

Algorytmy macierzowe

Ćwiczenia

Maciej Paszyński

Instytut Informatyki
Akademia Górniczo-Hutnicza w Krakowie
home.agh.edu.pl/paszynsk

October 8, 2025

Opracowanie **rekurencyjnych** algorytmów dla macierzy gęstych o złożoności nie większej niż $\mathcal{O}(N^3)$

- Mnożenia macierzy gęstych
- Odwracania macierzy gęstych
- Eliminacja Gaussa macierzy gęstych
- LU faktoryzacji macierzy gęstych
- Obliczania wyznacznika macierzy gęstych

Pierwszy zestaw zadań (dla par 2 osobowych)

Proszę wybrać ulubiony język programowania, wygenerować macierze losowe o wartościach z przedziału otwartego $(0.00000001, 1.0)$ i zaimplementować

- 1 Rekurencyjne mnożenie macierzy metodą Binét'a (10 punktów)
- 2 Rekurencyjne mnożenie macierzy metodą Strassena (10 punktów)
- 3 Mnożenie macierzy metodą AI na podstawie artykułu w Nature (10 punktów)

Proszę zliczać liczbę operacji zmienna-przecinkowych (+-*/_liczb_) wykonywanych podczas mnożenia macierzy.

Uwaga Wszystkie algorytmy projektowane i badane są dla macierzy o **dowolnym rozmiarze**, o takiej samej liczbie wierszy i kolumn (nie dotyczy macierzy mnożonych metodami AI)

Drugi zestaw zadań (dla par 2 osobowych)

Proszę wybrać ulubiony język programowania, wygenerować macierze losowe o wartościach z przedziału otwartego $(0.00000001, 1.0)$ i zaimplementować

- 1 Rekurencyjne odwracanie macierzy (10 punktów)
- 2 Rekurencyjna eliminacja Gaussa (10 punktów)
- 3 Rekurencyjna LU faktoryzacja oraz liczenie wyznacznika (10 punktów)

Proszę zliczać liczbę operacji zmienno-przecinkowych $(+ - * / _liczb_)$ wykonywanych podczas mnożenia macierzy.

Uwaga Wszystkie algorytmy projektowane i badane są dla macierzy o **dowolnym rozmiarze**, o takiej samej liczbie wierszy i kolumn

Raporty (dla par 2 osobowych)

Proszę przygotować następujący raport

- Proszę w raporcie opisać pseudo-kod swojego rekurencyjnego algorytmu
- Proszę w raporcie umieścić wybrane najbardziej istotne fragmenty kodu
- Proszę narysować wykres: oś pozioma rozmiar macierzy 1,2,3,4,5,...,1000 (do maksymalnego rozmiaru macierzy jaki udało się policzyć), oś pionowa czas działania swoją metodą rekurencyjną.
- Proszę narysować wykres: oś pozioma rozmiar macierzy 1,2,3,4,5,...,1000 (do maksymalnego rozmiaru macierzy jaki udało się policzyć), oś pionowa liczba operacji zmienno-przecinkowych swoją metodą rekurencyjną.
- Proszę dokonać próby oszacowania złożoności obliczeniowej (eksperymentalnie lub teoretycznie)
- Dla wybranej małej macierzy o rozmiarze co najmniej 4×4 proszę przeliczyć przykład w Octave lub MATLAB i porównać wynik oraz zamieścić raport z porównania

Trzeci zestaw zadań (potem)

Proszę wybrać ulubiony język programowania, użyć przekazanych macierzy rzadkich i zaimplementować wybrane algorytmy.

- Proszę napisać rekurencyjną kompresję macierzy prostokątnej z wykorzystaniem częściowego SVD (10 punktów)
- Proszę zastosować rekurencyjną kompresję macierzy do kompresji bitmap prostokątnych (10 punktów)

Uwaga Proszę uruchamiać algorytmy macierzy hierarchicznych dla macierzy o **o różnej liczbie wierszy i kolumn**

Czwarty zestaw zadań (potem)

Proszę wybrać ulubiony język programowania, użyć przekazanych macierzy rzadkich i zaimplementować wybrane algorytmy.

