Wykład 4.
Droga i cykl Eulera i Hamiltona

WYDZIAŁ MATEMATYKI
i INFORMATYKI
Uniwersytet Łódzki

Grafy Eulera

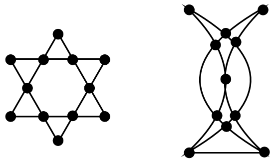
Niech G będzie grafem spójnym.

Definicja

Jeżeli w grafie G istnieje zamknięta droga prosta zawierająca wszystkie krawędzie grafu, to taką drogę nazywamy **cyklem Eulera**, a graf — **grafem eulerowskim** albo **grafem Eulera**.

Definicja

Jeżeli w grafie G istnieje droga prosta (nie koniecznie zamknięta) zawierająca wszystkie krawędzie grafu G, to taką drogę nazywamy **drogą Eulera**, zaś graf ten nazywamy **grafem półeulerowskim.**



Grafy Eulera

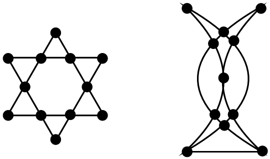
Niech G będzie grafem spójnym.

Definicja

Jeżeli w grafie G istnieje zamknięta droga prosta zawierająca wszystkie krawędzie grafu, to taką drogę nazywamy **cyklem Eulera**, a graf — **grafem eulerowskim** albo **grafem Eulera**.

Definicja

Jeżeli w grafie G istnieje droga prosta (nie koniecznie zamknięta) zawierająca wszystkie krawędzie grafu G, to taką drogę nazywamy **drogą Eulera**, zaś graf ten nazywamy **grafem półeulerowskim.**



Grafy Eulera

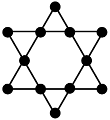
Niech G będzie grafem spójnym.

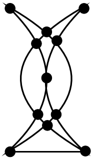
Definicja

Jeżeli w grafie G istnieje zamknięta droga prosta zawierająca wszystkie krawędzie grafu, to taką drogę nazywamy **cyklem Eulera**, a graf — **grafem eulerowskim** albo **grafem Eulera**.

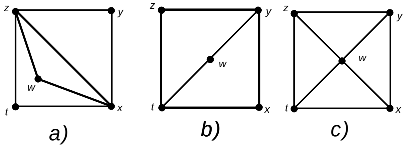
Definicja

Jeżeli w grafie G istnieje droga prosta (nie koniecznie zamknięta) zawierająca wszystkie krawędzie grafu G, to taką drogę nazywamy **drogą Eulera**, zaś graf ten nazywamy **grafem półeulerowskim.**



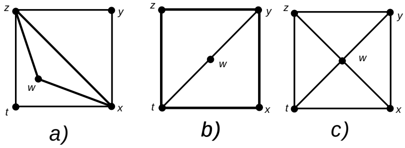


Przykład



a) graf eulerowski, cykl Eulera - *txwzxyz*
b) graf półeulerowski, droga Eulera - *txywtzy*
c) graf nie posiada ani cyklu, ani drogi Eulera

Przykład

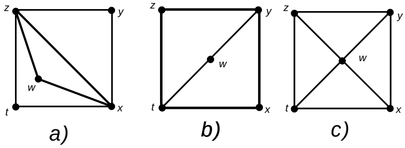


a) graf eulerowski, cykl Eulera - *txwzxyz*

b) graf półeulerowski, droga Eulera - *txywtzy*

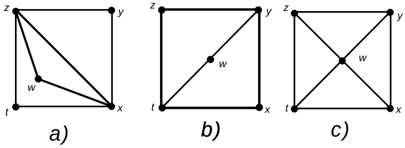
c) graf nie posiada ani cyklu, ani drogi Eulera

Przykład



a) graf eulerowski, cykl Eulera - *txwzxyz*
b) graf półeulerowski, droga Eulera - *txywtzy*
c) graf nie posiada ani cyklu, ani drogi Eulera

Przykład



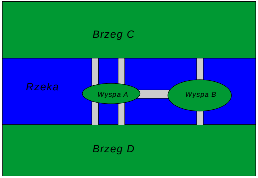
a) graf eulerowski, cykl Eulera - *txwzxyz*

