Drzewa – cz. 2

Materiały kursu zdalnego nauczania

Drzewa z wagami

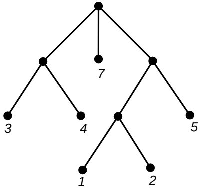
Definicja

Drzewem z wagami nazywamy drzewo z korzeniem, w którym każdemu liściowi przyporządkowana jest liczba nieujemna, nazywana wagą tego liścia.

Drzewa z wagami

Definicja

Drzewem z wagami nazywamy drzewo z korzeniem, w którym każdemu liściowi przyporządkowana jest liczba nieujemna, nazywana wagą tego liścia.



Definicja

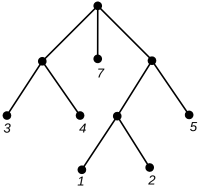
Niech drzewo T ma t liści, których wagami są liczby $w_1, w_2, \ldots, w_t$ oraz niech $l_1, l_2, \ldots, l_t$ oznaczają odpowiednio numery poziomów liści. Wagą drzewa T nazywamy liczbę

$$W(T) = \sum_{i=1}^{t} w_i l_i$$

Drzewa z wagami

Definicja

Drzewem z wagami nazywamy drzewo z korzeniem, w którym każdemu liściowi przyporządkowana jest liczba nieujemna, nazywana wagą tego liścia.



Definicja

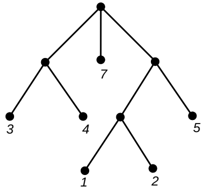
Niech drzewo T ma t liści, których wagami są liczby $w_1, w_2, \dots, w_t$ oraz niech $l_1, l_2, \dots, l_t$ oznaczają odpowiednio numery poziomów liści. Wagą drzewa T nazywamy liczbę

$$W(T) = \sum_{i=1}^{t} w_i l_i$$

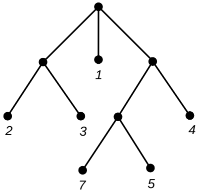
Zatem dla drzewa T_1 z rysunku mamy

$$\begin{aligned} W(T_1) &= 7 \cdot 1 + 3 \cdot 2 + 4 \cdot 2 + 5 \cdot 2 \\ &\quad + 1 \cdot 3 + 2 \cdot 3 \\ &= 7 + 6 + 8 + 10 + 3 + 6 = 40 \end{aligned}$$

Optymalne drzewo z korzeniem



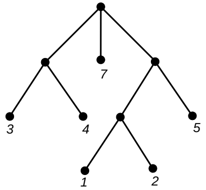
$W(T_1) = 40$



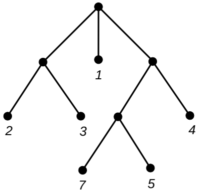
$W(T_2) = 55$

Waga $W(T_1)$ jest mniejsza niż $W(T_2)$, ponieważ cięższe liście znajdują się bliżej korzenia.

Optymalne drzewo z korzeniem



$W(T_1) = 40$



$W(T_2) = 55$

Waga $W(T_1)$ jest mniejsza niż $W(T_2)$, ponieważ cięższe liście znajdują się bliżej korzenia.

Definicja

Niech dany będzie zbiór wag $\{w_1, w_2, ..., 2_n\}$ oraz drzewo T z korzeniem o n liściach. Drzewo T nazywamy **drzewem optymalnym z wagami** $\{w_1, w_2, ..., 2_n\}$, jeżeli wagi te zostały tak przyporządkowane liściom, że $W(T)$ jest najmniejsza z możliwych.

Algorytm Huffmana. (1952)

Dane: L lista t wierzchołków o wagach $\{w_1, ..., w_t\}$, $(t \geq 2)$
Wyniki: optymalne drzewo binarne $T(L)$

Huffman(L)

if $t = 2$
  then
    $T(L)$ drzewo z dwoma liśćmi o wagach w_1, w_2
  else
    z listy L wybierz wierzchołki o najmniejszych wagach u, v
    połącz wybrane wierzchołki korzeniem o wadze $u + v$
    z L usuń wybrane wierzchołki i dodaj wierzchołek (korzeń) o wadze $u + v$
    Huffman(L)

Algorytm Huffmana. (1952)

Dane: L lista t wierzchołków o wagach $\{w_1, ..., w_t\}$, $(t \geq 2)$
Wyniki: optymalne drzewo binarne $T(L)$

Huffman(L)

