Sprawozdanie - Aproksymacja Interpolacyjna Tras Wysokościowych

Szymon Groszkowski 193141

May 20, 2024

1 Cel projektu

Celem projektu jest zapoznanie się z metodami interpolacji tzn. **interpolacją wielomianową**, **interpolacją Langrange'a** oraz **interpolacją funkcjami sklejonymi (spline)**.

2 Wstęp

2.1 Co to jest interpolacja ?

Interpolacja to specjalny przypadek aproksymacji, czyli wyznaczania funkcji przybliżającej na danym przedziale na podstawie danych wejściowych (wezłów). Interpolacja charakteryzuje się tym, że funkcja przybliżająca musi przechodzić przez wszystkie węzły.

2.2 Metody interpolacji

Trzema głównymi metodami interpolajci w metodach numerycznych są:

- Interpolacja wielomianowa
- Interpolacja Langrange'a
- Interpolacja funkcjami sklejonymi (spline).

2.3 Interpolacja wielomianowa

Interpolacja wielomianowa opiera się na fakcie, że posiadając $n + 1$ węzłów można wyznaczyć wielomian n-stopnia, który dokładnie przechodzi przez te punkty. Aby wyznaczyć ten wielomian należy określić funkcję dla każdego z węzłów:

$$
\begin{aligned}
y(x_1) &= a_1x_1^n + a_2x_1^{n-1} + \dots a_nx_1 + a_{n+1} = y_1 \\
y(x_2) &= a_1x_2^n + a_2x_2^{n-1} + \dots a_nx_2 + a_{n+1} = y_2 \\
&\vdots \\
y(x_{n+1}) &= a_1x_{n+1}^n + a_2x_{n+1}^{n-1} + \dots a_nx_{n+1} + a_{n+1} = y_{n+1}
\end{aligned}
$$

następnie utworzyć układ równań postaci:

$$
\begin{bmatrix}
x_1^n & x_1^{n-1} & \cdots & x_1 & 1 \\
x_2^n & x_2^{n-1} & \cdots & x_2 & 1 \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
x_{n+1}^n & x_{n+1}^{n-1} & \cdots & x_{n+1} & 1
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}
a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_{n+1}
\end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix}
y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_{n+1}
\end{bmatrix}
$$

$$
\mathbf{Ma} = \mathbf{y}
$$

,gdzie

- **M** to macierz Vandermonde'a, czyli macierz zawierająca skalary stojące przy wyznacznikach funkcji
- **a** to wektor wyznaczanych wyznaczników funkcji interpolującej
- **y** to wektor rozwiązań funkcji

Tak skonstruowany układ równań ma dokładnie jedno rozwiązanie.

2.4 Interpolacja Langrange'a

Drugą metodą interpolacji jest interpolacja Langrange'a, czyli metoda ulepszająca metodę interpolacji wielomianowej. Główną różnicą w tej metodzie jest fakt, że do wyznaczenia funkcji interpolującej nie musimy tworzyć kosztownego do rozwiązania układu równań. Funkcję interpolującą wyznacza się poprzez utworzenie dla każdego węzła funkcji, która przyjmuję wartość węzła, dla której jest wyznaczana oraz przyjmuje wartość y = 0 dla reszty węzłów. Takie funkcje określone są wzorem:

$$\phi_i(x) = \prod_{j=1, j\neq i}^{n+1} \frac{(x - x_j)}{(x_i - x_j)}$$

for $i = 1, 2 \ldots n + 1$.

Po wyznaczeniu takiej funkcji dla każdego węzła, należy je zsumować, aby otrzymać wielomian interpolujący. W ogólności wzór na wielomian Langrane'a, jeśli posiadamy n+1 węzłów przyjmuje postać:

$$w(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i \cdot \prod_{j=0 \wedge j\neq i}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}.$$

2.5 Interpolacja funkcjami sklejonymi trzeciego stopnia

Ostatnią omawianą metodą jest interpolacja wykorzystująca funkcje sklejone. Wyznaczanie funkcji interpolującej w metodzie interpolacji funkcjami sklejanymi polega na dzieleniu przedziału, na którym mamy punkty danych, na mniejsze podprzedziały i przyjęciu osobnej funkcji interpolującej dla każdego z tych podprzedziałów. Te funkcje są łączone w jedną ciągłą funkcję na całym przedziale. Funkcja na każdym z takich przedziałów posiada wzór:

$$S_i(x) = a_i + b_i(x - x_i) + c_i(x - x_i)^2 + d_i(x - x_i)^3$$

Po wyznaczeniu takich funkcji dla każdego z podprzedziałów należy utworzyć układ równań wykorzystujący założenia ciągłości pierwszej i drugiej pochodnej. Układ równań tworzy się poprzez zastosowanie takich założeń:

1. Funkcja interpolująca musi przyjmować wartości węzłów.
2. Wartości pierwszej i drugiej pochodnej funkcji interpolującej w punktach granicznych (punkty będące na krańcach przedziałów) są sobie równe.
3. Wartości drugiej pochodnej na krańcach przedziału, na którym wyznaczamy funkcję interpolującą są równe 0.

