

Sprawozdanie - Układy równań liniowych

Szymon Groszkowski 193141

April 5, 2024

1 Cel projektu

Celem projektu jest implementacja i analiza dwóch metod iteracyjnych (Jacobiego i Gaussa-Seidla) oraz jednej metody bezpośredniej (faktoryzacja LU) rozwiązywania układów równań liniowych.

2 Norma użyta do oceny jakości rozwiązań

W każdym z zadań jako norma wektora residuum została użyta norma typu "maksimum", czyli maksymalny bezwzględny element w wektorze residuum.

$$\|\mathbf{e}\|_{\infty} = \max_{1 \leq j \leq n} |e_j|$$

3 Zadanie A - stworzenie układu równań

Układ równań ma następującą postać:

$$Ax = b$$

, gdzie A jest pełną macierzą systemową, b jest wektorem pobudzenia, natomiast x jest wektorem rozwiązań reprezentującym szukaną wielkość fizyczną. Według instrukcji macierz A powinna przyjąć podaną postać:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a1 & a2 & a3 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a2 & a1 & a2 & a3 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a3 & a2 & a1 & a2 & a3 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a3 & a2 & a1 & a2 & a3 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & a3 & a2 & a1 \end{bmatrix}$$

Po uwzględnieniu numeru indeksu dane do układu równań są następujące:

$$N = 941$$

$$a1 = 6$$

$$a2 = -1$$

$$a3 = -1$$

A n-tym elementem wektora b jest wartość $\sin(n * 4)$.

4 Zadanie B - implementacja metod iteracyjnych

Metody Jacobiego oraz Gaussa-Seidla są metodami iteracyjnymi do rozwiązywania liniowych układów równań. Główna różnica między nimi polega na sposobie aktualizacji wektora rozwiązań po każdej iteracji. W metodzie Jacobiego rozwiązania są aktualizowane na podstawie poprzednich wyników, a w metodzie Gaussa-Seidla rozwiązania są aktualizowane pojedynczo, gdy tylko dostępne są nowe wartości. Oznacza to, że nowe wartości są oparte na zaktualizowanych elementach wektora rozwiązań, dzięki czemu metoda ta jest bardziej wydajna niż metoda Jacobiego.

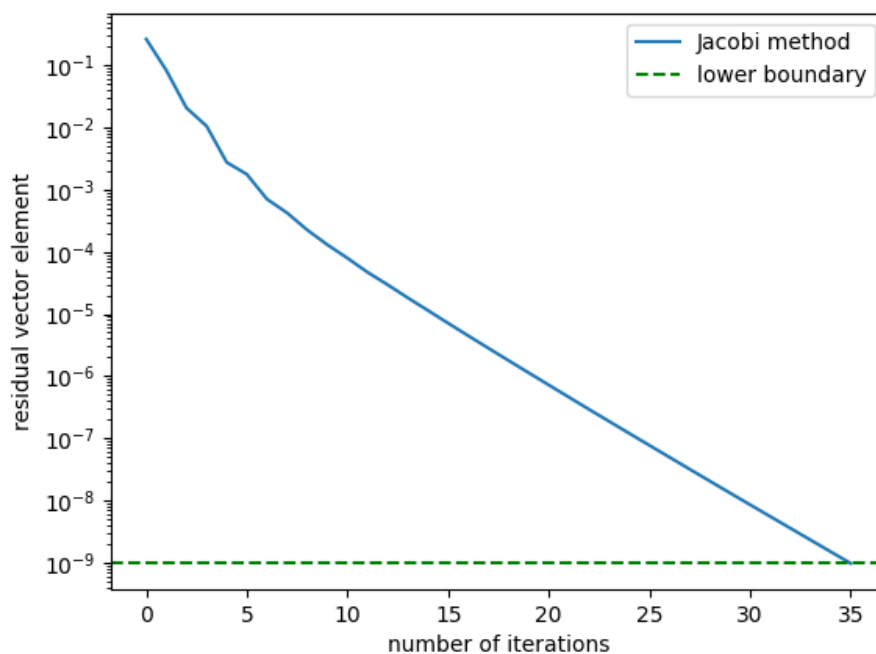
4.1 Metoda Jacobiego

Do obliczania elementów wektora rozwiązań metodą Jacobiego został użyty następujący wzór:

$$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}}(b_i - \sum_{j=1, j \neq i}^n a_{ij}x_j^{(k)})$$