- Proszę napisać rekurencyjne mnożenie skompresowanej macierzy przez wektor (10 punktów)
- Proszę napisać rekurencyjne dodawanie dwóch skompresowanych macierzy (10 punktów)
- Proszę napisać rekurencyjne mnożenie dwóch skompresowanych macierzy (10 punktów)

Uwaga Algorytmy macierzy hierarchicznych projektowane i badane są dla macierzy o **dowolnym rozmiarze, o różnej liczbie wierszy i kolumn**

Rekurencyjne mnożenie macierzy

Klasyczny (Binét):
$$\begin{bmatrix} (A_{11}B_{11} + A_{12}B_{21}) & (A_{11}B_{12} + A_{12}B_{22}) \\ (A_{21}B_{11} + A_{22}B_{21}) & (A_{21}B_{12} + A_{22}B_{22}) \end{bmatrix}$$

Każde mnożenie np. $A_{11} * B_{11}$ to rekurencyjne mnożenie bloków.
Koszt: 8 mnożeń ($\mathcal{O}((n/2)^3)$), 4 dodawania ($\mathcal{O}((n/2)^2)$)

Strassen:
$$\begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (P_1 + P_4 - P_5 + P_7) & (P_3 + P_5) \\ (P_2 + P_4) & (P_1 - P_2 + P_3 + P_6) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix}$$

$$P_1 = (A_{11} + A_{22})(B_{11} + B_{22}) \quad P_2 = (A_{21} + A_{22})B_{11}$$

$$P_3 = A_{11}(B_{12} - B_{22}) \quad P_4 = A_{22}(B_{21} - B_{11}) \quad P_5 = (A_{11} + A_{12})B_{22}$$

$$P_6 = (A_{21} - A_{11})(B_{11} + B_{12}) \quad P_7 = (A_{12} - A_{22})(B_{21} + B_{22})$$

Każde mnożenie to rekurencyjne mnożenie i dodawanie wynikowych bloków. Koszt: 7 mnożeń ($\mathcal{O}((n/2)^3)$), 18 dodawań ($\mathcal{O}((n/2)^2)$)

Blokowa eliminacja Gaussa

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$$

gdzie $A_{11}, A_{12}, A_{21}, A_{22}$ to podmacierze, x_1, x_2 to wektory niewiadomych, b_1, b_2 to wektory prawych stron

$$A_{11}x_1 + A_{12}x_2 = b_1$$

$$A_{21}x_1 + A_{22}x_2 = b_2$$

$$A_{11} = L_{11}U_{11}$$

$$L_{11}^{-1} * \begin{cases} L_{11}U_{11}x_1 + A_{12}x_2 = b_1 \\ A_{21}x_1 + A_{22}x_2 = b_2 \end{cases}$$

$$L_{11}^{-1}L_{11}U_{11}x_1 + L_{11}^{-1}A_{12}x_2 = L_{11}^{-1}b_1$$
$$A_{21}x_1 + A_{22}x_2 = b_2$$

Blokowa eliminacja Gaussa

$$L_{11}^{-1} L_{11} U_{11} x_1 + L_{11}^{-1} A_{12} x_2 = L_{11}^{-1} b_1$$

$$A_{21} x_1 + A_{22} x_2 = b_2$$

$$U_{11} x_1 + L_{11}^{-1} A_{12} x_2 = L_{11}^{-1} b_1$$

$$A_{21} x_1 + A_{22} x_2 = b_2$$

$$2^{nd} = 2^{nd} - A_{21} U_{11}^{-1} 1^{st} \text{ ponieważ } (A_{21} - A_{21} U_{11}^{-1} U_{11}) x_1 = 0,$$

$$U_{11} x_1 + L_{11}^{-1} A_{12} x_2 = L_{11}^{-1} b_1$$

$$0 + (A_{22} - A_{21} U_{11}^{-1} L_{11}^{-1} A_{12}) x_2 = b_2 - A_{21} U_{11}^{-1} L_{11}^{-1} b_1$$

$$\text{Dopełnienie Schura } S = (A_{22} - A_{21} U_{11}^{-1} L_{11}^{-1} A_{12})$$

