Akademia Górniczo-Hutnicza
Wydział Elektrotechniki, Automatyki, Informatyki i Inżynierii Biomedycznej

Teoria Sterowania II: Ćwiczenia Laboratoryjne

Sprawozdanie: Ćwiczenie 6.

Systemy Dyskretne

Andrzej Janik

Kraków, 28 maja 2023

1 Cel ćwiczenia

Celem ćwiczenia było zapoznanie się z podstawowymi właściwościami systemów dynamicznych dyskretnych w czasie. System dyskretny zwykle opisuje się modelem matematycznym w postaci odpowiednich równań rekurencyjnych. Z modelami w postaci równań rekurencyjnych spotykamy się najczęściej w dwóch przypadkach:

1. przy opisie komputerowych układów sterowania
2. przy numerycznym rozwiązywaniu równań różniczkowych

Podczas laboratorium duzy nacisk został nałożony na czas próbkowania oraz kwestii związanych z jego wartością i zachowaniem się badanego układu.

2 Przebieg ćwiczenia

2.1 Zadanie 7.1

Zadanie polegało na zamodelowaniu układu RLC w Simulinku. Na wejściu systemu zależało podłączyc ekstrapolator rzędu zerowego, obliczyć macierze A^{+}, B^{+}, C^{+} dla zadanego h i przeanalizowaćzachowania układu dyskretnego-ciągłego w zależności od parametru h. Macierze A,B,C układu RLC mają postać:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -6 & -5 \end{bmatrix} \tag{1}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ 6 \end{bmatrix} \tag{2}$$

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 6 \end{bmatrix} \tag{3}$$

Następnie analitycznie wyznaczono macierze A^{+}, B^{+}, C^{+} według następujących wzorów:

$$A^{+} = e^{At} = Pe^{Jh}P^{-}1 \tag{4}$$

$$B^{+} = \int_0^h e^{At}\, dy \tag{5}$$

$$C^{+} = C \tag{6}$$

Macierze wyznaczone analitycznie prezentują się następująco:

$$A^{+} = \begin{bmatrix} 3e^{-2h} - 2e^{-3h} & e^{-2h} - e^{-3h} \\ -6e^{-2h} + 6e^{-3h} & -2e^{-2h} + 3e^{-3h} \end{bmatrix} \tag{7}$$

$$B^{+} = \begin{bmatrix} -3e^{-2h} + 2e^{-3h} \\ 6e^{-2h} - 6e^{-3h} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{8}$$

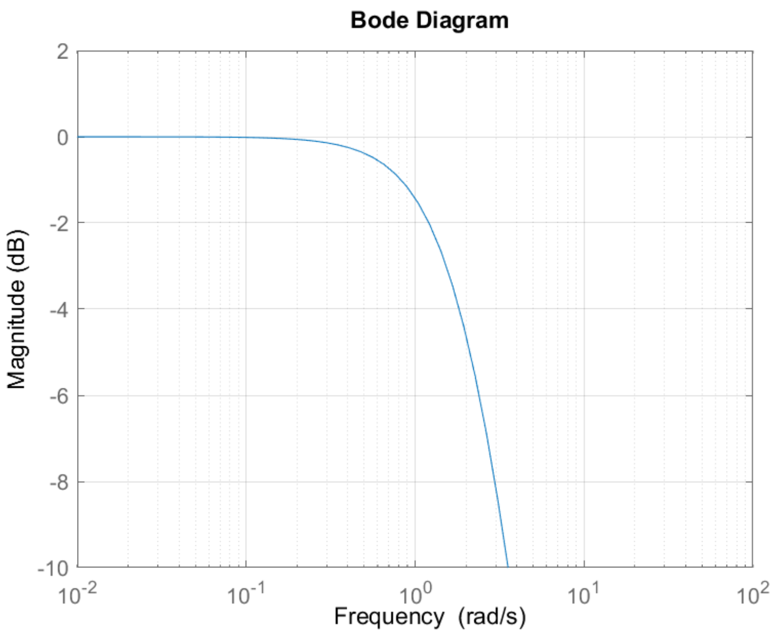
Po podstawieniu wartości $h = 0.6981$ otrzymujemy macierze:

$$A^{+} = \begin{bmatrix} 0.4963 & 0.1244 \\ -0.7463 & -0.1256 \end{bmatrix} \tag{9}$$

$$B^{+} = \begin{bmatrix} 0.5037 \\ 0.7463 \end{bmatrix} \tag{10}$$

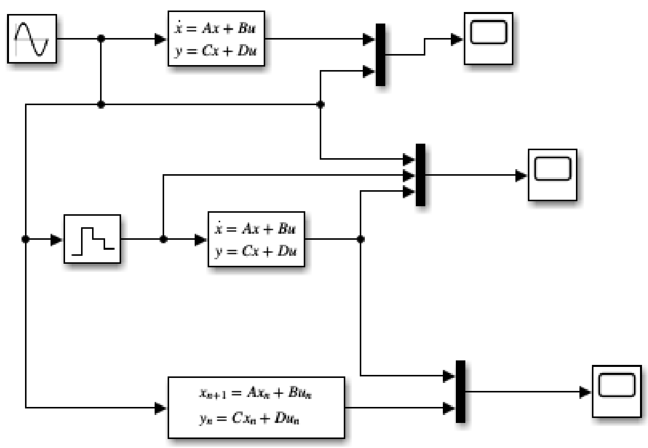
Wyznaczone macierze zgadzają się z tymi, które zostały zwrócone w wyniku zastosowania wbudowanej funkcji matlabowej *c2d*.

