



Hochschule
Bonn-Rhein-Sieg
University of Applied Sciences

Fachbereich Informatik

Dr. Marco Hülsmann

Skript: Tamara Zimmermann

Lineare Algebra

Teil II der Veranstaltung Einführung in Diskrete Mathematik und
Lineare Algebra

Skript zur Vorlesung, Bachelor 1. Semester, Wintersemester 2021/22

Inhaltsverzeichnis

3	Vektoren	5
3.1	Vektorräume und Unterräume	5
3.2	Lineare (Un-)abhängigkeit	10
3.3	Erzeugendensystem und Basis	17
3.4	Lineare Abbildungen	21
4	Matrizen und lineare Gleichungssysteme	25
4.1	Matrizen	25
4.2	Lineare Gleichungssysteme	28
4.3	Lösung von linearen Gleichungssystemen: Gaußsches Eliminationsverfahren . .	29
4.4	Determinanten	34
4.5	Wichtige algebraische Strukturen in der Linearen Algebra	37
5	Eigenwerte und Eigenvektoren	39
5.1	Polynome und der Fundamentalsatz der Algebra	39
5.2	Das charakteristische Polynom	42
5.3	Definitheit von Matrizen	47
6	Euklidische Räume	51
6.1	Skalarprodukt und Orthogonalräume	51
6.2	Direkte Summen	59
6.3	Ebenen, Drehungen und Spiegelungen	60

3 Vektoren

3.1 Vektorräume und Unterräume

Vektor: Ursprünglich geometrische Bedeutung, fester Punkt p in einer (Hyper-)ebene als Anfangspunkt (z.B. Koordinaten-Ursprung), betrachtet von p ausgehende Strecke zu anderem Punkt x (Richtung):

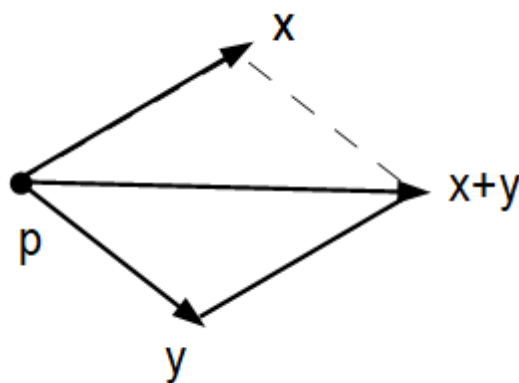


Abbildung 3.1: Addition zweier Vektoren x und y

x, y : Ortsvektoren Bez:

$$x = \overrightarrow{px} = \vec{x} = x$$

Die Menge der Ortsvektoren $(O, +)$ bildet abelsche Gruppe (Abgeschlossenheit/Kommutativität anschaulich klar).

Veranschaulichung des Assoziativgesetzes (siehe Abbildung 3.2):

Es gilt:

$$x + y = \overrightarrow{AD}, y + z = \overrightarrow{AF}$$

$$\Rightarrow (x + y) + z = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DE} = \overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AF} + \overrightarrow{FE} = (y + z) + x = x + (y + z)$$