Po uwzględnieniu wszystkich warunków macierze układu równań do obliczenia współczynników **c** przyjmą wartość:

$$A = \begin{bmatrix} \color{red}{1} & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ h_0 & 2(h_0+h_1) & h_1 & \ddots & & \vdots \\ 0 & h_1 & 2(h_1+h_2) & h_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & h_{n-2} & 2(h_{n-2}+h_{n-1}) & h_{n-1} \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 & \color{red}{1} \end{bmatrix},$$

$$\tilde{\mathbf{y}} = \begin{bmatrix} \color{red}{\mathbf{0}} \\ 6\left(\frac{y_{n+1}-y_n}{h_n} - \frac{y_n-y_{n-1}}{h_{n-1}}\right) \\ \vdots \\ 6\left(\frac{y_2-y_1}{h_1} - \frac{y_1-y_0}{h_0}\right) \\ \color{red}{\mathbf{0}} \end{bmatrix}, \qquad \tilde{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ \vdots \\ c_{n-1} \\ c_n \end{bmatrix}$$

,gdzie

- **h** to wektor zawierający długości przedziałów, dla których wyznaczamy spline
- a_n to wartość y n-tego węzła
- **c** to szukane współczynniki

Resztę współczynników można wyznaczyć korzystając z następujących wzorów:

- $a_n = y_n$
- $b_n = \frac{y_{n+1}-y_n}{h_n} - \frac{h_n(2c_n+c_{n+1})}{3}$
- $c_n = \frac{c_n}{2}$
- $d_n = \frac{c_{n+1}-c_n}{6h_n}$

2.6 Efekt Rungego

Powszechnym zachowaniem przy interpolacji wielomianowej i Lagrange'a jest **efekt Rungego**, czyli pogorszenie się jakości interpolacji wielomianowej, mimo zwiększenia liczby jej węzłów. Początkowo ze wzrostem liczby węzłów n przybliżenie poprawia się, jednak po dalszym wzroście n, zaczyna się pogarszać, co jest szczególnie widoczne na końcach przedziałów. Aby przeciwdziałać takiemu zachowaniu stosuje się technikę zwiększania liczby węzłów na krańcach przedziałów **(węzły Chebysheva)**, co znacząco niweluje ten efekt.