Na początku za pomocą chrakterystyki Bodego wyznaczliśmy wartość pulsacji, dla którego nasz system ma zapas modułu równy *-3dB*. Wartość -3dB jest uważana jako akceptowalny kompromis pomiędzy rzeczywistym sygnałem a ograniczeniami powstałymi na skutek okresu próbkowania i tą wartość pulsacji ω wykorzystaliśmy do wyznaczenia maksymalnego okresu próbkowania h_max.



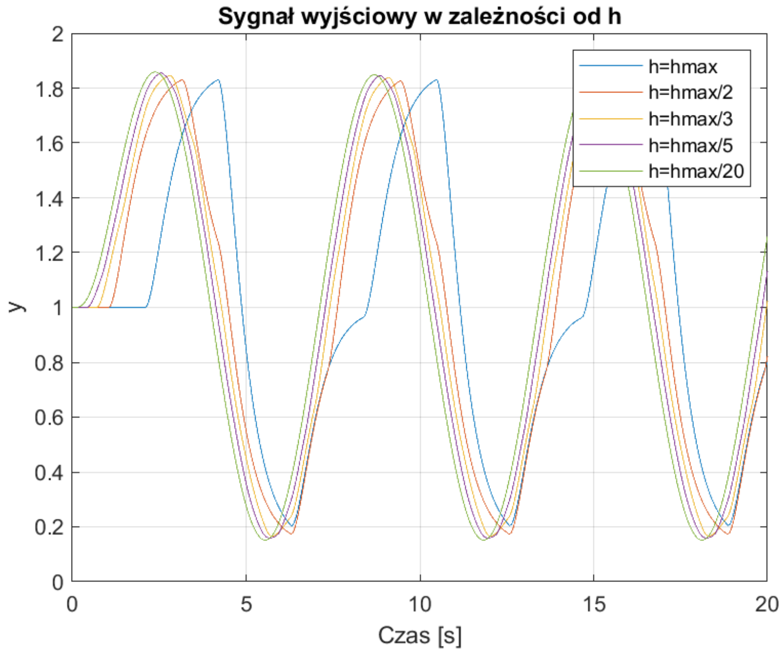
Rysunek 1: Charakterystyka Bodego.

Układ zbudowany w programie Simulink:

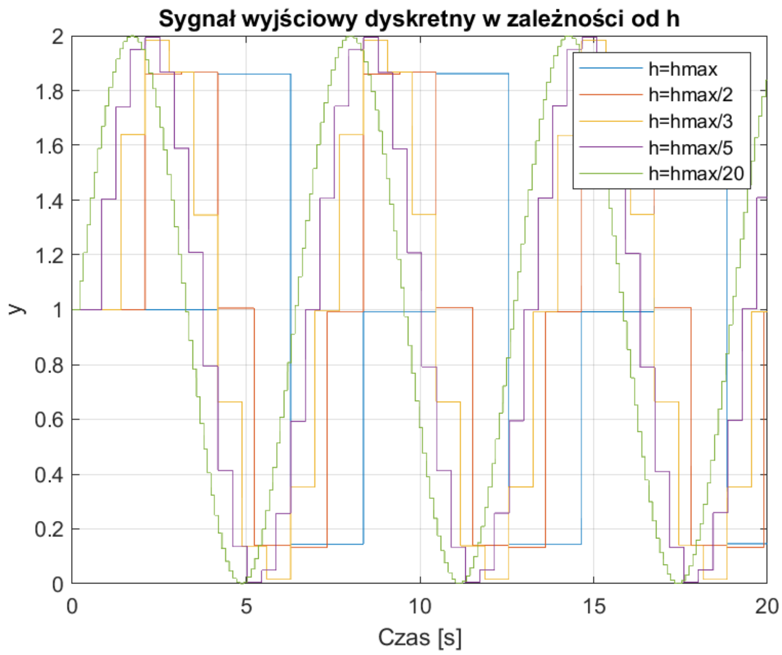


Rysunek 2: Układ w Simulinku

Dla różnych wartości h badaliśmy zachowanie naszego układu.