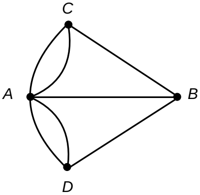
b) graf półeulerowski, droga Eulera - *txywtzy*

c) graf nie posiada ani cyklu, ani drogi Eulera

Historia

W Królewcu, na rzece Pregole są dwie wyspy A i B połączone ze sobą, a także z brzegami C i D za pomocą siedmiu mostów. Należy wyruszyć z dowolnej części lądowej miasta: A, B, C lub D, przejść przez każdy z mostów dokładnie jeden raz i powrócić do punktu wyjściowego (bez przepływania przez rzekę).

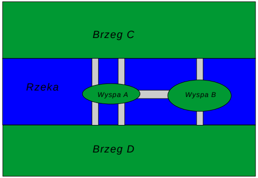


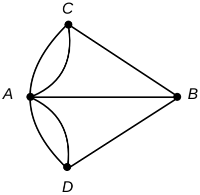


W **1736** problem został rozwiązany przez szwajcarskiego matematyka **Leonharda Eulera** (1707-1783). Zbudował on graf przedstawiony na rysunku przyporządkowując obszarom lądu wierzchołki, a mostom - krawędzie. Należało teraz odpowiedzieć na pytanie: Czy tak otrzymany graf ma drogę zamkniętą, która zawiera wszystkie krawędzie tylko raz?

Historia

W Królewcu, na rzece Pregole są dwie wyspy A i B połączone ze sobą, a także z brzegami C i D za pomocą siedmiu mostów. Należy wyruszyć z dowolnej części lądowej miasta: A, B, C lub D, przejść przez każdy z mostów dokładnie jeden raz i powrócić do punktu wyjściowego (bez przepływania przez rzekę).





W **1736** problem został rozwiązany przez szwajcarskiego matematyka **Leonharda Eulera** (1707-1783). Zbudował on graf przedstawiony na rysunku przyporządkowując obszarom lądu wierzchołki, a mostom - krawędzie. Należało teraz odpowiedzieć na pytanie: Czy tak otrzymany graf ma drogę zamkniętą, która zawiera wszystkie krawędzie tylko raz?

Lemat

Jeżeli dla każdego wierzchołka grafu G, $deg(v) \geq 2$, dla $v \in V$, wówczas graf zawiera cykl.

Twierdzenie Eulera

Graf spójny ma cykl Eulera $\Leftrightarrow$ gdy każdy wierzchołek ma stopień parzysty.

Twierdzenie Eulera o drodze Eulera

Graf spójny mający dokładnie dwa wierzchołki stopnia nieparzystego ma drogę Eulera.

Wniosek

Z ostatniego twierdzenia wynika, że w grafie połeulerowskim, każda droga Eulera musi mieć początek w jednym wierzchołku nieparzystego stopnia, a koniec w drugim takim wierzchołku.

Lemat

Jeżeli dla każdego wierzchołka grafu G, $deg(v) \geq 2$, dla $v \in V$, wówczas graf zawiera cykl.

Twierdzenie Eulera

Graf spójny ma cykl Eulera $\Leftrightarrow$ gdy każdy wierzchołek ma stopień parzysty.

Twierdzenie Eulera o drodze Eulera

Graf spójny mający dokładnie dwa wierzchołki stopnia nieparzystego ma drogę Eulera.

Wniosek

Z ostatniego twierdzenia wynika, że w grafie półeulerowskim, każda droga Eulera musi mieć początek w jednym wierzchołku nieparzystego stopnia, a koniec w drugim takim wierzchołku.

Lemat

Jeżeli dla każdego wierzchołka grafu G, $deg(v) \geq 2$, dla $v \in V$, wówczas graf zawiera cykl.

Twierdzenie Eulera

Graf spójny ma cykl Eulera $\Leftrightarrow$ gdy każdy wierzchołek ma stopień parzysty.

Twierdzenie Eulera o drodze Eulera

Graf spójny mający dokładnie dwa wierzchołki stopnia nieparzystego ma drogę Eulera.

