Metoda iteracji prostych

Metoda iteracji prostych jest iteracyjną metodą rozwiązywania układów równań liniowych.

Poszukujemy rozwiązania układu równań:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n$$

Przekształcamy go dzieląc każde równanie przez odpowiedni współczynnik

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \qquad / \, a_{11}$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \qquad / \, a_{22}$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \qquad / \, a_{nn}$$

i otrzymujemy

$$x_1 + \frac{a_{12}}{a_{11}}x_2 + \cdots + \frac{a_{1n}}{a_{11}}x_n = \frac{b_1}{a_{11}}$$

$$x_2 + \frac{a_{21}}{a_{22}}x_1 + \cdots + \frac{a_{2n}}{a_{22}}x_n = \frac{b_2}{a_{22}}$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$x_n + \frac{a_{n1}}{a_{nn}}x_1 + \cdots + \frac{a_{nn-1}}{a_{nn}}x_{n-1} = \frac{b_n}{a_{nn}}$$

Następnie po lewej stronie znaku równości zostawiamy tylko niewiadome

$$x_1 = \frac{b_1}{a_{11}} - \frac{a_{12}}{a_{11}}x_2 - \cdots - \frac{a_{1n}}{a_{11}}x_n$$

$$x_2 = \frac{b_2}{a_{22}} - \frac{a_{21}}{a_{22}}x_1 - \cdots - \frac{a_{2n}}{a_{22}}x_n$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$x_n = \frac{b_n}{a_{nn}} - \frac{a_{n1}}{a_{nn}}x_1 - \cdots - \frac{a_{nn-1}}{a_{nn}}x_{n-1}$$

Wprowadzając dodatkowe oznaczenia otrzymamy

$$g_i = \frac{b_i}{a_{ii}}$$

$$h_{ij} = \begin{cases} -\dfrac{a_{ij}}{a_{ii}} & i \neq j \\ 0 & i = j \end{cases}$$

$$x_1 = g_1 + h_{12}x_2 + \cdots + h_{1n}x_n$$
$$x_2 = g_2 + h_{21}x_1 + \cdots + h_{2n}x_n$$
$$\dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots$$
$$x_n = g_n + h_{n1}x_1 + \cdots + h_{nn-1}x_{n-1}$$

W zapisie macierzowym zapiszemy:

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{g} + \boldsymbol{H}\boldsymbol{x}$$

- w przybliżeniu początkowym możemy przyjąć

$$x_{ij}^{(0)} = 0 \quad \text{lub od razu} \quad \boldsymbol{x}^{(0)} = \boldsymbol{g}$$

- pierwsze przybliżenie

$$\boldsymbol{x}^{(1)} = \boldsymbol{g} + \boldsymbol{H}\boldsymbol{x}^{(0)}$$

- kolejne przybliżenie

$$\boldsymbol{x}^{(2)} = \boldsymbol{g} + \boldsymbol{H}\boldsymbol{x}^{(1)}$$

- ogólnie $(k + 1)$ przybliżenie

$$\boldsymbol{x}^{(k+1)} = \boldsymbol{g} + \boldsymbol{H}\boldsymbol{x}^{(k)}, \qquad k = 0, 1, 2, \dots$$

<u>W postaci skalarnej</u>

$$x_i^{(0)} = g_i \qquad i = 1, 2, \dots, n$$

$$x_i^{(k+1)} = g_i + \sum_{j=1}^{n} h_{ij} x_j^{(k)} \qquad k = 0, 1, 2, \dots$$

Jeżeli proces przybliżeń jest zbieżny to $\boldsymbol{x}$ jest rozwiązaniem układu równań .

Iteracje kończymy, gdy spełniony jest warunek: $|\boldsymbol{x_n} - \boldsymbol{x}_{n-1}| < \varepsilon$. Można dodatkowo założyć skończoną liczbę iteracji w razie braku zbieżności.

Wskazówka. Proces iteracyjny zatrzymujemy dopiero wtedy, gdy warunek stopu jest spełniony dla każdego rozwiązania x_i z wektora $\boldsymbol{x}$.

Przykład:

Rozwiąż układ równań liniowych

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 + 2x_3 = 5 \\ x_1 - 4x_2 + x_3 = -7 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 2 \end{cases}$$

Przekształcamy układ dzieląc pierwsze równanie przez $a_{11} = 3$, drugie przez $a_{22} = -4$, zaś trzecie przez $a_{33} = 3$. Po lewej stronie znaku równości zostawiamy tylko kolejne niewiadome

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{5}{3} - \dfrac{1}{3} x_2 - \dfrac{2}{3} x_3 \\ x_2 = \dfrac{7}{4} + \dfrac{1}{4} x_1 + \dfrac{1}{4} x_3 \\ x_3 = \dfrac{2}{3} - \dfrac{1}{3} x_1 - \dfrac{2}{3} x_2 \end{cases}$$

Przyjmujemy przybliżenie początkowe

$$\begin{cases} x_1^{(0)} = 0 \\ x_2^{(0)} = 0 \\ x_3^{(0)} = 0 \end{cases}$$

Wyznaczamy pierwsze przybliżenie podstawiając przybliżenie początkowe do przekształconego układu równań

$$\begin{cases} x_1^{(1)} = \frac{5}{3} - \frac{1}{3}0 - \frac{2}{3}0 = \frac{5}{3} = 1,(6) \\ x_2^{(1)} = \frac{7}{4} + \frac{1}{4}0 + \frac{1}{4}0 = \frac{7}{4} = 1,75 \\ x_3^{(1)} = \frac{2}{3} - \frac{1}{3}0 - \frac{2}{3}0 = \frac{2}{3} = 0,(6) \end{cases}$$

Wyznaczamy drugie przybliżenie podstawiając przybliżenie pierwsze do przekształconego układu równań

$$\begin{cases} x_1^{(2)} = \frac{5}{3} - \frac{1}{3} * \frac{7}{4} - \frac{2}{3} * \frac{2}{3} = 0,63(8) \\ x_2^{(2)} = \frac{7}{4} + \frac{1}{4} * \frac{5}{3} + \frac{1}{4} * \frac{2}{3} = 2,(3) \\ x_3^{(2)} = \frac{2}{3} - \frac{1}{3} * \frac{5}{3} - \frac{2}{3} * \frac{7}{4} = -1,0(5) \end{cases}$$

Postępując analogicznie otrzymujemy kolejne przybliżenia

$$\begin{cases} x_1^{(3)} = 1,592 \\ x_2^{(3)} = 1,645 \\ x_3^{(3)} = -1,10 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1^{(4)} = 1,852 \\ x_2^{(4)} = 1,872 \\ x_3^{(4)} = -0,961 \end{cases}$$

itd.

Rozwiązanie układu równań

$$\begin{cases} x_1 = 1,84375 \\ x_2 = 1,90625 \\ x_3 = -1,21875 \end{cases}$$

Założenia do programu:

- realizuje metodę iteracji prostych,

- ma działać dla dowolnego układu równań (dowolna liczba niewiadomych)
- dane wejściowe to współczynniki przy niewiadomych oraz wektor wyrazów wolnych, a także ε
- na wyjściu program ma zwracać rozwiązanie układu równań oraz liczbę wykonanych iteracji

W sprawozdaniu z tego działu zamieszczamy tylko program metody iteracji prostych oraz zrzut ekranu z uzyskanego wyniku.