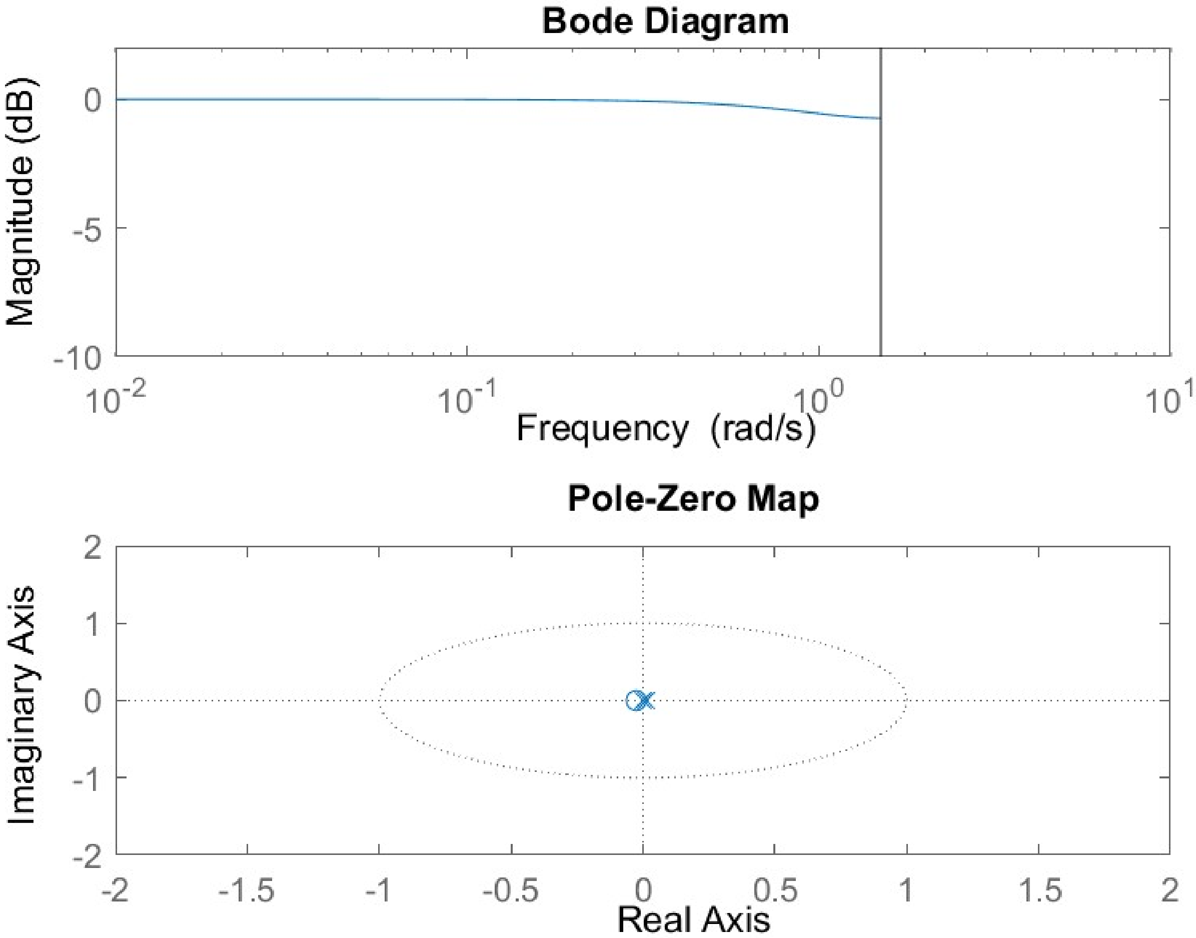


Rysunek 3: Sygnał wyjściowy ze bloku state-space w zależnośći od h.

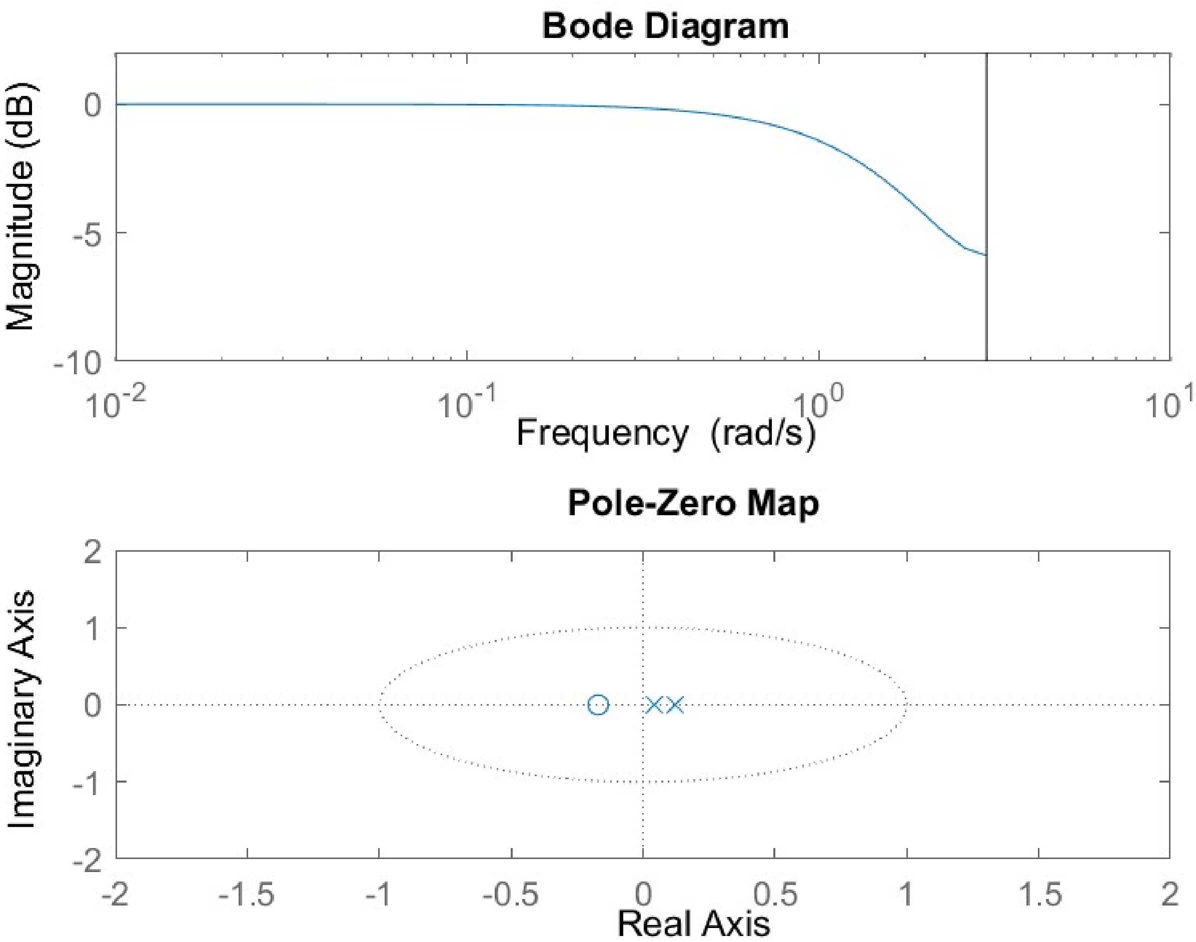


Rysunek 4: Sygnał wyjściowy dyskretny w zależnośći od h.

