Szymon Nowak-Trzos 411246
Informatyka rok II, gr.2 środa nieparzysta 13:00-14:30

Algorytmy Geometryczne – Ćwiczenie 1 Sprawozdanie

1. Wstęp

1.1. Cel Ćwiczenia

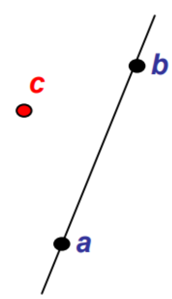
Celem ćwiczenia była implementacja algorytmu sprawdzającego położenie punktów w stosunku do prostej przeprowadzonej przez dwa punkty oraz przeprowadzenie analizy wyników obliczeń na kilku zbiorach danych.

1.2. Teoria

Aby określić, czy punkt **c** leży po prawej, po lewej stronie prostej **ab** czy na niej należało określić wyznacznik którejkolwiek z poniższych macierzy:

1) $$\det(a,b,c) = \begin{vmatrix} a_x - c_x & a_y - c_y \\ b_x - c_x & b_y - c_y \end{vmatrix}$$

2) $$\det(a,b,c) = \begin{vmatrix} a_x & a_y & 1 \\ b_x & b_y & 1 \\ c_x & c_y & 1 \end{vmatrix}$$



Wyznacznik równy 0 wskazuje, że punkt **c** jest współliniowy z **a** i **b**. W przeciwnym wypadku znak wyznacznika rozróżnia punkty po lewej i po prawej stronie **ab.**

1.3. Użyte Narzędzia

Ćwiczenie zostało wykonane dzięki zmodyfikowanemu narzędziu graficznemu załączonego na stronie UPEL. Do niezbędnych obliczeń został wykorzystany język programowania Python oraz biblioteka numpy. Ponadto wykresy zostały wygenerowano przy pomocy biblioteki matplotlib, a czas został wyznaczony poprzez bibliotekę time. Obliczenia, których wyniki zostały uwzględnione w tabelach, oraz wszystkie wykresy zostały wygenerowane na procesorze Intel Core i5-1135G7 2.40GHz

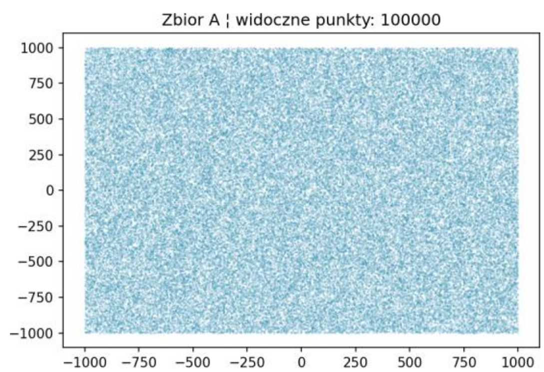
2. Szczegóły wykonywania ćwiczenia

2.1. Zbiory Danych

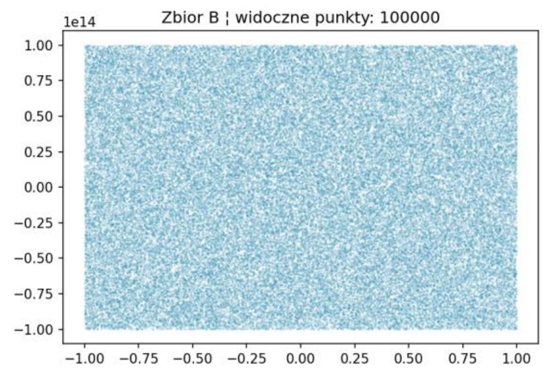
Wygenerowane zostały cztery zbiory danych:

- **A.** 10^5 losowych punktów o współrzędnych z przedziału [-1000, 1000]
- **B.** 10^5 losowych punktów o współrzędnych z przedziału [-10^14, 10^14],
- **C.** 1000 losowych punktów leżących na okręgu o środku (0,0) i promieniu R=100,
- **D.** 1000 losowych punktów o współrzędnych z przedziału [-1000, 1000] leżących na prostej wyznaczonej przez wektor ([-1, 0], [1, 0.1]).