Wniosek

Z ostatniego twierdzenia wynika, że w grafie półeulerowskim, każda droga Eulera musi mieć początek w jednym wierzchołku nieparzystego stopnia, a koniec w drugim takim wierzchołku.

Lemat

Jeżeli dla każdego wierzchołka grafu G, $deg(v) \geq 2$, dla $v \in V$, wówczas graf zawiera cykl.

Twierdzenie Eulera

Graf spójny ma cykl Eulera $\Leftrightarrow$ gdy każdy wierzchołek ma stopień parzysty.

Twierdzenie Eulera o drodze Eulera

Graf spójny mający dokładnie dwa wierzchołki stopnia nieparzystego ma drogę Eulera.

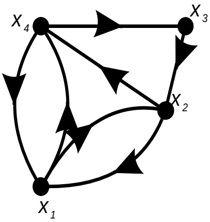
Wniosek

Z ostatniego twierdzenia wynika, że w grafie półeulerowskim, każda droga Eulera musi mieć początek w jednym wierzchołku nieparzystego stopnia, a koniec w drugim takim wierzchołku.

Twierdzenie Eulera dla grafów skierowanych

Graf skierowany jest grafem Eulera wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnego wierzchołka v grafu, stopień wejściowy jest równy stopniowi wyjściowemu.

$$indeg(v) = outdeg(v)$$



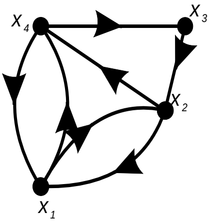
Cykl:

$x_3 x_2 x_4 x_1 x_2 x_1 x_4 x_3$

Twierdzenie Eulera dla grafów skierowanych

Graf skierowany jest grafem Eulera wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnego wierzchołka v grafu, stopień wejściowy jest równy stopniowi wyjściowemu.

$$indeg(v) = outdeg(v)$$



Cykl:

$x_3 x_2 x_4 x_1 x_2 x_1 x_4 x_3$

Problem chińskiego listonosza

Zadanie to zostało sformułowane przez chińskiego matematyka Mei Ku Kwana. Listonosz wychodząc z budynku poczty musi obejść wszystkie ulice w swoim rejonie i powrócić do budynku, przechodząc jak najkrótszą drogę.

W języku teorii grafów należy w grafie spójnym znaleźć drogę zamkniętą z minimalną liczbą krawędzi albo, w przypadku grafu ważonego – z najmniejszą sumą wag, która zawiera każdą krawędź co najmniej raz.

- Jeżeli graf jest eulerowski, to rozwiązanie problemu jest jednoznaczne i jest nim dowolny cykl Eulera.
- Jeżeli graf jest półeulerowski, to rozwiązaniem problemu jest droga Eulera i najkrótsza droga powrotna do punktu startowego.
- Gdy graf nie jest ani eulerowski, ani półeulerowski, to rozważany problem staje się trudny. Rozwiązanie problemu dostarczania poczty polega na wyznaczeniu pewnych krawędzi, którymi trzeba się poruszać kilka razy (innymi słowy rysunek grafu uzupełniamy krawędziami wielokrotnymi, czyniąc go grafem Eulera). Krawędzie, które dorysowujemy wyznacza się używając algorytmów: wyznaczania maksymalnego przepływu i najkrótszych dróg lub stosując algorytm najkrótszych ścieżek i wyznaczania skojarzenia.

Problem chińskiego listonosza

Zadanie to zostało sformułowane przez chińskiego matematyka Mei Ku Kwana. Listonosz wychodząc z budynku poczty musi obejść wszystkie ulice w swoim rejonie i powrócić do budynku, przechodząc jak najkrótszą drogę.

W języku teorii grafów należy w grafie spójnym znaleźć drogę zamkniętą z minimalną liczbą krawędzi albo, w przypadku grafu ważonego – z najmniejszą sumą wag, która zawiera każdą krawędź co najmniej raz.

