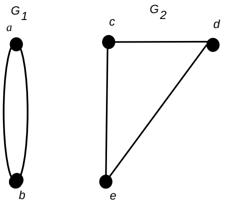
Wykład 3.
Własności grafów

Suma grafów

Niech będą dane grafy proste $G_1 = (V_1, E_1)$ oraz $G_2 = (V_2, E_2)$.
Wówczas

Definicja

Graf $G = (V, E)$ nazywamy **sumą grafów** G_1 i G_2 i oznaczamy $G = G_1 \cup G_2$, gdy $V = V_1 \cup V_2$ oraz $E = E_1 \cup E_2$

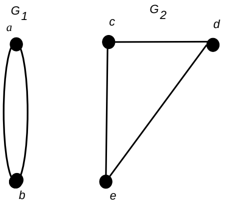


Suma grafów

Niech będą dane grafy proste $G_1 = (V_1, E_1)$ oraz $G_2 = (V_2, E_2)$. Wówczas

Definicja

Graf $G = (V, E)$ nazywamy **sumą grafów** G_1 i G_2 i oznaczamy $G = G_1 \cup G_2$, gdy $V = V_1 \cup V_2$ oraz $E = E_1 \cup E_2$

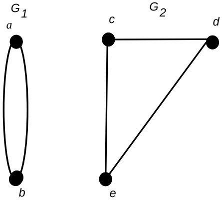


Suma grafów

Niech będą dane grafy proste $G_1 = (V_1, E_1)$ oraz $G_2 = (V_2, E_2)$. Wówczas

Definicja

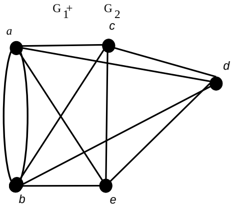
Graf $G = (V, E)$ nazywamy **sumą grafów** G_1 i G_2 i oznaczamy $G = G_1 \cup G_2$, gdy $V = V_1 \cup V_2$ oraz $E = E_1 \cup E_2$



Zespolenie grafów

Definicja

Graf $G = (V, E)$ nazywamy **zespoleniem grafów** G_1 i oznaczmy G_2
$G = G_1 + G_2$, gdy $V = V_1 \cup V_2$ oraz
$E = E_1 \cup E_2 \cup \{\{v_1, v_2\} : v_1 \in V_1, v_2 \in V_2\}$



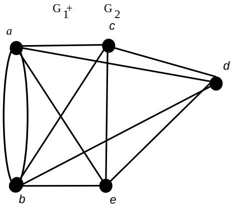
Twierdzenie

Jeśli $G = G_1 + G_2$, to $|V| = |V_1| + |V_2|$ oraz $|E| = |E_1| + |E_2| + |V_1| * |V_2|$.

Zespolenie grafów

Definicja

Graf $G = (V, E)$ nazywamy **zespoleniem grafów** G_1 i oznaczmy G_2
$G = G_1 + G_2$, gdy $V = V_1 \cup V_2$ oraz
$E = E_1 \cup E_2 \cup \{\{v_1, v_2\} : v_1 \in V_1, v_2 \in V_2\}$



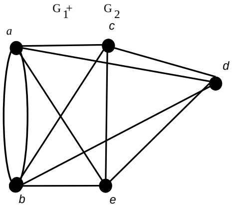
Twierdzenie

Jeśli $G = G_1 + G_2$, to $|V| = |V_1| + |V_2|$ oraz $|E| = |E_1| + |E_2| + |V_1| * |V_2|$.

Zespolenie grafów

Definicja

Graf $G = (V, E)$ nazywamy **zespoleniem grafów** G_1 i oznaczmy G_2
$G = G_1 + G_2$, gdy $V = V_1 \cup V_2$ oraz
$E = E_1 \cup E_2 \cup \{\{v_1, v_2\} : v_1 \in V_1, v_2 \in V_2\}$



Twierdzenie

Jeśli $G = G_1 + G_2$, to $|V| = |V_1| + |V_2|$ oraz $|E| = |E_1| + |E_2| + |V_1| * |V_2|$.

Lemat o uściskach dłoni

W dowolnym grafie suma stopni wszystkich wierzchołków jest dwa razy większa od liczby krawędzi

$$\sum_{v \in V} \deg(v) = 2|E|$$

Dowód. Dowód jest oczywisty, ponieważ każda krawędź dodaje 2 do sumy stopni wierzchołków. ∎

Twierdzenie

W dowolnym grafie liczba wierzchołków stopnia nieparzystego jest zawsze parzysta.

