Akademia Górniczo-Hutnicza
Wydział Elektrotechniki, Automatyki, Informatyki i Inżynierii Biomedycznej

Teoria Sterowania II: Ćwiczenia Laboratoryjne

Sprawozdanie: Ćwiczenie 5.

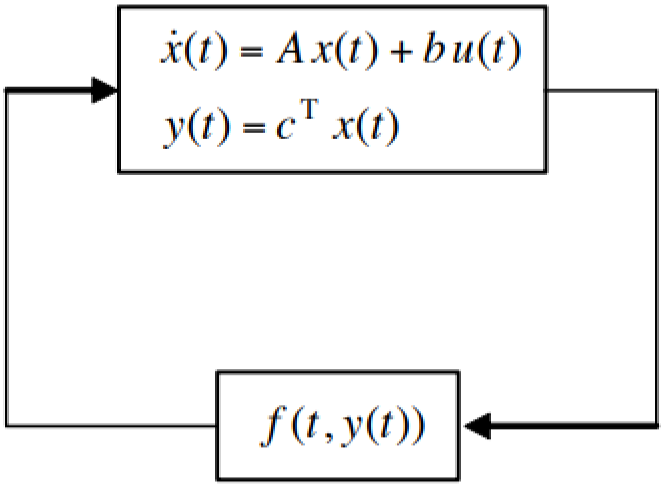
Kryterium Koła i Twierdzenie Popova

Andrzej Janik

Kraków, 28 maja 2023

1 Cel ćwiczenia

Celem ćwiczenia jest zapoznanie się z Kryterium Koła oraz Twierdzeniem Popova. Służą one do badania stabilności nieliniowych systemów dynamicznych, w których skład wchodzi stacjonarny, liniowy system dynamiczny o jednym wejściu i jednym wyjściu (SISO - Single Input Single Output) objęty sprzężeniem zwrotnym $u(t) = f(t, y(t))$. Schemat blokowy takiego układu przedstawiono poniżej.



Rysunek 1: Układ regulacji

2 Przebieg ćwiczenia

2.1 Zadanie 5.1

Zadanie to polegało na wyznaczeniu największego sektoru dopuszczalnego w kryterium koła oraz sektor Popova dla systemu dynamicznego opisanego transmitancję:

$$G(s) = \frac{4(1-5s)}{(1+3s)(1+2s)} \tag{1}$$

Po przekształceniach:

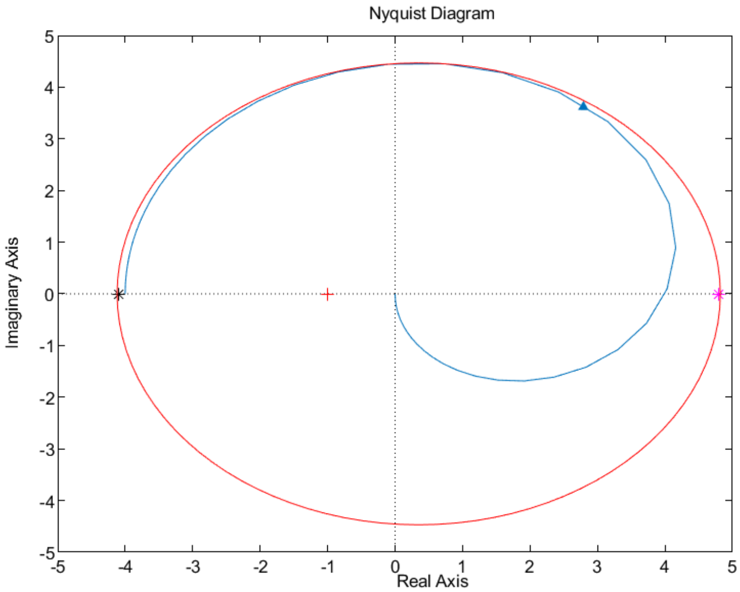
$$G(s) = \frac{-20s+4)}{6s^2+5s+1} \tag{2}$$

