Wykład 1.
Wprowadzenie do teorii grafów

WYDZIAŁ MATEMATYKI
i INFORMATYKI
Uniwersytet Łódzki

Literatura

1. W. Lipski; Kombinatoryka dla programistów.
2. T. Cormen, Ch. E. Leiserson, R. L. Rivest; Wprowadzenie do algorytmów.
3. K. A. Ross, Ch. R. B. Wright; Matematyka dyskretna.
4. M. Sysło, N. Deo; Metody optymalizacji dyskretnej z przykładami w Turbo Pascalu.
5. M. Libura, J. Sikorski; Wykłady z matematyki dyskretnej. Cz. I: Kombinatoryka.
6. M. Libura, J. Sikorski; Wykłady z matematyki dyskretnej. Cz. II: Teoria grafów.
7. J. Kurose, K. Ross; Sieci komputerowe. Od ogółu do szczegółu z Internetem w tle.
8. J. Harris, J. Hirst, M. Mossinghoff; Combinatorics and Graph Theory.
9. D. Medhi, K. Ramasamy; Network Routing: Algorithms, Protocols and Architectures.
10. D. Jungnickel, Graphs; Networks and Algorithms.
11. B. Korte, J. Vygen; Combinatorial optimization.

Definicja grafu nieskierowanego

Definicja

Grafem nieskierowanym nazywamy uporządkowaną trójkę:

$$G = \langle V, E, \gamma \rangle$$

gdzie: V – niepusty ***zbiór wierzchołków grafu*** G, E – ***zbiór krawędzi grafu*** G, γ – funkcja ze zbioru E w zbiór $\{\{u, v\} : u, v \in V\}$ wszystkich podzbiorów jedno lub dwuelementowych zbioru V.

Definicja

Jeżeli $e \in E$ oraz $\gamma(e) = \{v_1, v_2\}$, to elementy v_1 i v_2 nazywamy ***końcami krawędzi*** e.

Definicja grafu nieskierowanego

Definicja

Grafem nieskierowanym nazywamy uporządkowaną trójkę:

$$G = \langle V, E, \gamma \rangle$$

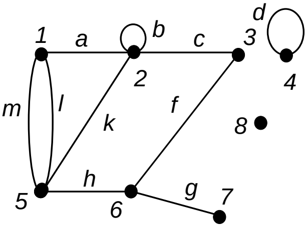
gdzie: V – niepusty ***zbiór wierzchołków grafu*** G, E – ***zbiór krawędzi grafu*** G, γ – funkcja ze zbioru E w zbiór $\{\{u, v\} : u, v \in V\}$ wszystkich podzbiorów jedno lub dwuelementowych zbioru V.

Definicja

Jeżeli $e \in E$ oraz $\gamma(e) = \{v_1, v_2\}$, to elementy v_1 i v_2 nazywamy ***końcami krawędzi*** e.

Przykład

W praktyce często wykorzystujemy graficzną reprezentację grafu



Niech $G = \langle V, E, \gamma \rangle$, gdzie:

$V = \{1, 2, ...8\}$, $E = \{a, b, c, d, e, f, g, h, k, l, m\}$,

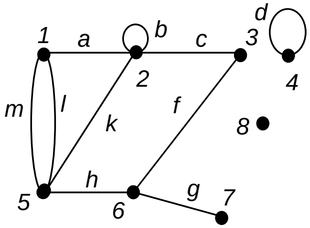
zaś funkcja γ określona jest za pomocą tabeli

e	a	b	c	d	f	g	h
γ **(e)**	$\{1, 2\}$	$\{2\}$	$\{2, 3\}$	$\{4\}$	$\{3, 6\}$	$\{6, 7\}$	$\{5, 6\}$

k	l	m
$\{2, 5\}$	$\{1, 5\}$	$\{1, 5\}$

Przykład

W praktyce często wykorzystujemy graficzną reprezentację grafu



Niech $G = \langle V, E, \gamma \rangle$, gdzie:

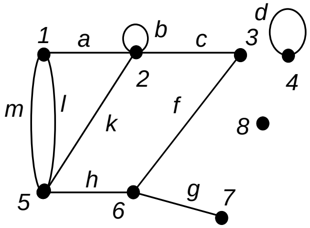
$V = \{1, 2, ...8\}$, $E = \{a, b, c, d, e, f, g, h, k, l, m\}$,

zaś funkcja γ określona jest za pomocą tabeli

e	a	b	c	d	f	g	h	k	l	m
$\gamma(\mathbf{e})$	$\{1,2\}$	$\{2\}$	$\{2,3\}$	$\{4\}$	$\{3,6\}$	$\{6,7\}$	$\{5,6\}$	$\{2,5\}$	$\{1,5\}$	$\{1,5\}$

Przykład

W praktyce często wykorzystujemy graficzną reprezentację grafu



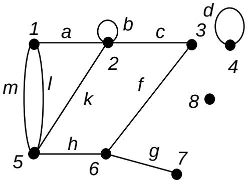
Niech $G = \langle V, E, \gamma \rangle$, gdzie:

$V = \{1, 2, ...8\}$, $\quad E = \{a, b, c, d, e, f, g, h, k, l, m\}$,

zaś funkcja γ określona jest za pomocą tabeli

e	a	b	c	d	f	g	h	k	l	m
γ (**e**)	$\{1,2\}$	$\{2\}$	$\{2,3\}$	$\{4\}$	$\{3,6\}$	$\{6,7\}$	$\{5,6\}$	$\{2,5\}$	$\{1,5\}$	$\{1,5\}$

Krawędzie grafu

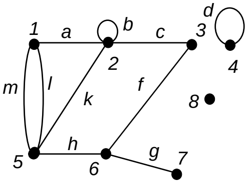


Definicja

Jeżeli $\gamma(e) = \{v, v\} = \{v\}$, to krawędź e nazywamy ***pętlą.***

Na rysunku pętlami są krawędzie b i d, ponieważ $\gamma(b) = \{2\}$ i $\gamma(d) = \{4\}$.

Krawędzie grafu

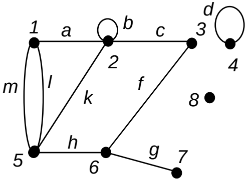


Definicja

Jeżeli $\gamma(e) = \{v, v\} = \{v\}$, to krawędź e nazywamy ***pętlą.***

Na rysunku pętlami są krawędzie b i d, ponieważ $\gamma(b) = \{2\}$ i $\gamma(d) = \{4\}$.

Krawędzie grafu



Definicja

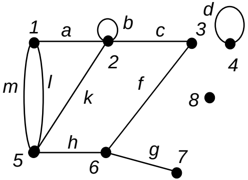
Jeżeli krawędzie e i f są różne $(e \neq f)$ i $\gamma(e) = \gamma(f)$, to nazywamy je ***krawędziami wielokrotnymi (równoległymi)***

Na rysunku krawędziami wielokrotnymi są krawędzie m i l, bowiem $\gamma(l) = \gamma(m) = \{1, 5\}$

Uwaga

W przypadku, gdy nie ma w grafie G krawędzi wielokrotnych, to funkcja γ jest różnowartościowa.

Krawędzie grafu



Definicja

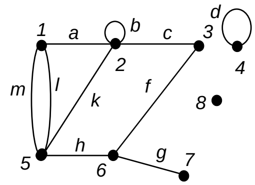
Jeżeli krawędzie e i f są różne $(e \neq f)$ i $\gamma(e) = \gamma(f)$, to nazywamy je ***krawędziami wielokrotnymi (równoległymi)***

Na rysunku krawędziami wielokrotnymi są krawędzie m i l, bowiem $\gamma(l) = \gamma(m) = \{1, 5\}$

Uwaga

W przypadku, gdy nie ma w grafie G krawędzi wielokrotnych, to funkcja γ jest różnowartościowa.

Krawędzie grafu



Definicja

Jeżeli krawędzie e i f są różne $(e \neq f)$ i $\gamma(e) = \gamma(f)$, to nazywamy je ***krawędziami wielokrotnymi (równoległymi)***

Na rysunku krawędziami wielokrotnymi są krawędzie m i l, bowiem $\gamma(l) = \gamma(m) = \{1, 5\}$

Uwaga

W przypadku, gdy nie ma w grafie G krawędzi wielokrotnych, to funkcja γ jest różnowartościowa.

Definicja

Jeżeli w grafie G, a i b nie są krawędziami równoległymi oraz $\gamma(a) = \{x, y\}$ i $\gamma(b) = \{y, z\}$, to mówimy, że:

1. Krawędzie a i b są ***krawędziami sąsiednim*** lub ***przyległymi*** (mają wspólny wierzchołek y).
2. Wierzchołki x, y (oraz y i z) są ***wierzchołkami sąsiednimi***.
3. Wierzchołek x (a także y) jest ***incydentny*** do krawędzi a (jest końcem tej krawędzi)

Definicja

Jeżeli w grafie G, a i b nie są krawędziami równoległymi oraz $\gamma(a) = \{x, y\}$ i $\gamma(b) = \{y, z\}$, to mówimy, że:

1. Krawędzie a i b są ***krawędziami sąsiednim*** lub ***przyległymi*** (mają wspólny wierzchołek y).
2. Wierzchołki x, y (oraz y i z) są ***wierzchołkami sąsiednimi***.
3. Wierzchołek x (a także y) jest ***incydentny*** do krawędzi a (jest końcem tej krawędzi)

Definicja

Jeżeli w grafie G, a i b nie są krawędziami równoległymi oraz $\gamma(a) = \{x, y\}$ i $\gamma(b) = \{y, z\}$, to mówimy, że:

1. Krawędzie a i b są ***krawędziami sąsiednim*** lub ***przyległymi*** (mają wspólny wierzchołek y).
2. Wierzchołki x, y (oraz y i z) są ***wierzchołkami sąsiednimi***.
3. Wierzchołek x (a także y) jest ***incydentny*** do krawędzi a (jest końcem tej krawędzi)

Definicja

Jeżeli w grafie G, a i b nie są krawędziami równoległymi oraz $\gamma(a) = \{x, y\}$ i $\gamma(b) = \{y, z\}$, to mówimy, że:

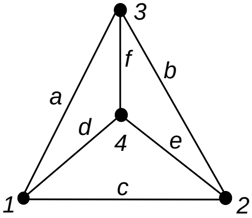
1. Krawędzie a i b są ***krawędziami sąsiednim*** lub ***przyległymi*** (mają wspólny wierzchołek y).
2. Wierzchołki x, y (oraz y i z) są ***wierzchołkami sąsiednimi***.
3. Wierzchołek x (a także y) jest ***incydentny*** do krawędzi a (jest końcem tej krawędzi)

Graf prosty

Definicja

Graf bez krawędzi wielokrotnych i pętli nazywamy ***grafem prostym.***

Przykładem grafu prostego jest graf G przedstawiony na rysunku

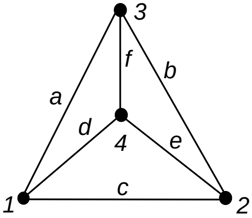


Graf prosty

Definicja

Graf bez krawędzi wielokrotnych i pętli nazywamy ***grafem prostym.***

Przykładem grafu prostego jest graf G przedstawiony na rysunku



W przypadku grafów bez krawędzi wielokrotnych (w szczególności w przypadku grafów prostych) definicja grafu sprowadza się do podania zbioru wierzchołków V i krawędzi w postaci $\{p, q\}$, gdzie $p, q \in V$, np. na rysunku zamiast pisać $\gamma(a) = \{1, 3\}$ będziemy pisać $a = \{1, 3\}$.