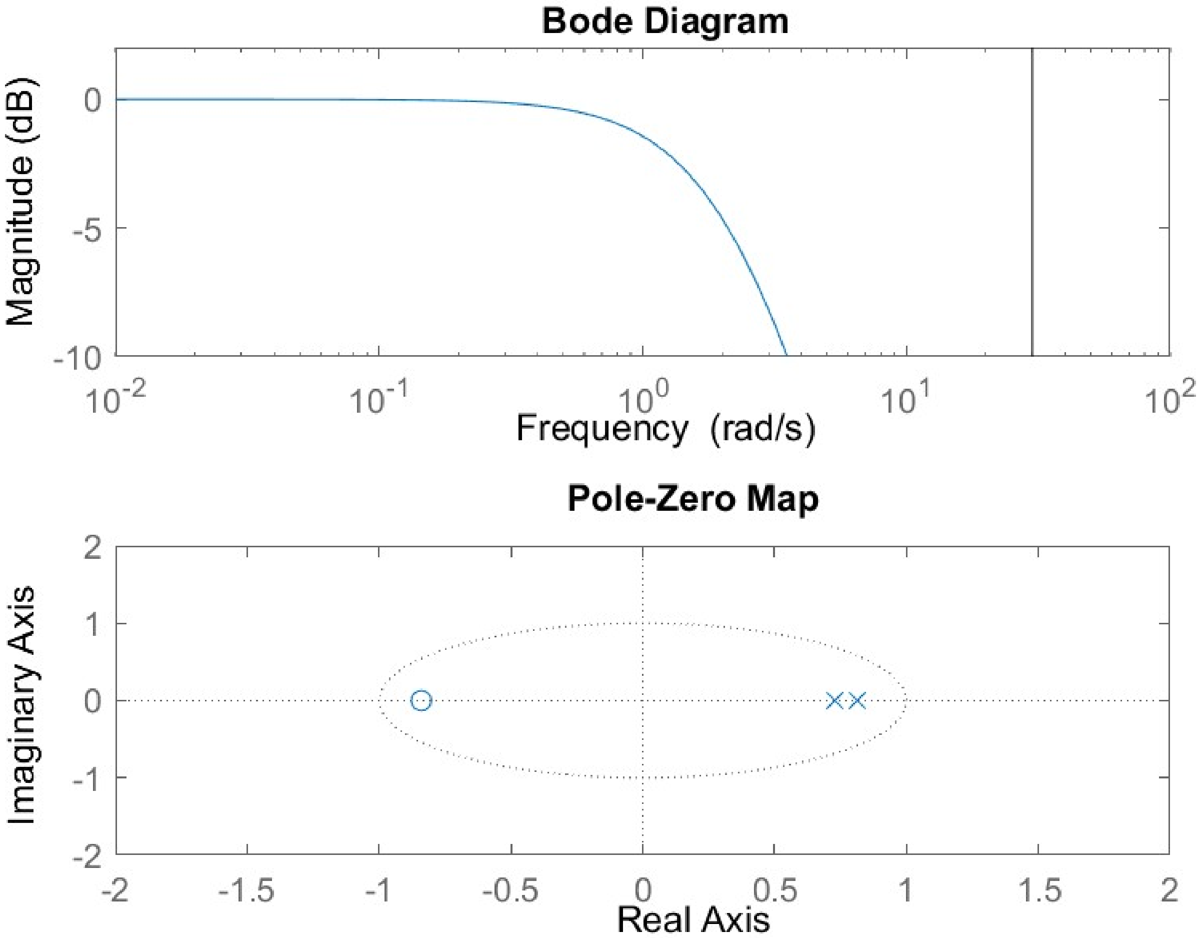
Dla różnych wartości h mogłem zaobserwować różny kształt charakterystyki Bodego oraz umiejscowienie zer i biegunów na wykresie narysowanym dzięki pzmap.



Rysunek 5: Charakterystyka Bodego i pzmap dla h = hmax



Rysunek 6: Charakterystyka Bodego i pzmap dla h = hmax / 2



Rysunek 7: Charakterystyka Bodego i pzmap dla h = hmax / 20

Symbolem 'x' zaznaczone są bieguny i jeśli są one po prawej stronie układu współrzędnych na osi x to oznacza stabilność układu bez oscylacji. Aby układ był stabilny to jego bieguny muszą leżeć wewnątrz koła o promieniu 1.