Następnie wyrysowano charakterystykę amplitudowo-fazową systemu dla pulsacji $\omega \geq 0$, gdyż część dla $\omega \leq 0$ jest jej symetrycznym odbiciem wzglęem osi 0P. Mając charakterystykę Nyquista należało znaleźć takie parametry m_1 oraz m_2, które spełniają charakterystykę częstotliwościową:

$$1 - (m_1 + m_2)P + m_1 m_2 (P^2 + Q^2) > 0 \tag{3}$$

Wartości parametrów m_1 oraz m_2 wyznaczonych geometrycznie wynoszą:

1. $m_1 = -0.2439$
2. $m_2 = 0.2083$



Rysunek 2: Charakterystyka Nyquista

Następnie sprawdziłem czy istnieje takie $m_0 \in [m_1, m_2]$, które gwarantuje asymptotyczną stabilność macierzy $A + bm_0c^T$. Wybrałem $m_0 = 0.05$ wtedy macierz ta ma postać:

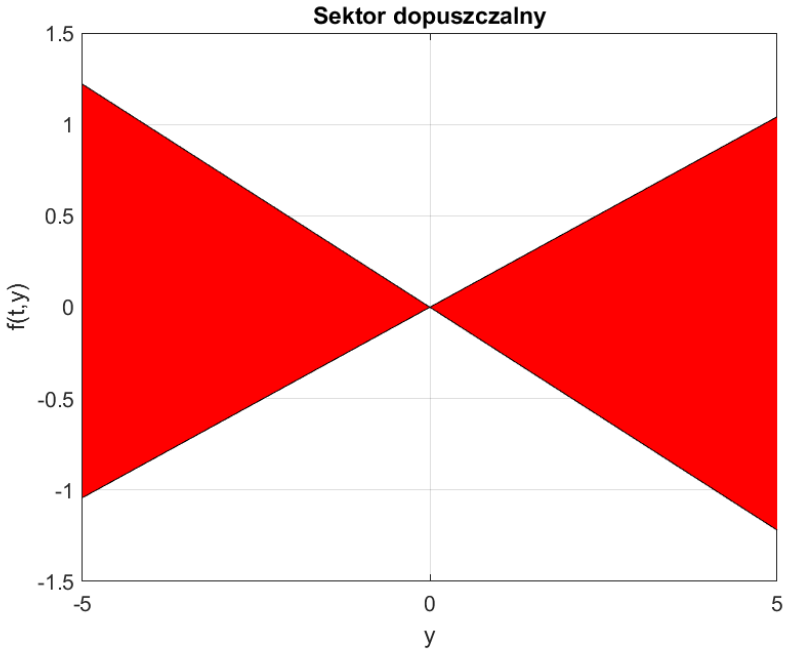
$$A + bm_0c^T = \begin{bmatrix} -0.6667 & -0.2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \tag{4}$$

Wartości własne:

$$\lambda_1 = -0.3333 - 0.2981i \tag{5}$$

$$\lambda_2 = -0.3333 + 0.2981i \tag{6}$$

Obie wartośći własne są ujemne więc macierz $A + bm_0c^T$ jest asymptotycznie stabilna. Znalezione parametry wyznaczają zatem sektor dopuszczalny w kryterium koła, który przedstawiono na rysunku 3



Rysunek 3: Sektor dopuszczalny

Naturalne jest dązenie do osiągnięcia jak największego sektora, istnieje on w przypadku gdy całą charakterystykę częstotliwościową da się zamknąć wewnątrz odpowiedniego okręgu tzn. należy wybrać najmniejszy okrąg wówczas wartośći bezwględne m_1 oraz m_2 są duże a sektor dopuszczalny największy.
Przechodzimy do wyznaczenia największego możliwego sektora Popova. W typowym sposobie korzystania z twierdzenia Popova na początku musimy sprawdzić założenie o wykładniczej stabilności macierzy A, która ma postać:

$$A = \begin{bmatrix} -0.8333 & -0.1667 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \tag{7}$$