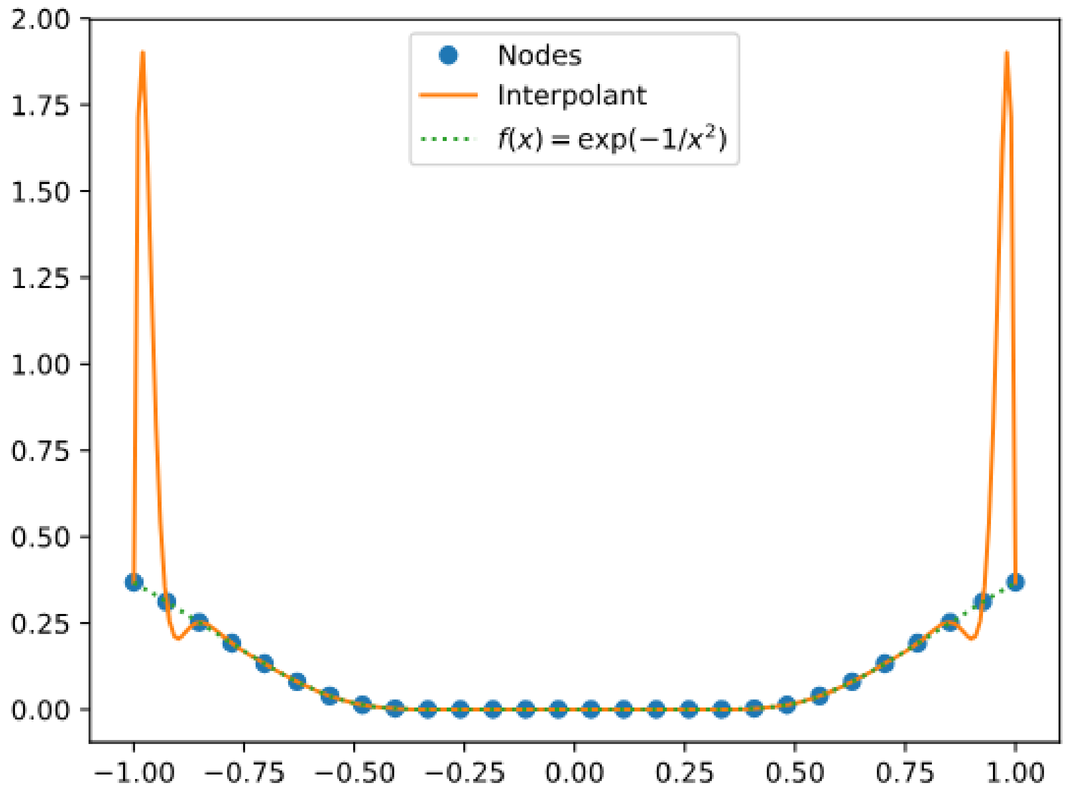


Figure 1: Wykres pokazujący przykładową funkcję interpolującą, na której widać efekt Rungego

3 Wybrane zestawy danych

Do zobrazowania metod interpolacji profili wysokościowych zostały użyte następujące trasy:

3.1 Mount Everest

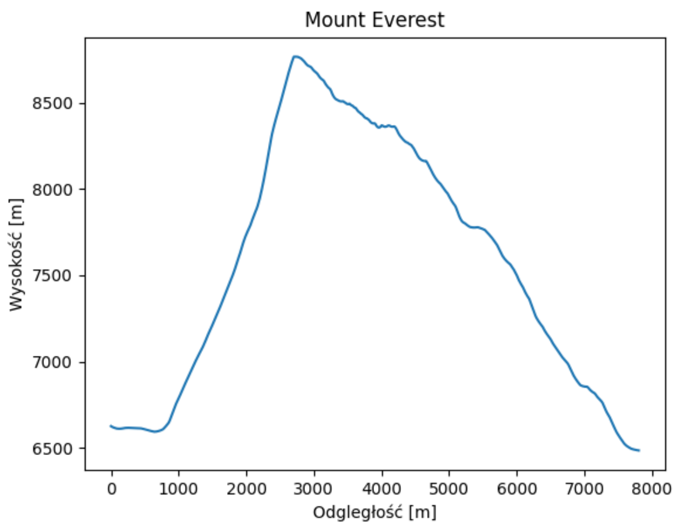


Figure 2: Oryginalna funkcja (512 węzłów) profilu wysokościowego Mount Everest

3.2 Głębia Challengera

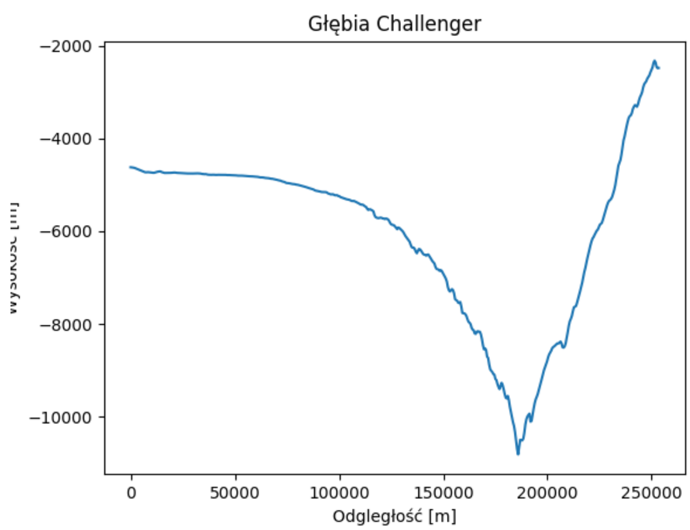


Figure 3: Oryginalna funkcja (512 węzłów) profilu wysokościowego Głębi Challengera

3.3 Spacerniak w Gdańsku

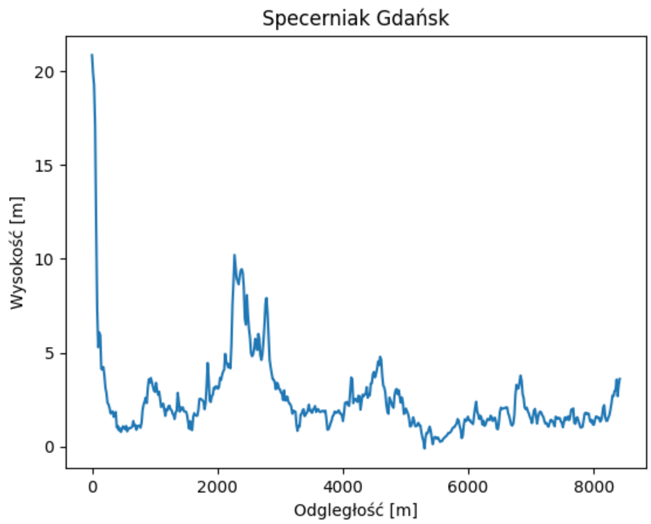


Figure 4: Oryginalna funkcja (512 węzłów) profilu wysokościowego Specerniaka w Gdańsku