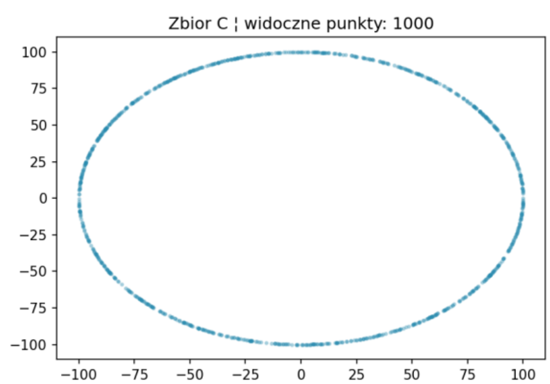
Do wygenerowania zbiorów A i B wykorzystane zostały funkcje random.uniform z biblioteki random języka Python. Zbiory C i D uzyskane zostały przez parametryzację odpowiednio okręgu o zadanym środku i promieniu oraz linii przechodzącej przez dwa punkty.



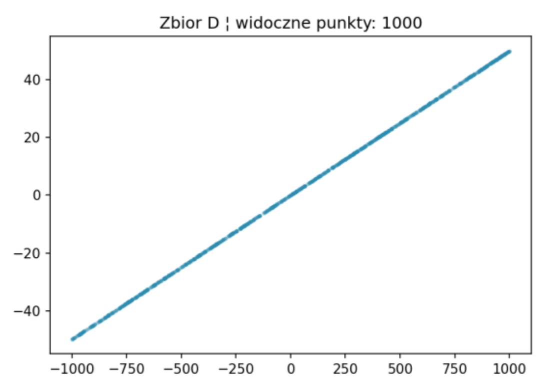
Rysunek 1.



Rysunek 2.



Rysunek 3.



Rysunek 4.

2.2. Wyznaczniki

Do określenia położenia punktów w każdym zbiorze danych zostały wykorzystane cztery różne algorytmy liczenia wyznaczników:

- „wlasny_3x3” – własna implementacja obliczania wyznacznika macierzy 3x3,
- „wlasny_2x2” – własna implementacja obliczania wyznacznika macierzy 2x2,
- „np_3x3” – funkcja numpy.linalg.det() do obliczania wyznacznika macierzy 3x3,
- „np_2x2” – funkcja numpy.linalg.det() obliczania wyznacznika macierzy 2x2.

2.3. Tolerancja – **ε**

Ze względu na niedoskonałość precyzji obliczeń w komputerze zastosowano kilka różnych granic tolerancji **ε**:

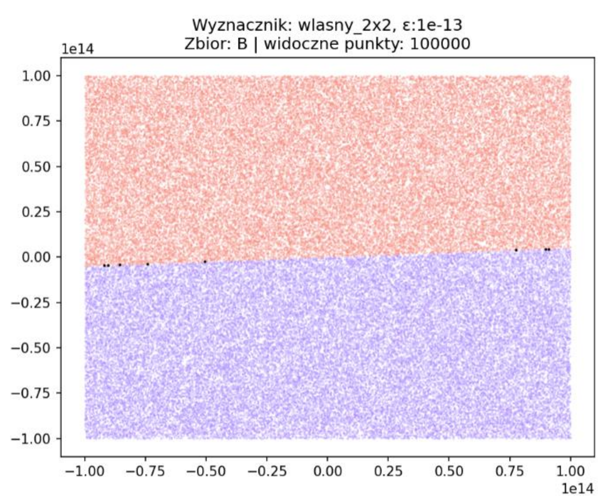
- **ε1** = 10^(-13)
- **ε2** = 10^(-14)
- **ε3** = 10^(-15)
- **ε4** = 10^(-16)

2.4. Wykresy

Na wykresach kolorem czerwonym (#f9897b) zostały przedstawione punkty po prawej stronie prostej **ab**, kolorem fioletowym (#ad8cff) punkty po lewej stronie zaś kolorem czarnym punkty zakwalifikowane jako współliniowe do prostej.