Dowód. Niech $|V| = n$. Wiemy, że $\sum_{i=1}^{n} \deg(v_i) = 2|E|$, więc $\sum_{i=1}^{n} \deg(v_i)$ jest liczbą parzystą.
Zauważmy, że

$$\sum_{i=1}^{n} \deg(v_i) = \sum_{\deg(v_j) \text{ - parz.}} \deg(v_j) + \sum_{\deg(v_k) \text{ - nieparz.}} \deg(v_k),$$

stąd

$$\sum_{\deg(v_k) \text{ - nieparz.}} \deg(v_k) = \sum_{i=1}^{n} \deg(v_i) - \sum_{\deg(v_j) \text{ - parz.}} \deg(v_j)$$

Zatem $\sum_{\deg(v_k) \text{ - nieparz.}} \deg(v_k)$ jest liczbą parzystą jako różnica dwóch liczb parzystych. Ponieważ każdy składnik $\deg(v_k)$ sumy $\sum_{\deg(v_k) \text{ - nieparz.}} \deg(v_k)$ jest liczbą nieparzystą, więc ilość jej składników musi być parzysta. ■

Twierdzenie

W dowolnym grafie liczba wierzchołków stopnia nieparzystego jest zawsze parzysta.

Dowód. Niech $|V| = n$. Wiemy, że $\sum_{i=1}^{n} \deg(v_i) = 2|E|$, więc $\sum_{i=1}^{n} \deg(v_i)$ jest liczbą parzystą.
Zauważmy, że

$$\sum_{i=1}^{n} \deg(v_i) = \sum_{\deg(v_j)\text{ - parz.}} \deg(v_j) + \sum_{\deg(v_k)\text{ - nieparz.}} \deg(v_k),$$

stąd

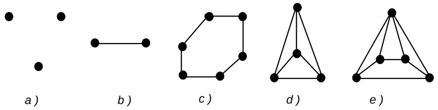
$$\sum_{\deg(v_k)\text{ - nieparz.}} \deg(v_k) = \sum_{i=1}^{n} \deg(v_i) - \sum_{\deg(v_j)\text{ - parz.}} \deg(v_j)$$

Zatem $\sum_{\deg(v_k)\text{ - nieparz.}} \deg(v_k)$ jest liczbą parzystą jako różnica dwóch liczb parzystych. Ponieważ każdy składnik $\deg(v_k)$ sumy $\sum_{\deg(v_k)\text{ - nieparz.}} \deg(v_k)$ jest liczbą nieparzystą, więc ilość jej składników musi być parzysta. ■

Graf regularny

Definicja

Graf prosty, w którym wszystkie wierzchołki mają ten sam stopień nazywamy **grafem regularnym**.
Jeżeli każdy wierzchołek grafu ma stopień r, to graf ten nazywamy **grafem regularnym stopnia r** lub **grafem r-regularnym**. Graf regularny stopnia 3 nazywamy **grafem kubicznym**.



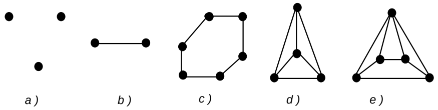
Własność

Graf r-regularny o n wierzchołkach posiada $\frac{nr}{2}$ krawędzi.

Graf regularny

Definicja

Graf prosty, w którym wszystkie wierzchołki mają ten sam stopień nazywamy **grafem regularnym**.
Jeżeli każdy wierzchołek grafu ma stopień r, to graf ten nazywamy **grafem regularnym stopnia r** lub **grafem r-regularnym**. Graf regularny stopnia 3 nazywamy **grafem kubicznym**.



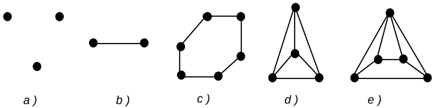
Własność

Graf r-regularny o n wierzchołkach posiada $\frac{nr}{2}$ krawędzi.

Graf regularny

Definicja

Graf prosty, w którym wszystkie wierzchołki mają ten sam stopień nazywamy **grafem regularnym**.
Jeżeli każdy wierzchołek grafu ma stopień r, to graf ten nazywamy **grafem regularnym stopnia r** lub **grafem r-regularnym**. Graf regularny stopnia 3 nazywamy **grafem kubicznym**.



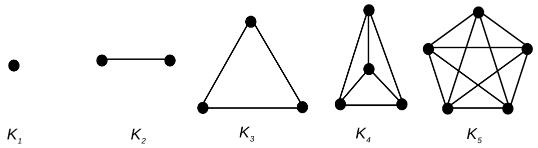
Własność

Graf r-regularny o n wierzchołkach posiada $\frac{nr}{2}$ krawędzi.

Graf pełny

Definicja

Graf prosty, w którym każda para wierzchołków jest połączona krawędzią nazywamy **grafem pełnym** . Graf pełny o n wierzchołkach oznaczmy symbolem K_n.



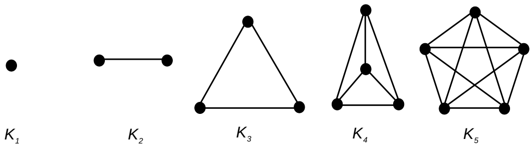
Własność

Stopień każdego wierzchołka w grafie pełnym K_n wynosi $n-1$.

Graf pełny

Definicja

Graf prosty, w którym każda para wierzchołków jest połączona krawędzią nazywamy **grafem pełnym** . Graf pełny o n wierzchołkach oznaczmy symbolem K_n.



