Klausur WiSe 2023/24
18.3.2024
Dipl. Inf. Sigrid Weil
Dr. Marco Hülsmann

Diskrete Mathematik und Lineare Algebra

Bevor Sie mit der Bearbeitung der Klausur beginnen, lesen Sie bitte folgende Hinweise:

- Jede Klausur umfasst
  - das Deckblatt
  - diese Hinweisseite
  - 15 Seiten mit 8 Aufgaben
- Unterschreiben Sie bitte auf dem Deckblatt.
- Notieren Sie **auf jedem Blatt** oben Ihre **Matrikelnummer**.
- Insgesamt sind maximal 90 Punkte erreichbar.
- Sie haben die Klausur bestanden, wenn Sie mindestens **35 Punkte** erreicht haben.

Aufgabe	1	2	3	4
Punkte	12	12	12	12
erreicht				

Aufgabe	5	6	7	8	$\sum$
Punkte	12	12	6	12	90
erreicht					

Aufgabe 1 (4 + 4 + 4 = 12 P)

a) Bestimmen Sie mit dem Euklidischen Algorithus: $ggT(1280, 1155)$.

b) Bestimmen Sie zwei Zahlen $s, t \in \mathbb{Z}$, sodass $ggT(1280, 1155) = s \cdot 1280 + t \cdot 1155$.

c) Beweisen Sie:

$$\forall n, m \in \mathbb{N}: \quad (n^2 + m^3) \equiv_3 0 \;\Rightarrow\; n \equiv_3 0 \vee m \equiv_3 0$$

Hinweise:

- Führen Sie den Beweis indirekt durch Kontraposition. (Dies ist *keine* Induktionsaufgabe.)
- Überlegen Sie, welche Werte x^2 (modulo 3) annehmen kann.

Aufgabe 2 (3 + 4 + 5 = 12 P)

a) Es sei $R \subseteq M \times M$ eine Relation auf M.
Geben Sie die Definitionen für folgende Begriffe an:

- symmetrisch
- antisymmetrisch
- transitiv

b) Konstruieren Sie Beispiele für (nicht-leere) Relationen R_1, R_2 auf $M = \{1, 2, 3\}$ mit

- R_1 ist sowohl symmetrisch als auch antisymmetrisch
- R_2 ist weder symmetrisch noch antisymmetrisch

Begründen Sie kurz, warum Ihre Beispiele die geforderten Eigenschaften haben. (Sie können zB anhand der tabellarischen Darstellung mit Eigenschaften der Tabelle argumentieren.)

c) Es sei die Relation $S \subseteq \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}^2$ durch folgende Tabelle gegeben:

	1	2	3	4	5	6
1	x				x	
2		x	x			x
3		x	x			x
4				x		
5	x				x	
6		x	x			x

Zeigen Sie, dass S eine Äquivalenzrelation ist.

Tipp:
Denken Sie an den Zusammenhang zwischen Äquivalenzrelationen und Partitionierungen einer Menge.

Aufgabe 3 (6 + 6 = 12 P)
Es sei $x \in \mathbb{R}$ und $A(x) \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ definiert durch

$$A(x) = \begin{pmatrix} 1 & x & \frac{x^2-x}{2} \\ 0 & 1 & x \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

a) Zeigen Sie, dass für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt: $A(x+y) = A(x) \cdot A(y)$

b) Zeigen Sie durch vollständige Induktion, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$A(x)^n = A(nx)$$

Geben Sie explizit die Ind. Annahme und die Ind. Behauptung an und markieren Sie im Beweis die Stelle, an der die Ind. Annahme benutzt wird.

Hinweis:
Sie dürfen die Aussage aus a) benutzen, auch wenn Sie sie nicht beweisen konnten.

Aufgabe 4 (4 + 4 + 4 = 12 P)
Wahr oder falsch? Geben Sie eine kurze Begründung an.
(Um die Falschheit einer Aussage zu begründen, genügt ein Gegenbeispiel.)