Wszystkie wykresy mają podany tytuł w formie:

„Wyznacznik: _____, ε: _____
Zbior: __ | widoczne punkty: _____”



Rysunek 5. Przykładowy wykres podziału punktów w zbiorze B przy użyciu wyznacznika „wlasny_2x2” o tolerancji 10^-13

3. Analiza Danych

3.1. Zbiory A i C

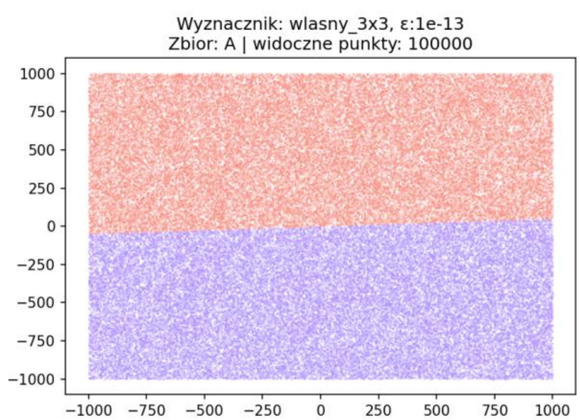
W zbiorach A i C nie wykryto żadnych współliniowych punktów, co pokrywa się z przewidywanym wynikiem, gdyż prawdopodobieństwo natrafienia na taki punkt w tych zbiorach jest znikome. Nie ma również zauważalnych różnic pomiędzy klasyfikacjami przeprowadzanymi przez różne wyznaczniki z różnymi tolerancjami, zatem w dalszej części pracy skupię się na zbiorach B i D.

A					
Wyznacznik / ε		**1,00E-13**	**1,00E-14**	**1,00E-15**	**1,00E-16**
wlasny_3x3	P	50170	50170	50170	50170
	W	0	0	0	0
	L	49830	49830	49830	49830
wlasny_2x2	P	50170	50170	50170	50170
	W	0	0	0	0
	L	49830	49830	49830	49830
np_3x3	P	50170	50170	50170	50170
	W	0	0	0	0
	L	49830	49830	49830	49830
np_2x2	P	50170	50170	50170	50170
	W	0	0	0	0
	L	49830	49830	49830	49830

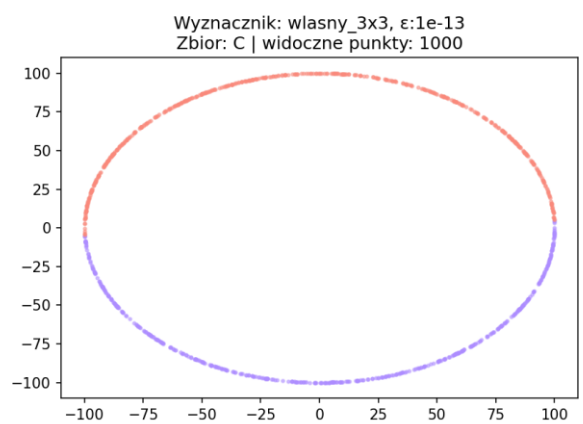
Rysunek 6. Klasyfikacja punktów w zbiorze A

C					
Wyznacznik / ε		**1,00E-13**	**1,00E-14**	**1,00E-15**	**1,00E-16**
wlasny_3x3	P	479	479	479	479
	W	0	0	0	0
	L	521	521	521	521
wlasny_2x2	P	479	479	479	479
	W	0	0	0	0
	L	521	521	521	521
np_3x3	P	479	479	479	479
	W	0	0	0	0
	L	521	521	521	521
np_2x2	P	479	479	479	479
	W	0	0	0	0
	L	521	521	521	521