3.4 Stałe wzniesienie

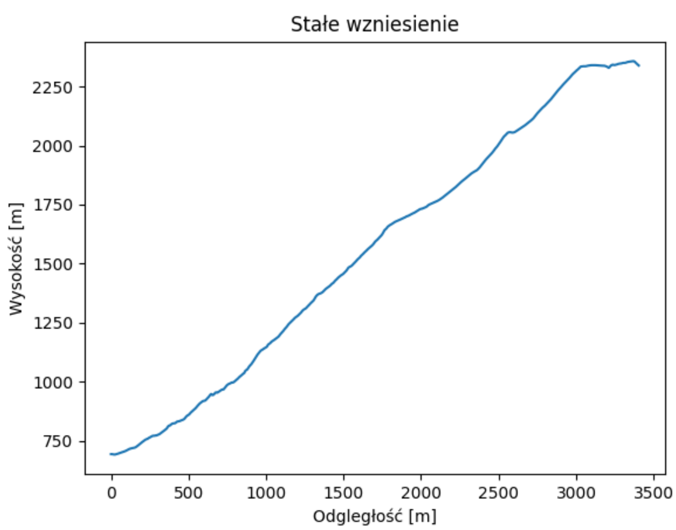
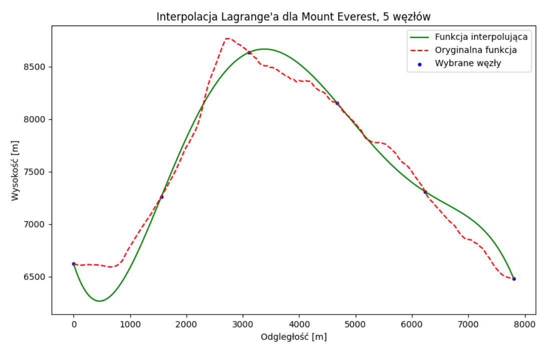


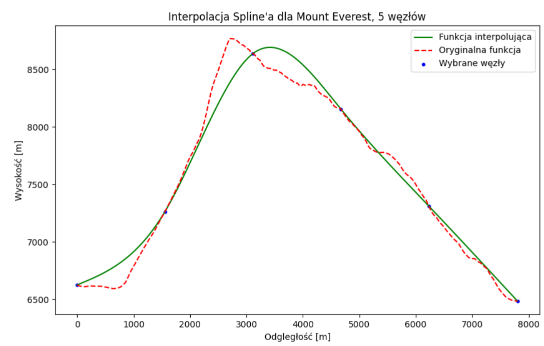
Figure 5: Oryginalna funkcja (512 węzłów) profilu wysokościowego stałego wzniesienia

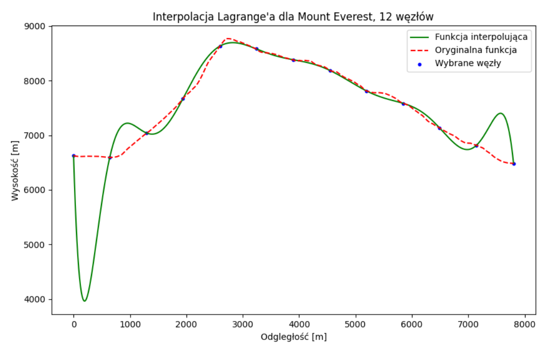
4 Analiza podstawowa

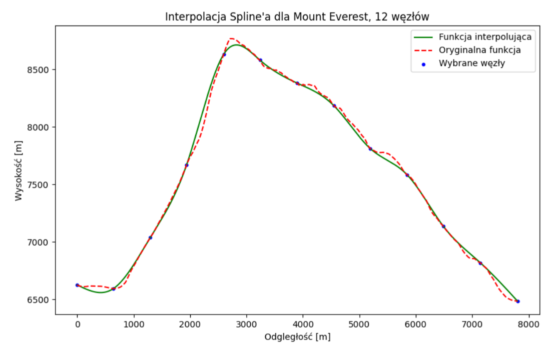
Analiza podstawowa będzie opierać się na badaniu wpływu ilości węzłów na jakość funkcji interpolującej. Do wyznaczenia funkcji interpolującej zostały użyte metody interpolacji Langrange'a oraz interpolacji funkcjami sklejonymi 3 stopnia. Analiza będzie zawierała wykresy dla: **5, 12, 19, 26** węzłów.