- Jeżeli graf jest eulerowski, to rozwiązanie problemu jest jednoznaczne i jest nim dowolny cykl Eulera.
- Jeżeli graf jest półeulerowski, to rozwiązaniem problemu jest droga Eulera i najkrótsza droga powrotna do punktu startowego.
- Gdy graf nie jest ani eulerowski, ani półeulerowski, to rozważany problem staje się trudny. Rozwiązanie problemu dostarczania poczty polega na wyznaczeniu pewnych krawędzi, którymi trzeba się poruszać kilka razy (innymi słowy rysunek grafu uzupełniamy krawędziami wielokrotnymi, czyniąc go grafem Eulera). Krawędzie, które dorysowujemy wyznacza się używając algorytmów: wyznaczania maksymalnego przepływu i najkrótszych dróg lub stosując algorytm najkrótszych ścieżek i wyznaczania skojarzenia.

Problem chińskiego listonosza

Zadanie to zostało sformułowane przez chińskiego matematyka Mei Ku Kwana. Listonosz wychodząc z budynku poczty musi obejść wszystkie ulice w swoim rejonie i powrócić do budynku, przechodząc jak najkrótszą drogę.

W języku teorii grafów należy w grafie spójnym znaleźć drogę zamkniętą z minimalną liczbą krawędzi albo, w przypadku grafu ważonego – z najmniejszą sumą wag, która zawiera każdą krawędź co najmniej raz.

- Jeżeli graf jest eulerowski, to rozwiązanie problemu jest jednoznaczne i jest nim dowolny cykl Eulera.
- Jeżeli graf jest półeulerowski, to rozwiązaniem problemu jest droga Eulera i najkrótsza droga powrotna do punktu startowego.
- Gdy graf nie jest ani eulerowski, ani półeulerowski, to rozważany problem staje się trudny. Rozwiązanie problemu dostarczania poczty polega na wyznaczeniu pewnych krawędzi, którymi trzeba się poruszać kilka razy (innymi słowy rysunek grafu uzupełniamy krawędziami wielokrotnymi, czyniąc go grafem Eulera). Krawędzie, które dorysowujemy wyznacza się używając algorytmów: wyznaczania maksymalnego przepływu i najkrótszych dróg lub stosując algorytm najkrótszych ścieżek i wyznaczania skojarzenia.

Droga i cykl Hamiltona

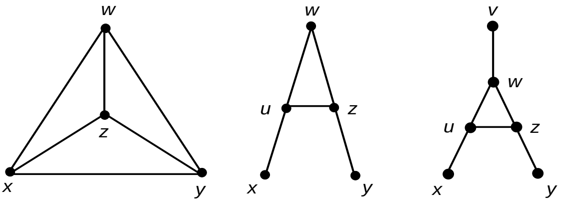
Definicja

Drogą Hamiltona nazywamy drogę, która przechodzi przez każdy wierzchołek grafu dokładnie jeden raz.

Definicja

Cyklem Hamiltona nazywamy cykl przechodzący przez wszystkie wierzchołki grafu.

Graf posiadający cykl Hamiltona nazywamy **grafem hamiltonowskim**, a graf posiadający tylko drogę Hamiltona - **grafem półhamiltonowskim.**



Droga i cykl Hamiltona

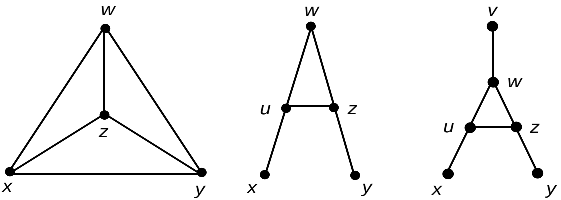
Definicja

Drogą Hamiltona nazywamy drogę, która przechodzi przez każdy wierzchołek grafu dokładnie jeden raz.

Definicja

Cyklem Hamiltona nazywamy cykl przechodzący przez wszystkie wierzchołki grafu.

Graf posiadający cykl Hamiltona nazywamy **grafem hamiltonowskim**, a graf posiadający tylko drogę Hamiltona - **grafem półhamiltonowskim.**



Droga i cykl Hamiltona

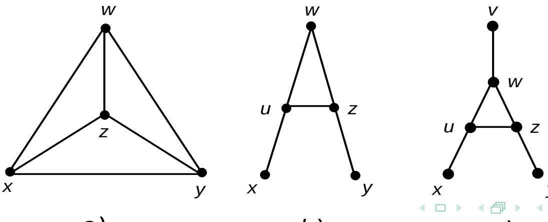
Definicja

Drogą Hamiltona nazywamy drogę, która przechodzi przez każdy wierzchołek grafu dokładnie jeden raz.