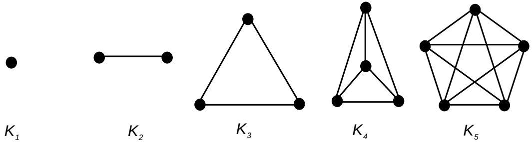
Własność

Stopień każdego wierzchołka w grafie pełnym K_n wynosi $n - 1$.

Graf pełny

Definicja

Graf prosty, w którym każda para wierzchołków jest połączona krawędzią nazywamy **grafem pełnym** . Graf pełny o n wierzchołkach oznaczmy symbolem K_n.



Własność

Stopień każdego wierzchołka w grafie pełnym K_n wynosi $n - 1$.

Graf pełny

Twierdzenie

Graf pełny K_n ma

$$|E_{K_n}| = \frac{n(n-1)}{2}$$

krawędzi.

Dowód. Ponieważ w grafie K_n mamy n wierzchołków oraz każdy z nich ma stopień $n-1$, więc

$$\sum_{i=1}^{n} \deg(v_i) = n(n-1)$$

Na mocy *lematu o uściskach dłoni* mamy

$$\sum_{i=1}^{n} \deg(v_i) = 2|E_{K_n}|$$

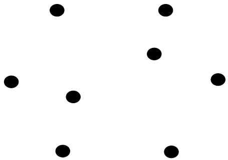
więc

$$|E_{K_n}| = \frac{n(n-1)}{2}$$

Graf pusty

Definicja

Grafem pustym nazywamy graf, którego zbiór krawędzi jest pusty (nie jest pusty zbiór wierzchołków, czyli $|V| > 0$ oraz $|E| = 0$). Graf pusty mający n wierzchołków oznaczamy symbolem N_n.



N_8

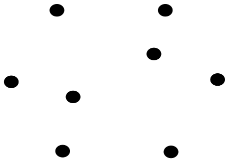
Własność

1. Graf N_n składa się z n wierzchołków izolowanych.
2. Graf N_n jest grafem regularnym stopnia 0.

Graf pusty

Definicja

Grafem pustym nazywamy graf, którego zbiór krawędzi jest pusty (nie jest pusty zbiór wierzchołków, czyli $|V| > 0$ oraz $|E| = 0$). Graf pusty mający n wierzchołków oznaczamy symbolem N_n.



N_8

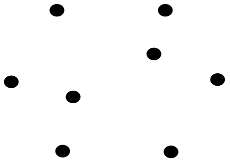
Własność

1. Graf N_n składa się z n wierzchołków izolowanych.
2. Graf N_n jest grafem regularnym stopnia 0.

Graf pusty

Definicja

Grafem pustym nazywamy graf, którego zbiór krawędzi jest pusty (nie jest pusty zbiór wierzchołków, czyli $|V| > 0$ oraz $|E| = 0$). Graf pusty mający n wierzchołków oznaczamy symbolem N_n.



N_8

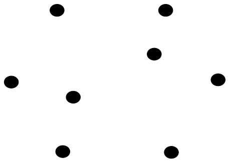
Własność

1. Graf N_n składa się z n wierzchołków izolowanych.
2. Graf N_n jest grafem regularnym stopnia 0.

Graf pusty

Definicja

Grafem pustym nazywamy graf, którego zbiór krawędzi jest pusty (nie jest pusty zbiór wierzchołków, czyli $|V| > 0$ oraz $|E| = 0$). Graf pusty mający n wierzchołków oznaczamy symbolem N_n.



N_8

Własność

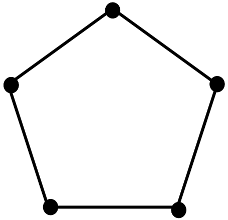
1. Graf N_n składa się z n wierzchołków izolowanych.
2. Graf N_n jest grafem regularnym stopnia 0.

WYDZIAŁ MATEMATYKI I INFORMATYKI
Uniwersytet Łódzki

Graf cykliczny

Definicja

Graf spójny regularny stopnia 2 nazywamy **grafem cyklicznym**. Graf cykliczny mający n wierzchołków oznaczamy symbolem C_n.



C_5

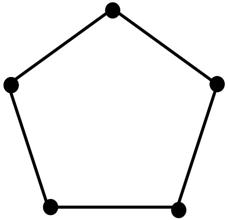
Własność

1. W grafie cyklicznym każde dwie sąsiednie krawędzie są połączone szeregowo.
2. Graf cykliczny C_n posiada n krawędzi.

Graf cykliczny

Definicja

Graf spójny regularny stopnia 2 nazywamy **grafem cyklicznym**. Graf cykliczny mający n wierzchołków oznaczamy symbolem C_n.



C_5

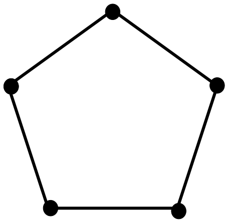
Własność

1. W grafie cyklicznym każde dwie sąsiednie krawędzie są połączone szeregowo.
2. Graf cykliczny C_n posiada n krawędzi.

Graf cykliczny

Definicja

Graf spójny regularny stopnia 2 nazywamy **grafem cyklicznym**. Graf cykliczny mający n wierzchołków oznaczamy symbolem C_n.