$$\text{Ostatni etap } S = L_s U_s$$

$$U_{11} x_1 + L_{11}^{-1} A_{12} x_2 = L_{11}^{-1} b_1$$

$$U_s x_2 = L_s^{-1} b_2 - L_s^{-1} A_{21} U_{11}^{-1} L_{11}^{-1} b_1$$

Rekurencyjna eliminacja Gaussa

$$U_{11}x_1 + L_{11}^{-1}A_{12}x_2 = L_{11}^{-1}b_1$$

$$U_s x_2 = L_s^{-1}b_2 - L_s^{-1}A_{21}U_{11}^{-1}L_{11}^{-1}b_1$$

$$L_s U_s = S = (A_{22} - A_{21}U_{11}^{-1}L_{11}^{-1}A_{12})$$

$$\begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} \\ 0 & C_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_{11} & L_{11}^{-1}A_{12} \\ 0 & U_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} RHS_1 \\ RHS_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_{11}^{-1}b_1 \\ L_s^{-1}b_2 - L_s^{-1}A_{21}U_{11}^{-1}L_{11}^{-1}b_1 \end{bmatrix}$$

- Oblicz rekurencyjnie $[L_{11}, U_{11}] = LU(A_{11})$
- Oblicz rekurencyjnie $L_{11}^{-1} = \text{inverse}(L_{11})$
- Oblicz rekurencyjnie $U_{11}^{-1} = \text{inverse}(U_{11})$
- Oblicz $S = A_{22} - A_{21}U_{11}^{-1}L_{11}^{-1}A_{12}$
- Oblicz rekurencyjnie $[L_s, U_s] = LU(S)$
- $C_{11} = U_{11}$, $C_{12} = L_{11}^{-1}A_{12}$, $C_{22} = U_s$
- $RHS_1 = L_{11}^{-1}b_1$
- $RHS_{22} = L_s^{-1}b_2 - L_s^{-1}A_{21}U_{11}^{-1}L_{11}^{-1}b_1$

Rekurencyjne odwracanie macierzy

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_{11} & X_{12} \\ X_{21} & X_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \quad (1)$$

1. Zawołanie rekurencyjne $A_{11}^{-1} = \text{inverse}(A_{11})$
2. Pierwszy wiersz = $A_{11}^{-1} * \text{pierwszy wiersz}$ (rekurencyjne mnożenie macierzy)

$$\begin{bmatrix} I & A_{11}^{-1} * A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_{11} & X_{12} \\ X_{21} & X_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11}^{-1} & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \quad (2)$$

3. Drugi wiersz = drugi wiersz - $A_{21} * \text{pierwszy wiersz}$ (rekurencyjne mnożenie i odejmowanie macierzy)

$$\begin{bmatrix} I & A_{11}^{-1} * A_{12} \\ 0 & A_{22} - A_{21} * A_{11}^{-1} * A_{12} (= S_{22}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_{11} & X_{12} \\ X_{21} & X_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11}^{-1} & 0 \\ -A_{21} * A_{11}^{-1} & I \end{bmatrix} \quad (3)$$

(oznaczamy $S_{22} = A_{22} - A_{21} * A_{11}^{-1} * A_{12}$)

Rekurencyjne odwracanie macierzy

$$\begin{bmatrix} I & A_{11}^{-1} * A_{12} \\ 0 & S_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_{11} & X_{12} \\ X_{21} & X_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11}^{-1} & 0 \\ -A_{21} * A_{11}^{-1} & I \end{bmatrix} \quad (4)$$

4. Zawołanie rekurencyjne $S_{22}^{-1} = \text{inverse}(S_{22})$

5. Drugi wiersz = $S_{22}^{-1} * \text{drugi wiersz}$ (rekurencyjne mnożenie macierzy)

$$\begin{bmatrix} I & A_{11}^{-1} * A_{12} \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_{11} & X_{12} \\ X_{21} & X_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11}^{-1} & 0 \\ -S_{22}^{-1} * A_{21} * A_{11}^{-1} & S_{22}^{-1} \end{bmatrix} \quad (5)$$