Wyniki działania algorytmu przy założeniu, że norma residuum jest mniejsza niż 10^{-9} :

- **Liczba iteracji: 36**
- **Czas obliczeń: 8,48s**



Wykres 1: elementy wektora błędu rezydualnego do liczby iteracji dla metody Jacobiego

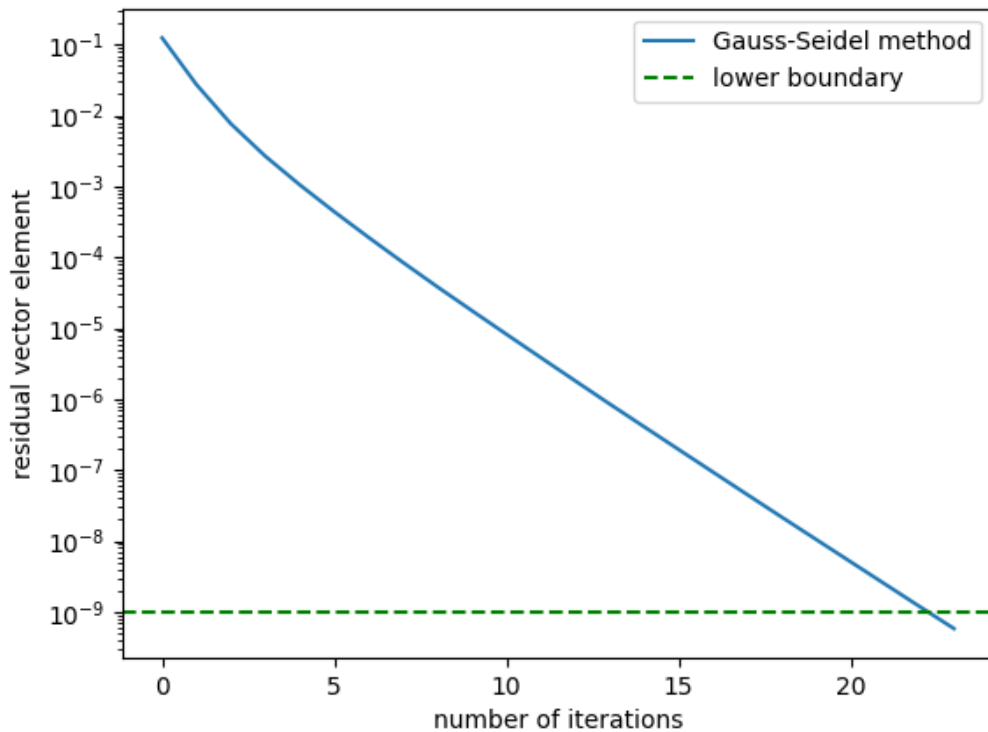
4.2 Metoda Gaussa-Seidla

Do obliczania elementów wektora rozwiązań metodą Gauss-Seidla został użyty następujący wzór:

$$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}} \left(b_i - \sum_{j=1, j \neq i}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k+1)} - \sum_{j=1, j \neq i}^n a_{ij} x_j^{(k)} \right)$$

Wyniki działania algorytmu przy założeniu, że norma residuum jest mniejsza niż 10^{-9} :