Raumdiagonale \overrightarrow{AE} assoziiert die Ortsvektoren x, y und z

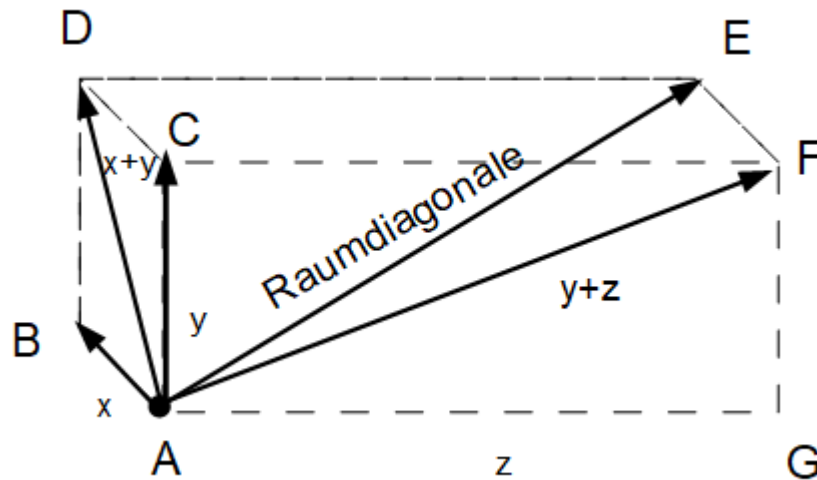


Abbildung 3.2: Raumdiagonale (Veranschaulichung des Assoziativgesetzes der Vektoraddition)

Einselement: p (im \mathbb{R}^n : Nullvektor)

Additives Inverses zu x : $-x$, denn $x + (-x) = p$ Vektor mit entgegengesetzter Richtung:

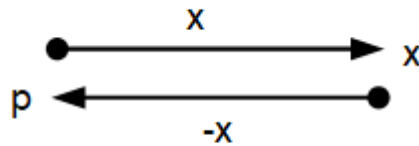


Abbildung 3.3: Additives Inverses eines Vektors

Gerade im \mathbb{R}^n ($n = 2$: siehe Abbildung 3.4):

$$x = p_0 + r \cdot (p_1 - p_0), \quad r \in \mathbb{R}$$

Ebene in \mathbb{R}^n ($n = 2$: siehe Abbildung 3.5):

$$x = p_0 + s \cdot (p_1 - p_0) + t \cdot (p_2 - p_0), \quad s, t \in \mathbb{R}$$

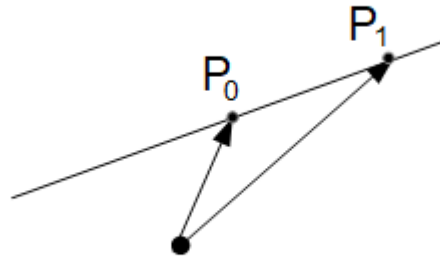


Abbildung 3.4: Gerade im \mathbb{R}^2

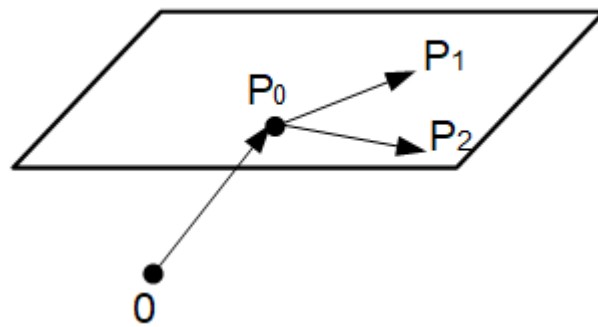


Abbildung 3.5: Ebene im \mathbb{R}^3

Betrachte zunächst Vektoren allgemein über beliebigen Körper:

Definition 3.1. (Vektorraum) Sei K ein Körper. Ein K -Vektorraum ist eine Menge V mit einer inneren Verknüpfung (Addition)

$$V \times V \rightarrow V, (a, b) \mapsto a + b$$

und einer äußeren Verknüpfung (skalare Multiplikation)

$$K \times V \rightarrow V, (\alpha, a) \mapsto \alpha \cdot a,$$

wobei

(i) $(V, +)$ abelsche Gruppe

(ii) $\forall_{\alpha, \beta \in K, a, b \in V} (\alpha + \beta) \cdot a = \alpha \cdot a + \beta \cdot a \wedge \alpha \cdot (a + b) = \alpha \cdot a + \alpha \cdot b$, d.h., sowohl Addition als auch skalare Multiplikation sind distributiv.

(iii) $\forall_{\alpha, \beta \in K, a \in V} (\alpha \cdot \beta) \cdot a = \alpha \cdot (\beta \cdot a)$ (Assoziativität der skalaren Multiplikation)

(iv) $\forall_{a \in V} 1 \cdot a = a$, wobei $1 \in K$ das multiplikative Einselement von K ist.

