

Metoda najmniejszych kwadratów

Poszukujemy aproksymacji funkcji danej w n punktach

x	x_0	x_1	\dots	x_{n-1}
y	y_0	y_1	\dots	y_{n-1}

za pomocą wielomianu aproksymującego stopnia m

$$W(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_mx^m$$

Niewiadome współczynniki a_0, a_1, \dots, a_m znajdziemy rozwiązując poniższy układ równań

$$\begin{bmatrix} S_{00} & S_{01} & \dots & S_{0m} \\ S_{10} & S_{11} & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ S_{m0} & \dots & \dots & S_{mm} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \dots \\ a_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_0 \\ T_1 \\ \dots \\ T_m \end{bmatrix}$$

w którym poszczególne elementy znajdziemy za pomocą następujących wzorów

$$S_{kj} = \sum_{i=0}^{n-1} x_i^{k+j}, \quad k, j = 0, 1, \dots, m$$
$$T_k = \sum_{i=0}^{n-1} x_i^k y_i, \quad k = 0, 1, \dots, m$$

Wskazówka. Rozmiar układu równań zależy od stopnia wielomianu aproksymującego. Dla $m = 1$ mamy układ 2x2, dla $m = 2$ układ 3x3 itd.

PRZYKŁAD:

Wykorzystując metodę najmniejszych kwadratów znaleźć najlepszą aproksymację dla funkcji danej w następujących punktach:

x	1	2	3	4
y	6	19	40	69

Wskazówka. Punkty do aproksymacji do swojego sprawozdania wyznaczacie sami na bazie funkcji podanych w waszych przykładach. Jako argumenty x wszyscy przyjmujecie $\{-1, -0.5, 0, 0.5, 1\}$, zaś wartości y wyznaczacie ze swojej funkcji. Np. dla funkcji $\sqrt{x+2}$ byłoby to $\{1, 1.2247, 1.4142, 1.5811, 1.7320\}$.

Rozwiązanie:

Do obliczeń przyjmujemy $n = 4, m = 2$.

Wskazówka. Wasz program ma działać dla dowolnego n i m .

Wyniki dla czytelności przedstawimy w tabelce:

$l.p.$	x^0	x^1	x^2	x^3	x^4	$x^0 \cdot y$	$x \cdot y$	$x^2 \cdot y$
1	1	1	1	1	1	6	6	6
2	1	2	4	8	16	19	38	76
3	1	3	9	27	81	40	120	360
4	1	4	16	64	256	69	276	1104
Σ	4	10	30	100	354	134	440	1546
	S_{00}	$S_{01} = S_{10}$	$S_{02} = S_{20} = S_{11}$	$S_{12} = S_{21}$	S_{22}	T_0	T_1	T_2

Wskazówka. Wartości zaznaczone kolorem niebieskim i czerwonym wyznaczone są na bazie wzorów zamieszczonych na początku.

Stąd układ równań:

$$\begin{bmatrix} 4 & 10 & 30 \\ 10 & 30 & 100 \\ 30 & 100 & 354 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 134 \\ 440 \\ 1546 \end{bmatrix}$$

Po rozwiązaniu układu otrzymujemy:

$$a_0 = 1, a_1 = 1, a_2 = 4$$

$$W(x) = 1 + x + 4x^2$$

Wskazówka. Układ rozwiązujecie za pomocą eliminacji Gaussa.

Korzystając z wielomianu aproksymującego $W(x)$ możemy wyznaczyć rozwiązania dla dowolnego argumentu x , z zakresu aproksymowanej funkcji.

$$W(2) = 19$$

$$W(2.5) = 28.5$$

Założenia do programu:

- realizuje metodę najmniejszych kwadratów
- ma działać dla dowolnego stopnia wielomianu aproksymującego m (wpływ stopnia na wynik będzie podlegał analizie w sprawozdaniu) oraz dowolnej liczby punktów n opisujących funkcję
- dane wejściowe to kolejne x oraz y wyznaczone na bazie funkcji z własnego przykładu oraz x w którym poszukujemy rozwiązania
- program zwraca wartość wielomianu aproksymującego dla konkretnego, podanego przez użytkownika x (podobnie jak w interpolacji)