INTERPOLACJA. Funkcje sklejane.

Wzór ogólny metody (zasady działania przedstawione poniżej na przykładzie):

$$S_3(x) = W_3(x) + \sum_{s=1}^{n-1} \alpha_s (x - x_s)^3 \qquad (\mathbf{1})$$

zawsze wielomian trzeciego stopnia

kolejne alfy dodawane ze wzrostem n – liczby węzłów

PRZYKŁAD:

Dane. Zadane węzły (argumenty) i wartości funkcji:

index	0	1	2	3
x	1	3	5	7
f(*x*)	1	8	9	17

W niniejszej metodzie niezbędna jest dodatkowa informacja dotycząca wartości pochodnej w dwóch krańcowych węzłach. W przykładzie zdefiniowano następujące wartości:

$$f'(1) = 1 \quad \text{oraz} \quad f'(7) = 1$$

W Państwa przykładach również podano informację dotyczącą pochodnych w krańcowych węzłach.

Sposób rozwiązania. W pierwszej kolejności, korzystając ze wzoru (1) należy rozpisać wzór ogólny wielomianu dla zadanej liczby węzłów.

$$S_3(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \alpha_1 (x - x_1)^3 + \alpha_2 (x - x_2)^3 + \alpha_3 (x - x_3)^3 \qquad (\mathbf{2})$$

$W_3(x)$ – zawsze wielomian trzeciego stopnia, ta część się nie zmienia

Rozpisanie sumy ze wzoru (1). Ilość niewiadomych (α_s) jest uzależniona od liczby węzłów. W przykładzie n=4, więc niewiadomych będzie n-1=3. Podstawiamy kolejne węzły x_s z pominięciem pierwszego (x_0). Potęga się nie zmienia i zawsze wynosi 3.

Powyższy wzór (2) rozpisujemy dla kolejnych argumentów x. Tworzymy układ równań wiedząc, że dla argumentu x=1 powinniśmy uzyskać wartość funkcji 1, dla x=3 powinniśmy uzyskać wartość funkcji 8, itd. (patrz tabelka z danymi). Dodatkową zasadą jest dopisywanie kolejnych niewiadomych α_s dla kolejnych argumentów.

Zaczynamy od x_0 , gdzie zawsze rozpisany powinien być tylko wielomian $W_3(x)$ (to jest ogólne zasada, dotyczy wszystkich przykładów)

$$S_3(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3,$$

gdzie podstawiając x=1 otrzymamy

$$S_3(1) = a_0 + a_1 \cdot 1 + a_2 \cdot 1^2 + a_3 \cdot 1^3 = a_0 + a_1 + a_2 + a_3.$$

Wiedząc, że dla x=1 powinniśmy uzyskać wartość funkcji 1 (patrz tabelka z danymi), możemy rozpisać następujące równanie:

$$a_0 + a_1 + a_2 + a_3 = 1$$

W kolejnym węźle x_1 mamy wielomian $W_3(x)$ oraz dodajemy już jedną niewiadomą - zmienną α_1. W związku z tym stosujemy wzór:

$$S_3(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \alpha_1 (x - x_1)^3,$$

więc $S_3(3) = a_0 + a_1 \cdot 3 + a_2 \cdot 3^2 + a_3 \cdot 3^3 + \alpha_1 (3 - 3)^3$.

Jak widać element z niewiadomą alfą się zeruje, jest to zasada, która zawsze ostatnią alfę w danym równaniu zeruje, co zobaczyć będzie można w kolejnych węzłach. W związku z tym znowu wiedząc, że dla x=3 powinniśmy uzyskać wartość funkcji 8 (patrz tabelka z danymi), to ostatecznie równanie zapiszemy:

$$a_0 + 3a_1 + 9a_2 + 27a_3 = 8.$$

Analogicznie postępujemy w kolejnych węzłach:

- dla x_2

$$S_3(5) = a_0 + a_1 \cdot 5 + a_2 \cdot 5^2 + a_3 \cdot 5^3 + \alpha_1 (5 - 3)^3 + \alpha_2 (5 - 5)^3$$

(dwie dodatkowe niewiadome α_1 i α_2)

$$a_0 + 5a_1 + 25a_2 + 125a_3 + 8\alpha_1 = 9$$

(po podstawieniu x=5 oraz f(x)=9)

- dla x_3

$$S_3(7) = a_0 + a_1 \cdot 7 + a_2 \cdot 7^2 + a_3 \cdot 7^3 + \alpha_1 (7 - 3)^3 + \alpha_2 (7 - 5)^3 + \alpha_3 (7 - 7)^3$$

(trzy dodatkowe niewiadome α_1, α_2 i α_3))

$$a_0 + 7a_1 + 49a_2 + 343a_3 + 64\alpha_1 + 8\alpha_2 = 17$$

(po podstawieniu x=7 oraz f(x)=17)

W taki sposób utworzone zostały cztery równania. Jednakże ilość niewiadomych w tych równaniach wynosi 6: $a_0, a_1, a_2, a_3, \alpha_1, \alpha_2$. W związku z tym aby rozwiązać układ równań z 6 niewiadomymi potrzeba dodatkowych dwóch równań. Do tego właśnie są potrzebne informacje dotyczące wartości pochodnej w dwóch krańcowych węzłach. Do utworzenia wspomnianych dwóch dodatkowych równań należy policzyć pochodną z wielomianu $S_3(x)$:

$$S_3{}'(x) = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + 3\alpha_1 (x - x_1)^2 + 3\alpha_2 (x - x_2)^2 + 3\alpha_3 (x - x_3)^2$$

$W_3{}'(x)$ — zawsze będzie wielomianem drugiego stopnia

Czyli ogólny wzór na pochodną, w celu implementacji, można zapisać następująco:

$$S_3{}'(x) = W_3{}'(x) + \sum_{s=1}^{n-1} 3\alpha_s (x - x_s)^2$$

Następnie analogicznie ja w przypadku funkcji podstawiamy węzły i wartości pochodnych. Tym razem dotyczy to zawsze tylko dwóch krańcowych węzłów.