Rechenregeln:

Seien 0_V der Nullvektor in V (Einselement bzgl. der Vektoraddition) und 0_K das additive Einselement im Körper K . Dann gilt:

$$(i) \quad \forall_{\alpha \in K} \alpha \cdot 0_V = 0_V$$

$$(ii) \quad \forall_{a \in V} 0_K \cdot a = 0_V$$

$$(iii) \quad \forall_{\alpha \in K, a \in V} (-\alpha) \cdot a = \alpha \cdot (-a) = -\alpha \cdot a$$

$$(iv) \quad \forall_{\alpha \in K, a \in V} \alpha \cdot a = 0_V \Rightarrow \alpha = 0_K \vee a = 0_V$$

Beweis von (iv). Zeige: $\alpha \neq 0_K \Rightarrow a = 0_V$

Es gilt: $\alpha \neq 0_K \Rightarrow a = (\alpha^{-1} \cdot \alpha) \cdot a = \alpha^{-1} \cdot (\alpha \cdot a) = \alpha^{-1} \cdot 0_V = 0_V$ □

Allgemeine Distributivgesetze:

Es seien $\alpha, \alpha_i, \beta_i \in K, a, a_i \in V, i = 1, \dots, n$.

Dann gilt:

$$\begin{aligned} \alpha \cdot \sum_{i=1}^n a_i &= \sum_{i=1}^n \alpha a_i \\ \sum_{i=1}^n \alpha_i a_i + \sum_{i=1}^n \beta_i a_i &= \sum_{i=1}^n (\alpha_i + \beta_i) a_i \end{aligned}$$

Beispiel 3.1. (i) Die Menge der Abbildungen $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$ Intervall, ist eine abelsche Gruppe und ein Vektorraum mit den Festlegungen

$$(f + g)(x) := f(x) + g(x), \quad (\alpha \cdot f)(x) := \alpha \cdot f(x), \quad \alpha \in \mathbb{R}, x \in [a, b]$$

(ii) K Körper $\Rightarrow K^n, n \in \mathbb{N}$, K -Vektorraum mit $x + y = (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n)$, wobei $x = (x_1, \dots, x_n)$, $y = (y_1, \dots, y_n)$. $\alpha \in K \Rightarrow \alpha \cdot x = (\alpha \cdot x_1, \dots, \alpha \cdot x_n)$

(iii) wichtigster Vektorraum in dieser Vorlesung: \mathbb{R}^n . Die Länge eines Vektors $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ ist gegeben durch

$$\|x\| = \|x\|_2 := \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$$

Der Winkel $\omega \in [0, 2\pi)$ zwischen zwei Vektoren $x = (x_1, \dots, x_n)$ und $y = (y_1, \dots, y_n)$ ist gegeben durch

$$\cos(\omega) = \frac{x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n}{\|x\| \cdot \|y\|}$$

Definition 3.2 (Unterraum). Sei V ein K -Vektorraum. Eine Teilmenge $U \subseteq V$ heißt K -Unterraum oder K -Untervektorraum von V , falls:

- (i) $U \neq \emptyset$
- (ii) $a, b \in U \Rightarrow a + b \in U$
- (iii) $\alpha \in K, a \in U \Rightarrow \alpha \cdot a \in U$

Korollar 3.1 (Unterraumkriterium). Die beiden letzten Eigenschaften lassen sich wie folgt zusammen fassen:

$$a, b \in U, \alpha, \beta \in K \Rightarrow \alpha \cdot a + \beta \cdot b \in U$$

Bei $\alpha \cdot a + \beta \cdot b$ handelt es sich um eine sog. Linearkombination der Vektoren a und b .

