Fachbereich Informatik
Dr. Marco Hülsmann
Sigrid Weil

Uebung 6

Aufgabe 6.1

a) Zeigen Sie mithilfe einer Gruppentafel, daß die Rechenstruktur modulo 7 $(\mathbb{Z}_7^*, \cdot) = (\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}, \cdot)$ eine abelsche Gruppe bildet!

b) Bilden Sie alle zyklischen Untergruppen von $(\mathbb{Z}_7^*, \cdot)$.

c) Ist die Gruppe zyklisch? Wenn ja, geben Sie alle Generatoren an!

Aufgabe 6.2

Beweisen Sie, daß in einer Gruppe $\mathcal{G}$ gilt:

$$\forall_{a \in \mathcal{G}}\ ord_{\mathcal{G}}(a) = 2 \ \Rightarrow\ \mathcal{G} \text{ abelsch}$$

Aufgabe 6.3

Die quadratischen Matrizen $(n \times n)$-Matrizen (über $\mathbb{R}$) bilden bekanntlich einen Ring.

Zeigen Sie: Dieser Ring ist *nicht* nullteilerfrei, d.h., es gibt Matrizen $A \neq 0$ und $B \neq 0$ mit $AB = 0$.

Aufgabe 6.4

a) Es seien $A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 3 & 1 \\ -5 & 6 & -7 & 8 \\ 9 & 2 & 6 & 0 \\ 8 & -7 & 1 & -3 \end{pmatrix}$ und $B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 & -1 \\ 5 & 7 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 4 \\ -1 & 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$.

Bilden Sie die Produkte $A \cdot B$ und $B \cdot A$.

b) Warum ist das Produkt $A \cdot C$ mit einer Matrix $C \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ nicht bildbar?

Aufgabe 6.5

Zeigen Sie mithilfe der vollständigen Induktion, dass für die Matrix $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ und für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt: $\quad M^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ n & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Bemerkung:
M^n steht (wie immer) für $\underbrace{M \cdot M \cdot \ldots \cdot M}_{n-\text{mal}}$