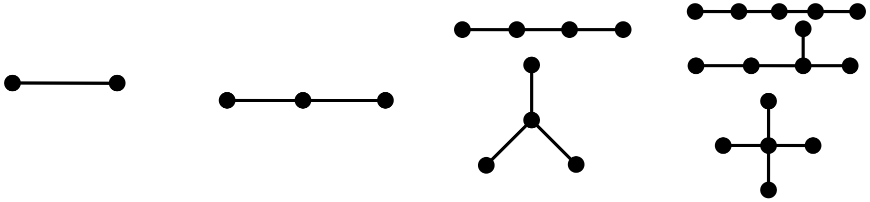
if $t = 2$
  then
    $T(L)$ drzewo z dwoma liśćmi o wagach w_1, w_2
  else
    z listy L wybierz wierzchołki o najmniejszych wagach u, v
    połącz wybrane wierzchołki korzeniem o wadze $u + v$
    z L usuń wybrane wierzchołki i dodaj wierzchołek (korzeń) o wadze $u + v$
    Huffman(L)

$\{1, 3, 4, 6, 9, 13\}$

Drzewa niezaetykietowane

Niech n będzie liczbą wierzchołków drzewa.

$n = 2$	$n = 3$	$n = 4$	$n = 5$

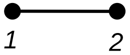


1 drzewo	1 drzewo	2 drzewa	3 drzewa

Drzewa zaetykietowane

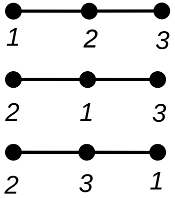
Niech n będzie liczbą wierzchołków drzewa.

$n = 2$



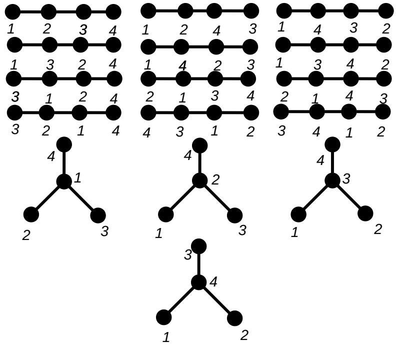
1 drzewo

$n = 3$



3 drzewa

$n = 4$



16 drzew

Twierdzenie Caleya o ilości drzew zaetykietowanych

Zostało ono sformułowane przez Artura Caleya w XIX wieku. Dowód tego twierdzenia pochodzi od Prüfera (1918).

Twierdzenie

Istnieje n^{n-2} różnych drzew zaetykietowanych mających n wierzchołków.

Twierdzenie Caleya o ilości drzew zaetykietowanych

Zostało ono sformułowane przez Artura Caleya w XIX wieku. Dowód tego twierdzenia pochodzi od Prüfera (1918).

Twierdzenie

Istnieje n^{n-2} różnych drzew zaetykietowanych mających n wierzchołków.

Definicja drzewa spinające

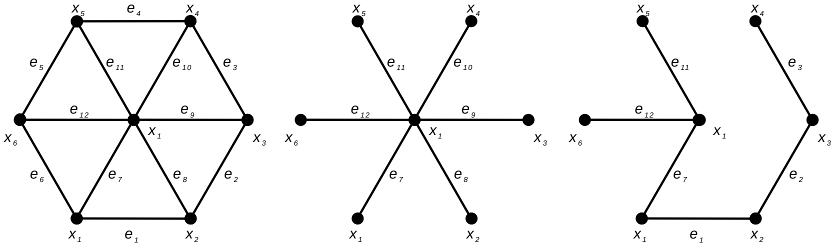
Definicja

Drzewo T nazywamy **drzewem rozpinającym (spinającym)** (lub **dendrytem**) spójnego grafu G, jeżeli jest podgrafem grafu G ($T \subset G$) oraz zawiera wszystkie jego wierzchołki, czyli $V_G = V_T$. Jeżeli graf G nie jest grafem spójnym, to zbiór drzew spinających każdej składowej tego grafu, nazywamy **lasem rozpinającym grafu** G.

Definicja drzewa spinające

Definicja

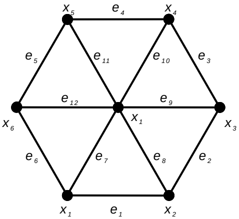
Drzewo T nazywamy **drzewem rozpinającym (spinającym)** (lub **dendrytem**) spójnego grafu G, jeżeli jest podgrafem grafu G ($T \subset G$) oraz zawiera wszystkie jego wierzchołki, czyli $V_G = V_T$. Jeżeli graf G nie jest grafem spójnym, to zbiór drzew spinających każdej składowej tego grafu, nazywamy **lasem rozpinającym grafu** G.