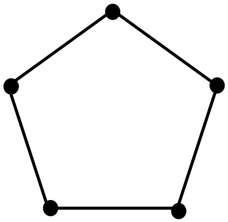
Własność

1. W grafie cyklicznym każde dwie sąsiednie krawędzie są połączone szeregowo.
2. Graf cykliczny C_n posiada n krawędzi.

Graf cykliczny

Definicja

Graf spójny regularny stopnia 2 nazywamy **grafem cyklicznym**. Graf cykliczny mający n wierzchołków oznaczamy symbolem C_n.



C_5

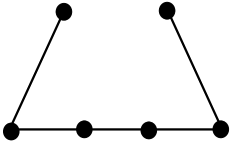
Własność

1. W grafie cyklicznym każde dwie sąsiednie krawędzie są połączone szeregowo.
2. Graf cykliczny C_n posiada n krawędzi.

Graf liniowy

Definicja

Jeżeli z grafu C_n usuniemy dokładnie jedną krawędź, to otrzymany graf nazywamy **grafem liniowym** o n wierzchołkach i oznaczamy symbolem P_n.



P_6

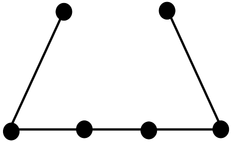
Własność

1. Graf P_n nie jest grafem regularnym.
2. Graf P_n posiada zawsze 2 wierzchołki stopnia pierwszego, a pozostałe $n-2$ wierzchołki są stopnia drugiego.

Graf liniowy

Definicja

Jeżeli z grafu C_n usuniemy dokładnie jedną krawędź, to otrzymany graf nazywamy **grafem liniowym** o n wierzchołkach i oznaczamy symbolem P_n.



P_6

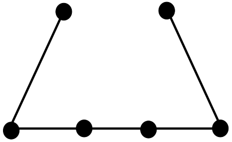
Własność

1. Graf P_n nie jest grafem regularnym.
2. Graf P_n posiada zawsze 2 wierzchołki stopnia pierwszego, a pozostałe $n-2$ wierzchołki są stopnia drugiego.

Graf liniowy

Definicja

Jeżeli z grafu C_n usuniemy dokładnie jedną krawędź, to otrzymany graf nazywamy **grafem liniowym** o n wierzchołkach i oznaczamy symbolem P_n.



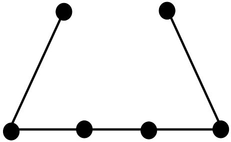
Własność

1. Graf P_n nie jest grafem regularnym.
2. Graf P_n posiada zawsze 2 wierzchołki stopnia pierwszego, a pozostałe $n-2$ wierzchołki są stopnia drugiego.

Graf liniowy

Definicja

Jeżeli z grafu C_n usuniemy dokładnie jedną krawędź, to otrzymany graf nazywamy **grafem liniowym** o n wierzchołkach i oznaczamy symbolem P_n.



P_6

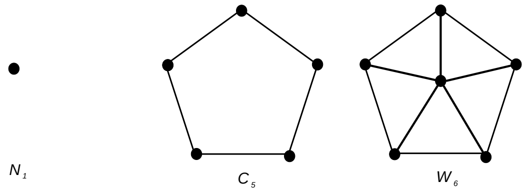
Własność

1. Graf P_n nie jest grafem regularnym.
2. Graf P_n posiada zawsze 2 wierzchołki stopnia pierwszego, a pozostałe $n-2$ wierzchołki są stopnia drugiego.

Koło

Definicja

Kołem W_n nazywamy graf $W_n = C_{n-1} + N_1$.



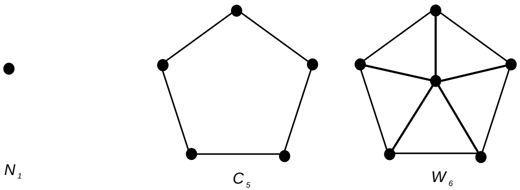
$$W_6 = C_5 + N_1$$

WYDZIAŁ MATEMATYKI I INFORMATYKI
Uniwersytet Łódzki

Koło

Definicja

Kołem W_n nazywamy graf $W_n = C_{n-1} + N_1$.



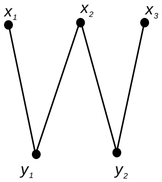
$$W_6 = C_5 + N_1$$

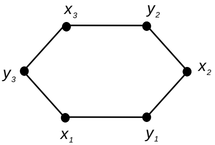
Graf dwudzielny

Niech $G = (V, E)$ będzie grafem prostym.

Definicja

Graf G jest **grafem dwudzielnym**, jeśli zbiór wierzchołków V jest sumą dwóch niepustych zbiorów rozłącznych V_1 i V_2, takich, że każda krawędź tego grafu łączy wierzchołek ze zbioru V_1 z wierzchołkiem ze zbioru V_2.



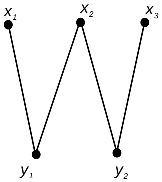


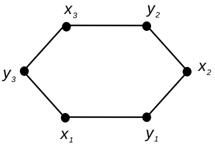
Graf dwudzielny

Niech $G = (V, E)$ będzie grafem prostym.