2.2 Zadanie 7.2

Zadanie polegało na przeanalizowaniu się schematów różnicowych dla macierzy systemu ciągłego:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \tag{11}$$

W zależności od wielkości h i na porównaniu rozwiązań numerycznych z rozwiązaniem analitycznym układu ciągłego w czasie. Aby rozwiązać to analitycznie wiemy, że:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) \tag{12}$$

Więc możemy zapisać to w postaci układu równań:

$$\dot{x}_1(t) = -x_1(t) \tag{13}$$

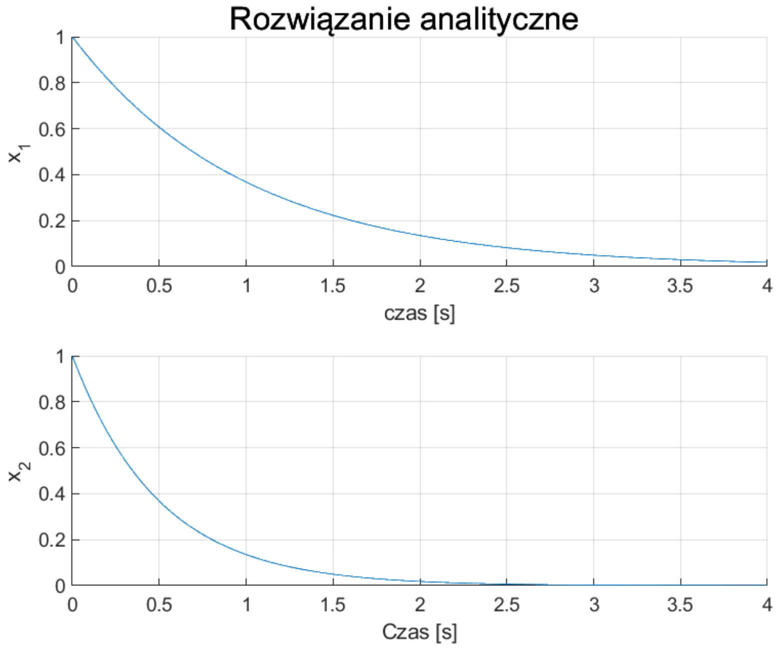
$$\dot{x}_2(t) = -2x_2(t) \tag{14}$$

Rozwiązaniem powyższego układu równań jest:

$$x_1(t) = e^{-t}x(0) \tag{15}$$

$$x_2(t) = e^{-2t}x(0) \tag{16}$$

Rozpatruje układ dla warunków początkowych $x = [1, 1]$ i przebiegi czasowe zostały przedstawione poniżej.



Rysunek 8: Rozwiązanie analityczne.

Następnie przeprowadzono analizę dla 3 metod różnicowych. Pierwszą z nich była metoda Eulera z krokiem w przód, który jest zdefiniowany następującą zależnością.

$$x^+(i+1) = (I + hA)x^+(i) + hBu^+(i) \tag{17}$$

Metoda Eulera z krokiem w tył:

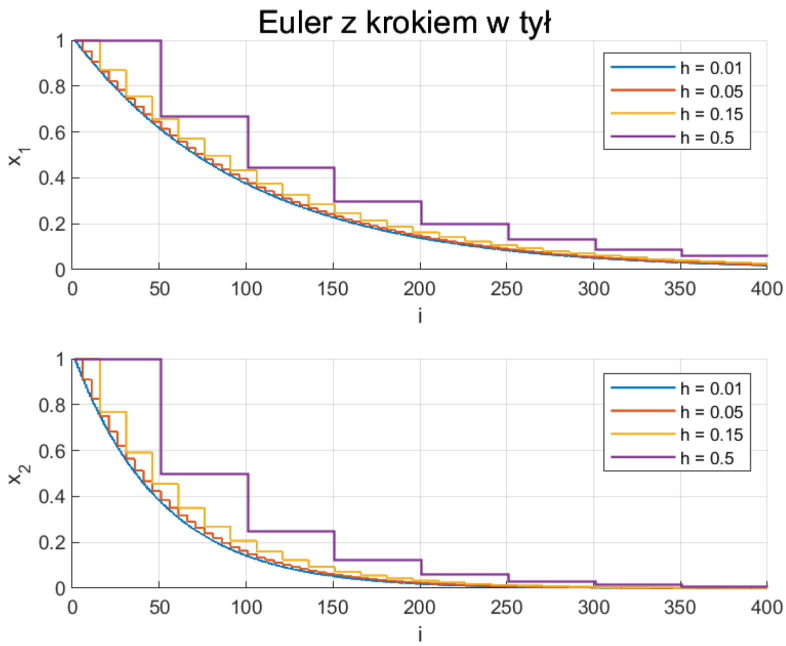
$$x^+(i+1) = (I - hA)^{-1}x^+(i) + (I - hA)^{-1}hBu^+(i+1) \tag{18}$$

Newton-Coles:

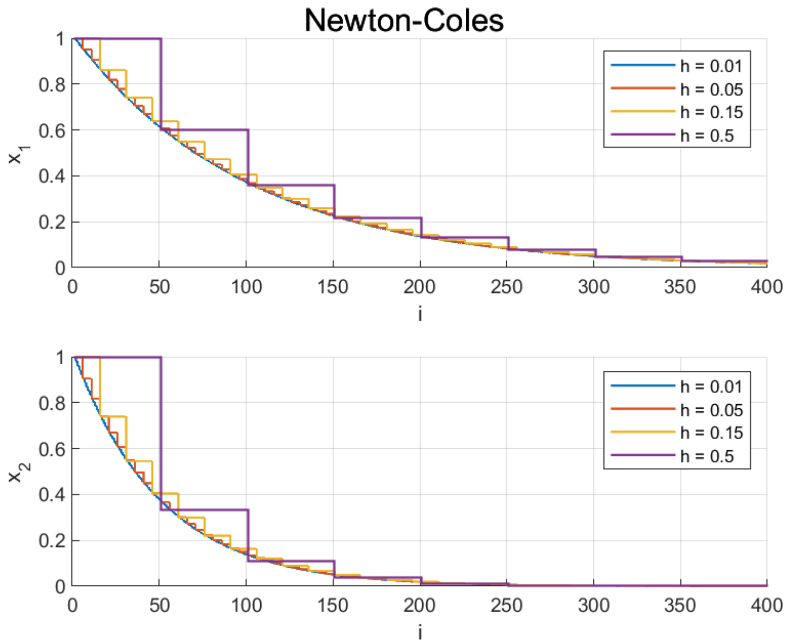
$$x^+(i+1) = (I - 0.5hA)^{-1}(I + 0.5hA)x^+(i) + 0.5h(I - 0.5hA)^{-1}B(u^+(i+1) + u^+(i)) \tag{19}$$