Rysunek 7. Klasyfikacja punktów w zbiorze C



Rysunek 8. Przykładowy wykres podziału punktów w zbiorze A



Rysunek 9. Przykładowy wykres podziału punktów w zbiorze C

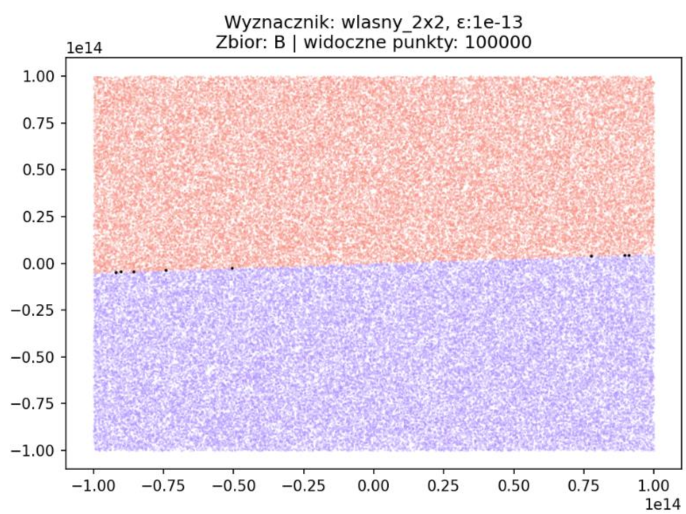
3.2. Zbiory B i D

Już w zbiorze B możemy zauważyć różnice w klasyfikacji punktów pomiędzy wyznacznikami.

B					
Wyznacznik / ε		1,00E-13	1,00E-14	1,00E-15	1,00E-16
wlasny_3x3	P	49994	49994	49994	49994
	W	0	0	0	0
	L	50006	50006	50006	50006
wlasny_2x2	P	49990	49990	49990	49990
	W	8	8	8	8
	L	50002	50002	50002	50002
np_3x3	P	49994	49994	49994	49994
	W	0	0	0	0
	L	50006	50006	50006	50006
np_2x2	P	49994	49994	49994	49994
	W	0	0	0	0
	L	50006	50006	50006	50006

Rysunek 6. Klasyfikacja punktów w zbiorze B

Pomimo dużych odstępów pomiędzy punktami (średnia minimalna odległość dwóch punktów od siebie w zbiorze B to 2.9*10^6, co wyjaśnia również brak wpływu tolerancji na wynik klasyfikacji) wyznaczniki 2x2 kwalifikują niektóre punkty jako współliniowe do prostej **ab**. Jest to prawdopodobnie spowodowane niską precyzją operacji odejmowania dużych liczb od małych i odwrotnie.



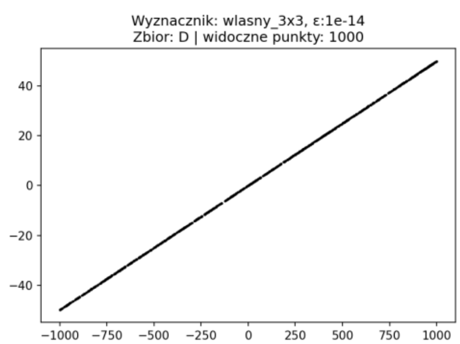
Rysunek 11. Wykres podziału punktów

Najciekawsze wnioski można wyciągnąć z analizy zbioru D, w którym wszystkie punkty powinny być zaklasyfikowane jako współliniowe do prostej **ab.**

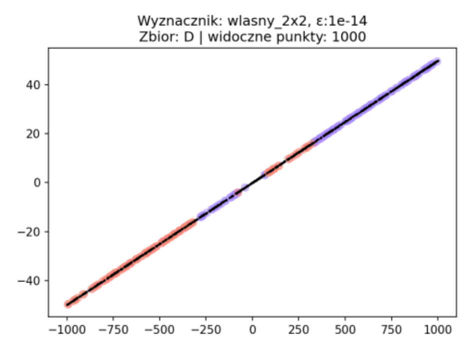
D					
Wyznacznik / ε		**1,00E-13**	**1,00E-14**	**1,00E-15**	**1,00E-16**
wlasny_3x3	P	0	0	361	394
	W	1000	1000	474	428
	L	0	0	165	178
wlasny_2x2	P	136	146	149	151
	W	727	711	705	701
	L	137	143	146	148
np_3x3	P	0	97	383	501
	W	1000	883	243	38
	L	0	20	374	461
np_2x2	P	362	456	491	499
	W	284	89	28	11
	L	354	455	481	490