Uwaga

W dalszej części graf bez krawędzi wielokrotnych (w szczególności graf prosty) będziemy zapisywali jako

$$G = \langle V, E \rangle$$

pamiętając, że $E = \{\{p, q\} : p, q \in V\}$.

W przypadku grafów bez krawędzi wielokrotnych (w szczególności w przypadku grafów prostych) definicja grafu sprowadza się do podania zbioru wierzchołków V i krawędzi w postaci $\{p, q\}$, gdzie $p, q \in V$, np. na rysunku zamiast pisać $\gamma(a) = \{1, 3\}$ będziemy pisać $a = \{1, 3\}$.

Uwaga

W dalszej części graf bez krawędzi wielokrotnych (w szczególności graf prosty) będziemy zapisywali jako

$$G = \langle V, E \rangle$$

pamiętając, że $E = \{\{p, q\} : p, q \in V\}$.

Stopień wierzchołka i stopień grafu, w grafie nieskierowanym

Definicja

Liczbę krawędzi incydentnych do danego wierzchołka v (z pętlami liczonymi podwójnie) nazywamy ***stopniem wierzchołka*** v i oznaczamy

$$\deg(v).$$

Liczbę wierzchołków stopnia k oznaczamy

$$D_k(G).$$

Definicja

Stopniem grafu G nazywamy liczbę

$$\Delta(G) := \max_{v \in V} \deg(v).$$

Stopień grafu jest więc równy najwyższemu ze stopni jego wierzchołków.

Uniwersytet Łódzki

Stopień wierzchołka i stopień grafu, w grafie nieskierowanym

Definicja

Liczbę krawędzi incydentnych do danego wierzchołka v (z pętlami liczonymi podwójnie) nazywamy ***stopniem wierzchołka*** v i oznaczamy

$$\deg(v).$$

Liczbę wierzchołków stopnia k oznaczamy

$$D_k\left(G\right).$$

Definicja

Stopniem grafu G nazywamy liczbę

$$\Delta\left(G\right) := \max_{v \in V} \deg\left(v\right).$$

Stopień grafu jest więc równy najwyższemu ze stopni jego wierzchołków.

Stopień wierzchołka i stopień grafu, w grafie nieskierowanym

Definicja

Liczbę krawędzi incydentnych do danego wierzchołka v (z pętlami liczonymi podwójnie) nazywamy ***stopniem wierzchołka*** v i oznaczamy

$$\deg(v).$$

Liczbę wierzchołków stopnia k oznaczamy

$$D_k\left(G\right).$$

Definicja

Stopniem grafu G nazywamy liczbę

$$\Delta\left(G\right) := \max_{v \in V} \deg\left(v\right).$$

Stopień grafu jest więc równy najwyższemu ze stopni jego wierzchołków.

Stopień wierzchołka i stopień grafu, w grafie nieskierowanym

Definicja

Liczbę krawędzi incydentnych do danego wierzchołka v (z pętlami liczonymi podwójnie) nazywamy ***stopniem wierzchołka*** v i oznaczamy

$$\deg(v).$$

Liczbę wierzchołków stopnia k oznaczamy

$$D_k(G).$$

Definicja

Stopniem grafu G nazywamy liczbę

$$\Delta(G) := \max_{v \in V} \deg(v).$$

Stopień grafu jest więc równy najwyższemu ze stopni jego wierzchołków.

Definicja

Wierzchołek stopnia zerowego nazywamy ***wierzchołkiem izolowanym***.

Definicja

Wierzchołek stopnia pierwszego nazywamy ***wierzchołkiem końcowym*** lub ***wiszącym***.

Definicja

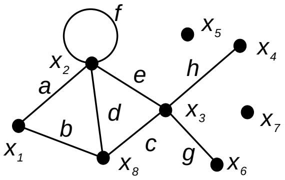
Wierzchołek stopnia zerowego nazywamy ***wierzchołkiem izolowanym***.

Definicja

Wierzchołek stopnia pierwszego nazywamy ***wierzchołkiem końcowym*** lub ***wiszącym***.

Przykład

Rozważmy graf:

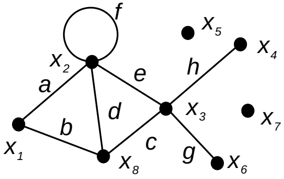


Na rysunku:

1. wierzchołki izolowane, to x_5 i x_7
2. wierzchołki wiszące to x_4 i x_6
3. ponadto $\deg(x_1) = 2$ i $\deg(x_2) = 5$, $\deg(x_3) = 4$ i $\deg(x_8) = 3$
4. ciąg stopni wierzchołków tego grafu jest następujący (2,5,4,1,0,1,0,3)
5. stopień tego grafu wynosi więc $\Delta(G) = 5$

Przykład

Rozważmy graf:

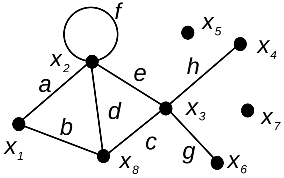


Na rysunku:

1. wierzchołki izolowane, to x_5 i x_7
2. wierzchołki wiszące to x_4 i x_6
3. ponadto $\deg(x_1) = 2$ i $\deg(x_2) = 5$, $\deg(x_3) = 4$ i $\deg(x_8) = 3$
4. ciąg stopni wierzchołków tego grafu jest następujący $(2, 5, 4, 1, 0, 1, 0, 3)$
5. stopień tego grafu wynosi więc $\Delta(G) = 5$

Przykład

Rozważmy graf:

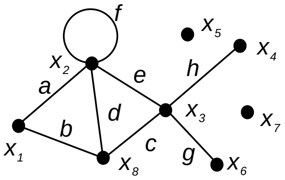


Na rysunku:

1. wierzchołki izolowane, to x_5 i x_7
2. wierzchołki wiszące to x_4 i x_6
3. ponadto $\deg(x_1) = 2$ i $\deg(x_2) = 5$, $\deg(x_3) = 4$ i $\deg(x_8) = 3$
4. ciąg stopni wierzchołków tego grafu jest następujący $(2, 5, 4, 1, 0, 1, 0, 3)$
5. stopień tego grafu wynosi więc $\Delta(G) = 5$

Przykład

Rozważmy graf:

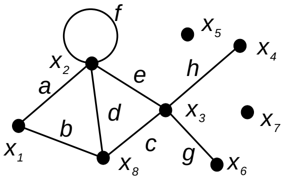


Na rysunku:

1. wierzchołki izolowane, to x_5 i x_7
2. wierzchołki wiszące to x_4 i x_6
3. ponadto $\deg(x_1) = 2$ i $\deg(x_2) = 5$, $\deg(x_3) = 4$ i $\deg(x_8) = 3$
4. ciąg stopni wierzchołków tego grafu jest następujący $(2, 5, 4, 1, 0, 1, 0, 3)$
5. stopień tego grafu wynosi więc $\Delta(G) = 5$

Przykład

Rozważmy graf:

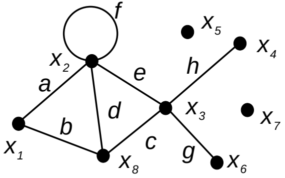


Na rysunku:

1. wierzchołki izolowane, to x_5 i x_7
2. wierzchołki wiszące to x_4 i x_6
3. ponadto $\deg(x_1) = 2$ i $\deg(x_2) = 5$, $\deg(x_3) = 4$ i $\deg(x_8) = 3$
4. ciąg stopni wierzchołków tego grafu jest następujący $(2, 5, 4, 1, 0, 1, 0, 3)$
5. stopień tego grafu wynosi więc $\Delta(G) = 5$

Przykład

Rozważmy graf:

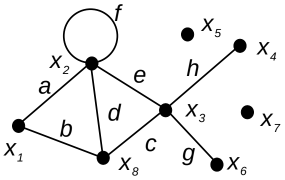


Na rysunku:

1. wierzchołki izolowane, to x_5 i x_7
2. wierzchołki wiszące to x_4 i x_6
3. ponadto $\deg(x_1) = 2$ i $\deg(x_2) = 5$, $\deg(x_3) = 4$ i $\deg(x_8) = 3$
4. ciąg stopni wierzchołków tego grafu jest następujący $(2, 5, 4, 1, 0, 1, 0, 3)$
5. stopień tego grafu wynosi więc $\Delta(G) = 5$

Przykład

Rozważmy graf:



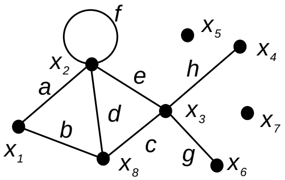
Na rysunku:

1. wierzchołki izolowane, to x_5 i x_7
2. wierzchołki wiszące to x_4 i x_6
3. ponadto $\deg(x_1) = 2$ i $\deg(x_2) = 5$, $\deg(x_3) = 4$ i $\deg(x_8) = 3$
4. ciąg stopni wierzchołków tego grafu jest następujący $(2, 5, 4, 1, 0, 1, 0, 3)$
5. stopień tego grafu wynosi więc $\Delta(G) = 5$

Krawędzie szeregowe

Definicja

Mówimy, że dwie nierównoległe krawędzie są ***krawędziami szeregowymi,*** jeżeli ich wspólny wierzchołek jest stopnia drugiego.