Definicja

Cyklem Hamiltona nazywamy cykl przechodzący przez wszystkie wierzchołki grafu.

Graf posiadający cykl Hamiltona nazywamy **grafem hamiltonowskim**, a graf posiadający tylko drogę Hamiltona - **grafem półhamiltonowskim.**



Droga i cykl Hamiltona

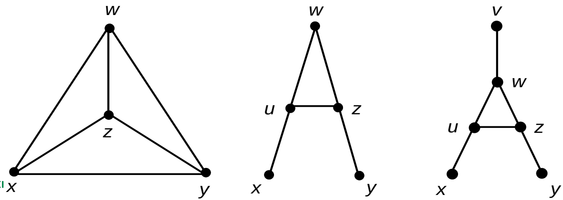
Definicja

Drogą Hamiltona nazywamy drogę, która przechodzi przez każdy wierzchołek grafu dokładnie jeden raz.

Definicja

Cyklem Hamiltona nazywamy cykl przechodzący przez wszystkie wierzchołki grafu.

Graf posiadający cykl Hamiltona nazywamy **grafem hamiltonowskim**, a graf posiadający tylko drogę Hamiltona - **grafem półhamiltonowskim.**



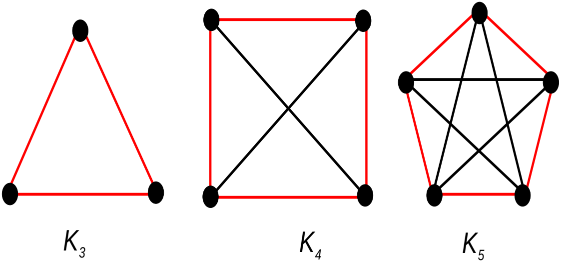
Warunki wystarczające istnienia cyklu Hamiltona

Twierdzenie

Jeżeli graf o n wierzchołkach jest hamiltonowski, to posiada co najmniej n krawędzi.

Twierdzenie

Każdy graf pełny K_n jest grafem Hamiltona.



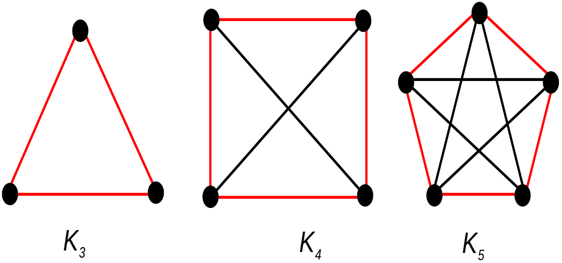
Warunki wystarczające istnienia cyklu Hamiltona

Twierdzenie

Jeżeli graf o n wierzchołkach jest hamiltonowski, to posiada co najmniej n krawędzi.

Twierdzenie

Każdy graf pełny K_n jest grafem Hamiltona.



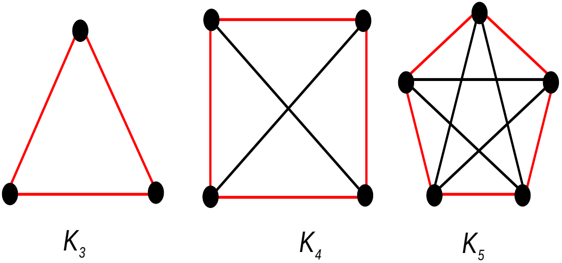
Warunki wystarczające istnienia cyklu Hamiltona

Twierdzenie

Jeżeli graf o n wierzchołkach jest hamiltonowski, to posiada co najmniej n krawędzi.

Twierdzenie

Każdy graf pełny K_n jest grafem Hamiltona.