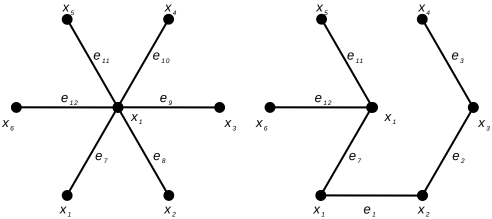
a) graf G

b)

Drzewo spinające

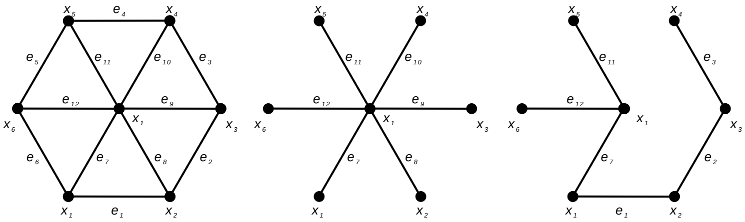


a) graf G



b)

Drzewo spinające



a) graf G

b)

Twierdzenie

Każdy graf spójny ma drzewo spinające.

Algorytm generowania drzewa spinającego.

1 $T \leftarrow G$
2 wybierz cykl w grafie T
3 usuwamy z cyklu dowolną krawędź e
4 $T \leftarrow T - \{e\}$
5 jeżeli w T są inne cykle, to ponownie wybierz krok 1.
6 jeżeli nie ma cykli w T, to T jest drzewem spinającym graf G

Własność

Każde drzewo spinające T lub las drzew spinających otrzymujemy z grafu G przez usunięcie pewnej liczby krawędzi grafu G i pozostawienie wszystkich jego wierzchołków.

Liczba drzew spinających

Twierdzenie

Graf K_n ma n^{n-2} drzew spinających.

Liczba drzew spinających

Twierdzenie

Graf K_n ma n^{n-2} drzew spinających.

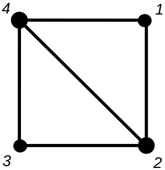
Twierdzenie

Graf $K_{2,s}$ ma $s \cdot 2^{s-1}$ drzew spinających.

Twierdzenie o liczbie drzew spinających grafu

Twierdzenie

Niech G będzie spójnym grafem prostym o n wierzchołkach i niech $M = [m_{ij}]$ będzie macierzą wymiaru $n \times n$, taką, że $m_{ii} = deg(v_i)$, $m_{ij} = -1$, gdy wierzchołki v_i i v_j są sąsiednie, oraz $m_{ij} = 0$ w przeciwnym razie. Wtedy liczba drzew spinających graf G jest równa dopełnieniu algebraicznemu dowolnego wyrazu macierzy M.



$$M = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 3 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

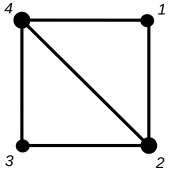
Dopełnienie algebraiczne wyrazu m_{44} wynosi

$$(-1)^{4+4} \det \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} = 12 - (2+2) = 8$$

Twierdzenie o liczbie drzew spinających grafu

Twierdzenie

Niech G będzie spójnym grafem prostym o n wierzchołkach i niech $M = [m_{ij}]$ będzie macierzą wymiaru $n \times n$, taką, że $m_{ii} = deg(v_i)$, $m_{ij} = -1$, gdy wierzchołki v_i i v_j są sąsiednie, oraz $m_{ij} = 0$ w przeciwnym razie. Wtedy liczba drzew spinających graf G jest równa dopełnieniu algebraicznemu dowolnego wyrazu macierzy M.

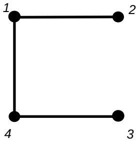
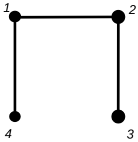
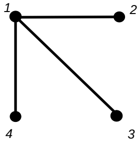
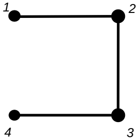
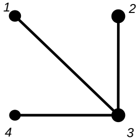
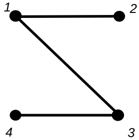
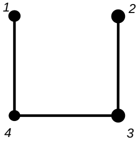
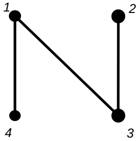
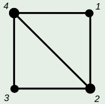


$$M = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 3 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

Mamy 8 drzew spinających.

Dopełnienie algebraiczne wyrazu m_{44} wynosi

$$(-1)^{4+4} \det \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} = 12 - (2+2) = 8$$


1
2
4
3

1
2
4
3

1
2
4
3

1
2
4
3

1
2
4
3

1
2
4
3

1
2
4
3

1
2
4
3

4
1
3
2

Minimalne drzewo spinające - Minimal Spanning Tree

Niech $G = (V, E, w)$ i niech $T = (V, E_T)$ będzie drzewem spinającym graf G.