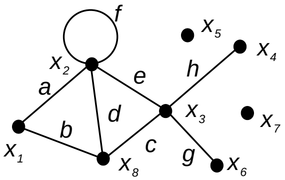
W grafie krawędzie a i b są szeregowe, natomiast krawędzie b i c są przyległe ale nie są połączone szeregowo, bowiem ich wspólny wierzchołek jest stopnia trzeciego.

WYDZIAŁ MATEMATYKI i INFORMATYKI
Uniwersytet Łódzki

Krawędzie szeregowe

Definicja

Mówimy, że dwie nierównoległe krawędzie są ***krawędziami szeregowymi,*** jeżeli ich wspólny wierzchołek jest stopnia drugiego.

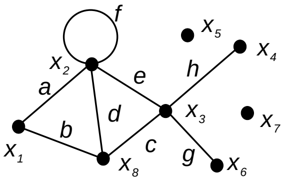


W grafie krawędzie a i b są szeregowe, natomiast krawędzie b i c są przyległe ale nie są połączone szeregowo, bowiem ich wspólny wierzchołek jest stopnia trzeciego.

Krawędzie szeregowe

Definicja

Mówimy, że dwie nierównoległe krawędzie są ***krawędziami szeregowymi,*** jeżeli ich wspólny wierzchołek jest stopnia drugiego.



W grafie krawędzie a i b są szeregowe, natomiast krawędzie b i c są przyległe ale nie są połączone szeregowo, bowiem ich wspólny wierzchołek jest stopnia trzeciego.

Graf skierowany

Definicja

Grafem skierowanym lub ***digrafem*** G (**di**rected **graph**) nazywamy uporządkowaną trójkę $G = \langle V, E, \gamma \rangle$, gdzie V jest niepustym zbiorem wierzchołków, E – zbiorem krawędzi skierowanych (łuków), γ odwzorowaniem zbioru E w zbiór $V \times V$.

Definicja

Jeśli e $(e \in E)$ jest łukiem grafu G i $\gamma(e) = (p, q)$ $((p, q) \in V \times V)$, to

- p nazywamy ***początkiem łuku***
- q nazywamy ***końcem łuku***
- o łuku e mówimy również, że

Graf skierowany

Definicja

Grafem skierowanym lub ***digrafem*** G (**di**rected **graph**) nazywamy uporządkowaną trójkę $G = \langle V, E, \gamma \rangle$, gdzie V jest niepustym zbiorem wierzchołków, E – zbiorem krawędzi skierowanych (łuków), γ odwzorowaniem zbioru E w zbiór $V \times V$.

Definicja

Jeśli e $(e \in E)$ jest łukiem grafu G i $\gamma(e) = (p, q)$ $((p, q) \in V \times V)$, to

- p nazywamy ***początkiem łuku***
- q nazywamy ***końcem łuku***
- o łuku e mówimy również, że

Graf skierowany

Definicja

Grafem skierowanym lub ***digrafem*** G (**di**rected **graph**) nazywamy uporządkowaną trójkę $G = \langle V, E, \gamma \rangle$, gdzie V jest niepustym zbiorem wierzchołków, E – zbiorem krawędzi skierowanych (łuków), γ odwzorowaniem zbioru E w zbiór $V \times V$.

Definicja

Jeśli e ($e \in E$) jest łukiem grafu G i $\gamma(e) = (p, q)$ ($(p, q) \in V \times V$), to

- p nazywamy ***początkiem łuku***
- q nazywamy ***końcem łuku***
- o łuku e mówimy również, że
  - łuk e biegnie od wierzchołka p do wierzchołka q

Graf skierowany

Definicja

Grafem skierowanym lub ***digrafem*** G (**di**rected **graph**) nazywamy uporządkowaną trójkę $G = \langle V, E, \gamma \rangle$, gdzie V jest niepustym zbiorem wierzchołków, E – zbiorem krawędzi skierowanych (łuków), γ odwzorowaniem zbioru E w zbiór $V \times V$.

Definicja

Jeśli e ($e \in E$) jest łukiem grafu G i $\gamma(e) = (p, q)$ ($(p, q) \in V \times V$), to

- p nazywamy ***początkiem łuku***
- q nazywamy ***końcem łuku***
- o łuku e mówimy również, że
  - łuk e biegnie od wierzchołka p do wierzchołka q
  - łuk e wychodzi z wierzchołka p i wchodzi do wierzchołka q

Graf skierowany

Definicja

Grafem skierowanym lub ***digrafem*** G (**di**rected **graph**) nazywamy uporządkowaną trójkę $G = \langle V, E, \gamma \rangle$, gdzie V jest niepustym zbiorem wierzchołków, E – zbiorem krawędzi skierowanych (łuków), γ odwzorowaniem zbioru E w zbiór $V \times V$.

Definicja

Jeśli e ($e \in E$) jest łukiem grafu G i $\gamma(e) = (p, q)$ ($(p, q) \in V \times V$), to

- p nazywamy ***początkiem łuku***
- q nazywamy ***końcem łuku***
- o łuku e mówimy również, że
  - łuk e biegnie od wierzchołka p do wierzchołka q
  - łuk e wychodzi z wierzchołka p i wchodzi do wierzchołka q
  - łuk e jest incydentny z wierzchołka p i jest incydentny w wierzchołek q

Graf skierowany

Definicja

Grafem skierowanym lub ***digrafem*** G (**di**rected **graph**) nazywamy uporządkowaną trójkę $G = \langle V, E, \gamma \rangle$, gdzie V jest niepustym zbiorem wierzchołków, E – zbiorem krawędzi skierowanych (łuków), γ odwzorowaniem zbioru E w zbiór $V \times V$.

Definicja

Jeśli e ($e \in E$) jest łukiem grafu G i $\gamma(e) = (p, q)$ ($(p, q) \in V \times V$), to

- p nazywamy ***początkiem łuku***
- q nazywamy ***końcem łuku***
- o łuku e mówimy również, że
  - łuk e biegnie od wierzchołka p do wierzchołka q
  - łuk e wychodzi z wierzchołka p i wchodzi do wierzchołka q
  - łuk e jest incydentny z wierzchołka p i jest incydentny w wierzchołek q

Graf skierowany

Definicja

Grafem skierowanym lub ***digrafem*** G (**di**rected **graph**) nazywamy uporządkowaną trójkę $G = \langle V, E, \gamma \rangle$, gdzie V jest niepustym zbiorem wierzchołków, E – zbiorem krawędzi skierowanych (łuków), γ odwzorowaniem zbioru E w zbiór $V \times V$.

Definicja

Jeśli e ($e \in E$) jest łukiem grafu G i $\gamma(e) = (p, q)$ ($(p, q) \in V \times V$), to

- p nazywamy ***początkiem łuku***
- q nazywamy ***końcem łuku***
- o łuku e mówimy również, że
  - łuk e biegnie od wierzchołka p do wierzchołka q
  - łuk e wychodzi z wierzchołka p i wchodzi do wierzchołka q
  - łuk e jest incydentny z wierzchołka p i jest incydentny w wierzchołek q

Graf skierowany

Definicja

Grafem skierowanym lub ***digrafem*** G (**di**rected **graph**) nazywamy uporządkowaną trójkę $G = \langle V, E, \gamma \rangle$, gdzie V jest niepustym zbiorem wierzchołków, E – zbiorem krawędzi skierowanych (łuków), γ odwzorowaniem zbioru E w zbiór $V \times V$.

Definicja

Jeśli e ($e \in E$) jest łukiem grafu G i $\gamma(e) = (p, q)$ ($(p, q) \in V \times V$), to

- p nazywamy ***początkiem łuku***
- q nazywamy ***końcem łuku***
- o łuku e mówimy również, że
  - łuk e biegnie od wierzchołka p do wierzchołka q
  - łuk e wychodzi z wierzchołka p i wchodzi do wierzchołka q
  - łuk e jest incydentny z wierzchołka p i jest incydentny w wierzchołek q

Graf skierowany

Analogicznie, jak w przypadku grafu nieskierowanego mamy

Definicja

Jeżeli $\gamma(e) = (p, p)$, to e nazywamy pętlą.

Definicja

Jeżeli $e, k \in E$ oraz $\gamma(e) = (p, q)$ i $\gamma(k) = (p, q)$, to krawędzie e i k nazywamy równoległymi lub wielokrotnymi.

Definicja

Jeżeli G jest grafem prostym (bez pętli i krawędzi równoległych), to przekształcenie γ jest różnowartościowe a graf G możemy oznaczać jako $G = \langle V, E \rangle$.

Graf skierowany

Analogicznie, jak w przypadku grafu nieskierowanego mamy

Definicja

Jeżeli $\gamma(e) = (p, p)$, to e nazywamy pętlą.

Definicja

Jeżeli $e, k \in E$ oraz $\gamma(e) = (p, q)$ i $\gamma(k) = (p, q)$, to krawędzie e i k nazywamy równoległymi lub wielokrotnymi.

Definicja

Jeżeli G jest grafem prostym (bez pętli i krawędzi równoległych), to przekształcenie γ jest różnowartościowe a graf G możemy oznaczać jako $G = \langle V, E \rangle$.

Graf skierowany

Analogicznie, jak w przypadku grafu nieskierowanego mamy

Definicja

Jeżeli $\gamma(e) = (p, p)$, to e nazywamy pętlą.

Definicja

Jeżeli $e, k \in E$ oraz $\gamma(e) = (p, q)$ i $\gamma(k) = (p, q)$, to krawędzie e i k nazywamy równoległymi lub wielokrotnymi.

