APROKSYMACJA ŚREDNIOKWADRATOWA
(CIĄGŁA)

$$A_{ij} = \int_a^b \varphi_i(x)\varphi_j(x)p(x)dx$$

$$b_i = \int_a^b \varphi_i(x)f(x)p(x)dx$$

$$i, j = 0,1, \dots, n$$

gdzie $\varphi_i(x)$ to funkcje bazowe, $p(x)$ to waga, $f(x)$ to funkcja dla której poszukujemy aproksymacji średniokwadratowej, a i b to krańce przedziału w jakim aproksymujemy funkcję, zaś n to stopień poszukiwanego wielomianu aproksymującego.

Przyjmujemy następujące funkcje bazowe:

$\varphi_0(x) = 1, \varphi_1(x) = x, \varphi_2(x) = x^2, \varphi_3(x) = x^3, \dots, \varphi_n(x) = x^n$.

Przykład

Znaleźć aproksymację średniokwadratową dla funkcji $f(x) = \sqrt{x}$ w przedziale [1,3]. Przyjmujemy funkcje bazowe przedstawione powyżej oraz $p(x) = 1$.

Funkcję aproksymującą przyjmujemy w postaci wielomianu drugiego stopnia (na potrzeby prezentacji obliczeń, program musi dawać możliwość aproksymacji dowolnym wielomianem)

$$W(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$$

stąd $n = 2$.

Jak widzimy niewiadomymi są współczynniki a_0, a_1, a_2. Aby je wyznaczyć musimy otrzymać układ równań algebraicznych

$$\boldsymbol{A}_{ij} * \boldsymbol{a}_i = \boldsymbol{b}_i$$

na podstawie ogólnych wzorów (patrz początkowe wzory).

Wskazówka. Pamiętajcie, że w waszym programie musi być możliwość wyboru stopnia wielomianu aproksymującego. Od niego zaś będzie zależała liczba niewiadomych oraz rozmiar układu równań.

Dla $n = 2$ otrzymamy następującą ogólną postać układu równań

$$\begin{bmatrix} \int_a^b \varphi_0\varphi_0 p(x)dx & \int_a^b \varphi_0\varphi_1 p(x)dx & \int_a^b \varphi_0\varphi_2 p(x)dx \\ \int_a^b \varphi_1\varphi_0 p(x)dx & \int_a^b \varphi_1\varphi_1 p(x)dx & \int_a^b \varphi_1\varphi_2 p(x)dx \\ \int_a^b \varphi_2\varphi_0 p(x)dx & \int_a^b \varphi_2\varphi_1 p(x)dx & \int_a^b \varphi_2\varphi_2 p(x)dx \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \int_a^b \varphi_0 f(x)p(x)dx \\ \int_a^b \varphi_1 f(x)p(x)dx \\ \int_a^b \varphi_2 f(x)p(x)dx \end{bmatrix}$$

Wskazówka. Dla $n = 3$ *otrzymamy układ 4x4, dla* $n = 4$ *układ 5x5, itd. Wówczas do układu równań dodajemy całki o takiej samej postaci jak wyżej tylko z kolejnymi indeksami i oraz j.*

Po podstawieniu funkcji bazowych φ_i, wag $p(x)$, funkcji dla której poszukujemy aproksymacji $f(x)$ oraz założonego przedziału $a = 1, b = 3$ otrzymamy

$$\begin{bmatrix} \int_1^3 1 \cdot 1 \cdot 1dx & \int_1^3 1 \cdot x \cdot 1dx & \int_1^3 1 \cdot x^2 \cdot 1dx \\ \int_1^3 x \cdot 1 \cdot 1dx & \int_1^3 x \cdot x \cdot 1dx & \int_1^3 x \cdot x^2 \cdot 1dx \\ \int_1^3 x^2 \cdot 1 \cdot 1dx & \int_1^3 x^2 \cdot x \cdot 1dx & \int_1^3 x^2 \cdot x^2 \cdot 1dx \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \int_1^3 1 \cdot \sqrt{x} \cdot 1dx \\ \int_1^3 x \cdot \sqrt{x} \cdot 1dx \\ \int_1^3 x^2 \cdot \sqrt{x} \cdot 1dx \end{bmatrix}$$

Elementy macierzy otrzymamy w wyniku obliczenia całek

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & 8.(6) \\ 4 & 8.(6) & 20 \\ 8.(6) & 20 & 48.4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.7974 \\ 5.83538 \\ 13.0782 \end{bmatrix}$$

Wskazówka. Układ równań rozwiązujemy za pomocą eliminacji Gaussa. Całki wyznaczamy numerycznie za pomocą wybranej napisanej przez was metody całkowania (trapezy, Simpson, kwadratury Gaussa-Legendre'a). Podane powyżej wartości zostały policzone analitycznie, w związku z tym otrzymane przez Państwa rozwiązania mogą się nieznacznie różnić. Wielkość tej różnicy będzie oczywiście zależna od przyjętej dokładności całkowania numerycznego (wartości n).

Po rozwiązaniu układu otrzymano niewiadome współczynniki w następującej postaci:

$a_0 = 0.50289, a_1 = 0.550899, a_2 = -0.047532.$

Zatem funkcja aproksymująca przyjmuje postać:

$$\boldsymbol{W(x) = 0.50289 + 0.550899x - 0.047532x^2}$$

Za pomocą wielomianu aproksymującego możemy wyznaczyć wartości w dowolnym punkcie z założonego przedziału [1,3], np.

$$W(1) = 1.0062588$$

$$W(2) = 1.4145614$$

Założenia do programu:

- realizuje metodę aproksymacji średniokwadratowej ciągłej

- ma działać dla dowolnego stopnia wielomianu aproksymującego n (wpływ stopnia na wynik będzie podlegał analizie w sprawozdaniu) oraz dowolnej funkcji $f(x)$

- dane wejściowe to $f(x), a, b$ oraz x w którym poszukujemy rozwiązania

- funkcje bazowe φ_i oraz wagi $p(x)$ przyjmujemy takie jak podano w przykładzie powyżej

- program zwraca wartość wielomianu aproksymującego dla konkretnego, podanego przez użytkownika x (podobnie jak w interpolacji)

- wykorzystując do obliczeń całek wybraną metodę numeryczną przyjmijcie na stałe dosyć dużą liczbę przedziałów (n), aby wyniki całek były dokładne (np. n=20)