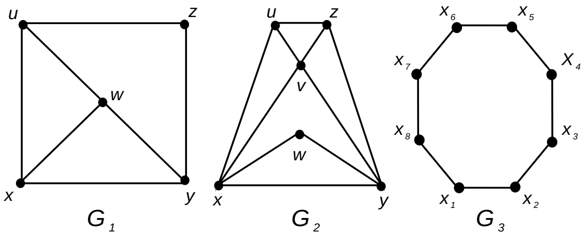
Warunki wystarczające istnienia cyklu Hamiltona

Twierdzenie Ore (1960)

Niech graf $G = \langle V, E \rangle$ będzie grafem spójnym i niech $|V| = n \geq 3$ (tzn. graf G ma co najmniej trzy wierzchołki). Jeżeli

$$deg(u) + deg(w) \geq n$$

dla każdej pary wierzchołków $u, w \in V$, które nie są połączone krawędzią, to graf G jest grafem hamiltonowskim.



a) b) c)

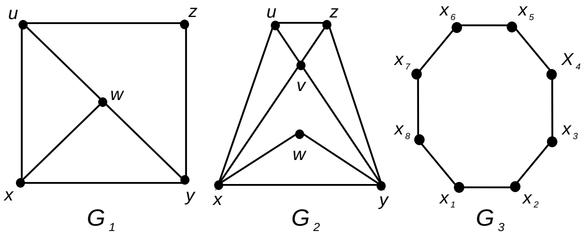
Warunki wystarczające istnienia cyklu Hamiltona

Twierdzenie Ore (1960)

Niech graf $G = \langle V, E \rangle$ będzie grafem spójnym i niech $|V| = n \geq 3$ (tzn. graf G ma co najmniej trzy wierzchołki). Jeżeli

$$deg(u) + deg(w) \geq n$$

dla każdej pary wierzchołków $u, w \in V$, które nie są połączone krawędzią, to graf G jest grafem hamiltonowskim.



a) b) c)

Warunki wystarczające istnienia cyklu Hamiltona

Twierdzenie Dirac (1952)

Jeżeli w grafie prostym i spójnym $G = \langle V, E \rangle$ o n wierzchołkach $(n \geq 3)$ oraz stopień każdego wierzchołka $u \in V$ spełnia warunek $deg(u) \geq \frac{1}{2}n$, to graf G jest grafem hamiltonowskim.

Twierdzenie

Jeżeli w grafie prostym i spójnym G o n wierzchołkach jest co najmniej $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)+2$ krawędzi, to graf G jest grafem hamiltonowskim.

Warunki wystarczające istnienia cyklu Hamiltona

Twierdzenie Dirac (1952)

Jeżeli w grafie prostym i spójnym $G = \langle V, E \rangle$ o n wierzchołkach $(n \geq 3)$ oraz stopień każdego wierzchołka $u \in V$ spełnia warunek $deg(u) \geq \frac{1}{2}n$, to graf G jest grafem hamiltonowskim.

Twierdzenie

Jeżeli w grafie prostym i spójnym G o n wierzchołkach jest co najmniej $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)+2$ krawędzi, to graf G jest grafem hamiltonowskim.

Cykl i droga Hamiltona w grafach dwudzielnych – warunek konieczny

Twierdzenie

Niech $G = (V_1 \cup V_2, E)$ będzie grafem dwudzielnym

- Jeśli G ma cykl Hamiltona, to $|V_1| = |V_2|$.
- Jeśli G ma drogę Hamiltona, to $||V_1| - |V_2|| \leq 1$.

Cykl i droga Hamiltona w grafach dwudzielnych pełnych – warunek wystarczający

Twierdzenie

Niech $G = (V_1 \cup V_2, E)$ będzie grafem pełnym dwudzielnym

- Jeśli $|V_1| = |V_2|$, to G ma cykl Hamiltona.
- Jeśli $||V_1| - |V_2|| \leq 1$, to G ma drogę Hamiltona.

WYDZIAŁ MATEMATYKI
i INFORMATYKI
Uniwersytet Łódzki

Cykle Hamiltona rozłączne krawędziowo

Definicja

Dwa cykle są rozłączne krawędziowo, gdy każda krawędź należy tylko do jednego cyklu w grafie.

Twierdzenie

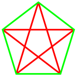
Graf pełny K_n zawiera

$$\left[\frac{n-1}{2}\right]$$

rozłącznych krawędziowo cykli Hamiltona.