Rysunek 12. Klasyfikacja punktów w zbiorze D

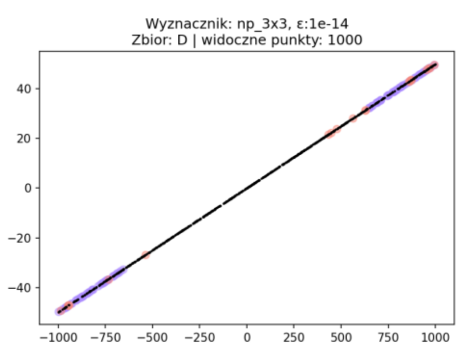
Widzimy jednak duże odchyły od prawidłowej klasyfikacji punktów. Wyznaczniki 3x3 najdłużej utrzymują 100% dokładność, aczkolwiek już przy **ε3** = 10^(-15) prawdopodobieństwo dobrej kategoryzacji jest bardzo małe. Wyznacznik „wlasny_2x2”, choć nie ma perfekcyjnej dokładności, zachowuje precyzję przez wszystkie **ε**, dobrze kwalifikując tym samym 70% punktów. Wyznaczniki biblioteczne wraz ze zmniejszaniem **ε** tracą zupełnie możliwość wykrycia współliniowych punktów.



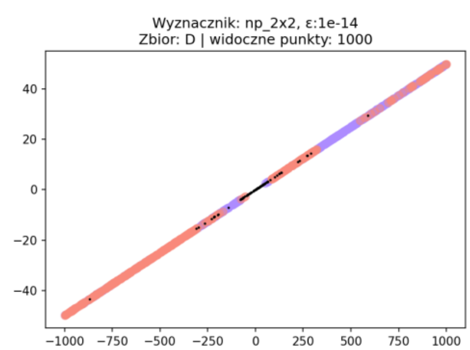
Rysunek 13.
1000 punktów współliniowych



Rysunek 14.
711 punktów współliniowych

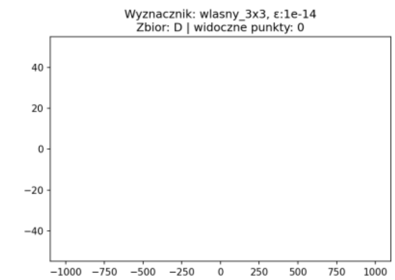


Rysunek 15.
883 punktów współliniowych

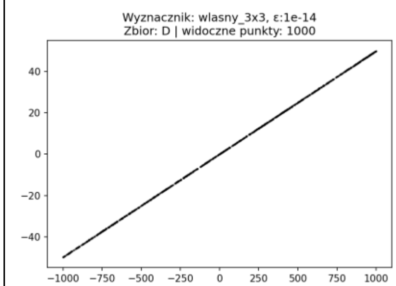


Rysunek 16.
89 punktów współliniowych

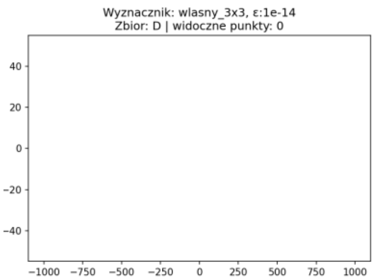
Lewa Strona	Współliniowe	Prawa Strona



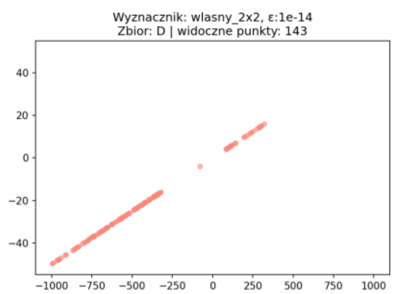
Rysunek 16.



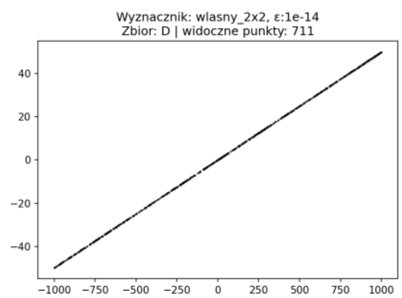
Rysunek 17.



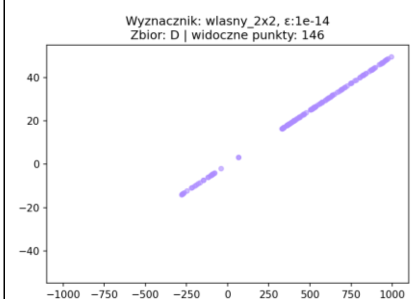
Rysunek 18.