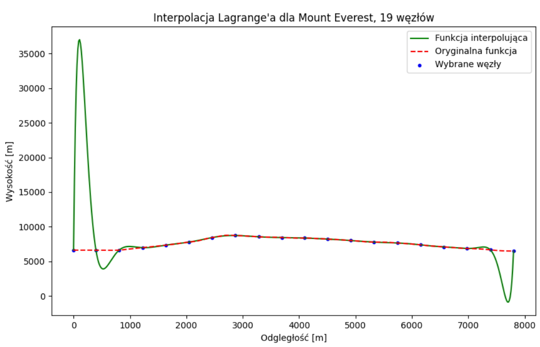
4.1 Analiza podstawowa trasy Mount Everest

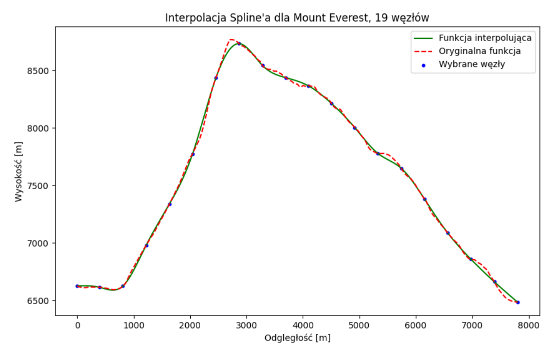


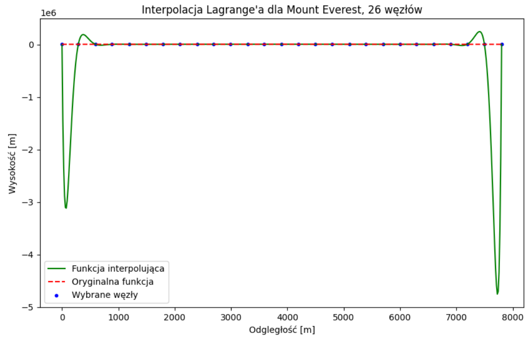


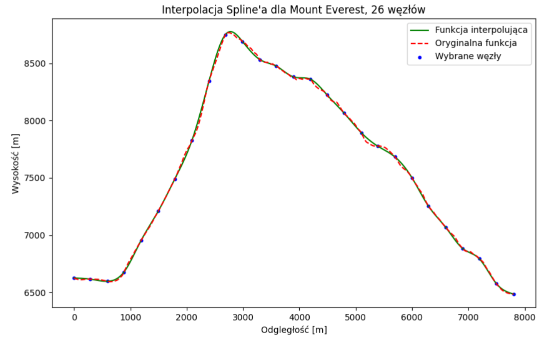






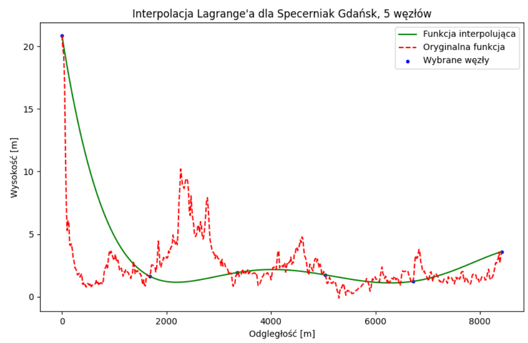


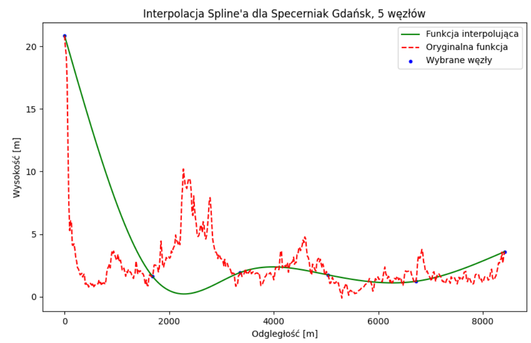


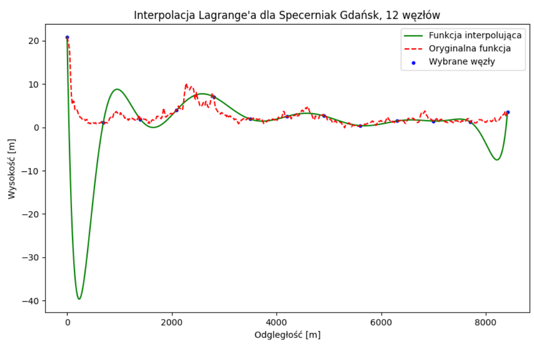


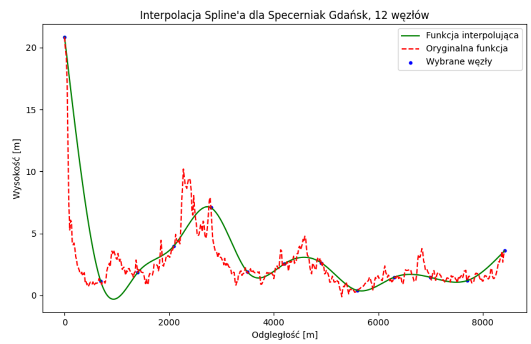
Jak widać interpolacja wielomianami Langrange'a nie sprawdziła się, ze względu na efekt Rungego. Zwiększanie liczby węzłów jeszcze mocniej uwidoczniło ten efekt. Interpolacja splajnami 3 stopnia zwróciła zadowalający efekt już przy 12 węzłach.

