Metody numeryczne
Projekt 2 - Układy równań liniowych
Sprawozdanie

Szymon Żebrowski 172165

8 Kwietnia 2019

1 Wstęp

Celem projektu było zaimplementowanie trzech metod rozwiązywania układów równań liniowych- iteracyjnych metod Jacobiego i Gaussa-Seidla oraz metody bezpośredniej- faktoryzacji LU. Układ równań w zadaniach miał postać:

$$Ax = b$$

gdzie A jest macierzą pasmową, b jest wektorem wyrazów wolnych, a x jest wektorem rozwiązań układu. Swoje rozwiązanie zaimplementował w Pythonie. Do pomocy użyłem bibliotekę Numpy, głównie po to żeby zrekompensować brak tablic w Pythonie (operacje na pythonowych listach są wolniejsze niż operacje na tablicach w C)

2 Zadanie A

Celem zadania było stworzenie macierzy A o rozmiarze NxN, dla N=965, oraz wektora wyrazów wolnych b o długości N, którego n-ty element ma wartość sin(3n), a następnie stworzenie następującego układu równań:

$$\begin{bmatrix} 6 & -1 & -1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 6 & -1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 6 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 6 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 6 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & -1 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_{963} \\ x_{964} \\ x_{965} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} sin(3) \\ sin(6) \\ sin(9) \\ \vdots \\ sin(2889) \\ sin(2892) \\ sin(2895) \end{bmatrix} \tag{1}$$

3 Zadanie B

Celem zadania było zaimplementowania wymienionych we wstępie metod iteracyjnych, oraz rozwiązać równanie (1). Następnym krokiem było porównanie czasów oraz ilości iteracji, po których norma z residuum jest mniejsza od $\epsilon = 10^{-9}$.

Metoda	Czas [s]	Liczba iteracji
Jacobi	0.5456	35
Gauss-Seidl	0.3144	23

Tabela 1. Porównanie wyników metod iteracyjnych

4 Zadanie C

Celem zadania było stworzenie nowej macierzy A_2 i rozwiązać metodami iteracyjnymi następujący układ równań:

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 & -1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & -1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 3 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 3 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & -1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_{963} \\ x_{964} \\ x_{965} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} sin(3) \\ sin(6) \\ sin(9) \\ \vdots \\ sin(2889) \\ sin(2892) \\ sin(2895) \end{bmatrix} \tag{2}$$

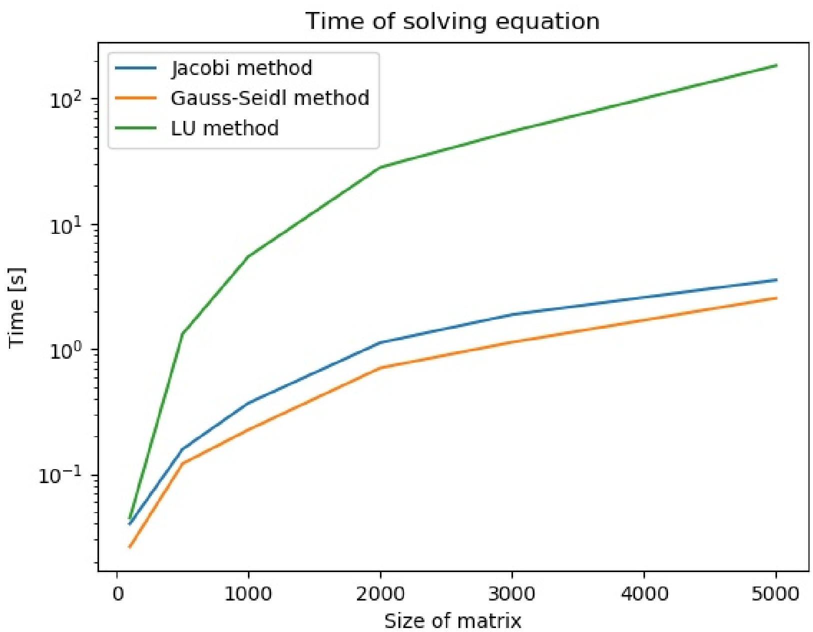
W przeciwieństwie do poprzedniego układu równań, residuum w tym przypadku nie maleje, a rośnie do nieskończoności. Oznacza to, że residuum się nie zbiega, przez co algorytmy nigdy się nie zatrzymają. W związku z tym metody iteracyjne nie są w stanie rozwiązać takiego układu równań.

5 Zadanie D

Celem zadania było rozwiązanie układu równań (2) za pomocą bespośredniej metody LU. Norma z residuum w tym przypadku wynosi $4.8071 \cdot 10^{-14}$, co świadczy o bardzo dużej dokładności rozwiązania. Czas znalezienia rozwiązania wyniósł 4.9698s.

6 Zadanie E

Celem zadania było stworzenie wykresu zależności czasu trwania poszczególnych algorytmów od liczby niewiadomych N={100,500,1000,2000,3000,5000} dla układu równań (1).



Wykres 1. Zależność czasu działania od wielkości macierzy

7 Zadanie F

Z wykresu ($Wykres1$) oraz tabeli ($Tabela1$) wynika, że metoda Gaussa-Seidla jest dużo wydajniejsza od metody Jacobiego. Znalezienie rozwiązania układu równań tą metodą jest szybsze, potrzebne jest mniej iteracji, a residuum szybciej jest zbieżne do zadanej wartości. Metoda Jacobiego ma tę przewagę, że można ją zrównoleglić, ponieważ wartości wektora x^k są wyliczane z x^{k-1} z poprzedniej iteracji, w przeciwieństwie do metody Gaussa-Seidla, gdzie wykorzystywane są wartości wyliczone w aktualnej iteracji. Z wykresu łatwo zauważyć, że metody iteracyjne są dużo wydajniejsze od metody bezpośredniej, w tym wypadku faktoryzacji LU. Wynika to ze złożoności obliczeniowych. Oczywistym wnioskiem jest, że dla dużych macierzy wykorzystywanie metod iteracyjnych jest lepszym rozwiązaniem. Jednakże nie każdy układ równań da się rozwiązać metodami iteracyjnymi, co pokazał układ z Zadania C.

Istotny jest też fakt, że w Zadaniu E metody iteracyjne skończyły działanie po osiągnięciu residuum 10^{-9}, a metoda bezpośrednia osiągnęła residuum na poziomie 10^{-14}, co oznacza, że jest dokładniejsza. Chcąc otrzymać podobną dokładność dla metod iteracyjnych, czas ich działania odpowiednio się wydłuży.