Sei K ein Körper, V ein K-Vektorraum und $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\} \subseteq V$ eine Basis von V.

a) Für bel. $w \in V \setminus \{\vec{0}\}$ ist
$\{v_1 + w,\ v_2 + w, \ldots, v_n + w\}$ ebenfalls eine Basis von V. wahr □ falsch □
Begründung:

b) Für bel. $\lambda \in K \setminus \{0\}$ ist
$\{\lambda v_1,\ \lambda v_2, \ldots, \lambda v_n\}$ ebenfalls eine Basis von V. wahr □ falsch □
Begründung:

c) Für $U := Span\{v_1\} \cap Span\{v_2, \dots, v_n\}$ ist $dim(U) = 0$. wahr □ falsch □
Begründung:

Aufgabe 5 (2 + 3 + 2 + 3 + 2 = 12 P)
Es sei die Abbildung $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ gegeben durch

$$f(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} \frac{1}{3}x_3 + 2x_4 \\ x_1 + x_2 - \frac{1}{3}x_3 + 3x_4 \\ -x_1 - x_2 + x_3 + x_4 \end{pmatrix}$$

a) Zeigen Sie, dass f eine *lineare Abbildung* ist.

b) Bestimmen Sie das Urbild $f^{-1}(\{v\})$ für $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

(Achtung: mit f^{-1} ist hier *nicht* die *Umkehrabbildung* gemeint, sondern die *Urbildmenge*!)

c) Bestimmen Sie die Dimension und eine Basis von $im(f)$.

d) Bestimmen Sie die Dimension und eine Basis von $ker(f)$.

e) Es sei z ein beliebiger Vektor aus dem $\mathbb{R}^4$ und $f(z) \in im(f)$.
Konstruieren Sie (mindestens) einen weiteren Vektor $x \neq z$, der das gleiche Bild unter f hat wie z, für den also gilt: $f(x) = f(z)$.
(Mit Begründung, warum der von Ihnen konstruierte Vektor die geforderte Eigenschaft hat.)

Aufgabe 6 (4 + 4 + 4 = 12 P)

a) Zeigen Sie, dass die Matrix

$$M = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 4 \\ 2 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

die Eigenwerte $\lambda_1 = -1,\ \lambda_2 = 0,\ \lambda_3 = 7$ hat.

b) Berechnen Sie eine Basis des Eigenraums zu $\lambda_1 = -1$.

c) Begründen Sie:
Für jeden Eigenwert von M ist die Dimension des Eigenraums $= 1$.

Aufgabe 7 (2 + 2 + 2 = 6 P)
Die *Spur* einer (quadratischen) $(n \times n)$-Matrix A ist definiert als die Summe der Diagonalelemente von A:

$$spur(A) := \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$$

Es lässt sich leicht zeigen (das brauchen Sie nicht zu tun): $spur(AB) = spur(BA)$ $(*)$

a) Geben Sie die Definition an:
- Zwei Matrizen A und B sind ähnlich, wenn . . .
- A ist diagonalisierbar, wenn . . .

b) Zeigen Sie:
Wenn A und B ähnlich sind, dann haben A und B die gleiche Spur.

c) Zeigen Sie:
Falls A diagonalisierbar ist, dann ist die Spur von A die Summe der Eigenwerte von A.

Aufgabe 8 (3 + 3 + 3 + 3 = 12 P)
Es sei F_1 diejenige (affine) Ebene im $\mathbb{R}^3$, die durch die Punkte $A = (1, 0, 2)$, $B = (3, 5, 3)$ und $C = (2, -1, 3)$ gegeben ist.

a) Stellen Sie die Ebenengleichung von F_1 in Parameterform auf.

b) Stellen Sie die Ebenengleichung von F_1 in Hessescher Normalform auf.

c) Es sei nun F_2 diejenige Ebene, die als 2-dimensionaler Unterraum des $\mathbb{R}^3$ durch die Vektoren $u = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $v = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ aufgespannt wird.
Geben Sie die Householder-Matrix H an, die eine Spiegelung an der Ebene F_2 beschreibt.

d) Beschreiben Sie, wie man die Koordinaten des Punktes P' berechnet, der entsteht, wenn man den Punkt $P = (x_p, y_p, z_p)$ erst an der Ebene F_2 spiegelt und anschließend um die z-Achse um 180° dreht.