Dla pierwszego węzła x_0 rozpisujemy wyłącznie wielomian $W_3{}'(x)$, więc wiedząc, że w węźle 1 pochodna wynosi 1 (patrz tabelka z danymi i wartości pochodnych pod nią), zapiszemy:

$$S_3{}'(1) = a_1 + 2a_2 \cdot 1 + 3a_3 \cdot 1^2$$

$$a_1 + 2a_2 + 3a_3 = 1$$

Natomiast dla ostatniego węzła x_3 , tak jak poprzednio dodajemy wszystkie α_s oraz podstawiamy $x = 7$ i $f'(x) = 1$:

$$S_3'(7) = a_1 + 2a_2 \cdot 7 + 3a_3 \cdot 7^2 + 3\alpha_1(7-3)^2 + 3\alpha_2(7-5)^2 + 3\alpha_3(7-7)^2$$

$$a_1 + 14a_2 + 147a_3 + 48\alpha_1 + 12\alpha_2 = 1$$

Ostatecznie otrzymamy następujący układ równań:

$$\begin{cases} a_0 + a_1 + a_2 + a_3 = 1 \\ a_0 + 3a_1 + 9a_2 + 27a_3 = 8 \\ a_0 + 5a_1 + 25a_2 + 125a_3 + 8\alpha_1 = 9 \\ a_0 + 7a_1 + 49a_2 + 343a_3 + 64\alpha_1 + 8\alpha_2 = 17 \\ a_1 + 2a_2 + 3a_3 = 1 \\ a_1 + 14a_2 + 147a_3 + 48\alpha_1 + 12\alpha_2 = 1 \end{cases}$$

Układ taki rozpisać można w postaci macierzowej następująco:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 9 & 27 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 25 & 125 & 8 & 0 \\ 1 & 7 & 49 & 343 & 64 & 8 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 14 & 147 & 48 & 12 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 8 \\ 9 \\ 17 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Układ taki należy rozwiązać (tutaj przyda się metoda eliminacji Gaussa z pierwszych zajęć). Rozwiązaniem w tym przykładzie takiego układu równań jest:

$$\begin{cases} a_0 = 4{,}175 \\ a_1 = -8{,}325 \\ a_2 = 6{,}125 \\ a_3 = -0{,}975 \\ \alpha_1 = 1{,}9 \\ \alpha_2 = -2.025 \end{cases}$$

Ostatecznie wielomian interpolacyjny ze wzoru (1) po podstawieniu powyższych otrzymanych wartości wygląda następująco:

$$S_3(x) = 4{,}175 - 8{,}325x + 6{,}125x^2 - 0{,}975x^3 + 1{,}9(x-3)^3 - 2{,}025(x-5)^3 \qquad \mathbf{(3)}$$

Do wyznaczenia rozwiązania w dowolnym punkcie x należy stosować podobną zasadę jaką stosowaliśmy wcześniej. Tzn. w punkcie znajdującym się między x_0 a x_1 rozpisujemy tylko wielomian $W_3(x)$, pomiędzy x_1 a x_2 rozpisujemy dodatkowo α_1, pomiędzy x_2 a x_3 rozpisujemy dodatkowo α_2, itd. W związku z tym przykładowo x=2 mieści się między 1 (x_0) i 3 (x_1), więc z wielomianu końcowego (3) bierzemy tylko część $W_3(x)$:

$$S_3(x) = \boxed{4{,}175 - 8{,}325x + 6{,}125x^2 - 0{,}975x^3} + 1{,}9(x-3)^3 - 2{,}025(x-5)^3$$

$$S_3(2) = 4{,}175 - 8{,}325 \cdot 2 + 6{,}125 \cdot 2^2 - 0{,}975 \cdot 2^3 = 4{,}225$$

Natomiast przykładowo x=6 mieści się między 5 (x_2) i 7 (x_3), więc bierzemy pod uwagę cały wielomian (3):

$$S_3(x) = \boxed{4{,}175 - 8{,}325x + 6{,}125x^2 - 0{,}975x^3 + 1{,}9(x-3)^3 - 2{,}025(x-5)^3}$$

$$S_3(6) = 4{,}175 - 8{,}325 \cdot 6 + 6{,}125 \cdot 6^2 - 0{,}975 \cdot 6^3 + 1{,}9(6-3)^3 - 2{,}025(6-5)^3 = 13{,}4$$

Program przez Państwa pisany ma jak zwykle działać prawidłowo dla dowolnej liczby węzłów. Jego wynikiem ma być, tak jak w poprzednich metodach interpolacyjnych, wartość funkcji uzyskana dla podanego argumentu x.

WAŻNA UWAGA: W tej metodzie wyniki Państwa przykładów mogą się dość znacznie różnić od rozwiązań otrzymanych pozostałymi metodami, więc w pierwszej kolejności dobrze przetestować program na podanym przykładzie.