Poniżej przedstawiono ich rezultaty:

Rysunek 9: Metoda Eulera z krokiem w przód.



Rysunek 10: Metoda Eulera z krokiem w tył.



Rysunek 11: Metoda Newtona-Colesa

Dla małej wartości kroku (okresu próbkowania) metody iteracyjne z bardzo dużą dokładności aproksymują zachowanie się układu ciągłego. Wraz ze wzrostem wartości h zaczynają się od siebie różnić. Im mniejsza wartość h tym większy jest czas obliczeń. Metoda Eulera w przód wymaga odpowiedniego doboru długości kroku, aby zapewnić odpowiednią dokładność rozwiązania, zbyt mały krok może prowadzić do nadmiernej złożoności obliczeniowej a za duża wartość do mało dokładnego rozwiązania.

2.3 Zadanie 7.3

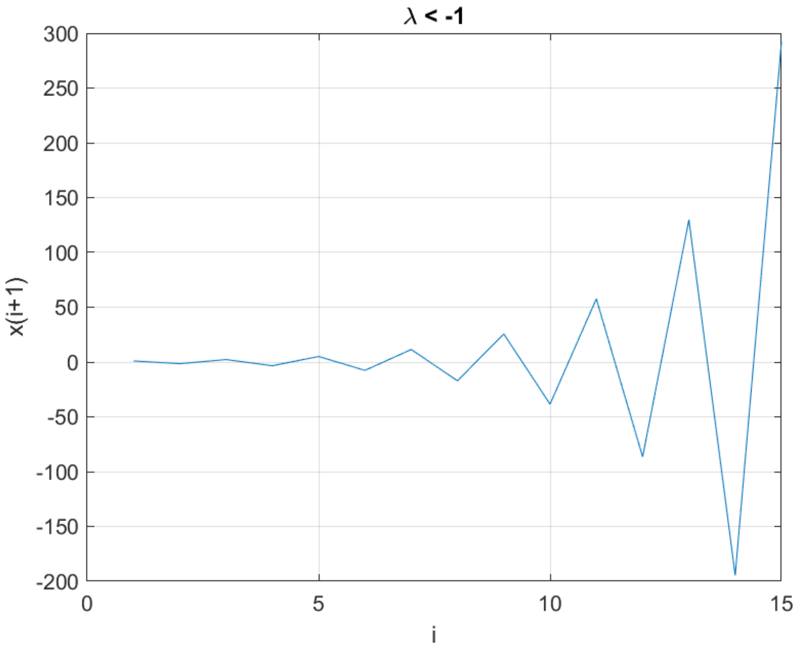
Tutaj naszym celem była analiza zachowania systemu dyskretnego:

$$x(k+1) = \lambda x(k) \tag{20}$$

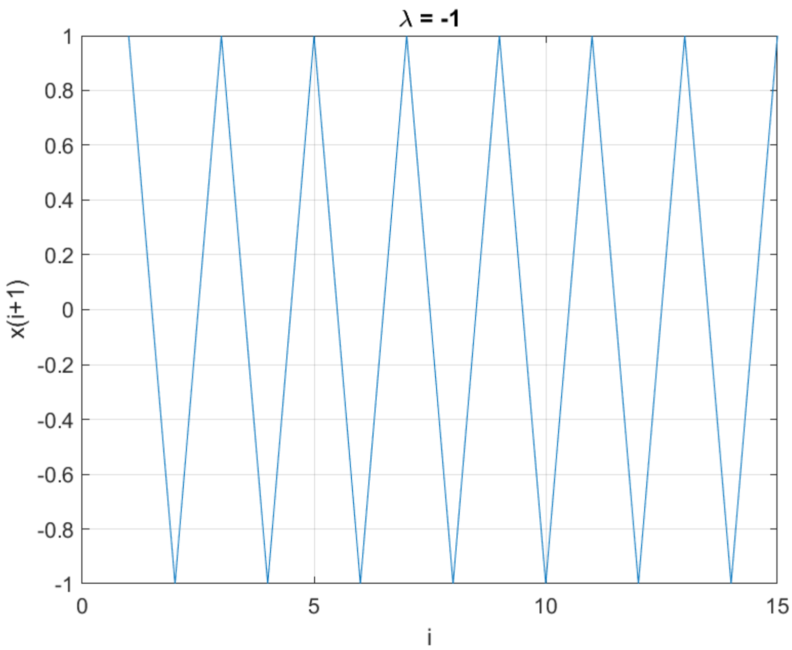
Dla $k = 0, 1, 2, ...,$. W zależności od wartości parametru λ:

1. $\lambda < -1$
2. $\lambda = -1$
3. $\lambda \in (-1, 0)$
4. $\lambda = 0$
5. $\lambda \in (0, 1)$
6. $\lambda = 1$
7. $\lambda > 1$

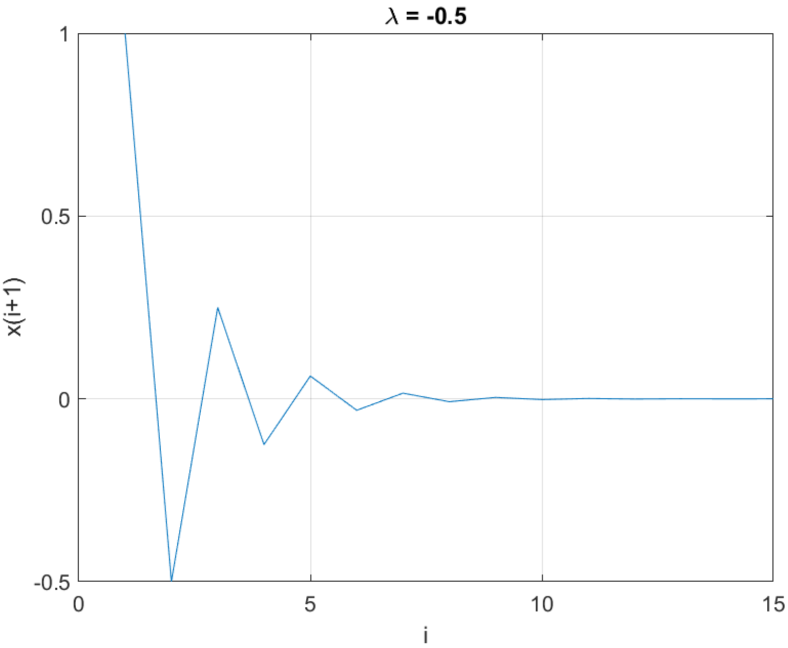
Wykresy przedstawiające wartości systemu dynamicznego od liczby iteracji przedstawiono poniżej.



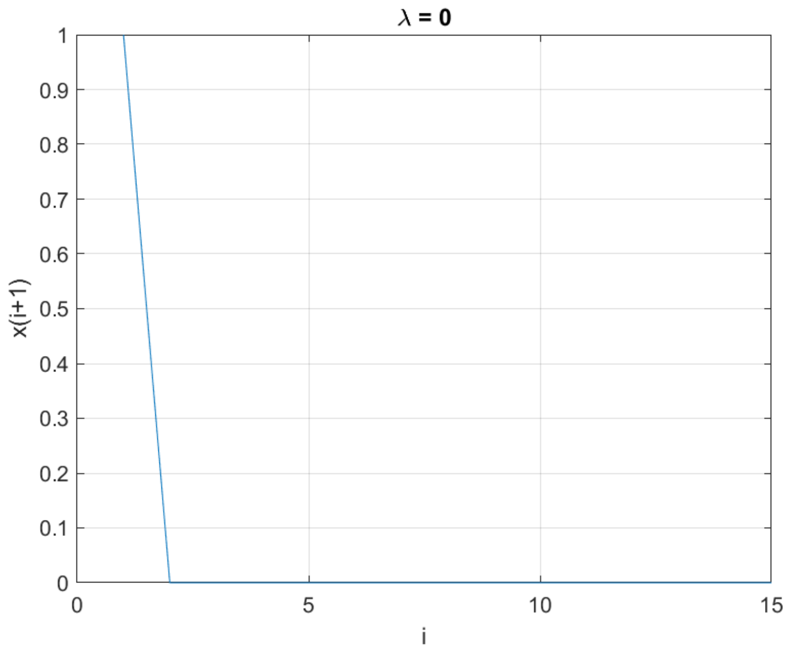
Rysunek 12: System dla wartośći $\lambda < -1$



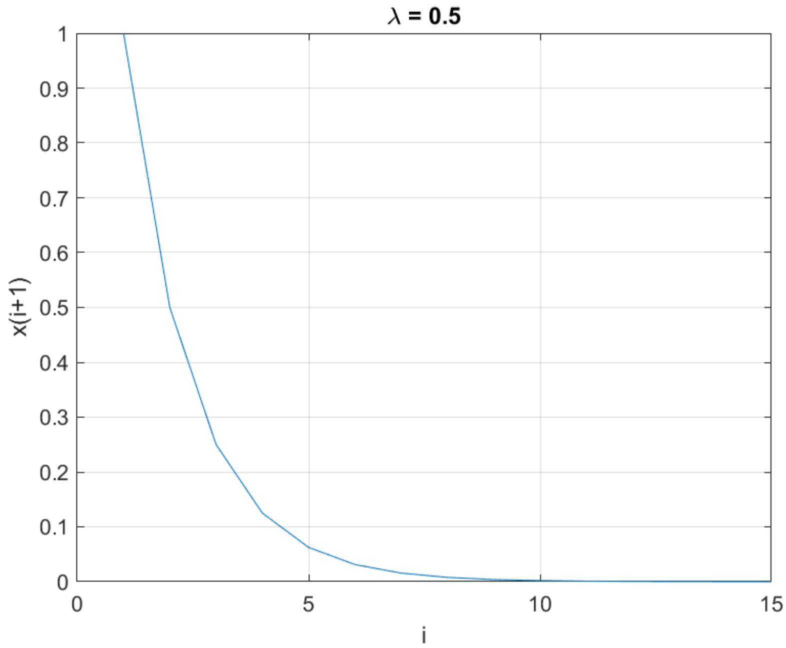
Rysunek 13: System dla wartośći $\lambda = -1$