Definicja

Jeżeli G jest grafem prostym (bez pętli i krawędzi równoległych), to przekształcenie γ jest różnowartościowe a graf G możemy oznaczać jako $G = \langle V, E \rangle$.

Przykład

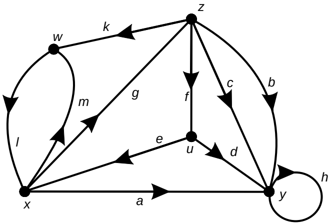
Weźmy graf $G = \langle V, E, \gamma \rangle$, w którym dane są zbiory:

$V = \{u, w, x, y, z\}$ – zbiór wierzchołków,
$E = \{(a, b, c, d, e, f, g, h, k, l, m\}$ – zbiór łuków

oraz funkcja γ postaci:

e	a	b	c	d	e	f	g
γ(e)	(x, y)	(z, y)	(z, y)	(u, y)	(u, x)	(z, u)	(x, z)

h	k	l	m
(y, y)	(z, w)	(w, x)	(x, w)



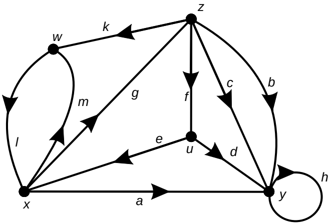
Przykład

Weźmy graf $G = \langle V, E, \gamma \rangle$, w którym dane są zbiory:

$V = \{u, w, x, y, z\}$ – zbiór wierzchołków,
$E = \{(a, b, c, d, e, f, g, h, k, l, m\}$ – zbiór łuków

oraz funkcja γ postaci:

e	a	b	c	d	e	f	g	h	k	l	m
$\gamma(\mathbf{e})$	(x, y)	(z, y)	(z, y)	(u, y)	(u, x)	(z, u)	(x, z)	(y, y)	(z, w)	(w, x)	(x, w)



Przykład

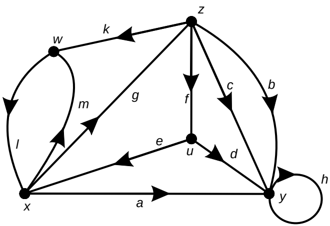
Weźmy graf $G = \langle V, E, \gamma \rangle$, w którym dane są zbiory:

$V = \{u, w, x, y, z\}$ – zbiór wierzchołków,
$E = \{(a, b, c, d, e, f, g, h, k, l, m\}$ – zbiór łuków

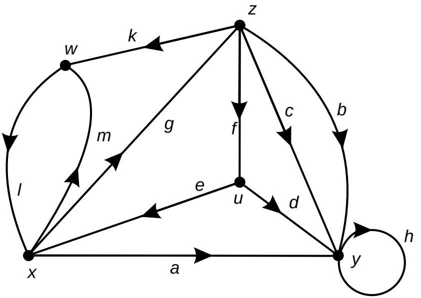
oraz funkcja γ postaci:

e	a	b	c	d	e	f	g
$\gamma(\mathbf{e})$	(x, y)	(z, y)	(z, y)	(u, y)	(u, x)	(z, u)	(x, z)

h	k	l	m
(y, y)	(z, w)	(w, x)	(x, w)

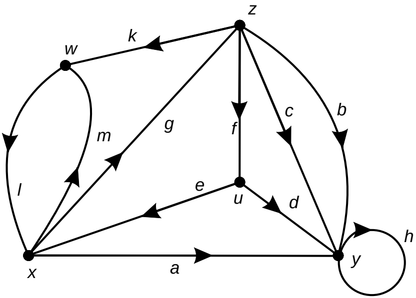


Przykład



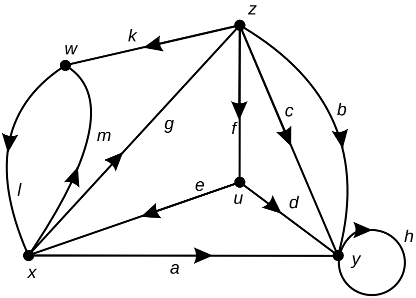
- krawędź h jest pętlą
- krawędzie c i b są wielokrotne (równoległe)
- krawędzie l i m nie są wielokrotne (równoległe)

Przykład



- krawędź h jest pętlą
- krawędzie c i b są wielokrotne (równoległe)
- krawędzie l i m nie są wielokrotne (równoległe)

Przykład

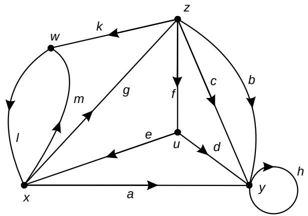


- krawędź h jest pętlą
- krawędzie c i b są wielokrotne (równoległe)
- krawędzie l i m nie są wielokrotne (równoległe)

Stopień wyjściowy i wejściowy wierzchołka w grafie skierowanym

Definicja

Liczbę krawędzi skierowanych wychodzących z wierzchołka x nazywamy ***stopniem wyjściowym*** tego wierzchołka i oznaczamy $\mathrm{degout}(x)$.



Definicja

Liczbę łuków wchodzących do wierzchołka x nazywamy ***stopniem wejściowym*** wierzchołka x i oznaczamy $\mathrm{degin}(x)$.

$\mathrm{degout}(x) = 3,$
$\mathrm{degout}(u) = 2,$
$\mathrm{degout}(z) = 4,$
$\mathrm{degout}(w) = 1,$
$\mathrm{degout}(y) = 1,$

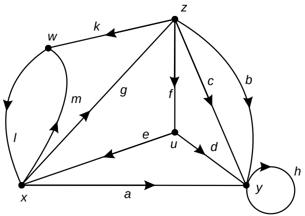
Stopień wyjściowy i wejściowy wierzchołka w grafie skierowanym

Definicja

Liczbę krawędzi skierowanych wychodzących z wierzchołka x nazywamy ***stopniem wyjściowym*** tego wierzchołka i oznaczamy $\operatorname{degout}(x)$.

Definicja

Liczbę łuków wchodzących do wierzchołka x nazywamy ***stopniem wejściowym*** wierzchołka x i oznaczamy $\operatorname{degin}(x)$.



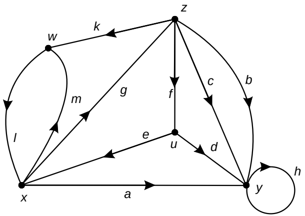
$\operatorname{degout}(x) = 3$,
$\operatorname{degout}(u) = 2$,
$\operatorname{degout}(z) = 4$,
$\operatorname{degout}(w) = 1$,
$\operatorname{degout}(y) = 1$,

WYDZIAŁ MATEMATYKI I INFORMATYKI
Uniwersytet Łódzki

Stopień wyjściowy i wejściowy wierzchołka w grafie skierowanym

Definicja

Liczbę krawędzi skierowanych wychodzących z wierzchołka x nazywamy ***stopniem wyjściowym*** tego wierzchołka i oznaczamy $\mathrm{degout}(x)$.



$$\begin{aligned}\mathrm{degout}(x) &= 3,\\ \mathrm{degout}(u) &= 2,\\ \mathrm{degout}(z) &= 4,\\ \mathrm{degout}(w) &= 1,\\ \mathrm{degout}(y) &= 1,\end{aligned}$$

Definicja

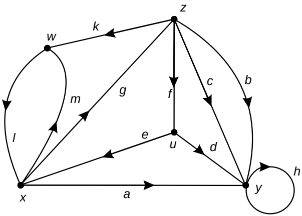
Liczbę łuków wchodzących do wierzchołka x nazywamy ***stopniem wejściowym*** wierzchołka x i oznaczamy $\mathrm{degin}(x)$.

WYDZIAŁ MATEMATYKI I INFORMATYKI
Uniwersytet Łódzki

Stopień wyjściowy i wejściowy wierzchołka w grafie skierowanym

Definicja

Liczbę krawędzi skierowanych wychodzących z wierzchołka x nazywamy ***stopniem wyjściowym*** tego wierzchołka i oznaczamy $\mathrm{degout}(x)$.



Definicja

Liczbę łuków wchodzących do wierzchołka x nazywamy ***stopniem wejściowym*** wierzchołka x i oznaczamy $\mathrm{degin}(x)$.

$$\begin{array}{lcl}
\mathrm{degout}(x)=3, & & \mathrm{degin}(x)=2,\\
\mathrm{degout}(u)=2, & & \mathrm{degin}(u)=1,\\
\mathrm{degout}(z)=4, & \text{i} & \mathrm{degin}(z)=1,\\
\mathrm{degout}(w)=1, & & \mathrm{degin}(w)=2,\\
\mathrm{degout}(y)=1, & & \mathrm{degin}(y)=5,
\end{array}$$

Stopień wierzchołka i stopień grafu, w grafie skierowanym

Definicja

Stopniem wierzchołka $\deg(x)$ w grafie skierowanym nazywamy sumę stopni wejściowych i wyjściowych wierzchołka x.

$$\deg(x) = \mathrm{degout}(x) + \mathrm{degin}(x)$$

Definicja

Stopień grafu $\Delta(G)$ określamy jako maksymalny stopień wierzchołka w tym grafie, czyli

$$\Delta(G) = \max_{u \in V} \deg(u)$$

Stopień wierzchołka i stopień grafu, w grafie skierowanym

Definicja

Stopniem wierzchołka $\deg(x)$ w grafie skierowanym nazywamy sumę stopni wejściowych i wyjściowych wierzchołka x.

$$\deg(x) = \mathrm{degout}(x) + \mathrm{degin}(x)$$

Definicja

Stopień grafu $\Delta(G)$ określamy jako maksymalny stopień wierzchołka w tym grafie, czyli

$$\Delta(G) = \max_{u \in V} \deg(u)$$

Źródło i ujście w grafie skierowanym

W digrafach wyróżniamy szczególnie dwa typy wierzchołków, które nie występują w grafach nieskierowanych, są to źródła i ujścia.

Definicja

Źródłem w digrafie nazywamy nieizolowany wierzchołek, do którego nie wchodzi żaden łuk.