6. Pierwszy wiersz = pierwszy wiersz - $A_{11}^{-1} A_{12} * \text{drugi wiersz}$ (rekurencyjne mnożenie macierzy)

$$\begin{aligned} & \text{(Macierz odwrotna } A_{11}^{-1}) \quad \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_{11} & X_{12} \\ X_{21} & X_{22} \end{bmatrix} = \\ & \begin{bmatrix} A_{11}^{-1} + A_{11}^{-1} A_{12} S_{22}^{-1} * A_{21} * A_{11}^{-1} & -A_{11}^{-1} * A_{12} * S_{22}^{-1} \\ -S_{22}^{-1} * A_{21} * A_{11}^{-1} & S_{22}^{-1} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (6)$$

$$\begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}^{-1} \quad (7)$$

`inverse(A)`

- Zawołanie rekurencyjne $A_{11}^{-1} = \text{inverse}(A_{11})$
- Obliczenie $S_{22} = A_{22} - A_{21} * A_{11}^{-1} * A_{12}$ (rekurencyjne mnożenie macierzy)
- Zawołanie rekurencyjne $S_{22}^{-1} = \text{inverse}(S_{22})$
- Obliczenie $B_{11} = A_{11}^{-1} (I + A_{12} S_{22}^{-1} * A_{21} * A_{11}^{-1})$ (rekurencyjne mnożenie i odejmowanie macierzy)
- Obliczenie $B_{12} = -A_{11}^{-1} * A_{12}^{-1} * S_{22}^{-1}$ (rekurencyjne mnożenie i odejmowanie macierzy)
- Obliczenie $B_{21} = -S_{22}^{-1} * A_{21} * A_{11}^{-1}$ (rekurencyjne mnożenie i odejmowanie macierzy)
- Obliczenie $B_{22} = S_{22}^{-1}$

Rekurencyjna LU faktoryzacja

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \quad LU = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}$$

$A_{11} = L_{11}U_{11}$. Mnożymy pierwszy wiersz z lewej strony przez L_{11}^{-1}

$$\begin{bmatrix} L_{11} & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_{11} & L_{11}^{-1}A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}$$

Odejmujemy od drugiego wiersza pierwszy wiersz przemnożony przez $A_{21}U_{11}^{-1}$

$$\begin{bmatrix} L_{11} & 0 \\ A_{21}U_{11}^{-1} & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_{11} & L_{11}^{-1}A_{12} \\ 0 & A_{22} - A_{21}U_{11}^{-1}L_{11}^{-1}A_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_{11} & 0 \\ A_{21}U_{11}^{-1} & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_{11} & L_{11}^{-1}A_{12} \\ 0 & S \end{bmatrix}$$

Obliczamy $S = L_s U_s$

$$LU = \begin{bmatrix} L_{11} & 0 \\ A_{21}U_{11}^{-1} & L_s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_{11} & L_{11}^{-1}A_{12} \\ 0 & U_s \end{bmatrix}$$

Rekurencyjna LU faktoryzacja

$$LU = \begin{bmatrix} L_{11} & 0 \\ L_{21} & L_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_{11} & U_{12} \\ 0 & U_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_{11} & 0 \\ A_{21}U_{11}^{-1} & L_s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_{11} & L_{11}^{-1}A_{12} \\ 0 & U_s \end{bmatrix}$$

$$[L, U] = LU(A) = LU \left(\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \right)$$

- Oblicz rekurencyjnie $[L_{11}, U_{11}] = LU(A_{11})$
- Oblicz rekurencyjne $U_{11}^{-1} = \text{inverse}(U_{11})$
- Oblicz $L_{21} = A_{21}U_{11}^{-1}$
- Oblicz rekurencyjne $L_{11}^{-1} = \text{inverse}(L_{11})$
- Oblicz $U_{12} = L_{11}^{-1}A_{12}$
- Oblicz $L_{22} = S = A_{22} - A_{21}U_{11}^{-1}L_{11}^{-1}A_{12}$
- Oblicz rekurencyjne $[L_s, U_s] = LU(S)$
- $U_{22} = U_s$
- $L_{22} = L_s$

$$\det(A) = l_{11} * \cdots * l_{nn} * u_{11} * \cdots * u_{nn} = (l_{ii} == 1) = u_{11} * \cdots * u_{nn}$$

gdzie l_{ij} to przekątna L

u_{ij} to przekątna U