Wartości własne macierzy A:

$$\lambda_1 = -\frac{1}{2} \tag{8}$$

$$\lambda_2 = -\frac{1}{3} \tag{9}$$

Następnie wyznaczamy zmodyfikowaną charakterystykę częstotliwościową i wyrysowujemy jej wykres. Jej wzór to:

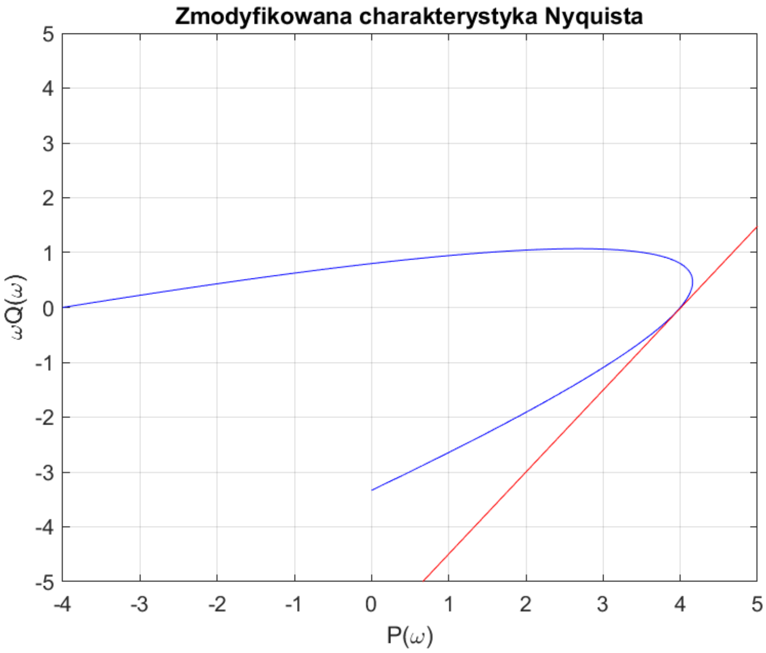
$$\tilde{G}(j\omega) = P(\omega) + j\omega Q(\omega) \tag{10}$$

Po przekształceniach otrzymujemy:

$$\tilde{G}(j\omega) = \frac{124\omega^2 - 4}{36\omega^4 + 13\omega^2 + 1} + j\frac{-120\omega^4 + 40\omega^2}{36\omega^4 + 13\omega^2 + 1} \tag{11}$$

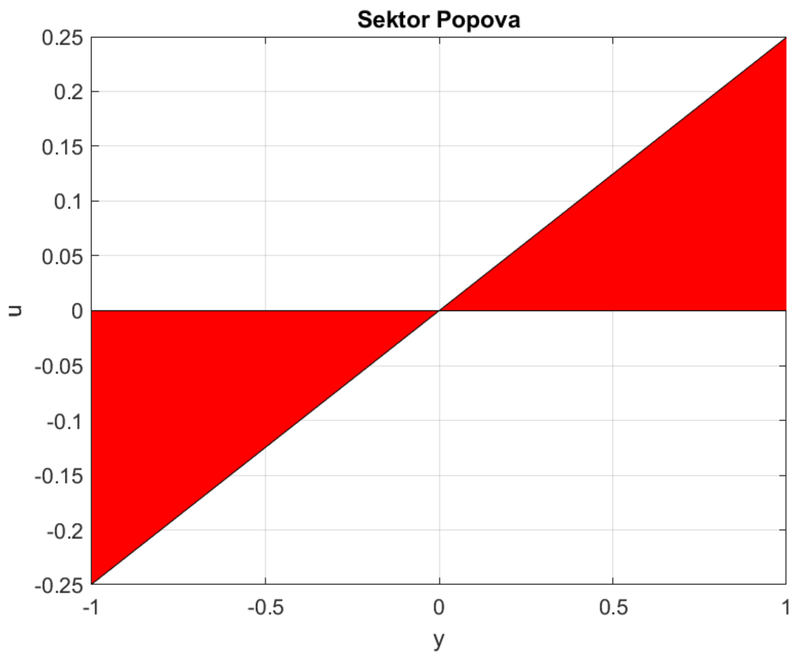
W kolejnym kroku znajdujemy tzw. prostą Popova, która przecina dodatnią półoś 0P jak najbliżej punktu 0 i taką by zmodyfikowana charakterystyka amplitudowo-fazowa leżała w całości na lewo od niej. Współrzędna punktu przecięcia prostej Popova z półosią OP jest równa $1/m$ zaś kąt jej nachylenia będący współczynnikiem kierunkowym $(tg\alpha)$ oznaczamy poprzez $1/q$. Wyznaczona przeze mnie prosta ma równanie:

$$y = 1.494x - 5.99 \tag{12}$$



Rysunek 4: Zmodyfikowana charakterystyka Nyquista

A wyznaczona wartość parametru m wynosi $m = 0.2494$.



Rysunek 5: Sektor Popova

2.2 Zadanie 5.2

Dany jest system dynamiczny:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + bu(t) \tag{13}$$

$$y(t) = c^T x(t) \tag{14}$$

gdzie,

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{15}$$

$$b = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{16}$$

$$c^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{17}$$

System ten objęto dodatnim sprzężeniem zwrotnym za pomocą nieliniowego, statycznego, stacjonarnego elementu o charakterystyce

$$u(t) = Marctg(y(t)), M > 0 \tag{18}$$

Należało określić największą wartość parametru M, przy której charakterystyka elementu nieliniowego mieści się jeszcze w sektorze Popova(sektorze dopuszczalnym w kryterium koła). W związku z tym zostały przeprowadzone te same rozważania co w Zadaniu 5.1. Wyznaczono transmitancję G(s) dla tego systemu:

$$G(s) = \frac{-s^2}{s^3 + 2s^2 + s + 1} \tag{19}$$

Wartości własne wielomianu charakterystycznego:

$$\lambda_1 = -1.7549 \tag{20}$$

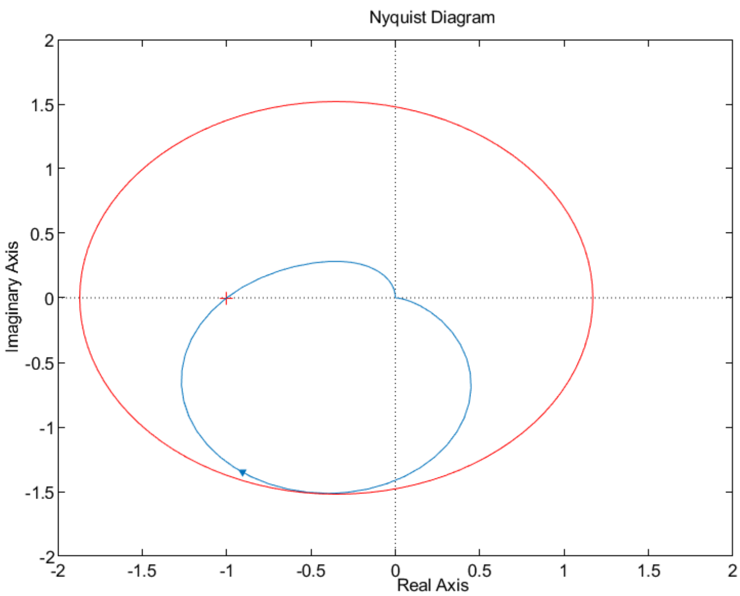
$$\lambda_2 = -0.1226 - 0.7449i \tag{21}$$

