**INTERPOLACJA. Metoda Newtona z ilorazami różnicowymi**

Definiujemy pojęcie ilorazów różnicowych.

Iloraz różnicowy I rzędu:

$$f(x_i; x_{i+1}) = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{x_{i+1} - x_i}$$

Iloraz różnicowy II rzędu:

$$f(x_i; x_{i+1}; x_{i+2}) = \frac{f(x_{i+1}; x_{i+2}) - f(x_i; x_{i+1})}{x_{i+2} - x_i}$$

Iloraz różnicowy k-tego rzędu:

$$f(x_i; x_{i+1}; \dots; x_{i+k}) = \frac{f(x_{i+1}; x_{i+2}; \dots; x_{i+k}) - f(x_i; x_{i+1}; \dots; x_{i+k-1})}{x_{i+k} - x_i}$$

**Wielomian interpolacyjny Newtona z ilorazami różnicowymi:**

$$W(x) = \sum_{k=0}^{n-1} f(x_0; x_1; \dots; x_k) \prod_{j=0}^{k-1} (x - x_j) = f(x_0) +$$

$$+f(x_0; x_1)(x - x_0) + f(x_0; x_1; x_2)(x - x_0)(x - x_1) + \dots + f(x_0; x_1; \dots; x_{n-1})(x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{n-2})$$

| $x_i$ | $f(x_i)$ | ilorazy różnicowe | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | | I rzędu | II rzędu | III rzędu | IV rzędu |
| $x_0$ | $f(x_0)$ | $f(x_0; x_1)$ | $f(x_0; x_1; x_2)$ | $f(x_0; x_1; x_2; x_3)$ | $f(x_0; x_1; x_2; x_3; x_4)$ |
| $x_1$ | $f(x_1)$ | $f(x_1; x_2)$ | $f(x_1; x_2; x_3)$ | $f(x_1; x_2; x_3; x_4)$ | |
| $x_2$ | $f(x_2)$ | $f(x_2; x_3)$ | $f(x_2; x_3; x_4)$ | | |
| $x_3$ | $f(x_3)$ | $f(x_3; x_4)$ | | | |
| $x_4$ | $f(x_4)$ | | | | |

*Wskazówka: Liczba rzędów jest zależna od liczby zadanych punktów.*

**PRZYKŁAD:**

Dane:

| $x_i$ | 0 | 2 | 3 | 4 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|
| $f(x_i)$ | 1 | 3 | 2 | 5 | 7 |

Liczymy ilorazy różnicowe kolejnych rzędów:

| $x_i$ | $f(x_i)$ | I rzędu | II rzędu | III rzędu | IV rzędu |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 1 | (3-1)/(2-0)=1 | (-1-1)/(3-0)=-2/3 | (2-(-2/3))/(4-0)=2/3 | ((-2/3)-(2/3))/(6-0)=-2/9 |
| 2 | 3 | (2-3)/(3-2)=-1 | (3-(-1))/(4-2)=2 | ((-2/3)-2)/(6-2)=-2/3 | |
| 3 | 2 | (5-2)/(4-3)=3 | (1-3)/(6-3)=-2/3 | | |
| 4 | 5 | (7-5)/(6-4)=1 | | | |
| 6 | 7 | | | | |

Obliczamy wielomian:

$$W(x) = 1 + 1(x - 0) - \frac{2}{3}(x - 0)(x - 2) + \frac{2}{3}(x - 0)(x - 2)(x - 3) - \frac{2}{9}(x - 0)(x - 2)(x - 3)(x - 4)$$

Rozwiązanie w punkcie $x = 1$:

$$W(1) = 5\frac{1}{3} = 5.3333$$