Definicja

Graf G jest **grafem dwudzielnym**, jeśli zbiór wierzchołków V jest sumą dwóch niepustych zbiorów rozłącznych V_1 i V_2, takich, że każda krawędź tego grafu łączy wierzchołek ze zbioru V_1 z wierzchołkiem ze zbioru V_2.

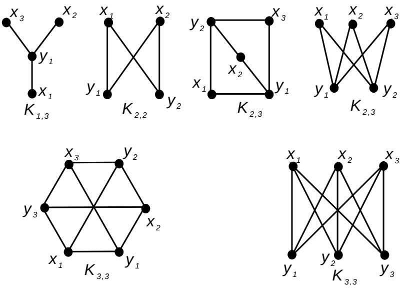




Graf pełny dwudzielny

Definicja

Graf dwudzielny jest **pełnym grafem dwudzielnym**, jeśli każdy wierzchołek zbioru V_1 jest połączony z każdym wierzchołkiem zbioru V_2 dokładnie jedną krawędzią. Graf pełny dwudzielny, w którym $|V_1| = r$ i $|V_2| = s$ oznaczamy symbolem $K_{r,s}$.



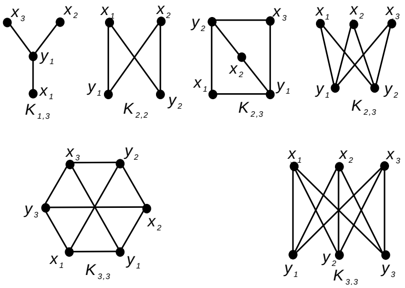
Własność

1. $K_{r,s} = N_r + N_s$
2. Każdy graf $K_{r,s}$ ma $r + s$ wierzchołków.
3. Każdy graf $K_{r,s}$ ma $r \cdot s$ krawędzi.

Graf pełny dwudzielny

Definicja

Graf dwudzielny jest **pełnym grafem dwudzielnym**, jeśli każdy wierzchołek zbioru V_1 jest połączony z każdym wierzchołkiem zbioru V_2 dokładnie jedną krawędzią. Graf pełny dwudzielny, w którym $|V_1| = r$ i $|V_2| = s$ oznaczamy symbolem $K_{r,s}$.



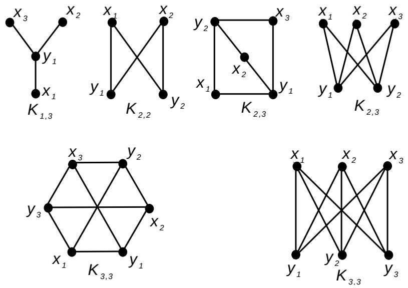
Własność

1. $K_{r,s} = N_r + N_s$
2. Każdy graf $K_{r,s}$ ma $r + s$ wierzchołków.
3. Każdy graf $K_{r,s}$ ma $r \cdot s$ krawędzi.

Graf pełny dwudzielny

Definicja

Graf dwudzielny jest **pełnym grafem dwudzielnym**, jeśli każdy wierzchołek zbioru V_1 jest połączony z każdym wierzchołkiem zbioru V_2 dokładnie jedną krawędzią. Graf pełny dwudzielny, w którym $|V_1| = r$ i $|V_2| = s$ oznaczamy symbolem $K_{r,s}$.



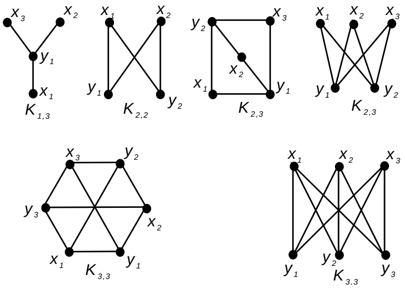
Własność

1. $K_{r,s} = N_r + N_s$
2. Każdy graf $K_{r,s}$ ma $r + s$ wierzchołków.
3. Każdy graf $K_{r,s}$ ma $r \cdot s$ krawędzi.

Graf pełny dwudzielny

Definicja

Graf dwudzielny jest **pełnym grafem dwudzielnym**, jeśli każdy wierzchołek zbioru V_1 jest połączony z każdym wierzchołkiem zbioru V_2 dokładnie jedną krawędzią. Graf pełny dwudzielny, w którym $|V_1| = r$ i $|V_2| = s$ oznaczamy symbolem $K_{r,s}$.



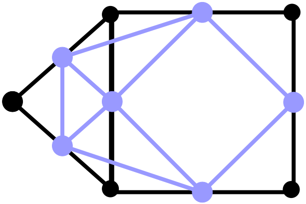
Własność

1. $K_{r,s} = N_r + N_s$
2. Każdy graf $K_{r,s}$ ma $r + s$ wierzchołków.
3. Każdy graf $K_{r,s}$ ma $r \cdot s$ krawędzi.

