

Całkowanie numeryczne. Kwadratury Gaussa–Legendre’a

Kwadraturę dla przedziału $[-1, 1]$ nazywamy kwadraturą Gaussa–Legendre’a

$$\int_{-1}^1 f(x) dx \cong \sum_{i=1}^n \omega_i f(t_i)$$

węzły

wagi

gdzie t_i to pierwiastki i -tego wielomianu Legendre’a.

Rozpatrując całkę w dowolnym przedziale $[a, b]$ należy posługiwać się następującym wzorem:

$$\int_a^b f(x) dx \cong \frac{b-a}{2} \sum_{i=1}^n \omega_i f\left(\frac{b-a}{2} t_i + \frac{b+a}{2}\right)$$

Węzły t_i i wagi ω_i są to odgórnie zdefiniowane wartości liczbowe dla różnych stopni n dostępne są m.in. pod następującymi adresami:

1. <https://pomax.github.io/bezierinfo/legendre-gauss.html>

(gdzie wagi ω oznaczone są symbolem w , zaś węzły t symbolem x)

2. http://www.efunda.com/math/num_integration/findgausslegendre.cfm

(gdzie wagi ω oznaczone są symbolem $w(\xi)$, zaś węzły t symbolem ξ)

Przykład

Całka do obliczenia

$$\int_2^3 \frac{x-1}{x^2+x} \cong ?$$

Kwadratura Gaussa-Legendre’a z $n=2$.

$$\begin{aligned} \int_2^3 \frac{x-1}{x^2+x} &\cong \frac{3-2}{2} \left(1 * f\left(\frac{3-2}{2} * -0.57735 + \frac{3+2}{2}\right) + 1 * f\left(\frac{3-2}{2} * 0.57735 + \frac{3+2}{2}\right) \right) \\ &= \frac{1}{2} (f(2.211325) + f(2.788675)) = \frac{1}{2} (0.17057832 + 0.16929579) = 0.16993706 \end{aligned}$$

Wytyczne do programu

- funkcja podcałkowa wprowadzona jest w kodzie programu
- definiujemy a i b (lub podaje je użytkownik)
- użytkownik podaje n – do programu należy wprowadzić wartości wag i węzłów, one zaś zależą od podanego n , stąd ustalamy, że Państwo ograniczacie się tylko do 6 różnych $n = 2, 4, 6, 8, 10, 16$
- program zwraca przybliżoną wartość całki