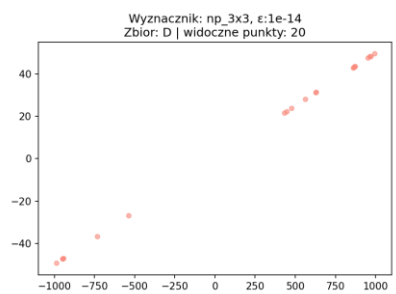
Rysunek 19.



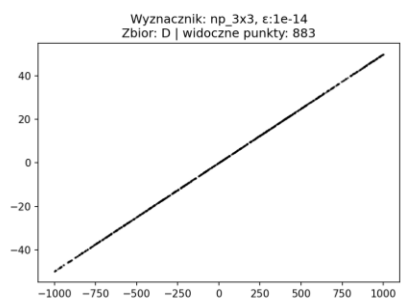
Rysunek 20.



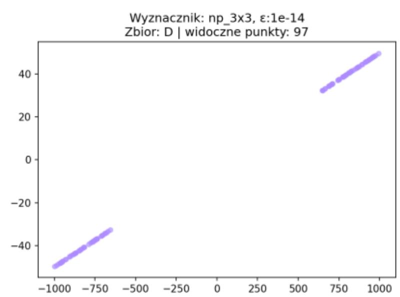
Rysunek 21.



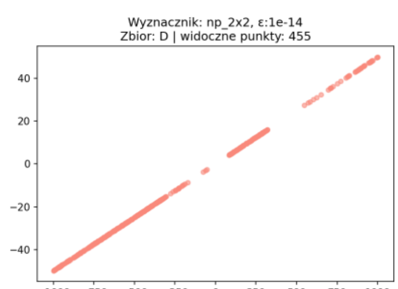
Rysunek 22.



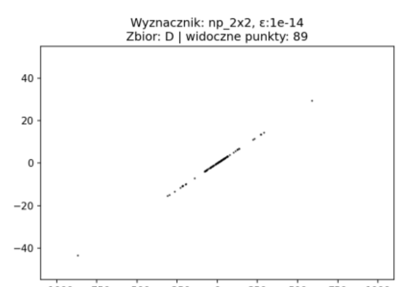
Rysunek 23.



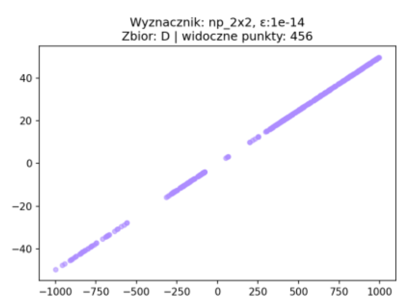
Rysunek 24.



Rysunek 25.



Rysunek 26.



Rysunek 27.

4. Pomiary czasowe funkcji

Czas poszczególnych funkcji został zmierzony 10 razy na zbiorze danych w postaci 10^6 punktów z przedziału [-1000, 1000], a następnie uśredniony aby dać wartości zamieszczone w tabeli poniżej.

	wlasny_3x3	wlasny_2x2	np_3x3	np_2x2
T [s]	0,572	0,466	7,104	6,428

Rysunek 16.
Tabela zmierzonych czasów

Możemy zauważyć, że samodzielne implementacje wyznaczników są znacząco szybsze od tych bibliotecznych. Może to wynikać ogólniejszej implementacji funkcji numpy.linalg.det(), która przyjmuje jako wejście macierze **n x n**.

5. Wnioski

Komputerowe sprawdzanie współliniowości punktów, choć nie trudne, nie jest jednak w pełni oczywiste. Nawet podczas tak prostego problemu małe różnice implementacyjne mogą prowadzić do ogromnych różnic w wynikach analizy. Wprawdzie na ¾ zbiorów danych nie było znaczącej różnicy, to na sytuacji granicznej wszystkie zaimplementowane algorytmy miały swoje wady. Samodzielnie zaimplementowany algorytm do obliczania wyznacznika 3x3 bardzo dokładnie wyznaczył współliniowość punktów, aczkolwiek większą dokładność przy mniejszych tolerancjach zapewniał algorytm „wlasny_2x2". Ponadto funkcje własne potrafią być nawet 15 razy szybsze od ich odpowiedników bibliotecznych.