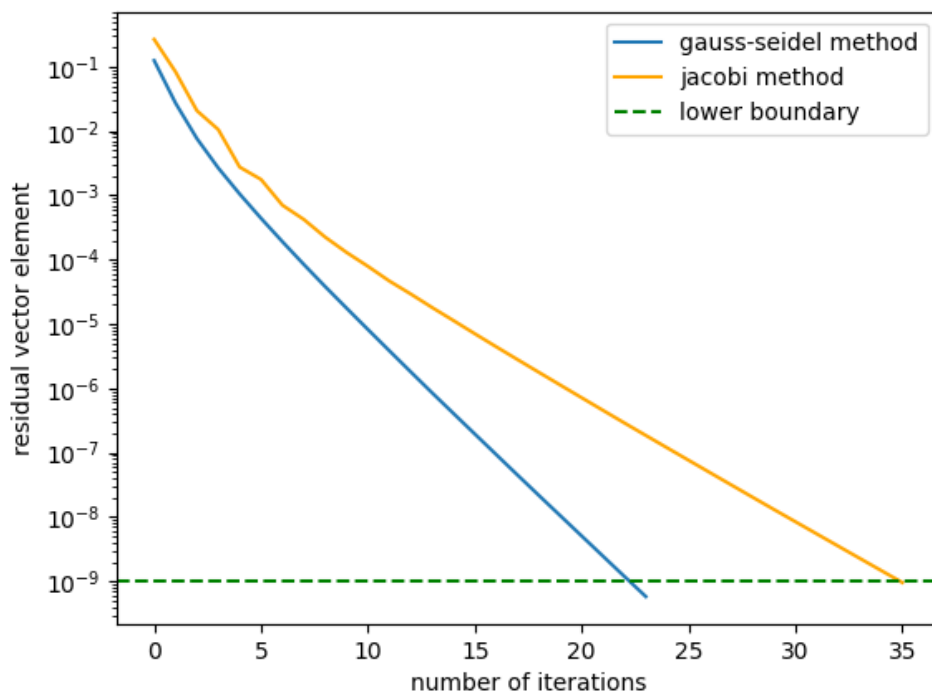
- Liczba iteracji: 24
- Czas obliczeń: 4,57s



Wykres 2: elementy wektora błędu rezydualnego do liczby iteracji dla metody Gaussa-Seidla

4.3 Porównanie metod

W tym przypadku metoda Gaussa-Seidla okazała się szybsza o **12 iteracji** oraz **4.15s**, czyli ok. **87%** szybsza. Wynika to z aktualizacji wektora rozwiązań pojedynczo na podstawie ostatnich rozwiązań, co skutkuje szybszym wyznaczeniem rozwiązań.



Wykres 3: porównanie szybkości obliczenia zadanego układu równań

5 Zadanie C - metody iteracyjne dla innego układu równań

W zadaniu C dane do układu równań są następujące:

$$N = 941$$

$$a1 = 3$$

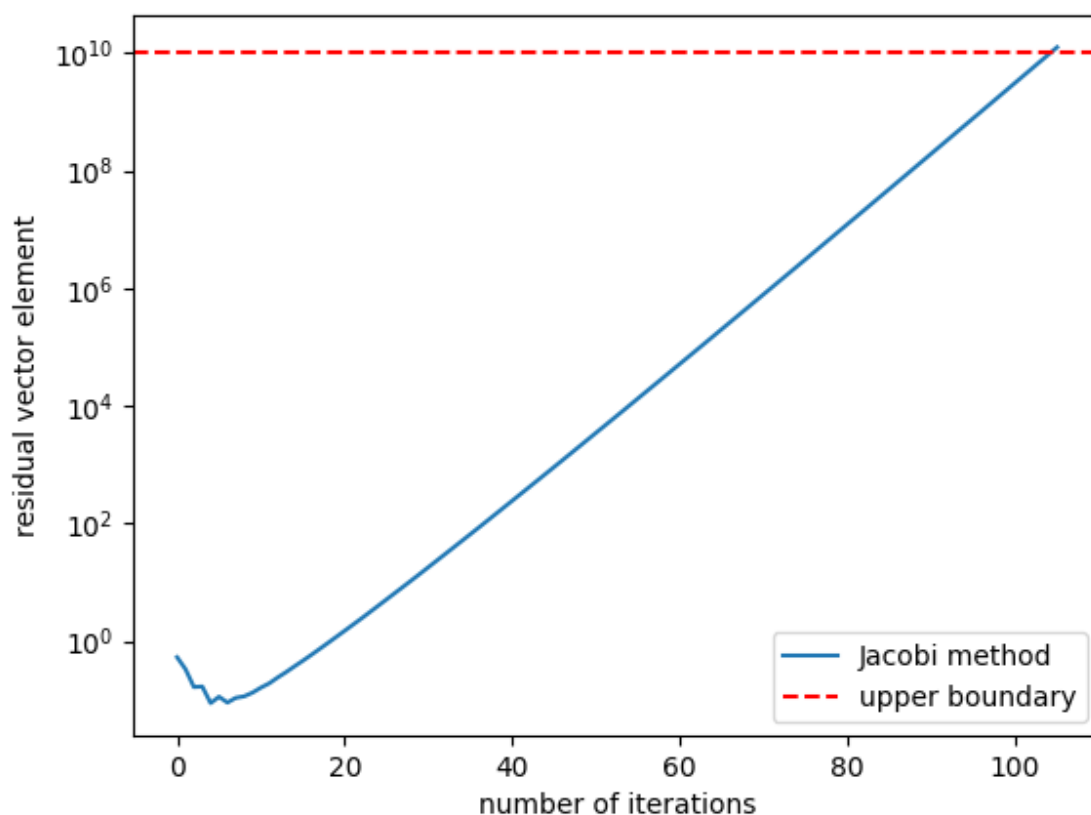
$$a2 = a3 = -1$$

A n-tym elementem wektora b jest wartość $\sin(n * 4)$.

5.1 Metoda Jacobiego

Wynik działania algorytmu przy założeniu, że górna granica normy residuum nie jest większa niż 10^{10} :

- Po 106 iteracjach norma przekroczyła granicę 10^{10}

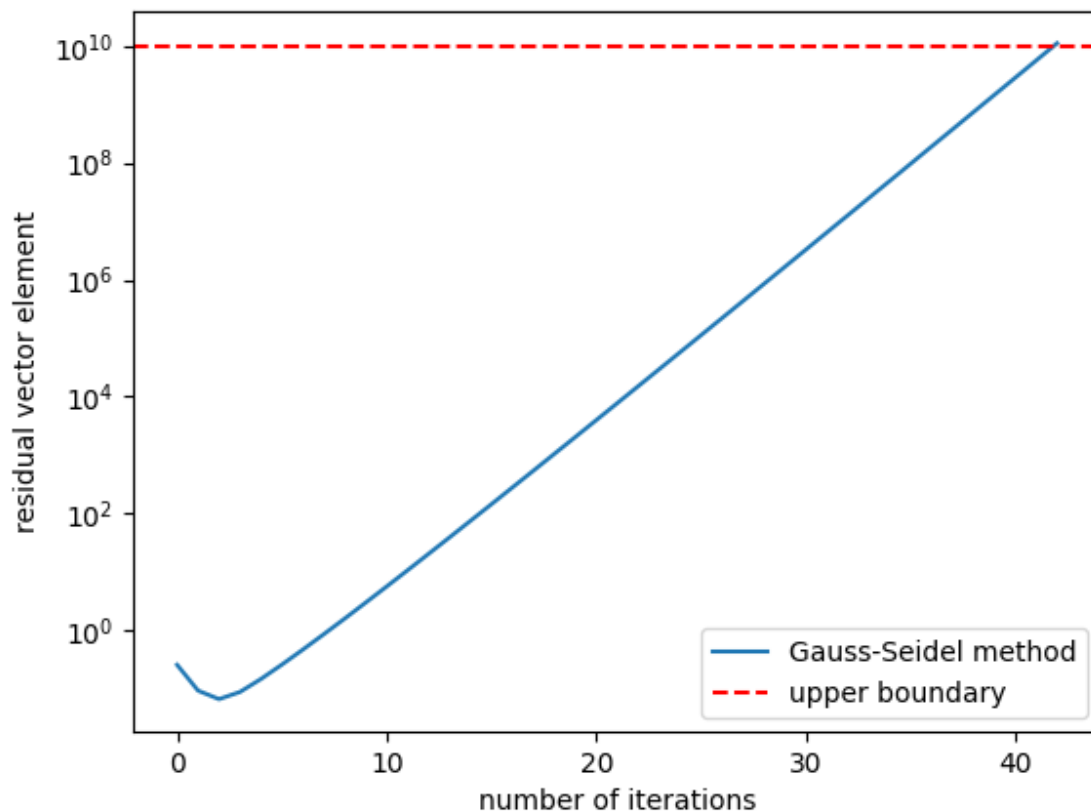


Wykres 4: elementy wektora błędu rezydualnego do liczby iteracji dla metody Jacobiego