Wierzchołek u jest w digrafie źródłem wtedy i tylko wtedy gdy

$$\mathrm{degin}(u) = 0 \land \mathrm{degout}(u) > 0$$

Definicja

Nieizolowany wierzchołek digrafu, który nie jest początkiem żadnego łuku nazywamy ***ujściem***.

Wierzchołek t jest ujściem wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\mathrm{degout}(t) = 0 \land \mathrm{degin}(u) > 0$$

Źródło i ujście w grafie skierowanym

W digrafach wyróżniamy szczególnie dwa typy wierzchołków, które nie występują w grafach nieskierowanych, są to źródła i ujścia.

Definicja

Źródłem w digrafie nazywamy nieizolowany wierzchołek, do którego nie wchodzi żaden łuk.

Wierzchołek u jest w digrafie źródłem wtedy i tylko wtedy gdy

$$\mathrm{degin}(u) = 0 \land \mathrm{degout}(u) > 0$$

Definicja

Nieizolowany wierzchołek digrafu, który nie jest początkiem żadnego łuku nazywamy ***ujściem***.

Wierzchołek t jest ujściem wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\mathrm{degout}(t) = 0 \land \mathrm{degin}(u) > 0$$

Źródło i ujście w grafie skierowanym

W digrafach wyróżniamy szczególnie dwa typy wierzchołków, które nie występują w grafach nieskierowanych, są to źródła i ujścia.

Definicja

Źródłem w digrafie nazywamy nieizolowany wierzchołek, do którego nie wchodzi żaden łuk.

Wierzchołek u jest w digrafie źródłem wtedy i tylko wtedy gdy

$$\mathrm{degin}(u) = 0 \wedge \mathrm{degout}(u) > 0$$

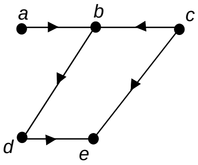
Definicja

Nieizolowany wierzchołek digrafu, który nie jest początkiem żadnego łuku nazywamy ***ujściem***.

Wierzchołek t jest ujściem wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\mathrm{degout}(t) = 0 \wedge \mathrm{degin}(u) > 0$$

Przykład



Stopnie wierzchołków w grafie wynoszą:

$$\deg(a) = \text{degout}(a) + \text{degin}(a) = 1 + 0 = 1$$
$$\deg(b) = \text{degout}(b) + \text{degin}(b) = 1 + 2 = 3$$
$$\deg(c) = \text{degout}(c) + \text{degin}(c) = 2 + 0 = 2$$
$$\deg(d) = \text{degout}(d) + \text{degin}(d) = 1 + 1 = 2$$
$$\deg(e) = \text{degout}(e) + \text{degin}(e) = 0 + 2 = 2$$

Źródłem w grafie G są wierzchołki a i c.

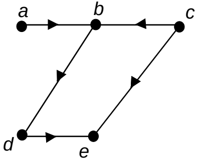
Ujściem jest wierzchołek e.

Stopień grafu wynosi:

$$\Delta(G) = \max_{u \in V} \deg(u) = 3$$

WYDZIAŁ MATEMATYKI i INFORMATYKI
Uniwersytet Łódzki

Przykład



Stopnie wierzchołków w grafie wynoszą:

$$\deg(a) = \mathrm{degout}(a) + \mathrm{degin}(a) = 1 + 0 = 1$$
$$\deg(b) = \mathrm{degout}(b) + \mathrm{degin}(b) = 1 + 2 = 3$$
$$\deg(c) = \mathrm{degout}(c) + \mathrm{degin}(c) = 2 + 0 = 2$$
$$\deg(d) = \mathrm{degout}(d) + \mathrm{degin}(d) = 1 + 1 = 2$$
$$\deg(e) = \mathrm{degout}(e) + \mathrm{degin}(e) = 0 + 2 = 2$$

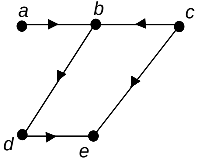
Źródłem w grafie G są wierzchołki a i c.

Ujściem jest wierzchołek e.

Stopień grafu wynosi:

$$\Delta(G) = \max_{u \in V} \deg(u) = 3$$

Przykład



Stopnie wierzchołków w grafie wynoszą:

$$\deg(a) = \text{degout}(a) + \text{degin}(a) = 1 + 0 = 1$$
$$\deg(b) = \text{degout}(b) + \text{degin}(b) = 1 + 2 = 3$$
$$\deg(c) = \text{degout}(c) + \text{degin}(c) = 2 + 0 = 2$$
$$\deg(d) = \text{degout}(d) + \text{degin}(d) = 1 + 1 = 2$$
$$\deg(e) = \text{degout}(e) + \text{degin}(e) = 0 + 2 = 2$$

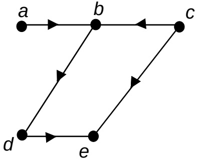
Źródłem w grafie G są wierzchołki a i c.

Ujściem jest wierzchołek e.

Stopień grafu wynosi:

$$\Delta(G) = \max_{u \in V} \deg(u) = 3$$

Przykład



Stopnie wierzchołków w grafie wynoszą:

$$\deg(a) = \mathrm{degout}(a) + \mathrm{degin}(a) = 1 + 0 = 1$$
$$\deg(b) = \mathrm{degout}(b) + \mathrm{degin}(b) = 1 + 2 = 3$$
$$\deg(c) = \mathrm{degout}(c) + \mathrm{degin}(c) = 2 + 0 = 2$$
$$\deg(d) = \mathrm{degout}(d) + \mathrm{degin}(d) = 1 + 1 = 2$$
$$\deg(e) = \mathrm{degout}(e) + \mathrm{degin}(e) = 0 + 2 = 2$$

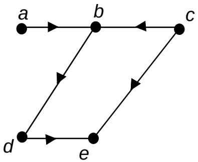
Źródłem w grafie G są wierzchołki a i c.

Ujściem jest wierzchołek e.

Stopień grafu wynosi:

$$\Delta(G) = \max_{u \in V} \deg(u) = 3$$

Przykład



Stopnie wierzchołków w grafie wynoszą:

$$\begin{aligned}
\deg(a) &= \text{degout}(a) + \text{degin}(a) = 1 + 0 = 1\\
\deg(b) &= \text{degout}(b) + \text{degin}(b) = 1 + 2 = 3\\
\deg(c) &= \text{degout}(c) + \text{degin}(c) = 2 + 0 = 2\\
\deg(d) &= \text{degout}(d) + \text{degin}(d) = 1 + 1 = 2\\
\deg(e) &= \text{degout}(e) + \text{degin}(e) = 0 + 2 = 2
\end{aligned}$$

Źródłem w grafie G są wierzchołki a i c.

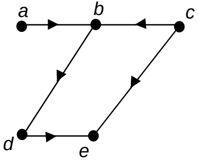
Ujściem jest wierzchołek e.

Stopień grafu wynosi:

$$\Delta(G) = \max_{u \in V} \deg(u) = 3$$

WYDZIAŁ MATEMATYKI
i INFORMATYKI
Uniwersytet Łódzki

Przykład



Stopnie wierzchołków w grafie wynoszą:

$$\begin{aligned}
\deg(a) &= \mathrm{degout}(a) + \mathrm{degin}(a) = 1 + 0 = 1\\
\deg(b) &= \mathrm{degout}(b) + \mathrm{degin}(b) = 1 + 2 = 3\\
\deg(c) &= \mathrm{degout}(c) + \mathrm{degin}(c) = 2 + 0 = 2\\
\deg(d) &= \mathrm{degout}(d) + \mathrm{degin}(d) = 1 + 1 = 2\\
\deg(e) &= \mathrm{degout}(e) + \mathrm{degin}(e) = 0 + 2 = 2
\end{aligned}$$

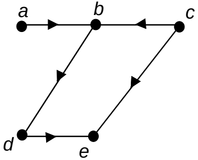
Źródłem w grafie G są wierzchołki a i c.

Ujściem jest wierzchołek e.

Stopień grafu wynosi:

$$\Delta(G) = \max_{u \in V} \deg(u) = 3$$

Przykład



Stopnie wierzchołków w grafie wynoszą:

$$
\begin{aligned}
\deg(a) &= \operatorname{degout}(a) + \operatorname{degin}(a) = 1 + 0 = 1\\
\deg(b) &= \operatorname{degout}(b) + \operatorname{degin}(b) = 1 + 2 = 3\\
\deg(c) &= \operatorname{degout}(c) + \operatorname{degin}(c) = 2 + 0 = 2\\
\deg(d) &= \operatorname{degout}(d) + \operatorname{degin}(d) = 1 + 1 = 2\\
\deg(e) &= \operatorname{degout}(e) + \operatorname{degin}(e) = 0 + 2 = 2
\end{aligned}
$$

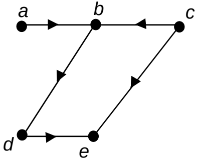
Źródłem w grafie G są wierzchołki a i c.

Ujściem jest wierzchołek e.

Stopień grafu wynosi:

$$\Delta(G) = \max_{u \in V} \deg(u) = 3$$

Przykład



Stopnie wierzchołków w grafie wynoszą:

$$\begin{aligned}
\deg(a) &= \mathrm{degout}(a) + \mathrm{degin}(a) = 1 + 0 = 1\\
\deg(b) &= \mathrm{degout}(b) + \mathrm{degin}(b) = 1 + 2 = 3\\
\deg(c) &= \mathrm{degout}(c) + \mathrm{degin}(c) = 2 + 0 = 2\\
\deg(d) &= \mathrm{degout}(d) + \mathrm{degin}(d) = 1 + 1 = 2\\
\deg(e) &= \mathrm{degout}(e) + \mathrm{degin}(e) = 0 + 2 = 2
\end{aligned}$$

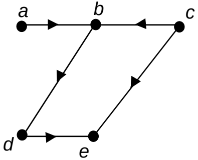
Źródłem w grafie G są wierzchołki a i c.

Ujściem jest wierzchołek e.

