

# Równania Różniczkowe i Różnicowe

## Zadanie domowe

### 1 Zadanie

Proszę rozwiązać metodą elementów skończonych następujące równanie różniczkowe

$$(a(x)u'(x))' + b(x)u'(x) + c(x)u(x) = f(x) \quad (1)$$

Dokładne równanie do policzenia jest podane poniżej.

Rozwiązanie składa się z następujących etapów:

1. Proszę wyprowadzić sformułowanie wariacyjne dla przedstawionego układu równań liniowych
2. Proszę napisać procedurę generującą układ równań liniowych, rozwiązującą wygenerowany układ równań liniowych oraz rysujący wykres rozwiązania

### 2 Wymagania funkcjonalne

Proszę przyjąć zmienną  $n$  (ilość elementów) jako parametr uruchomieniowy aplikacji (nie dotyczy studentów wybierających opcję na ocenę 3.0). Dodatkowo proszę rysować wykres wyliczonego przybliżenia funkcji  $u$  - dopuszczalne jest rysowanie przez zewnętrzną aplikację - np. gnuplot, Excel.

### 3 Sposób oceny

Maksymalną oceną za zadanie domowe jest 50 pkt. Zaplanowane są 3 poziomy trudności oddawanego zadania domowego:

- **50 pkt.** - dowolne  $n$ , dowolny język programowania. Całki liczone numerycznie.
- **39 pkt.** - dowolne  $n$ , dowolny język programowania. Całki mogą być wcześniej wyliczone na kartce papieru.
- **29 pkt.** - stałe  $n = 3$ , dowolny język programowania. Wszystkie ręczne wyliczenia całek muszą zostać dołączone do zadania domowego.

Dozwolone jest używanie dowolnych bibliotek. Za błędy będą odbierane punkty od maksymalnej oceny proporcjonalnie do istotności błędu bądź braku zrozumienia własnego programu.

Proszę umieścić w systemie UPEL kod programu oraz wyliczenia sformułowania wariacyjnego.

## 4 Problemy obliczeniowe

### 4.1 Równanie transportu ciepła

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx} \left( -k(x) \frac{du(x)}{dx} \right) &= 0 \\ u(2) &= 0 \\ \frac{du(0)}{dx} + u(0) &= 20 \\ k(x) &= \begin{cases} 1 & \text{dla } x \in [0, 1] \\ 2 & \text{dla } x \in (1, 2] \end{cases}\end{aligned}$$

Gdzie  $u$  to poszukiwana funkcja

$$[0, 2] \ni x \rightarrow u(x) \in \mathbb{R}$$

### 4.2 Wibracje akustyczne warstwy materiału

$$\begin{aligned}-\frac{d^2 u(x)}{dx^2} - u &= \sin x \\ u(0) &= 0 \\ \frac{du(2)}{dx} - u(2) &= 0\end{aligned}$$

Gdzie  $u$  to poszukiwana funkcja

$$[0, 2] \ni x \rightarrow u(x) \in \mathbb{R}$$

### 4.3 Odształcenie sprężyste

$$-\frac{d}{dx} \left( E(x) \frac{du(x)}{dx} \right) = 0$$

$$u(2) = 0$$

$$\frac{du(0)}{dx} + u(0) = 10$$

$$E(x) = \begin{cases} 3 & \text{dla } x \in [0, 1] \\ 5 & \text{dla } x \in (1, 2] \end{cases}$$

Gdzie  $u$  to poszukiwana funkcja

$$[0, 2] \ni x \rightarrow u(x) \in \mathbb{R}$$

### 4.4 Potencjał grawitacyjny

$$\frac{d^2\Phi}{dx^2} = 4\pi G\rho(x)$$

$$\Phi(0) = -5G$$

$$\Phi(3) = -4G$$

$$\rho(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla } x \in [0, 1] \\ 10^{11} & \text{dla } x \in (1, 2] \\ 0 & \text{dla } x \in (2, 3] \end{cases}$$

### 4.5 Potencjał elektromagnetyczny

$$\frac{d^2\phi}{dx^2} = -\frac{\rho}{\epsilon_r}$$

$$\phi'(0) + \phi(0) = 5$$

$$\phi(3) = 2$$

$$\rho = 1$$

$$\epsilon_r(x) = \begin{cases} 10 & \text{dla } x \in [0, 1] \\ 5 & \text{dla } x \in (1, 2] \\ 1 & \text{dla } x \in (2, 3] \end{cases}$$

## 5 Termin oddania

Terminem umieszczenia zadania w systemie UPEL jest 23:59 w dzień poprzedzający przedostatnie zajęcia z Równań Różniczkowych i Różnicowych. Za każdy dzień opóźnienia w terminie oddawania (umieszczenia w systemie UPEL) zadania domowego odejmowane jest 1.5 pkt. Obowiązkowe jest indywidualne zaliczenie zadania.

## 6 Całkowanie numeryczne

Preferowaną metodą całkowania numerycznego są kwadratury Gauss-Legendre [https://en.wikipedia.org/wiki/Gaussian\\_quadrature](https://en.wikipedia.org/wiki/Gaussian_quadrature). Dla celów zadania obliczeniowego wystarczą dwa punkty kwadratury - punkty i wagi do odczytania z Wikipedii (na dzień 2024.12.18 wartości podane na angielskiej wersji strony są poprawne). **UWAGA** kwadratura domyślnie działa na przedziale  $[-1, 1]$ .