Beispiel 3.2. (i) $K \cdot a := \{\alpha \cdot a | \alpha \in K, a \in V\}$ ist K -Unterraum von V
 $a \neq 0_V$: 'Gerade'
 $a = 0_V$: 'Nullraum'

(ii) $U = \{(\alpha, 0, 0) | \alpha \in K\} \subseteq K^3$ Unterraum von K^3 (x -Achse)

(iii) $U = \{(\alpha, \beta, 0) | \alpha, \beta \in K\} \subseteq K^3$ Unterraum von K^3 (xy -Ebene)

(iv) $U = \{(\alpha, 1, 0) | \alpha \in K\} \subseteq K^3$ kein Unterraum von K^3 , denn
 $(\alpha, 1, 0) + (\beta, 1, 0) = (\alpha + \beta, 2, 0) \notin U$

(v) V ist trivialer Unterraum von sich selbst.

(vi) Der Nullraum ist trivialer Unterraum eines jeden Vektorraums.

Lemma 3.1. Sei V K -Vektorraum. Seien $(U_i)_{i \in I}$, I Indexmenge, eine Familie von Unterräumen von V . Dann ist $U := \bigcap_{i \in I} U_i$ Unterraum von V

Beweis. Seien

$$\alpha, \beta \in K$$

sowie

$$a, b \in \bigcap_{i \in I} U_i$$

Da U_1, \dots, U_n Unterräume sind gilt

$$\forall_{i=1, \dots, n} \alpha \cdot a + \beta \cdot b \in U_i \Rightarrow \alpha \cdot a + \beta \cdot b \in \bigcap_{i \in I} U_i$$

□

Für die Vereinigung gilt das i.A. nicht: Bspw. bilden die Menge der Vektoren aus dem \mathbb{R}^2 , die auf der x -Achse liegen, einen Unterraum des \mathbb{R}^2 . Gleiches gilt für die y -Achse. Die Vereinigung ist die Menge aller Vektoren, die auf dem Koordinatenkreuz liegen. Allerdings liegt bspw. der Vektor

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

nicht auf dem Koordinatenkreuz.

3.2 Lineare (Un-)abhängigkeit

Definition 3.3 (Linearkombination und Spann). Sei V ein K -Vektorraum. Sei weiterhin $A \subseteq V$.

(i) Für $r \in \mathbb{N}_0, a_i \in A, i = 1, \dots, r, \alpha_i \in K, i = 1, \dots, r$, heißt

$$\sum_{i=1}^r \alpha_i a_i$$

Linearkombination der Vektoren a_1, \dots, a_r .

(ii) Sei $A = \{a_1, \dots, a_r\}$. Die Menge

$$\text{Span}_K\{a_1, \dots, a_r\} := \left\{ \sum_{i=1}^r \alpha_i a_i \mid r \in \mathbb{N}_0, a_i \in A, \alpha_i \in K, i = 1, \dots, r \right\}$$

heißt Spann von A .

Satz 3.1. $\text{Span}_K\{a_1, \dots, a_r\}$ ist ein Unterraum, der sog. von A erzeugte lineare Unterraum. Es ist sogar der kleinste lineare Unterraum von V , der A enthält, genauer:

$$\text{Span}_K\{a_1, \dots, a_r\} \subseteq \bigcap_{U \in \mathcal{U}} U$$

wobei \mathcal{U} die Familie aller Unterräume $U \subseteq V$ ist mit $A \subseteq U$.

Beweis. Unterraumaxiome:

(i) $\text{Span}_K\{a_1, \dots, a_r\} \neq \emptyset$, da im Falle $A = \emptyset$:

$$0 = \sum_{i=1}^0 \alpha_i a_i \in \text{Span}_K\{a_1, \dots, a_r\}$$

oder falls $A \neq \emptyset$:

$$0 = \sum_{i=1}^r \alpha_i a_i, \alpha_1 = \dots = \alpha_r = 0$$

(ii) Seien $\alpha_1, \dots, \alpha_r; \beta_1, \dots, \beta_r \in K; r, s \in \mathbb{N}$ und $a_1, \dots, a_r; b_1, \dots, b_r \in A$ sowie