Stopień grafu wynosi:

$$\Delta(G) = \max_{u \in V} \deg(u) = 3$$

Przykład



Stopnie wierzchołków w grafie wynoszą:

$$\begin{aligned}
\deg(a) &= \mathrm{degout}(a) + \mathrm{degin}(a) = 1 + 0 = 1\\
\deg(b) &= \mathrm{degout}(b) + \mathrm{degin}(b) = 1 + 2 = 3\\
\deg(c) &= \mathrm{degout}(c) + \mathrm{degin}(c) = 2 + 0 = 2\\
\deg(d) &= \mathrm{degout}(d) + \mathrm{degin}(d) = 1 + 1 = 2\\
\deg(e) &= \mathrm{degout}(e) + \mathrm{degin}(e) = 0 + 2 = 2
\end{aligned}$$

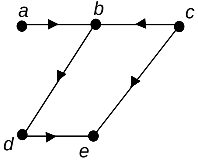
Stopień grafu wynosi:

$$\Delta(G) = \max_{u \in V} \deg(u) = 3$$

Źródłem w grafie G są wierzchołki a i c.

Ujściem jest wierzchołek e.

Przykład



Stopnie wierzchołków w grafie wynoszą:

$$\begin{aligned}
\deg(a) &= \mathrm{degout}(a) + \mathrm{degin}(a) = 1 + 0 = 1\\
\deg(b) &= \mathrm{degout}(b) + \mathrm{degin}(b) = 1 + 2 = 3\\
\deg(c) &= \mathrm{degout}(c) + \mathrm{degin}(c) = 2 + 0 = 2\\
\deg(d) &= \mathrm{degout}(d) + \mathrm{degin}(d) = 1 + 1 = 2\\
\deg(e) &= \mathrm{degout}(e) + \mathrm{degin}(e) = 0 + 2 = 2
\end{aligned}$$

Źródłem w grafie G są wierzchołki a i c.

Ujściem jest wierzchołek e.

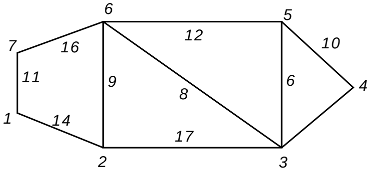
Stopień grafu wynosi:

$$\Delta(G) = \max_{u \in V} \deg(u) = 3$$

Grafy ważone, sieci

Definicja

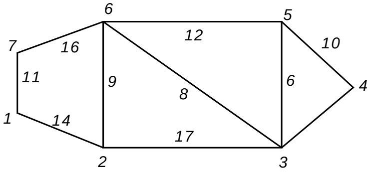
Grafem ważonym nazywamy graf, w którym każdej krawędzi przyporządkowana jest liczba rzeczywista (czasami tylko nieujemna) zwana ***wagą*** tej krawędzi.



Grafy ważone, sieci

Definicja

Grafem ważonym nazywamy graf, w którym każdej krawędzi przyporządkowana jest liczba rzeczywista (czasami tylko nieujemna) zwana ***wagą*** tej krawędzi.

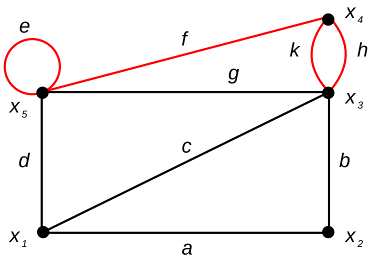


- Ważnym zastosowaniem grafów ważonych są sieci. W teorii grafów terminami określającymi węzeł jest wierzchołek, a łącze jest krawędzią.
- W sieci, którą wykorzystujemy do rozwiązywania problemów praktycznych waga krawędzi może oznaczać długość odcinka drogi, czas przejazdu, koszt budowy tego odcinka drogi, przepustowość (w sieci gazowej lub wodociągowej), prawdopodobieństwo przejścia sygnałów, niezawodność połączenia (w sieci telekomunikacyjnej lub komputerowej) albo dowolną inną cechę mierzalną ilościowo przyporządkowaną danej krawędzi.

- Ważnym zastosowaniem grafów ważonych są sieci. W teorii grafów terminami określającymi węzeł jest wierzchołek, a łącze jest krawędzią.
- W sieci, którą wykorzystujemy do rozwiązywania problemów praktycznych waga krawędzi może oznaczać długość odcinka drogi, czas przejazdu, koszt budowy tego odcinka drogi, przepustowość (w sieci gazowej lub wodociągowej), prawdopodobieństwo przejścia sygnałów, niezawodność połączenia (w sieci telekomunikacyjnej lub komputerowej) albo dowolną inną cechę mierzalną ilościowo przyporządkowaną danej krawędzi.

- Ważnym zastosowaniem grafów ważonych są sieci. W teorii grafów terminami określającymi węzeł jest wierzchołek, a łącze jest krawędzią.
- W sieci, którą wykorzystujemy do rozwiązywania problemów praktycznych waga krawędzi może oznaczać długość odcinka drogi, czas przejazdu, koszt budowy tego odcinka drogi, przepustowość (w sieci gazowej lub wodociągowej), prawdopodobieństwo przejścia sygnałów, niezawodność połączenia (w sieci telekomunikacyjnej lub komputerowej) albo dowolną inną cechę mierzalną ilościowo przyporządkowaną danej krawędzi.

Droga w grafie



- droga *efkhk* jest drogą w grafie G
- jest to droga długości 5, od wierzchołka x_5 do wierzchołka x_3
- x_5 jest wierzchołkiem początkowym, x_3 jest wierzchołkiem końcowym
- $\gamma(e) = \{x_5, x_5\}$, $\gamma(f) = \{x_5, x_4\}$, $\gamma(k) = \{x_4, x_3\}$, $\gamma(h) = \{x_3, x_4\}$, $\gamma(k) = \{x_4, x_3\}$

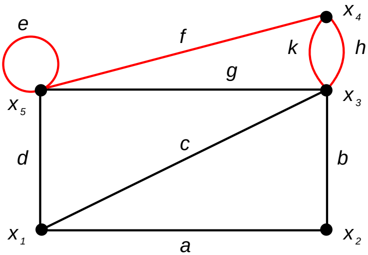
Definicja

Drogą w grafie G nazywamy skończony ciąg krawędzi $e_1 e_2 \ldots e_n$ taki, że $e_i \in E$, $i = 1, \ldots, n$ oraz istnieją wierzchołki $x_1 x_2 \ldots x_{n+1}$ takie, że $\gamma(e_i) = \{x_i, x_{i+1}\}$ dla $i = 1, \ldots, n$.

Mówimy, że droga $e_1 e_2 \ldots e_n$ jest drogą długości n od wierzchołka x_1 do wierzchołka x_{n+1}.

Wierzchołek x_1 nazywamy *wierzchołkiem początkowym*, x_{n+1} - *wierzchołkiem końcowym drogi*.

Droga w grafie



- droga *efkhk* jest drogą w grafie G
- jest to droga długości 5, od wierzchołka x_5 do wierzchołka x_3
- x_5 jest wierzchołkiem początkowym, x_3 jest wierzchołkiem końcowym
- $\gamma(e) = \{x_5, x_5\}$, $\gamma(f) = \{x_5, x_4\}$, $\gamma(k) = \{x_4, x_3\}$, $\gamma(h) = \{x_3, x_4\}$, $\gamma(k) = \{x_4, x_3\}$

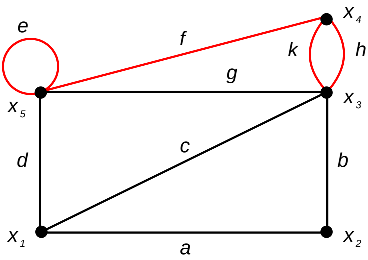
Definicja

Drogą w grafie G nazywamy skończony ciąg krawędzi $e_1 e_2 \ldots e_n$ taki, że $e_i \in E$, $i = 1, \ldots, n$ oraz istnieją wierzchołki $x_1 x_2 \ldots x_{n+1}$ takie, że $\gamma(e_i) = \{x_i, x_{i+1}\}$ dla $i = 1, \ldots, n$.

Mówimy, że droga $e_1 e_2 \ldots e_n$ jest drogą długości n od wierzchołka x_1 do wierzchołka x_{n+1}.

Wierzchołek x_1 nazywamy *wierzchołkiem początkowym*, x_{n+1} - *wierzchołkiem końcowym drogi*.

Droga w grafie



Definicja

Drogą w grafie G nazywamy skończony ciąg krawędzi $e_1 e_2 \dots e_n$ taki, że $e_i \in E$, $i = 1, \dots, n$ oraz istnieją wierzchołki $x_1 x_2 \dots x_{n+1}$ takie, że $\gamma(e_i) = \{x_i, x_{i+1}\}$ dla $i = 1, \dots, n$.

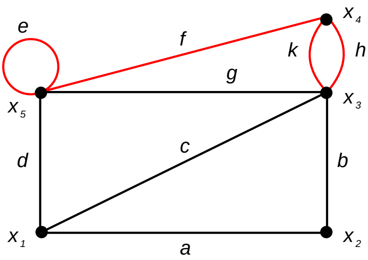
Mówimy, że droga $e_1 e_2 \dots e_n$ jest drogą długości n od wierzchołka x_1 do wierzchołka x_{n+1}.

Wierzchołek x_1 nazywamy ***wierzchołkiem początkowym***, x_{n+1} - ***wierzchołkiem końcowym drogi***.

- droga *efkhk* jest drogą w grafie G
- jest to droga długości 5, od wierzchołka x_5 do wierzchołka x_3
- x_5 jest wierzchołkiem początkowym, x_3 jest wierzchołkiem końcowym

- $\gamma(e) = \{x_5, x_5\}$, $\gamma(f) = \{x_5, x_4\}$, $\gamma(k) = \{x_4, x_3\}$, $\gamma(h) = \{x_3, x_4\}$, $\gamma(k) = \{x_4, x_3\}$

Droga w grafie



- droga *efkhk* jest drogą w grafie G
- jest to droga długości 5, od wierzchołka x_5 do wierzchołka x_3
- x_5 jest wierzchołkiem początkowym, x_3 jest wierzchołkiem końcowym
- $\gamma(e) = \{x_5, x_5\}$, $\gamma(f) = \{x_5, x_4\}$, $\gamma(k) = \{x_4, x_3\}$, $\gamma(h) = \{x_3, x_4\}$, $\gamma(k) = \{x_4, x_3\}$

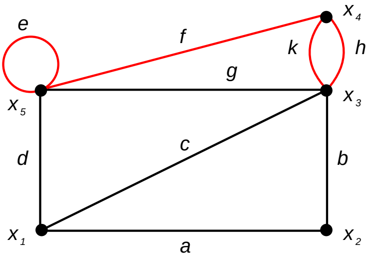
Definicja

Drogą w grafie G nazywamy skończony ciąg krawędzi $e_1 e_2 ... e_n$ taki, że $e_i \in E$, $i = 1, ..., n$ oraz istnieją wierzchołki $x_1 x_2 ... x_{n+1}$ takie, że $\gamma(e_i) = \{x_i, x_{i+1}\}$ dla $i = 1, ..., n$.