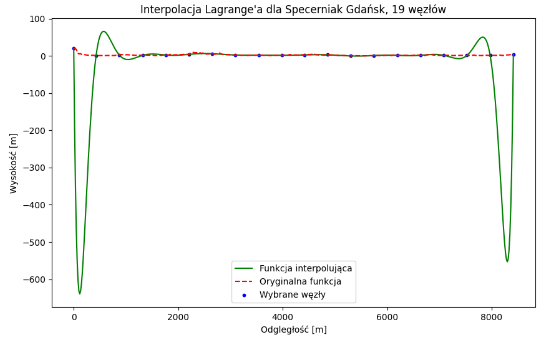
4.2 Analiza podstawowa trasy Spacerniak Gdańsk

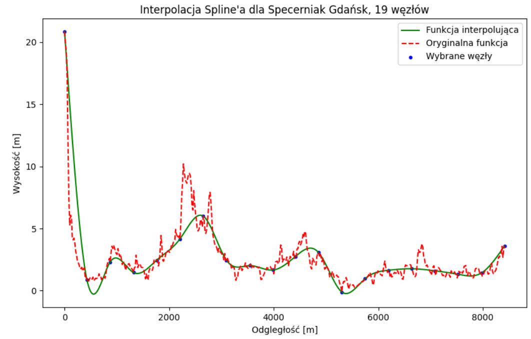


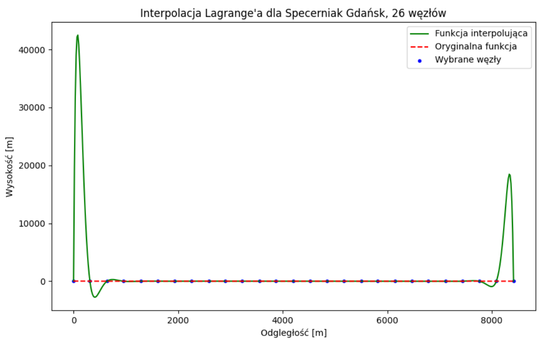


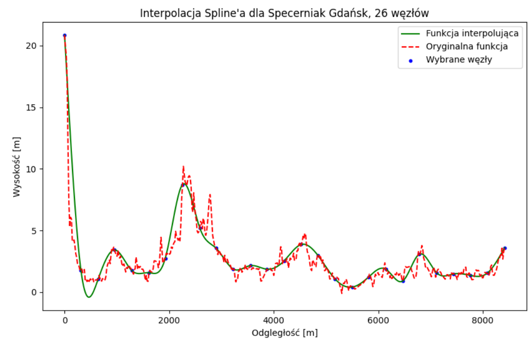












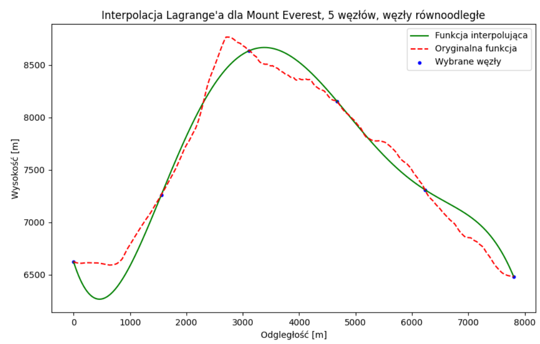
Jak poprzednio jakość funkcji interpolacyjnej na krańcach jest bardzo niska przez działanie efektu Rungego. Interpolacja splajnami zwraca zadowalające przybliżenie, jednak ze względu na duże wahania wysokości należałoby zwiększyć ilość węzłów w celu uzyskania dokładniejszego przybliżenia.