$$\lambda_3 = -0.1226 + 0.7449i \tag{22}$$

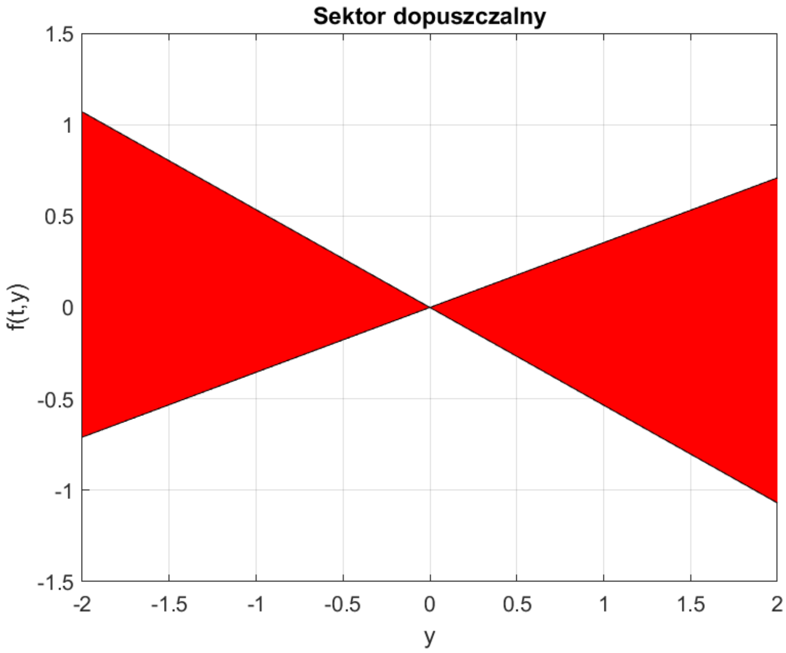
Wszystkie wartości własne mają ujemne części rzeczywiste co oznacza, że macierz A jest asymptotycznie stabilna. Wykreślam charakterystykę amplitudowo-fazową dla G(s) i rysuję koło, w którym mieści się ta charakterystyka i dobieram parametry m_1 oraz m_2 czyli punkty przecięcia z osią 0P. Wyznaczono parametry:

1. $m_1 = -0.5348$
2. $m_2 = 0.8547$

Dla wartości $m_0 = 0.5$ sprawdzam asymptotyczną stabilność macierzy $A + bm_0c^T$ i jest ona asymptotycznie stabilna, co potwierdza, że znalezione parametry wyznaczają sektor dopuszczalny w kryterium koła.
Efekty moich działań zaprezentowane są na poniższych rysunkach.



Rysunek 6: Charakterystyka Nyquista



Rysunek 7: Sektor dopuszczalny

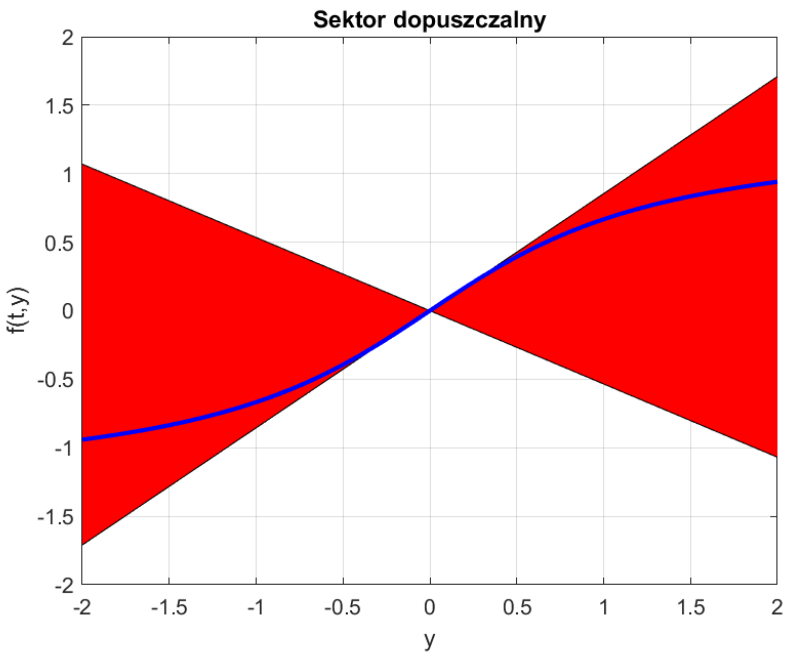
Następnie przystąpiłem do wyznaczenia maksymalnej wartości parametru M, przy której charakterystyka elementu nieliniowego mieści się w sektorze dopuszczalnym w kryterium koła. Aby to osiągnąć muszą być spełnione następujące warunki: dla y $<$ 0