Mówimy, że droga $e_1 e_2 ... e_n$ jest drogą długości n od wierzchołka x_1 do wierzchołka x_{n+1}.

Wierzchołek x_1 nazywamy ***wierzchołkiem początkowym***, x_{n+1} - ***wierzchołkiem końcowym drogi***.

Droga w grafie



- droga *efkhk* jest drogą w grafie G
- jest to droga długości 5, od wierzchołka x_5 do wierzchołka x_3
- x_5 jest wierzchołkiem początkowym, x_3 jest wierzchołkiem końcowym
- $\gamma(e) = \{x_5, x_5\}$, $\gamma(f) = \{x_5, x_4\}$, $\gamma(k) = \{x_4, x_3\}$, $\gamma(h) = \{x_3, x_4\}$, $\gamma(k) = \{x_4, x_3\}$

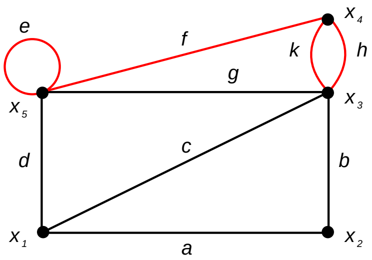
Definicja

Drogą w grafie G nazywamy skończony ciąg krawędzi $e_1 e_2 ... e_n$ taki, że $e_i \in E$, $i = 1, ..., n$ oraz istnieją wierzchołki $x_1 x_2 ... x_{n+1}$ takie, że $\gamma(e_i) = \{x_i, x_{i+1}\}$ dla $i = 1, ..., n$.

Mówimy, że droga $e_1 e_2 ... e_n$ jest drogą długości n od wierzchołka x_1 do wierzchołka x_{n+1}.

Wierzchołek x_1 nazywamy ***wierzchołkiem początkowym***, x_{n+1} - ***wierzchołkiem końcowym drogi***.

Droga w grafie



- droga *efkhk* jest drogą w grafie G
- jest to droga długości 5, od wierzchołka x_5 do wierzchołka x_3
- x_5 jest wierzchołkiem początkowym, x_3 jest wierzchołkiem końcowym
- $\gamma(e) = \{x_5, x_5\}$, $\gamma(f) = \{x_5, x_4\}$, $\gamma(k) = \{x_4, x_3\}$, $\gamma(h) = \{x_3, x_4\}$, $\gamma(k) = \{x_4, x_3\}$

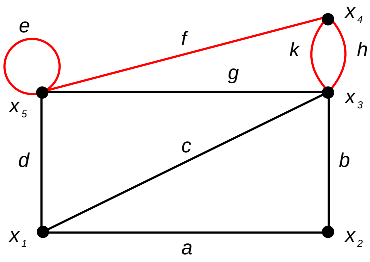
Definicja

Drogą w grafie G nazywamy skończony ciąg krawędzi $e_1 e_2 ... e_n$ taki, że $e_i \in E$, $i = 1, ..., n$ oraz istnieją wierzchołki $x_1 x_2 ... x_{n+1}$ takie, że $\gamma(e_i) = \{x_i, x_{i+1}\}$ dla $i = 1, ..., n$.

Mówimy, że droga $e_1 e_2 ... e_n$ jest drogą długości n od wierzchołka x_1 do wierzchołka x_{n+1}.

Wierzchołek x_1 nazywamy ***wierzchołkiem początkowym***, x_{n+1} - ***wierzchołkiem końcowym drogi***.

Droga w grafie



- droga *efkhk* jest drogą w grafie G
- jest to droga długości 5, od wierzchołka x_5 do wierzchołka x_3
- x_5 jest wierzchołkiem początkowym, x_3 jest wierzchołkiem końcowym
- $\gamma(e) = \{x_5, x_5\}$, $\gamma(f) = \{x_5, x_4\}$, $\gamma(k) = \{x_4, x_3\}$, $\gamma(h) = \{x_3, x_4\}$, $\gamma(k) = \{x_4, x_3\}$

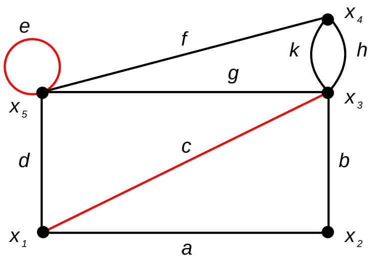
Definicja

Drogą w grafie G nazywamy skończony ciąg krawędzi $e_1 e_2 \ldots e_n$ taki, że $e_i \in E$, $i = 1, \ldots, n$ oraz istnieją wierzchołki $x_1 x_2 \ldots x_{n+1}$ takie, że $\gamma(e_i) = \{x_i, x_{i+1}\}$ dla $i = 1, \ldots, n$.

Mówimy, że droga $e_1 e_2 \ldots e_n$ jest drogą długości n od wierzchołka x_1 do wierzchołka x_{n+1}.

Wierzchołek x_1 nazywamy ***wierzchołkiem początkowym***, x_{n+1} - ***wierzchołkiem końcowym drogi***.

Droga w grafie



Ciąg krawędzi ec nie jest drogą w grafie G, ponieważ $\gamma(e) = \{x_5, x_5\}$ a $\gamma(c) = \{x_1, x_3\}$

Definicja

Drogą w grafie G nazywamy skończony ciąg krawędzi $e_1 e_2 ... e_n$ taki, że $e_i \in E$, $i = 1, ..., n$ oraz istnieją wierzchołki $x_1 x_2 ... x_{n+1}$ takie, że $\gamma(e_i) = \{x_i, x_{i+1}\}$ dla $i = 1, ..., n$.

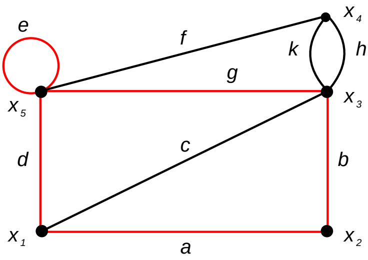
Mówimy, że droga $e_1 e_2 ... e_n$ jest drogą długości n od wierzchołka x_1 do wierzchołka x_{n+1}.

Wierzchołek x_1 nazywamy ***wierzchołkiem początkowym***, x_{n+1} - ***wierzchołkiem końcowym drogi***.

Droga w grafie

Definicja

Jeżeli w drodze wierzchołek początkowy pokrywa się z wierzchołkiem końcowym, to taką drogę nazywamy ***drogą zamkniętą***.

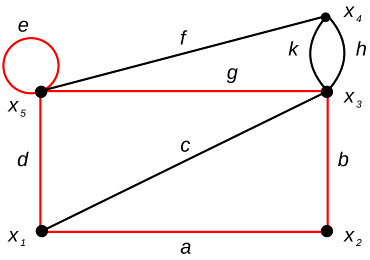


Droga *degba* jest drogą zamkniętą. Droga zaczyna się i kończy w wierzchołku x_1.

Droga w grafie

Definicja

Jeżeli w drodze wierzchołek początkowy pokrywa się z wierzchołkiem końcowym, to taką drogę nazywamy ***drogą zamkniętą***.

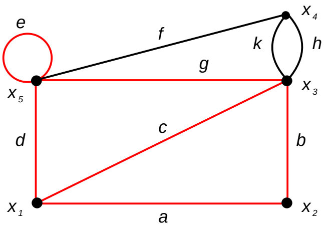


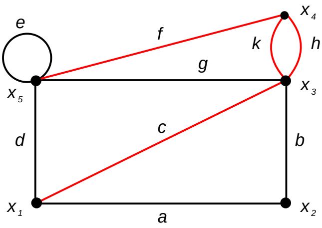
Droga *degba* jest drogą zamkniętą. Droga zaczyna się i kończy w wierzchołku x_1.

Droga prosta (ścieżka)

Definicja

Drogą prostą lub ścieżką nazywamy drogę, w której wszystkie krawędzie są różne.





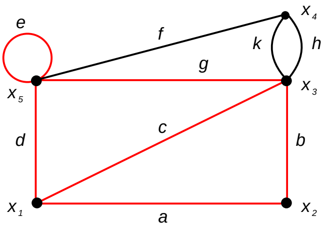
Droga *degbac* jest drogą prostą $x_1, x_5, x_5, x_3, x_2, x_1, x_3$

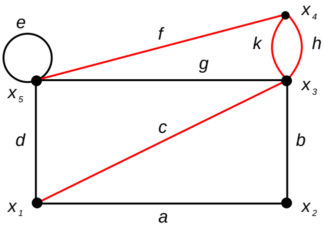
Droga *fkhkc* nie jest drogą prostą, ponieważ krawędź k powtarza się dwa razy.

Droga prosta (ścieżka)

Definicja

Drogą prostą lub ścieżką nazywamy drogę, w której wszystkie krawędzie są różne.





Droga *degbac* jest drogą prostą

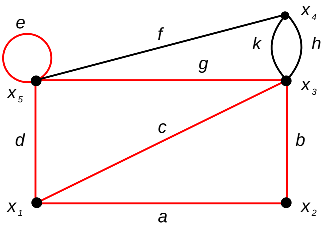
$x_1, x_5, x_5, x_3, x_2, x_1, x_3$

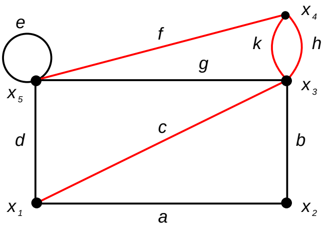
Droga *fkhkc* nie jest drogą prostą, ponieważ krawędź *k* powtarza się dwa razy.