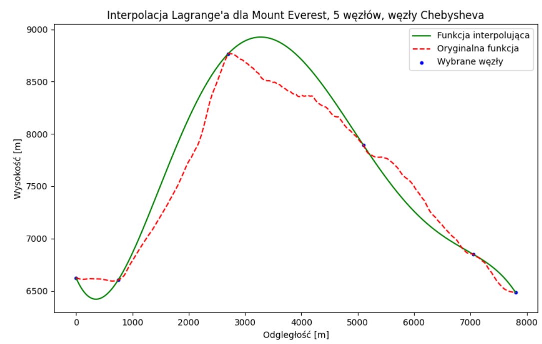
5 Analiza dodatkowa

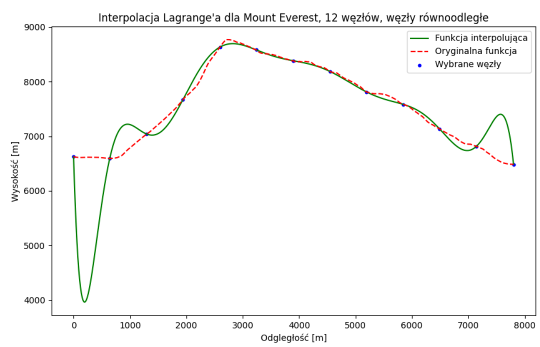
Analiza dodatkowa będzie opierać się na badaniu wpływu rozmieszczenia węzłów oraz charakterystyki badanego terenu.

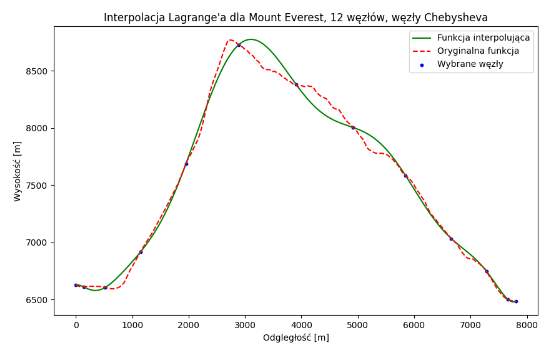
5.1 Analiza dodatkowa trasy Mount Everest

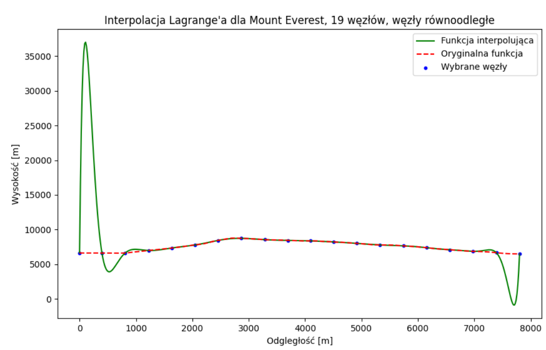
W celu zniwelowania efektu Rungego zastosowane zostały węzły Chebysheva zamiast równoodległych węzłów.