5.2 Metoda Gaussa-Seidla

Wynik działania algorytmu przy założeniu, że górna granica normy residuum nie jest większa niż 10^{10} :

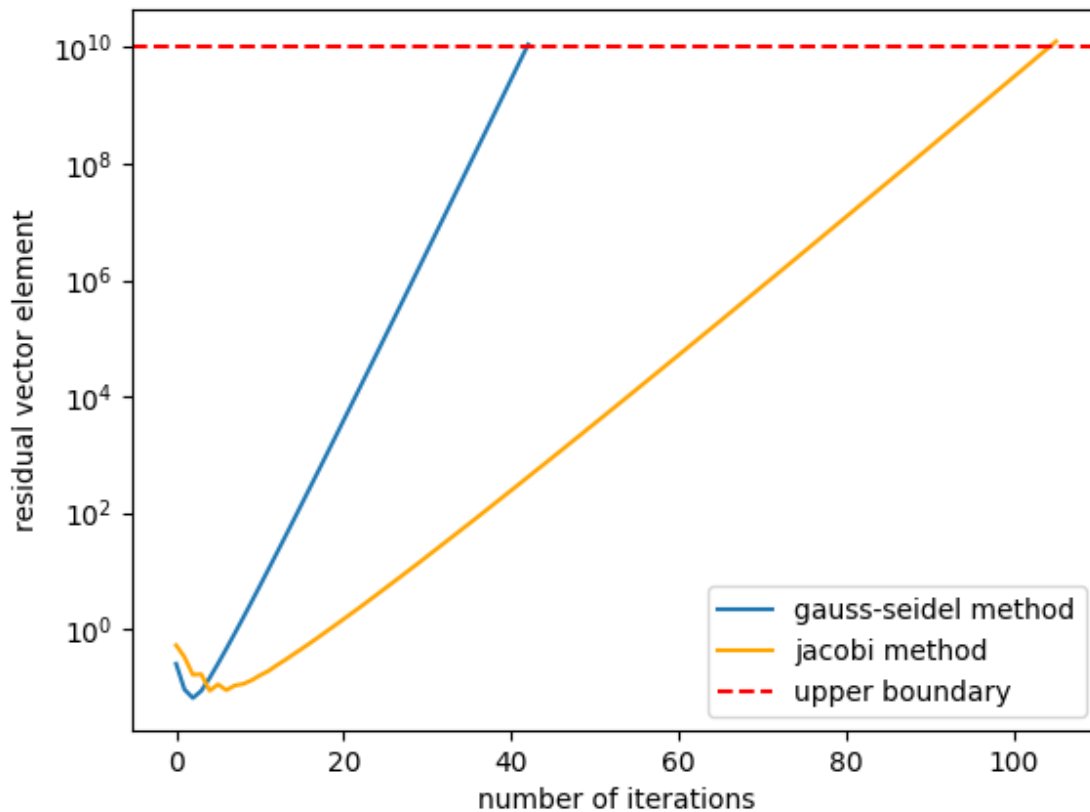
- Po 43 iteracjach norma przekroczyła granicę 10^{10}



Wykres 5: elementy wektora błęd rezydualnego do liczby iteracji dla metody Gaussa-Seidla

5.3 Porównanie działania metod w zadaniu C

Po zmianie układu równań obie metody nie zbiegają się do rozwiązania. W metodzie Gaussa-Seidla norma residuum rośnie dwa razy szybciej.