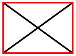
W grafie K_5 mamy

$$\left[\frac{5-1}{2}\right] = 2$$



W grafie K_4 mamy

$$\left[\frac{4-1}{2}\right] = \left[1\frac{1}{2}\right] = 1$$



Cykle Hamiltona rozłączne krawędziowo

Definicja

Dwa cykle są rozłączne krawędziowo, gdy każda krawędź należy tylko do jednego cyklu w grafie.

Twierdzenie

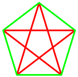
Graf pełny K_n zawiera

$$\left[\frac{n-1}{2}\right]$$

rozłącznych krawędziowo cykli Hamiltona.

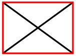
W grafie K_5 mamy

$$\left[\frac{5-1}{2}\right] = 2$$



W grafie K_4 mamy

$$\left[\frac{4-1}{2}\right] = \left[1\frac{1}{2}\right] = 1$$



Cykle Hamiltona rozłączne krawędziowo

Definicja

Dwa cykle są rozłączne krawędziowo, gdy każda krawędź należy tylko do jednego cyklu w grafie.

Twierdzenie

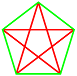
Graf pełny K_n zawiera

$$\left[\frac{n-1}{2}\right]$$

rozłącznych krawędziowo cykli Hamiltona.

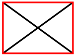
W grafie K_5 mamy

$$\left[\frac{5-1}{2}\right] = 2$$



W grafie K_4 mamy

$$\left[\frac{4-1}{2}\right] = \left[1\frac{1}{2}\right] = 1$$



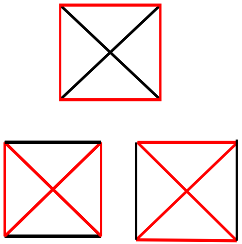
Twierdzenie

Graf pełny K_n zawiera

$$\frac{(n-1)!}{2}$$

różnych cykli Hamiltona.

W grafie K_4 mamy $\frac{(4-1)!}{2} = 3$ różne cykle Hamiltona



- W grafie K_5 mamy $\frac{(5-1)!}{2} = 12$ cykli Hamiltona,
- W grafie K_{20} mamy $\frac{19!}{2} > 10^{17}$ różnych cykli Hamiltona.

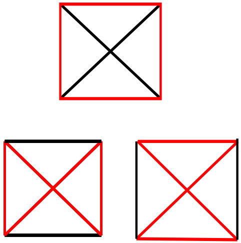
Twierdzenie

Graf pełny K_n zawiera

$$\frac{(n-1)!}{2}$$

różnych cykli Hamiltona.

W grafie K_4 mamy $\frac{(4-1)!}{2} = 3$ różne cykle Hamiltona



- W grafie K_5 mamy $\frac{(5-1)!}{2} = 12$ cykli Hamiltona,
- W grafie K_{20} mamy $\frac{19!}{2} > 10^{17}$ różnych cykli Hamiltona.

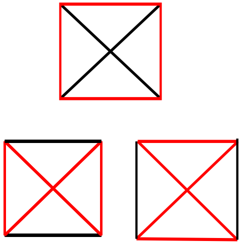
Twierdzenie

Graf pełny K_n zawiera

$$\frac{(n-1)!}{2}$$

różnych cykli Hamiltona.

W grafie K_4 mamy $\frac{(4-1)!}{2} = 3$ różne cykle Hamiltona

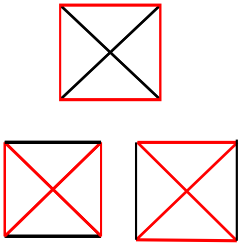


- W grafie K_5 mamy $\frac{(5-1)!}{2} = 12$ cykli Hamiltona,
- W grafie K_{20} mamy $\frac{19!}{2} > 10^{17}$ różnych cykli Hamiltona.

Twierdzenie

Graf pełny K_n zawiera
$$\frac{(n-1)!}{2}$$
różnych cykli Hamiltona.

W grafie K_4 mamy $\frac{(4-1)!}{2} = 3$ różne cykle Hamiltona



- W grafie K_5 mamy $\frac{(5-1)!}{2} = 12$ cykli Hamiltona,
- W grafie K_{20} mamy $\frac{19!}{2} > 10^{17}$ różnych cykli Hamiltona.