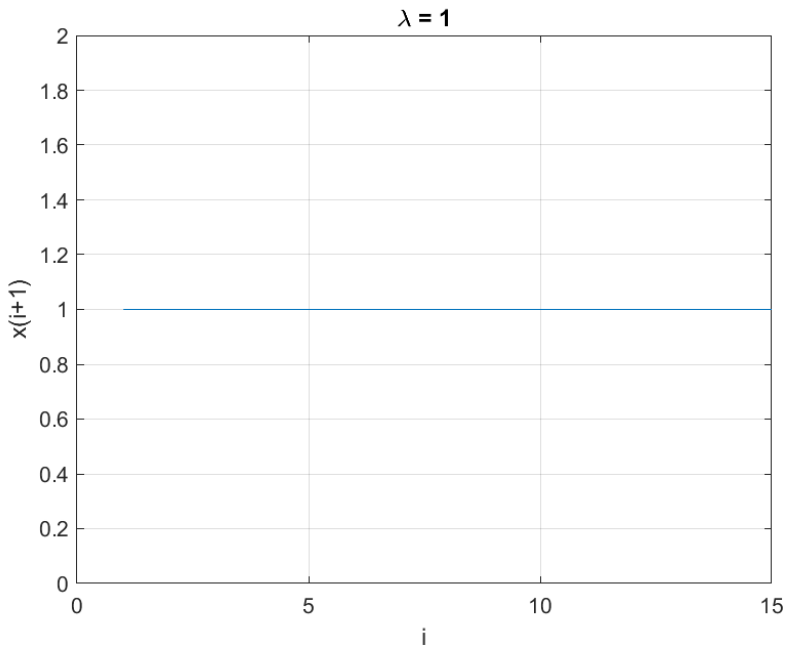
Rysunek 14: System dla wartośći z przedziału $\lambda \in (-1, 0)$



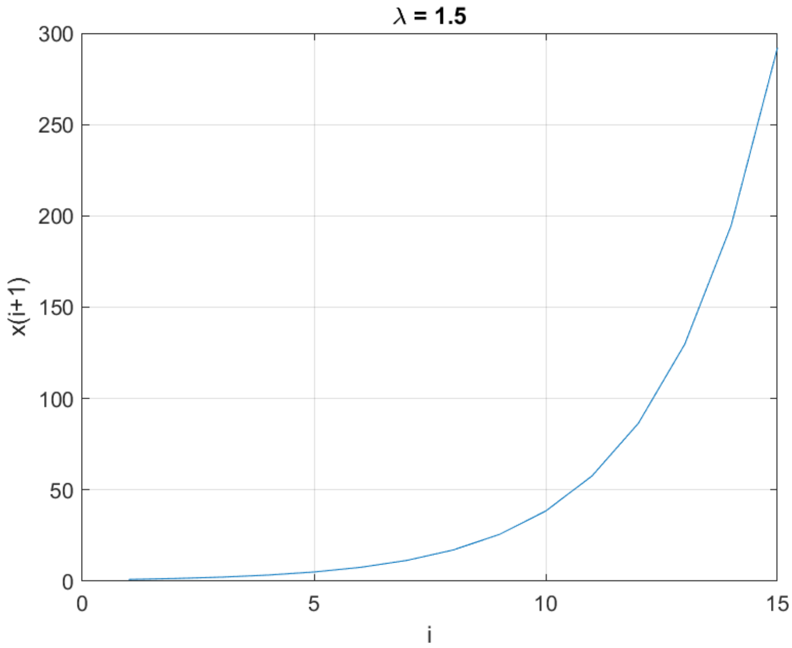
Rysunek 15: System dla wartośći $\lambda = 0$



Rysunek 16: System dla wartośći z przedziału $\lambda \in (0, 1)$



Rysunek 17: System dla wartośći $\lambda = 1$



Rysunek 18: System dla wartośći $\lambda > 1$

Na podstawie powyższych charakterystyk dochodzę do wniosków, iż:

1. System jest asymptotycznie stabilny dla $\lambda \in (-1, 1]$
2. System jest niestabilny dla $\lambda \in (-\infty, -1] \cup (1, +\infty)$

3 Opis wniosków i obserwacji

Dobór odpowiedniego okresu próbkowania kluczowym i niezmierni ważnym zadaniem podczas projektowania systemów dyskretnych.Okres próbkowania ma wpływ na stabilność systemów dyskretnych. Zbyt mały okres próbkowania może prowadzić do niestabilności metod numerycznych lub zjawiska aliasingu czyli zjawiska, w którym sygnał zostaje zniekształcony i nie można go poprawnie odtworzyć (należy pamiętać aby spełnić warunki twierdzenia Kotielnikowa-Shannona). Za to zbyt duży okres próbkowania może prowadzić do utraty informacji lub niedokładności w reprezentacji sygnału.
Warunkiem stabilności asymptotycznej w układach dyskretnych jest to, aby wszystkie bieguny transmitancji leżały wewnątrz koła jednostkowego.
Zawsze z dyskretyzacją wiąże się utrata pewnej informacji o zachowaniu się układu dlatego musimy pamiętać o odpowiednim doborze okresu próbkowania.

Literatura

[1] Teoria Sterowania: Materiały pomocnicze do ćwiczeń Laboratoryjnych - Baranowski, Hajduk, Korytowski, Mitkowski, Tutaj - AGH 2007