej dokładności testu; jest w stanie wykryć bardzo małe odchylenia od wartości teoretycznej.
Jednocześnie widzimy, że dla $\mu = 1.5$ (analogicznie $\sigma^2 = 1.5$) moc testu osiąga wartość równą poziomowi ufności α.
Jednocześnie im bardziej wartości μ lub σ^2 oddalają się od hipotezy zerowej, błąd II rodzaju maleje, a moc testu rośnie.