$$a = \sum_{i=1}^r \alpha_i a_i$$

und

$$b = \sum_{j=1}^r \beta_j b_j \Rightarrow a + b = \sum_{i=1}^{r+s} \alpha_i a_i \in \text{Span}_K\{a_1, \dots, a_r\}$$

mit $\alpha_{r+j} = \beta_j$ und $a_{r+j} = b_j; j = 1, \dots, s$

(iii) Für $\alpha \in K$ und $a \in \text{Span}_K\{a_1, \dots, a_r\}$ wie in (ii) gilt

$$\alpha a = \sum_{i=1}^r \underbrace{(\alpha \alpha_i)}_{\in K} a_i \in \text{Span}_K\{a_1, \dots, a_r\}$$

Also ist $\text{Span}_K\{a_1, \dots, a_r\}$ ein Unterraum. Es gilt $A \subseteq \text{Span}_K\{a_1, \dots, a_r\}$, denn $\forall_{a \in A} a = 1 \cdot a \in \text{Span}_K\{a_1, \dots, a_r\}$

Zeige: $\text{Span}_K\{a_1, \dots, a_r\}$ ist kleinster Unterraum:

Sei $U \subseteq V$ Unterraum mit $U \supseteq A$. Nach Definition 3.2 enthält U sämtliche Linearkombinationen von Vektoren $a_1, \dots, a_r \in A$

$\Rightarrow \text{Span}_K\{a_1, \dots, a_r\} \subseteq U$ (*)

U beliebig

$\Rightarrow \text{Span}_K\{a_1, \dots, a_r\}$ kleinster Unterraum.

Zeige noch:

$$\text{Span}_K\{a_1, \dots, a_r\} \subseteq \bigcap_{U \in \mathcal{U}} U$$

Nach Lemma 3.1 ist

$$\bigcap_{U \in \mathcal{U}} U$$

Unterraum. Gilt also wegen (*). □

Beispiel 3.3. (i) Die xy -Ebene ist der kleinste Unterraum $\subseteq \mathbb{R}^3$, der die Vektoren $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

und $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ enthält:

$$\text{Span}_{\mathbb{R}} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \subseteq \mathbb{R}^3$$

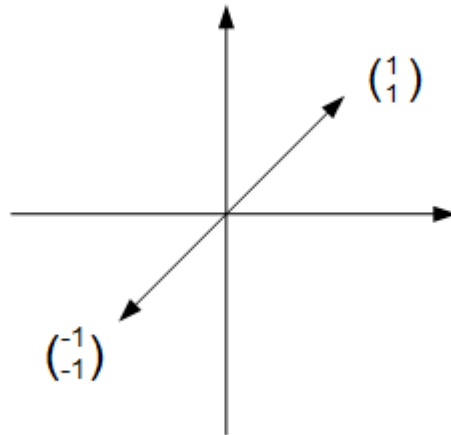


Abbildung 3.6: Kollineare Vektoren

(ii) \mathbb{R}^2 :

$\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} = (-1) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ist Linearkombination aus dem Vektor $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$
(siehe Abbildung 3.6).