Droga prosta (ścieżka)

Definicja

Drogą prostą lub ścieżką nazywamy drogę, w której wszystkie krawędzie są różne.





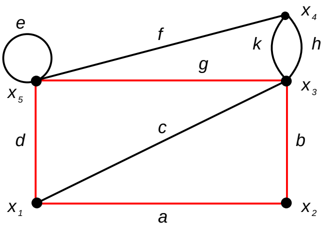
Droga *degbac* jest drogą prostą
$x_1, x_5, x_5, x_3, x_2, x_1, x_3$

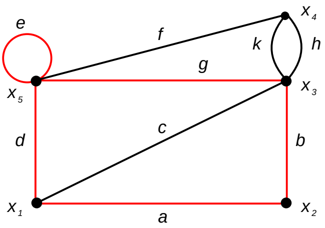
Droga *fkhkc* nie jest drogą prostą, ponieważ krawędź k powtarza się dwa razy.

Cykl w grafie

Definicja

Zamkniętą drogę prostą, której odpowiada ciąg wierzchołków $x_1 x_2 \ldots x_n x_1$, nazywamy ***cyklem*** jeśli wszystkie wierzchołki $x_1 x_2 \ldots x_n$ są różne.





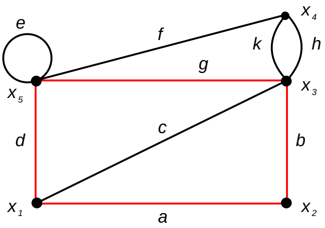
Droga *dgba* jest drogą prostą, zamkniętą. Ciąg wierzchołków, które jej odpowiadają jest postaci x_1, x_5, x_3, x_2, x_1, a więc wszystkie wierzchołki x_1, x_5, x_3, x_2 są różne.

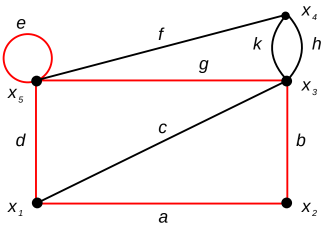
Droga *degba* nie jest cyklem, chociaż jest drogą prostą, zamkniętą, ponieważ w ciągu wierzchołków, odpowiadających tej drodze $x_1, x_5, x_5, x_3, x_2, x_1$ wierzchołek x_5 powtarza

Cykl w grafie

Definicja

Zamkniętą drogę prostą, której odpowiada ciąg wierzchołków $x_1x_2 \ldots x_nx_1$, nazywamy ***cyklem*** jeśli wszystkie wierzchołki $x_1x_2 \ldots x_n$ są różne.





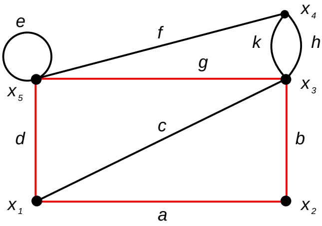
Droga *dgba* jest drogą prostą, zamkniętą. Ciąg wierzchołków, które jej odpowiadają jest postaci x_1, x_5, x_3, x_2, x_1, a więc wszystkie wierzchołki x_1, x_5, x_3, x_2 są różne.

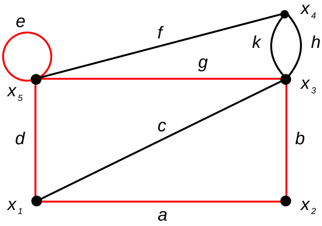
Droga *degba* nie jest cyklem, chociaż jest drogą prostą, zamkniętą, ponieważ w ciągu wierzchołków, odpowiadających tej drodze $x_1, x_5, x_5, x_3, x_2, x_1$ wierzchołek x_5 powtarza

Cykl w grafie

Definicja

Zamkniętą drogę prostą, której odpowiada ciąg wierzchołków $x_1x_2...x_nx_1$, nazywamy ***cyklem*** jeśli wszystkie wierzchołki $x_1x_2...x_n$ są różne.





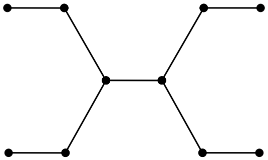
Droga *dgba* jest drogą prostą, zamkniętą. Ciąg wierzchołków, które jej odpowiadają jest postaci x_1, x_5, x_3, x_2, x_1, a więc wszystkie wierzchołki x_1, x_5, x_3, x_2 są różne.

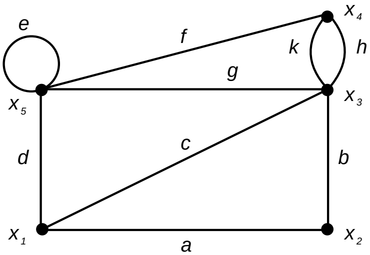
Droga *degba* nie jest cyklem, chociaż jest drogą prostą, zamkniętą, ponieważ w ciągu wierzchołków, odpowiadających tej drodze $x_1, x_5, x_5, x_3, x_2, x_1$ wierzchołek x_5 powtarza

Graf acykliczny

Definicja

Graf nie zawierający cykli nazywamy grafem ***acyklicznym***.





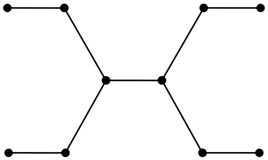
Graf acykliczny.

Graf posiada cykle np. *fgh*, *acb* itd.

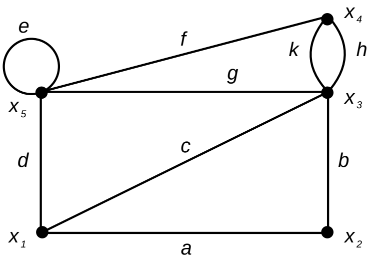
Graf acykliczny

Definicja

Graf nie zawierający cykli nazywamy grafem ***acyklicznym***.



Graf acykliczny.

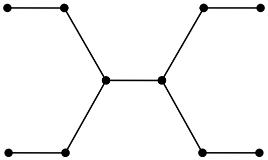


Graf posiada cykle np. *fgh*, *acb* itd.

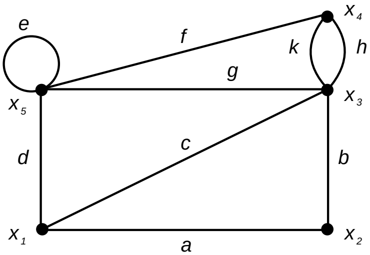
Graf acykliczny

Definicja

Graf nie zawierający cykli nazywamy grafem ***acyklicznym***.



Graf acykliczny.

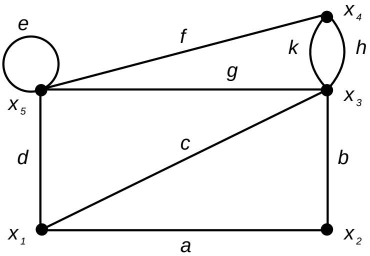


Graf posiada cykle np. *fgh*, *acb* itd.

Odległość wierzchołków

Definicja

Odległością pomiędzy wierzchołkiem u ***i wierzchołkiem*** v nazywamy długość najkrótszej drogi od u do v i oznaczamy ją symbolem $d(u, v)$.



Odległość pomiędzy wierzchołkami x_2 i x_4 wynosi

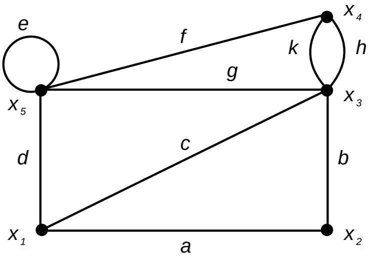
$$d(x_2, x_4) = 2.$$

Każda inna droga łącząca te wierzchołki ma długość większą niż 2 np. droga $x_2x_3x_1x_5x_4$ ma długość 4.

Odległość wierzchołków

Definicja

Odległością pomiędzy wierzchołkiem u ***i wierzchołkiem*** v nazywamy długość najkrótszej drogi od u do v i oznaczamy ją symbolem $d(u, v)$.



Odległość pomiędzy wierzchołkami x_2 i x_4 wynosi

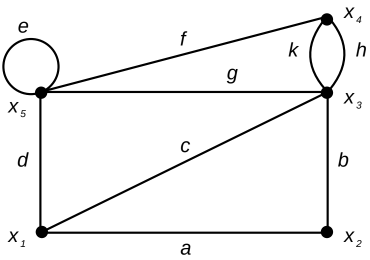
$$d(x_2, x_4) = 2.$$

Każda inna droga łącząca te wierzchołki ma długość większą niż 2 np. droga $x_2x_3x_1x_5x_4$ ma długość 4.

Odległość wierzchołków

Definicja

Odległością pomiędzy wierzchołkiem u ***i wierzchołkiem*** v nazywamy długość najkrótszej drogi od u do v i oznaczamy ją symbolem $d(u, v)$.



Odległość pomiędzy wierzchołkami x_2 i x_4 wynosi

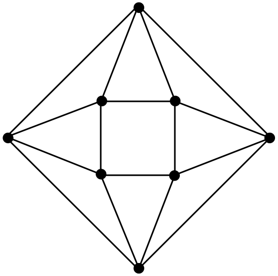
$$d(x_2, x_4) = 2.$$

Każda inna droga łącząca te wierzchołki ma długość większą niż 2 np. droga $x_2 x_3 x_1 x_5 x_4$ ma długość 4.

Graf spójny

Definicja

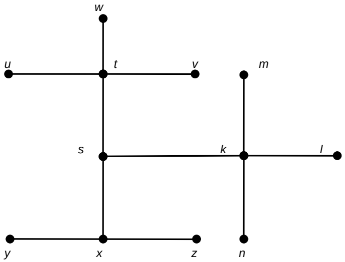
Graf G nazywamy ***spójnym*** wtedy i tylko wtedy, gdy, każda para jego różnych wierzchołków jest połączona drogą w tym grafie.



Drzewo

Definicja

Graf spójny i acykliczny nazywamy drzewem.



Dziękuję za uwagę!!!