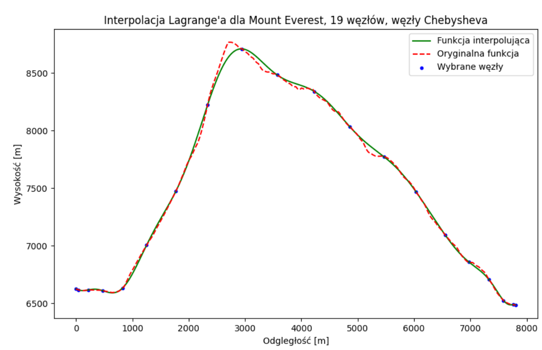


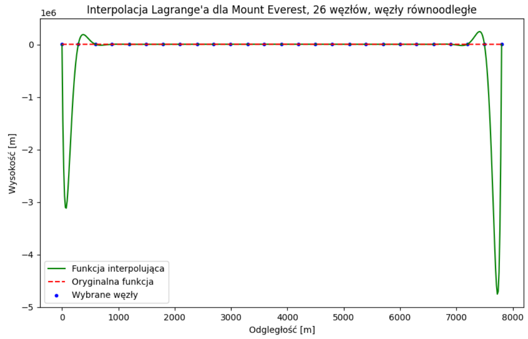


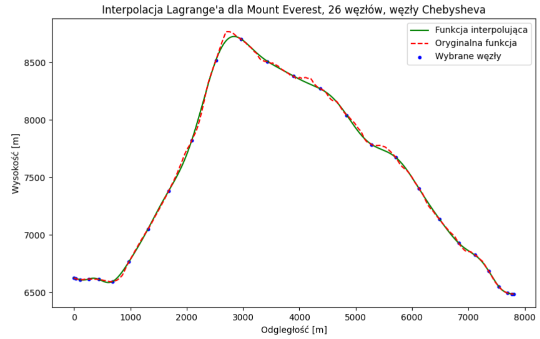








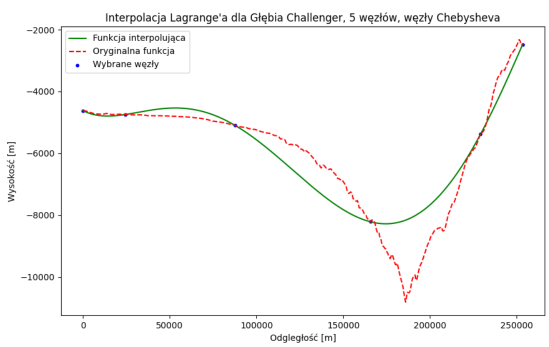


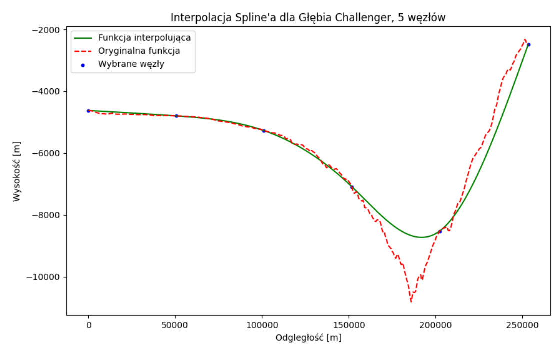


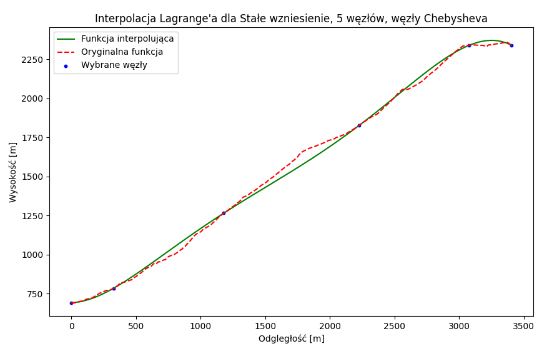
Jak widać na wykresach zastosowanie rozmieszczenia węzłów gęściej na krańcach przedziału zadziałało, a efekt Rungego jest niewidoczny co skutkuje, że interpolacja dla już dla 19 węzłów jest zadowalająca.

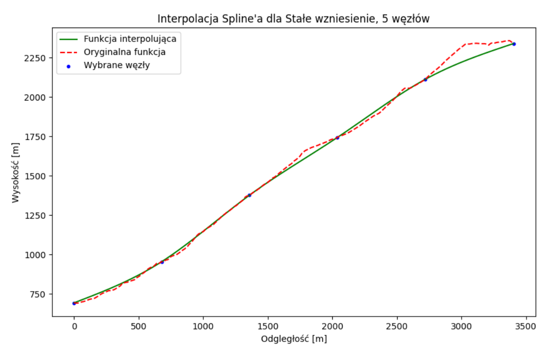
5.2 Analiza dodatkowa pozostałych tras

Ze względu na znany efekt zastosowania interpolacji wielomianami Langrang'e na równoodległych węzłach, czyli ogromne zakłócenia na krańcach przedziału, zostanie ona pominięta na rzecz zastosowania węzłów Chebysheva. Analizie poddam wpływ charakterystyki terenu na jakość interpolacji.









Jak widać na powyższych wykresach skomplikowanie przybliżanej funkcji ma znaczący wpływ na jakość interpolacji dla mniejszej ilości węzłów. Dla trasy Głębi Challengera przybliżenia znacząco odbiegają od oryginalnej funkcji. Dla stałego wzniesienia jakość jest dokładna już dla 5 węzłów.

6 Podsumowanie

Celem projektu było zaimplementowanie dwóch popularnych metod interpolacji: **interpolacji Langrange'a** oraz **interpolacji splajnowej**, z wykorzystaniem węzłów Chebysheva. Węzły Chebysheva zostały wybrane ze względu na ich właściwości minimalizujące błąd interpolacji, któe są szczególnie istotne w kontekście minimalizacji efektu Rungego. Implementacje zostały przetestowane na różnych zestawach danych, w tym na funkcjach o różnej złożoności i gładkości. Praca potwierdziła, że wybór metody interpolacji ma kluczowe znaczenie dla jakości wyników, a węzły Chebysheva stanowią efektywny sposób na poprawę dokładności interpolacji wielomianowej. Podsumowując, interpolacja Langrange'a przy równoodległych węzłach nie sprawdzi się w rozwiązaniach profesjonalncyh, jakość funkcji na krańcach przedziału funkcji interpolującej w metodzie wielomianowej można polepszyć koszystając z węzłów Chebysheva.Jednak do większości przypadków najlepsza okazała się metoda interpolacji funkcjami sklejonymi 3 stopnia, choć jest trudniejsza w implementacji i bardziej złożona obliczeniowo, to jej wyniki są zadowalające nawet dla małej liczby węzłów.