Graf krawędziowy

Definicja

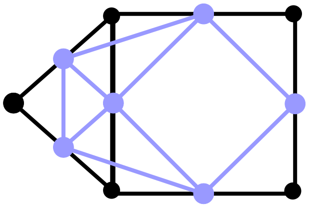
Grafem krawędziowym $L(G)$ grafu G, nazywamy graf, którego wierzchołki odpowiadają wzajemnie jednoznacznie krawędziom G oraz dowolne dwa wierzchołki w grafie $L(G)$ są sąsiednie wtedy i tylko wtedy, gdy odpowiadające im krawędzie są sąsiednie w G.



Graf krawędziowy

Definicja

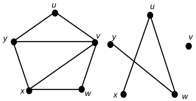
Grafem krawędziowym $L(G)$ grafu G, nazywamy graf, którego wierzchołki odpowiadają wzajemnie jednoznacznie krawędziom G oraz dowolne dwa wierzchołki w grafie $L(G)$ są sąsiednie wtedy i tylko wtedy, gdy odpowiadające im krawędzie są sąsiednie w G.



Dopełnienie grafu

Definicja

Dopełnieniem grafu $G = (V, E)$ nazywamy graf $\overline{G}$, którego zbiór wierzchołków jest taki sam, jak grafu G oraz w którym dwa wierzchołki są sąsiednie wtedy i tylko wtedy, gdy nie są sąsiednie w grafie G.



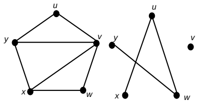
Własność

1. Dopełnieniem grafu pełnego K_n jest graf pusty N_n.
2. Dopełnieniem grafu pełnego dwudzielnego $K_{r,s}$ są dwa grafy pełne K_r i K_s.

Dopełnienie grafu

Definicja

Dopełnieniem grafu $G = (V, E)$ nazywamy graf $\overline{G}$, którego zbiór wierzchołków jest taki sam, jak grafu G oraz w którym dwa wierzchołki są sąsiednie wtedy i tylko wtedy, gdy nie są sąsiednie w grafie G.



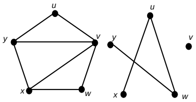
Własność

1. Dopełnieniem grafu pełnego K_n jest graf pusty N_n.
2. Dopełnieniem grafu pełnego dwudzielnego $K_{r,s}$ są dwa grafy pełne K_r i K_s.

Dopełnienie grafu

Definicja

Dopełnieniem grafu $G = (V, E)$ nazywamy graf $\overline{G}$, którego zbiór wierzchołków jest taki sam, jak grafu G oraz w którym dwa wierzchołki są sąsiednie wtedy i tylko wtedy, gdy nie są sąsiednie w grafie G.



Własność

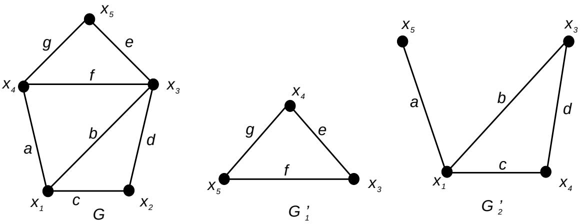
1. Dopełnieniem grafu pełnego K_n jest graf pusty N_n.
2. Dopełnieniem grafu pełnego dwudzielnego $K_{r,s}$ są dwa grafy pełne K_r i K_s.

Podgraf grafu

Definicja

Graf $H = \langle V_H, E_H, \gamma_H \rangle$ jest **podgrafem grafu** $G = \langle V_G, E_G, \gamma_G \rangle$ wtedy i tylko wtedy, gdy spełnione są warunki:

- $V_H \subset V_G$
- $E_H \subset E_G$
- $\gamma_H = \gamma_G |_{E_H}$



Własności podgrafów

Własność

1. Każdy graf jest swoim własnym podgrafem.
2. Podgraf G'' podgrafu G' grafu G jest podgrafem grafu G tzn
$$(G' \subset G \wedge G'' \subset G') \Rightarrow G'' \subset G.$$
3. Pojedynczy wierzchołek grafu G jest podgrafem grafu G.
4. Pojedyncza krawędź grafu G łącznie z jej końcami jest podgrafem grafu G.
5. Każdy graf prosty G o n-wierzchołkach jest podgrafem grafu pełnego K_n.
6. Liczba wszystkich różnych grafów prostych zawierających n wierzchołków jest równa
$$2^{\frac{n(n-1)}{2}}$$

Własności podgrafów

Własność

1. Każdy graf jest swoim własnym podgrafem.
2. Podgraf G'' podgrafu G' grafu G jest podgrafem grafu G tzn
$$(G' \subset G \wedge G'' \subset G') \Rightarrow G'' \subset G.$$
3. Pojedynczy wierzchołek grafu G jest podgrafem grafu G.
4. Pojedyncza krawędź grafu G łącznie z jej końcami jest podgrafem grafu G.
5. Każdy graf prosty G o n-wierzchołkach jest podgrafem grafu pełnego K_n.
6. Liczba wszystkich różnych grafów prostych zawierających n wierzchołków jest równa
$$2^{\frac{n(n-1)}{2}}$$