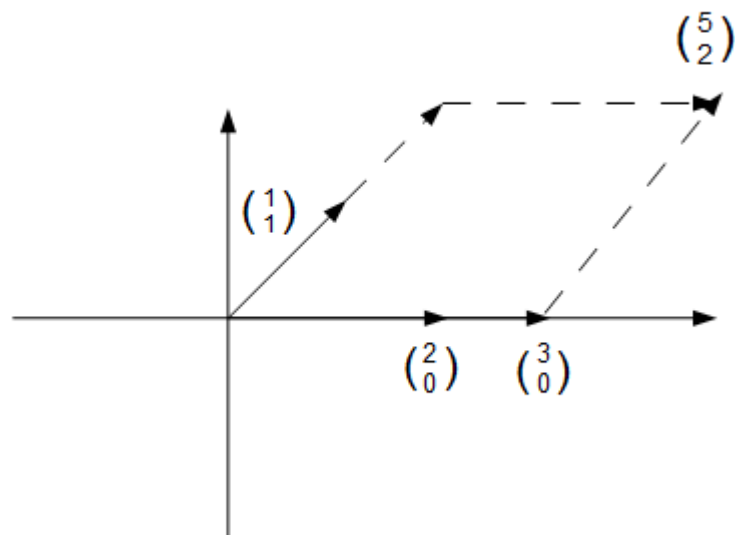


Abbildung 3.7: Linearkombination im \mathbb{R}^2

$$\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{3}{2} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ (siehe Abbildung 3.7).}$$

(iii) \mathbb{R}^3 :

$$2 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} + (-1) \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\alpha_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \alpha_1 = 1, \alpha_2 = 1$$

aber: $\alpha_1 \cdot 0 + \alpha_2 \cdot 0 = 0 \neq 1 \Rightarrow$ Lienarkombination nicht möglich.

Definition 3.4 (Lineare (Un-)abhängigkeit). Die Vektoren $a_1, \dots, a_n, n \in \mathbb{N}$, eines K -Untervektorraums V heißen *linear unabhängig (l.u.)*, falls für $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in K$ gilt:

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i a_i = 0 \Rightarrow \alpha_1 = \dots = \alpha_n = 0$$

Ansonsten heißen sie *linear abhängig (l.a.)*.

Satz 3.2. Die Vektoren a_1, \dots, a_n eines K -Vektorraums V sind genau dann l.u., wenn in der Linearkombination

$$a = \sum_{i=1}^n \alpha_i a_i \in V$$

für $a \in \text{Span}_K\{a_1, \dots, a_n\}$ die Koeffizienten $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in K$ eindeutig sind. Die Vektoren a_1, \dots, a_n sind genau dann linear abhängig, wenn es mindestens einen Vektor von ihnen gibt, der sich als Linearkombination aus den anderen darstellen lässt.

Für Vektoren a_1, \dots, a_n eines K -Vektorraums V sind äquivalent:

(i) a_1, \dots, a_n l.u.

(ii)

$$a = \sum_{i=1}^n \alpha_i a_i \in V, \alpha_1, \dots, \alpha_n \in K, a \in \text{Span}_K\{a_1, \dots, a_n\},$$

eindeutig!

Beweis: '(i) \Rightarrow (ii)': Seien

$$a = \sum_{i=1}^n \alpha_i a_i = \sum_{i=1}^n \tilde{\alpha}_i a_i, \quad \alpha_i, \tilde{\alpha}_i \in \mathbb{R}, \quad i = 1, \dots, n,$$

zwei Darstellungen von a .

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^n (\alpha_i - \tilde{\alpha}_i) a_i = 0$$

$$\stackrel{(i)}{\Rightarrow} \alpha_i - \tilde{\alpha}_i = 0, \quad i = 1, \dots, n$$

$$\Rightarrow \alpha_i = \tilde{\alpha}_i, \quad i = 1, \dots, n$$

'(ii) \Rightarrow (i)': Sei

$$\sum_{i=0}^n \alpha_i a_i = 0$$

(also $a = 0$) trivialerweise gilt: $\alpha_1 = \dots = \alpha_n = 0$

(ii), Eindeutigkeit, Definition 3.4 $\Rightarrow a_1, \dots, a_n$ l.u.

Zeige: a_1, \dots, a_n l.a. \Leftrightarrow es gibt mindestens einen Vektor, der sich als LK aus allen anderen darstellen lässt. (★)

Dazu:

a_1, \dots, a_n l.a. $\Leftrightarrow a_n, \dots, a_n$ nicht l.u.