$$-0.5348y \geq Marctg(y(t)) \geq 0.8547y \tag{23}$$

oraz dla y $>$ 0

$$-0.5348y \leq Marctg(y(t)) \leq 0.8547y \tag{24}$$

Udało mi się wyznaczyć wartość $M = 0.85$ oraz narysowałem wykres prezentujący poprawność moich działań.



Rysunek 8: Sektor dopuszczalny z nieliniową funkcją dla M = 0.85

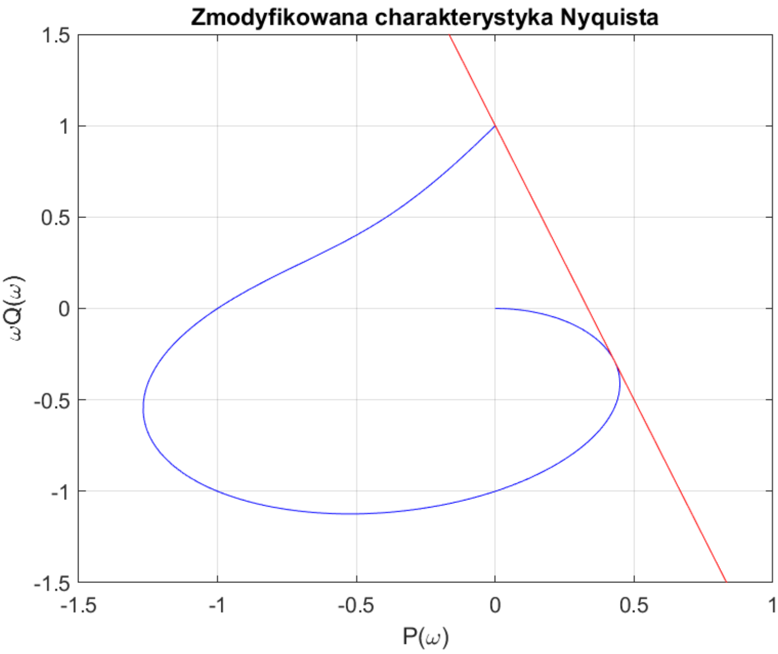
Następnie postępuje analogicznie korzystając z twierdzenia Popova. Zmodyfikowana charakterystyka Nyquista ma postać:

$$\tilde{G}(j\omega) = \frac{-2\omega^4 + \omega^2}{\omega^6 + 2\omega^4 - 3\omega^2 + 1} + j\frac{\omega^6 - \omega^4}{\omega^6 + 2\omega^4 - 3\omega^2 + 1} \tag{25}$$

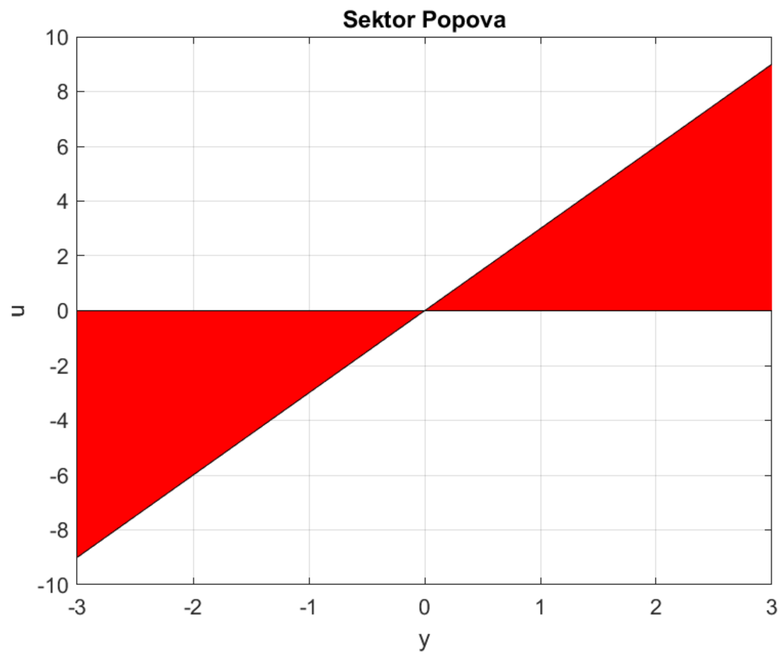
Wyznaczam wzór na prostą Popova:

$$y = -3x + 1 \tag{26}$$

Przecięcie z osią 0P znajduje się w punkcie $(-\frac{1}{3}, 0)$ dlatego też $m = 3$.



Rysunek 9: Zmodyfikowana charakterystyka Nyquista



Rysunek 10: Sektor Popova

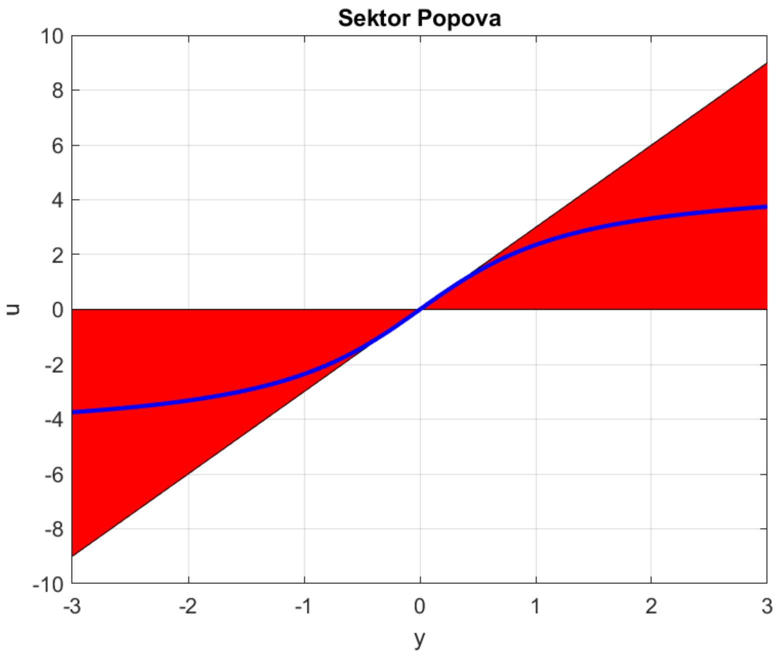
Teraz wyznaczam maksymalną wartość parametru M. Podobnie jak w przypadku kryterium koła musimy spełnić dwie nierówności:
dla y < 0

$$0 \geq Marctg(y(t)) \geq 3y \tag{27}$$

oraz dla y > 0

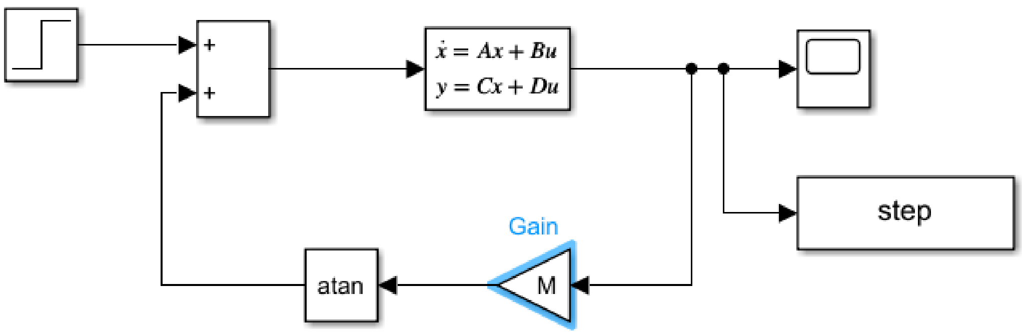
$$0 \leq Marctg(y(t)) \leq 3y \tag{28}$$

Udało mi się doświadczalnie wyznaczyć wartość $M = 3$.

