METODA ELIMINACJI GAUSSA

Metoda rozwiązywania układu równań algebraicznych:

$$\begin{cases} a_{00}x_0 + a_{01}x_1 + \cdots + a_{0n}x_n = b_0 \\ a_{10}x_0 + a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{n0}x_0 + a_{n1}x_1 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

gdzie wektor $\boldsymbol{x} = (x_0, x_1, \ldots, x_n)$ to wektor poszukiwanych rozwiązań. W postaci macierzowej powyższy układ można zapisać jako:

$$\begin{bmatrix} a_{00} & a_{01} & \cdots & a_{0n} \\ a_{10} & a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n0} & a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \cdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ \cdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

Ostatecznie w programie potrzebujemy jednej macierzy w postaci:

$$\begin{bmatrix} a_{00} & a_{01} & \cdots & a_{0n} & b_0 \\ a_{10} & a_{11} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n0} & a_{n1} & \cdots & a_{nn} & b_n \end{bmatrix}$$

Następnie kolejne i-te kroki polegają na zerowaniu kolejnych i-tych kolumn pod przekątną. W związku z tym ogólna zasada, jest następująca: od wierszy poniżej i-tego wiersza odejmujemy i-ty wiersz przemnożony przez współczynnik a_{ji}/a_{ii} są to odpowiednio współczynniki a_{ji} znajdujące się w zerowanej kolumnie dzielone przez a_{ii} czyli wartość na przekątnej w zerowanej kolumnie. Umożliwia nam to wyzerowanie elementów pod przekątną.

Przykładowo, pierwszy krok zerujący elementy w pierwszej kolumnie wygląda następująco:

$$\begin{bmatrix} a_{00} & a_{01} & \cdots & a_{0n} & b_0 \\ a_{10} - a_{00}\dfrac{a_{10}}{a_{00}} & a_{11} - a_{01}\dfrac{a_{10}}{a_{00}} & \cdots & a_{1n} - a_{0n}\dfrac{a_{10}}{a_{00}} & b_1 - b_0\dfrac{a_{10}}{a_{00}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n0} - a_{00}\dfrac{a_{n0}}{a_{00}} & a_{n1} - a_{01}\dfrac{a_{n0}}{a_{00}} & \cdots & a_{nn} - a_{0n}\dfrac{a_{n0}}{a_{00}} & b_n - b_0\dfrac{a_{n0}}{a_{00}} \end{bmatrix}$$

Jak widać po obliczeniu elementy w pierwszej kolumnie poniżej przekątnej będą równe zero. Dodatkowo należy również zauważyć, że ułamek w kolejnych kolumnach danego wiersza nie zmienia się. W związku z tym ogólne wzory na zerowanie wartości poniżej przekątnej w i-tym kroku można zapisać następująco:

$$a_{jk}^{(i+1)} = a_{jk}^{(i)} - \frac{a_{ji}^{(i)}}{a_{ii}^{(i)}} a_{ik}^{(i)}, \qquad b_k^{(i+1)} = b_k^{(i)} - b_i^{(i)} \frac{a_{ki}^{(i)}}{a_{ii}^{(i)}}$$

gdzie $i = 0,1,2, \ldots, n$, natomiast $k, j = i+1, i+2, \ldots, n$.

Działanie algorytmu można usprawnić obliczając jedynie elementy na i nad przekątną, czyli $k = i + 1, i + 2, \dots, n$, a pozostałe elementy zerując.

Ostatecznie powinniśmy uzyskać następującą postać układu:

$$\begin{bmatrix} a_{00} & a_{01} & \dots & a_{0n} \\ 0 & a'_{11} & \dots & a'_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a''_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_0 \\ b'_1 \\ \dots \\ b''_n \end{bmatrix}$$

Jak łatwo zauważyć zaczynając od końca można w łatwy sposób wyznaczyć, że:

$$x_n = \frac{b''_n}{a''_{nn}}$$

Mając zadane rozwiązanie x_n można wyznaczyć rozwiązanie x_{n-1}, aż do momentu, gdy mając rozwiązania $x_n \dots, x_2, x_1$ możemy wyznaczyć x_0. Przykładowo mamy równanie w drugim wierszu układu:

$$0x_0 + a'_{11}x_1 + a'_{12}x_2 + \dots + a'_{1n}x_n = b'_1$$

Mając wartości $x_n \dots, x_2$ możemy wyznaczyć x_1:

$$x_1 = \frac{b'_1 - a'_{12}x_2 - \dots - a'_{1n}x_n}{a_{11}}$$

Z czego łatwo wyznaczyć wzór ogólny dla kolejnych x_i

$$x_i = \frac{b'_i - a'_{i\,i+1}x_{i+1} - \dots - a'_{in}x_n}{a'_{ii}}$$

przy czym $i = n - 1, n - 2, \dots, 0$

PRZYKŁAD: Rozwiąż układ równań:

$$\begin{cases} -x_0 + 2x_1 + x_2 = -1 \\ x_0 - 3x_1 - 2x_2 = -1 \\ 3x_0 - x_1 - x_2 = 4 \end{cases}$$

Postać macierzowa:

$$\begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 1 & -3 & -2 \\ 3 & -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Krok pierwszy – zera w pierwszej kolumnie ($i = 0$):

$$\begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 1 - (-1)\frac{1}{-1} & -3 - 2\frac{1}{-1} & -2 - 1\frac{1}{-1} \\ 3 - (-1)\frac{3}{-1} & -1 - 2\frac{3}{-1} & -1 - 1\frac{3}{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 - (-1)\frac{1}{-1} \\ 4 - (-1)\frac{3}{-1} \end{bmatrix}$$

Po obliczeniu mamy:

$$\begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 5 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Krok drugi – zera w drugiej kolumnie ($i = 1$):

$$\begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 5-(-1)\frac{5}{-1} & 2-(-1)\frac{5}{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 1-(-2)\frac{5}{-1} \end{bmatrix}$$

czyli:

$$\begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ -9 \end{bmatrix}$$

Obliczamy kolejne zmienne od końca:

$$-3x_2 = -9 \quad \rightarrow \quad x_2 = 3$$

$$-x_1 - x_2 = -2 \quad \rightarrow \quad x_1 = 2 - x_2 \quad \rightarrow \quad x_1 = 2 - 3 = -1$$

$$-x_0 + 2x_1 + x_2 = -1 \quad \rightarrow \quad x_0 = 1 + 2x_1 + x_2 \quad \rightarrow \quad x_0 = 1 - 2 + 3 = 2$$

W związku z tym rozwiązanie układu to:

$$\begin{cases} x_0 = 2 \\ x_1 = -1 \\ x_2 = 3 \end{cases}$$

Program nie jest punktowany, będzie niezbędny przy kolejnych (punktowanych) zadaniach na laboratorium. Metodę należy zrealizować dla dowolnego n – rozmiaru macierzy/układu.