Definicja

Wagą drzewa T nazywamy liczbę

$$w(T) := \sum_{e \in E_T} w(e)$$

Minimalne drzewo spinające - Minimal Spanning Tree

Niech $G = (V, E, w)$ i niech $T = (V, E_T)$ będzie drzewem spinającym graf G.

Definicja

Wagą drzewa T nazywamy liczbę

$$w(T) := \sum_{e \in E_T} w(e)$$

Definicja

Drzewo spinające T nazywamy **minimalnym drzewem spinającym – MST** grafu G, jeśli T ma najmniejszą wagę spośród wszystkich drzew spinających graf G:

$$w(T) \to min$$

Minimalne drzewo spinające - Minimal Spanning Tree

Niech $G = (V, E, w)$ i niech $T = (V, E_T)$ będzie drzewem spinającym graf G.

Definicja

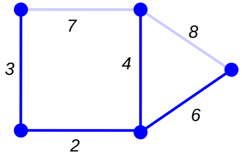
Wagą drzewa T nazywamy liczbę

$$w(T) := \sum_{e \in E_T} w(e)$$

Definicja

Drzewo spinające T nazywamy **minimalnym drzewem spinającym – MST** grafu G, jeśli T ma najmniejszą wagę spośród wszystkich drzew spinających graf G:

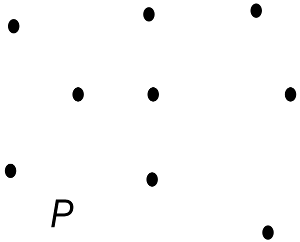
$$w(T) \to min$$

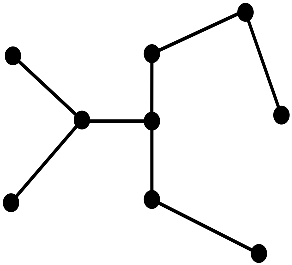


Minimalne drzewo spinające (Euklidesowe) - Euclidean Minimum Spanning Tree EMST

Definicja

Minimalnym euklidesowym drzewem rozpinającym zbioru punktów P na płaszczyźnie nazywamy drzewo o minimalnej sumie wag krawędzi, gdzie waga krawędzi wyliczana jest na podstawie odległości pomiędzy dwoma punktami płaszczyzny.





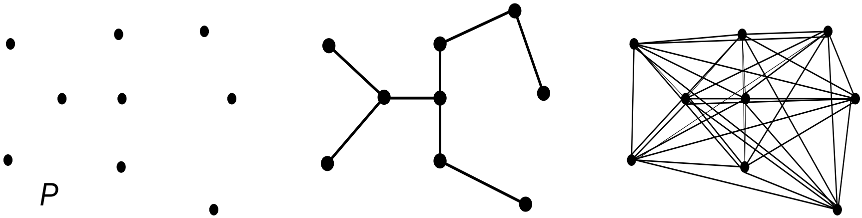
Algorytm dokładny

1. skonstruuj graf pełny na n punktach o $\frac{n(n-1)}{2}$ krawędziach
2. waga każdej krawędzi=odległości euklidesowej pomiędzy końcami
3. wykorzystaj algorytm Prima lub Kruskala do wygenerowania MST

Wady takiego rozwiązania

- czas działania jest proporcjonalny do n^2
- większość krawędzi grafu jest niewykorzystana do konstrukcji drzewa MST

Dla $n = 9$ EMST zawiera 8 krawędzi, natomiast graf pełny zawiera 36 krawędzi.



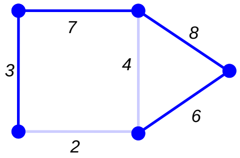
Maksymalne drzewo spinające

Definicja

Maksymalnym drzewem spinającym nazywamy takie drzewo spinające, którego waga jest największa spośród wszystkich drzew spinających danego grafu $G = (V, E, w)$.

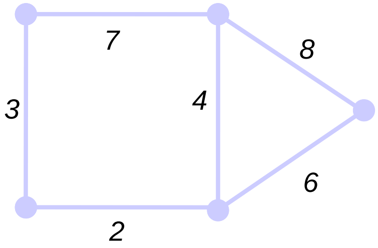
$$w(T) \to max$$

Drzewo spinające T jest maksymalne dla grafu $G = (V, E, w)$ wtedy i tylko wtedy, gdy jest minimalne dla grafu $G = (V, E, -w)$.



Metody generowania maksymalnego drzewa spinającego

- zamiana funkcji wagowej na przeciwną.



Metody generowania maksymalnego drzewa spinającego

- zamiana funkcji wagowej na przeciwną.
- zamiana warunku minimalizującego na maksymalizujący w algorytmach Prima, Kruskala lub Boruvki.