\Leftrightarrow Der Nullvektor ist nicht-trivial darstellbar.

$$\Leftrightarrow \exists_{i \in \{1, \dots, n\}} 0 = \sum_{j=1}^n \alpha_j a_j \wedge \alpha_i \neq 0$$

$$\Rightarrow a_i = -\frac{1}{\alpha_1} \sum_{j=1, j \neq i}^n \alpha_j a_j = \sum_{j=1, j \neq i}^n \left(-\frac{\alpha_j}{\alpha_1} \right) a_j$$

Dies ist eine LK der $a_j, j \neq i$. Sei andererseits

$$a_i = \sum_{j=1, j \neq i}^n \alpha_j a_j$$

eine LK von a_i aus den anderen Vektoren $a_j, j \neq i$. Dann folgt sofort

$$0 = \sum_{j=1}^n \alpha_j a_j$$

wobei $\alpha_i = -1 \neq 0$. Dies ist eine nichttriviale Darstellung des Nullvektors. Also sind die Vektoren l.a. □

Beispiel 3.4 (Fortsetzung zu Beispiel 3.3). (i)

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

l.u., da

$$\alpha_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \alpha_1 = 0 \wedge \alpha_2 = 0$$

oder:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

nicht möglich!

(ii)

$$\mathbb{R}^2 : \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = (-1) \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} \stackrel{(\star)}{\Rightarrow} l.a. \text{ ('kollinear')}$$

$$\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{3}{2} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \stackrel{(\star)}{\Rightarrow} l.a.$$

oder:

$$\alpha_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha_3 \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow 2\alpha_1 + \alpha_2 + 5\alpha_3 = 0, \quad \alpha_2 + 2\alpha_3 = 0$$

Wähle:

$$\alpha_3 := -1 \Rightarrow \alpha_2 = 2$$

$$\Rightarrow \alpha_1 = \frac{3}{2}$$

(siehe Abbildung 3.8).

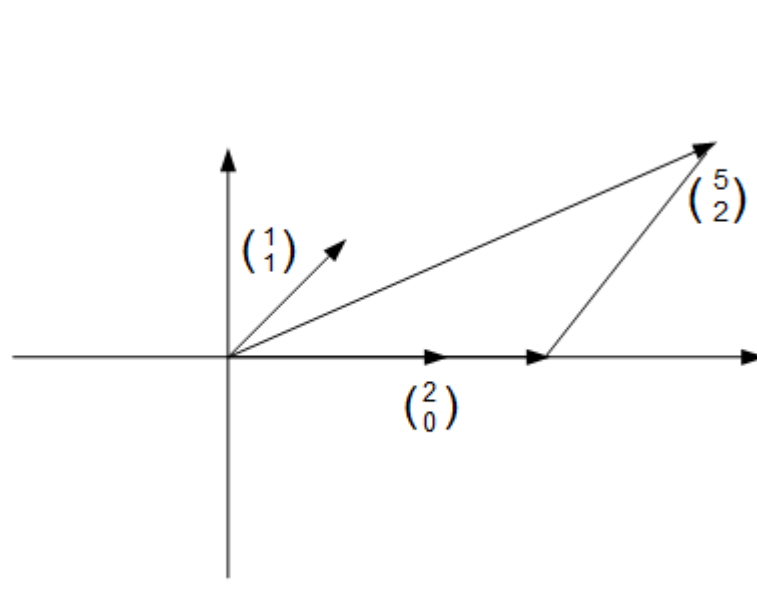


Abbildung 3.8: Linearkombination im \mathbb{R}^2

Drei Vektoren im \mathbb{R}^2 sind immer l.a.!

(iii) \mathbb{R}^3 :

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{nicht m\"oglich} \Rightarrow \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ l.u.}$$

$$\alpha_1 \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Satz 3.2 $\Rightarrow \alpha_1, \alpha_2$ eindeutig (falls existent)! ($\alpha_1 = 2, \alpha_2 = -1$)

Nachrechnen:

$$\begin{aligned} 3\alpha_1 + 4\alpha_2 &= 2 \\ 4\alpha_1 + \alpha_2 &= 7 \\ \Rightarrow \alpha_2 &= 7 - 4\alpha_1 \\ \Rightarrow 3\alpha_1 + 4(7 - 4\alpha_1) &= -13\alpha_1 + 28 = 2 \\ \Rightarrow -13\alpha_1 &= -26 \\ \Rightarrow \alpha_1 &= 2 \\ \Rightarrow \alpha_2 &= -1 \end{aligned}$$

