# Uebung 8



**Aufgabe 8.1**
Gegeben sind die Vektoren $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$.

a) Sind die Vektoren linear unabhängig?

b) Lässt sich der Vektor $\begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix}$ als Linearkombination der drei Vektoren darstellen?
Falls ja: Ist die Linearkombination eindeutig? Interpretieren Sie das Ergebnis geometrisch!

**Aufgabe 8.2**
Zeigen Sie:

a) Ist $A = \{a_1, \dots, a_n\}$ eine (endliche) Menge linear unabhängiger Vektoren eines Vektorraums $V$, so ist jede Teilmenge von $A$ ebenfalls linear unabhängig.

b) Ist $A = \{a_1, \dots, a_n\}$ ein Erzeugendensystem eines Vektorraums $V$, so ist jede Teilmenge von $V$, die $A$ enthält, ebenfalls ein Erzeugendensystem von $V$.

**Aufgabe 8.3**
a) Zeigen Sie, dass $B = \{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 6 \\ -1 \end{pmatrix} \} \subseteq \mathbb{R}^4$ linear abhängig ist.

b) Geben Sie eine Basis von $Span(B)$ an.
(Anders ausgedrückt: Reduzieren Sie $B$ auf eine linear unabhängige Teilmenge $B'$ von $B$.)

c) Ergänzen Sie die Menge $B'$ durch Vektoren des $\mathbb{R}^4$, sodass eine Basis des $\mathbb{R}^4$ entsteht.

**Aufgabe 8.4**
Wie wir bereits wissen, ist die Menge $\mathbb{R}^{(n)}[x]$ aller Polynome vom Grad höchstens $n$ ein $\mathbb{R}$-Vektorraum. Eine Basis von $\mathbb{R}^{(n)}[x]$ erhält man zB durch die Menge aller „Monome“:

$$\begin{aligned} p_0(x) &= 1 \\ p_1(x) &= x \\ p_2(x) &= x^2 \\ &\vdots \\ p_n(x) &= x^n \end{aligned}$$

Es sei nun $W$ die Menge aller Polynome, die $x = 0$ und $x = 1$ als Nullstelle haben, also

$$W := \{p(x) \in \mathbb{R}^{(n)}[x] \mid p(0) = p(1) = 0\} \subseteq \mathbb{R}^{(n)}[x]$$

Zeigen Sie, dass $W$ ein Unterraum von $\mathbb{R}^{(n)}[x]$ ist, und geben Sie eine Basis von $W$ an.