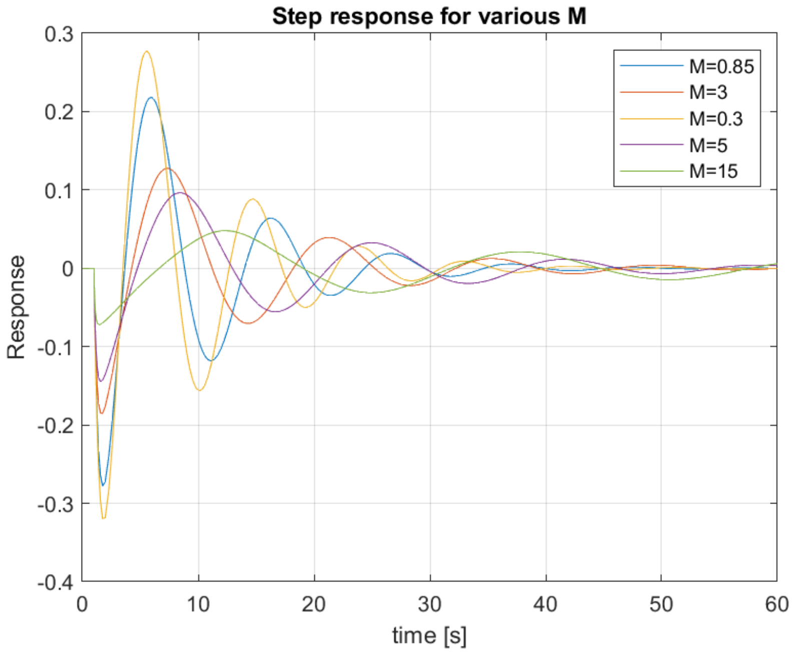


Rysunek 11: Sektor Popova z nieliniową funkcją dla M = 3

Jak można zauważyć na rysunku 11 charakterystyka nieliniowego, statycznego, stacjonarnego elementu mieści się w całej swojej dziedzinie w sektorze Popova.
Następnie przy pomocy Simulinka przetestowałem działanie układu regulacji, zbadałem odpowiedź układu na wymuszenie skokowe. Układ w simulinku oraz przebiegi czasowe wyglądają następująco:



Rysunek 12: Układ regulacji w Simulinku



Rysunek 13: Odpowiedzi skokowe dla różnych wartości M

Z rysunku 13 możemy zauważyć, że dobrane wartośći parametru M z kryterium koła i twierdzenia Popova nie są maksymalnymi możliwymi wartościami. Możemy w rzeczywistości dobrac duzo większe M aby nasz układ dalej był stabilny.

3 Opis wniosków i obserwacji

Za pomocą kryterium koła i twierdzenia Popova można badać stabilność niektórych układów nieliniowych np. systemów z jednym wejściem i jednym wyjściem (SISO) objętych sprzężeniem zwrotnym. Warunkiem ich zastosowania jest wykładnicza stabilność macierzy stanu nad którą prowadzimy rozważania. Jedną z różnic pomiędzy rozważanymi kryteriami jest to, ze sektor dopuszczalny w kryterium koła obejmuje 4 ćwiartki układu współrzędnych gdy sektor Popova tylko 2 ćwiartki układu współrzędnych, lecz w zadaniu 5.2 twierdzenie Popova lepiej się sprawdziło do wyznaczanie większej wartości parametru M, przy której układ zachowuje się stabilnie. Sektor Popova ma jedną wadę, ponieważ jest on ograniczony przez oś 0P zawęża klasę regulatorów, które są stosowane w danym systemie dynamicznym.

Literatura

[1] Teoria Sterowania: Materiały pomocnicze do ćwiczeń Laboratoryjnych - Baranowski, Hajduk, Korytowski, Mitkowski, Tutaj - AGH 2007