Wykres 6: elementy wektora błędu rezydualnego do liczby iteracji dla metody Gaussa-Seidla

6 Zadanie D - metoda bezpośredniego rozwiązywania układów równań liniowych: faktoryzacja LU

Dekompozycja LU (znana również jako faktoryzacja LU) to procedura dekompozycji macierzy kwadratowej na iloczyn dolnej macierzy trójkątnej i górnej macierzy trójkątnej takiej, że

$$A = LU$$

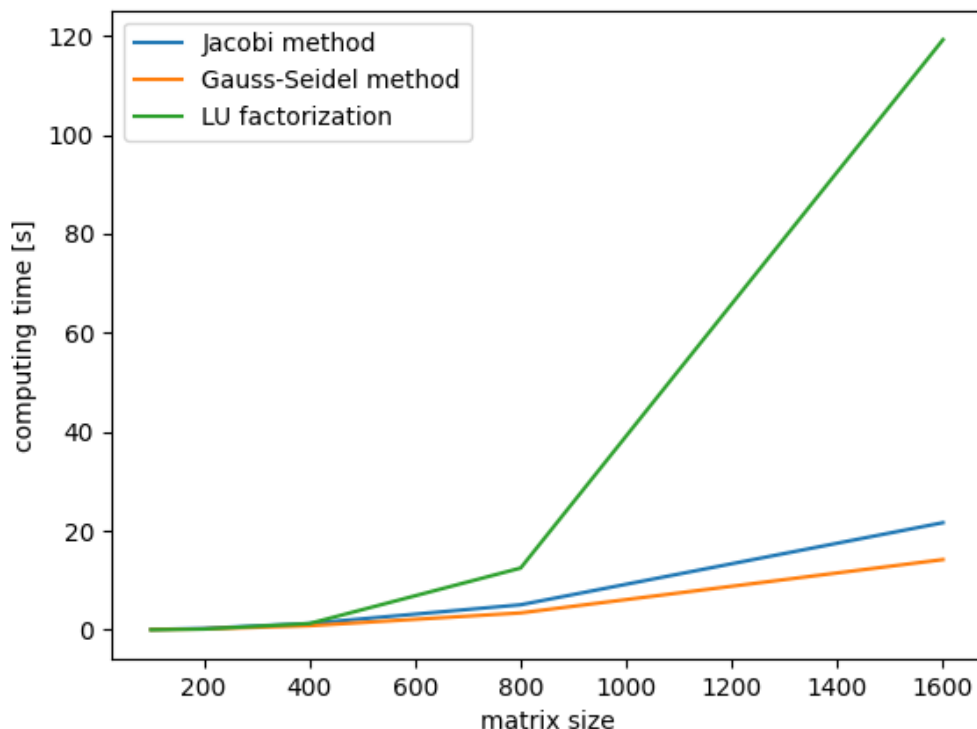
Zaletą zapisu macierzy jako iloczynu L i U jest to, że rozwiązanie trójkątnego układu równań jest łatwe do obliczenia za pomocą podstawienia w przód lub w tył.

Po wykorzystaniu faktoryzacji LU do rozwiązywania układu równań z zadania C norma błędu wektora residuum miała wartość:

- Norma wektora residuum: 6.54^{-13}

7 Zadanie E - porównanie wszystkich metod

Jako układ testowy został użyty układ równań liniowych z zadania A.



Wykres 7: porównanie czasów potrzebnych na obliczenie układu równań dla macierzy o rozmiarze $n \times n$ dla trzech metod

Jak widać wraz ze zwiększaniem się rozmiaru macierzy czas potrzebny na rozwiązanie znacząco wzrasta w metodzie bezpośredniej wykorzystującej faktoryzację LU.

8 Zadanie F - podsumowanie

Do rozwiązywania układów równań liniowych możemy wybrać dwie drogi: metody iteracyjne oraz bezpośrednie. W tym projekcie jako metody iteracyjne zostały przedstawione metody: **Jacobiego** i **Gausa-Seidla**, a jako przykład metody bezpośredniej: **rozwiązanie układu równań liniowych przy użyciu faktoryzacji LU**. Wykonane zadania pokazały, że metody bezpośrednie są bardzo dokładne i gwarantują rozwiązanie w skończonym czasie, jednak ze względu na dużą złożoność obliczeniową preferuje się je do macierzy małych/średnich. Jeśli zależy nam na szybkości otrzymania rozwiązań na rzecz dokładności lepiej będą sprawdzać się metody iteracyjne (wykres zadania E), ale nie gwarantują one otrzymania rozwiązań w każdym przypadku, co potwierdza zadanie C. Wybór metody zależy, więc od specyfiki problemu oraz własności macierzy A.