Własności podgrafów

Własność

1. Każdy graf jest swoim własnym podgrafem.
2. Podgraf G'' podgrafu G' grafu G jest podgrafem grafu G tzn
$$(G' \subset G \wedge G'' \subset G') \Rightarrow G'' \subset G.$$
3. Pojedynczy wierzchołek grafu G jest podgrafem grafu G.
4. Pojedyncza krawędź grafu G łącznie z jej końcami jest podgrafem grafu G.
5. Każdy graf prosty G o n-wierzchołkach jest podgrafem grafu pełnego K_n.
6. Liczba wszystkich różnych grafów prostych zawierających n wierzchołków jest równa
$$2^{\frac{n(n-1)}{2}}$$

Własności podgrafów

Własność

1. Każdy graf jest swoim własnym podgrafem.
2. Podgraf G'' podgrafu G' grafu G jest podgrafem grafu G tzn
$$(G' \subset G \wedge G'' \subset G') \Rightarrow G'' \subset G.$$
3. Pojedynczy wierzchołek grafu G jest podgrafem grafu G.
4. Pojedyncza krawędź grafu G łącznie z jej końcami jest podgrafem grafu G.
5. Każdy graf prosty G o n-wierzchołkach jest podgrafem grafu pełnego K_n.
6. Liczba wszystkich różnych grafów prostych zawierających n wierzchołków jest równa
$$2^{\frac{n(n-1)}{2}}$$

Własności podgrafów

Własność

1. Każdy graf jest swoim własnym podgrafem.
2. Podgraf G'' podgrafu G' grafu G jest podgrafem grafu G tzn
$$(G' \subset G \wedge G'' \subset G') \Rightarrow G'' \subset G.$$
3. Pojedynczy wierzchołek grafu G jest podgrafem grafu G.
4. Pojedyncza krawędź grafu G łącznie z jej końcami jest podgrafem grafu G.
5. Każdy graf prosty G o n-wierzchołkach jest podgrafem grafu pełnego K_n.
6. Liczba wszystkich różnych grafów prostych zawierających n wierzchołków jest równa
$$2^{\frac{n(n-1)}{2}}$$

Własności podgrafów

Własność

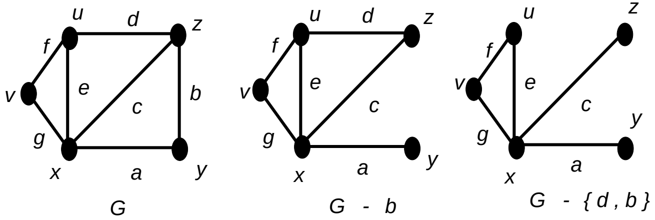
1. Każdy graf jest swoim własnym podgrafem.
2. Podgraf G'' podgrafu G' grafu G jest podgrafem grafu G tzn
$$(G' \subset G \wedge G'' \subset G') \Rightarrow G'' \subset G.$$
3. Pojedynczy wierzchołek grafu G jest podgrafem grafu G.
4. Pojedyncza krawędź grafu G łącznie z jej końcami jest podgrafem grafu G.
5. Każdy graf prosty G o n-wierzchołkach jest podgrafem grafu pełnego K_n.
6. Liczba wszystkich różnych grafów prostych zawierających n wierzchołków jest równa
$$2^{\frac{n(n-1)}{2}}$$

Podgrafy grafu

Niech dany będzie graf $G = \langle V, E, \gamma \rangle$ i krawędź $e \in E$.

$G - e$ oznacza podgraf otrzymany z grafu G przez usunięcie krawędzi e.

Niech F będzie dowolnym podzbiorem zbioru krawędzi grafu G ($F \subset E$), wówczas $G - F$ oznacza podgraf grafu G powstały przez usunięcie wszystkich krawędzi należących do zbioru F.

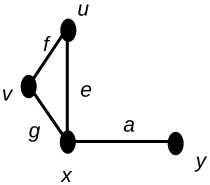


Podgrafy grafu

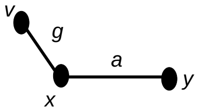
Niech dany będzie graf $G = \langle V, E, \gamma \rangle$ i niech wierzchołek $v \in V$.

$G - v$ oznacza podgraf grafu G otrzymany z G przez usunięcie wierzchołka v i wszystkich krawędzi do niego incydentnych.

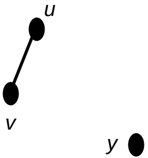
Jeżeli S jest dowolnym podzbiorem zbioru wierzchołków V grafu G ($S \subset V \wedge S \neq V$), to $G - S$ oznacza graf, który otrzymamy z grafu G przez usunięcie wszystkich wierzchołków należących do zbioru S i wszystkich krawędzi incydentnych do dowolnego wierzchołka ze zbioru S.



