INTERPOLACJA. Metoda Newtona (różnice progresywne)

Metoda działa przy założeniu równoodległych węzłów (takich samych różnic pomiędzy argumentami x), czyli dla każdego $x_{i+1} - x_i = h$.

Wskazówka: wasze przykłady spełniają powyższy warunek

Następnie definiujemy pojęcie różnic progresywnych. W przypadku pierwszej różnicy progresywnej obliczamy różnicę wartości funkcji między następnym a poprzednim węzłem:

$$\Delta f_i = f(x_{i+1}) - f(x_i),$$

natomiast wzór ogólny można zapisać:

$$\Delta^n f_i = \Delta(\Delta^{n-1} f_i).$$

Przykładem różnicy drugiego rzędu nazywamy różnicę przy wykorzystaniu powyższego wzoru określoną:

$$\Delta^2 f_i = \Delta(\Delta f_i) = \Delta[f(x_{i+1}) - f(x_i)] = f(x_{i+2}) - f(x_{i+1}) - f(x_{i+1}) - f(x_i)$$

Wielomian interpolacyjny Newtona z różnicami progresywnymi:

$$W(x) = f(x_0) + \underbrace{\boxed{\frac{\Delta f_0}{1!\,h}}}_{a_1}(x - x_0) + \underbrace{\boxed{\frac{\Delta^2 f_0}{2!\,h^2}}}_{a_2}(x - x_0)(x - x_1) + \cdots + \underbrace{\boxed{\frac{\Delta^{n-1} f_0}{(n-1)!\,h^{n-1}}}}_{a_{n-1}}(x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_{n-2})$$

Ogólny wzór na współczynnik a można określić wzorem:

$$a_k = \frac{\Delta^k f_0}{k!\,h^k} \; (k = 1,2,\ldots,n-1)$$

PRZYKŁAD:

Dane:

x	1	2	3	4
$f(x)$	3	7	8	15

Węzły w przykładzie są równoodległe: 2-1=1, 3-2=1, 4-3=1, więc h=1.

Liczymy różnice progresywne kolejnych rzędów:

x	f(x)	Δf	$\Delta^2 f$	$\Delta^3 f$
1	3	7-3 = 4	1-4 = -3	6-(-3) = 9
2	7	8-7 = 1	7-1 = 6	
3	8	15-8 = 7		
4	15			

Obliczamy wielomian:

$$W(x) = 3 + \frac{4}{1! \cdot 1^1}(\underset{x_0}{x - 1}) + \frac{-3}{2! \cdot 1^2}(\underset{x_0}{x - 1})(\underset{x_1}{x - 2}) + \frac{9}{3! \cdot 1^3}(\underset{x_0}{x - 1})(\underset{x_1}{x - 2})(\underset{x_2}{x - 3})$$

Rozwiązanie w punkcie 2.5:

$$W(2.5) = \frac{117}{16} = 7.3125$$

Wskazówka do programu: omawiana metoda w porównaniu do metody Newtona z ilorazami różnicowymi charakteryzuje się następującymi różnicami:
1. poprzednio wyznaczaliście ilorazy różnicowe (licznik stanowiły różnice funkcji/mianownik różnice argumentów) – tutaj mamy tylko różnice funkcji
2. we wzorze ogólnym przy każdym członie sumy występowały kolejne ilorazy różnicowe – tutaj odpowiadające in różnice progresywne są dzielone przez $k!\,h^k$*, gdzie* h *to stała różnica pomiędzy argumentami x, zaś* k*=1,2,…n-1.*