$G - z$



$G - \{z, u\}$

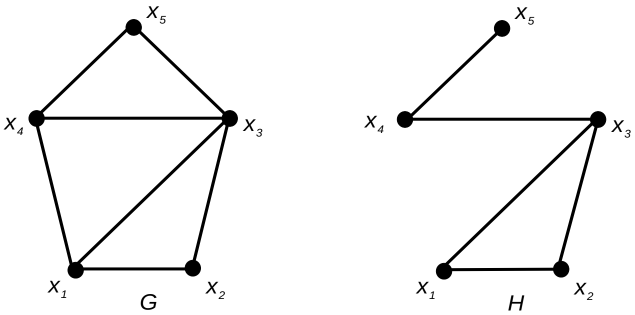


$G - \{z, x\}$

Graf częściowy

Definicja

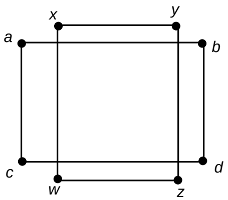
Graf H nazywamy **grafem częściowym lub grafem spinającym** grafu G jeżeli jest podgrafem G i $V_H = V_G$.



Składowe spójne grafu

Definicja

Każdy spójny podgraf G_1 grafu G ($G_1 \subset G$), który nie jest zawarty w większym (w sensie relacji zawierania zbioru wierzchołków oraz zawierania zbioru krawędzi) spójnym podgrafie grafu G nazywamy **składową spójną grafu** G.

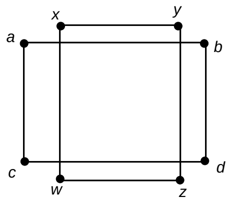


Oczywiście każdy wierzchołek izolowany danego grafu jest jego spójna składową.

Składowe spójne grafu

Definicja

Każdy spójny podgraf G_1 grafu G ($G_1 \subset G$), który nie jest zawarty w większym (w sensie relacji zawierania zbioru wierzchołków oraz zawierania zbioru krawędzi) spójnym podgrafie grafu G nazywamy **składową spójną grafu** G.

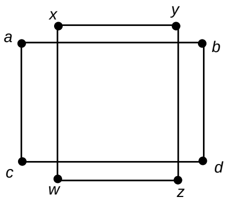


Oczywiście każdy wierzchołek izolowany danego grafu jest jego spójna składową

Składowe spójne grafu

Definicja

Każdy spójny podgraf G_1 grafu G ($G_1 \subset G$), który nie jest zawarty w większym (w sensie relacji zawierania zbioru wierzchołków oraz zawierania zbioru krawędzi) spójnym podgrafie grafu G nazywamy **składową spójną grafu** G.



Oczywiście każdy wierzchołek izolowany danego grafu jest jego spójna składową.

Twierdzenie

Spójny graf o n wierzchołkach, posiada co najmniej $n-1$ krawędzi.

Twierdzenie

Ilość krawędzi m w grafie prostym i spójnym o n wierzchołkach, spełnia zależność

$$n-1 \leq m \leq \frac{n(n-1)}{2}$$

Twierdzenie

Niech G będzie grafem prostym o n wierzchołkach. Jeżeli graf G ma k składowych, to liczba m jego krawędzi spełnia nierówność

$$n-k \leq m \leq \frac{1}{2}(n-k)(n-k+1)$$

Każdy graf prosty, który ma n wierzchołków i więcej niż $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ krawędzi jest spójny.

Twierdzenie

Spójny graf o n wierzchołkach, posiada co najmniej $n-1$ krawędzi.

Twierdzenie

Ilość krawędzi m w grafie prostym i spójnym o n wierzchołkach, spełnia zależność

$$n-1 \leq m \leq \frac{n(n-1)}{2}$$

Twierdzenie

Niech G będzie grafem prostym o n wierzchołkach. Jeżeli graf G ma k składowych, to liczba m jego krawędzi spełnia nierówność

$$n-k \leq m \leq \frac{1}{2}(n-k)(n-k+1)$$

Każdy graf prosty, który ma n wierzchołków i więcej niż $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ krawędzi jest spójny.

Twierdzenie

Spójny graf o n wierzchołkach, posiada co najmniej $n-1$ krawędzi.

Twierdzenie

Ilość krawędzi m w grafie prostym i spójnym o n wierzchołkach, spełnia zależność

$$n-1 \leq m \leq \frac{n(n-1)}{2}$$

Twierdzenie

Niech G będzie grafem prostym o n wierzchołkach. Jeżeli graf G ma k składowych, to liczba m jego krawędzi spełnia nierówność

$$n-k \leq m \leq \frac{1}{2}(n-k)(n-k+1)$$

Każdy graf prosty, który ma n wierzchołków i więcej niż $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ krawędzi jest spójny.

Lemat

Acykliczny graf o n wierzchołkach posiada co najwyżej $n-1$ krawędzi.

Twierdzenie

Niech G będzie grafem o n wierzchołkach. Wówczas dowolne dwa warunki implikują trzeci.

1. G jest spójny
2. G jest acykliczny
3. G posiada dokładnie $n-1$ krawędzi

Lemat

Acykliczny graf o n wierzchołkach posiada co najwyżej $n-1$ krawędzi.

Twierdzenie

Niech G będzie grafem o n wierzchołkach. Wówczas dowolne dwa warunki implikują trzeci.

1. G jest spójny
2. G jest acykliczny
3. G posiada dokładnie $n-1$ krawędzi

Dziękuję za uwagę!!!