3. Zeile: $2 \cdot 2 + 0 \cdot (-1) = 4 \checkmark$

oder:

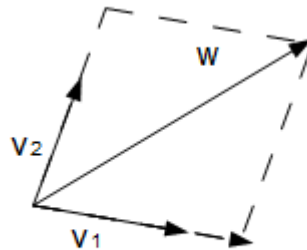
$$\begin{aligned} \alpha_1 \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ 4 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ 3\alpha_1 + 4\alpha_2 + 2\alpha_3 &= 0 \\ 4\alpha_1 + \alpha_2 + 7\alpha_3 &= 0 \\ 2\alpha_1 + 4\alpha_3 &= 0 \Rightarrow \alpha_1 = -2\alpha_3 \\ \Rightarrow 4\alpha_2 - 4\alpha_3 &= 0 \\ \alpha_2 - \alpha_3 &= 0 \Rightarrow \alpha_2 = \alpha_3 \\ \Rightarrow 4\alpha_3 - 4\alpha_3 &= 0 \end{aligned}$$

Es gibt also unendlich viele Lösungen, d.h., es gilt nicht $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$.

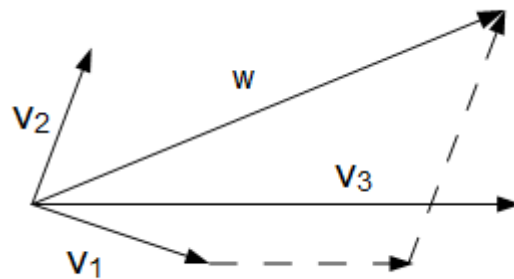
$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ 4 \end{pmatrix} \text{ 'komplanar' (liegen in derselben Ebene)}$$

3.3 Erzeugendensystem und Basis

\mathbb{R}^2 :



Abbildungung 3.9: Linearkombination von w aus zwei Vektoren im \mathbb{R}^2



Abbildungung 3.10: Linearkombination von w aus drei Vektoren im \mathbb{R}^2

w kann sowohl von v_1 und v_2 als auch von v_1, v_2 und v_3 erzeugt werden (siehe Abbildungen 3.9 und 3.10).

Definition 3.5 (Erzeugendensystem). Eine Menge A von Vektoren eines K -Vektorraums V heißen Erzeugendensystem (EZS) von V , falls $V = \text{Span}_K(A)$. V heißt endlich erzeugt, wenn V ein endliches EZS $\{a_1, \dots, a_n\}, n \in \mathbb{N}$, besitzt.

Beispiel 3.5. (i) $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ EZS des \mathbb{R}^2 Sei $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ beliebig und

$$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R} \text{ mit } \alpha_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \alpha_1 + \alpha_3 = v_1 \Rightarrow \alpha_3 = v_1 - \alpha_1$$

$$\alpha_2 + \alpha_3 = v_2 \Rightarrow \alpha_2 + v_1 - \alpha_1 = v_2$$

$$\Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 + v_1 - v_2$$

α_2 beliebig wählbar, aber $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ existieren auf jeden Fall!

$$\Rightarrow v \in \text{Span}_{\mathbb{R}} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

(ii) $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ kein EZS des \mathbb{R}^3 , denn

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \notin \text{Span}_{\mathbb{R}} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ 0 \end{pmatrix} \mid \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R} \right\}$$

(iii) $\text{Span}_{\mathbb{Q}}\{1\} = \mathbb{Q}$ ($V = \mathbb{Q}$ als \mathbb{Q} -Vektorraum)

$\text{Span}_{\mathbb{Q}}\{1, \sqrt{2}\} = \mathbb{Q}(\sqrt{2})$ ($V = \mathbb{Q}(\sqrt{2})$ als \mathbb{Q} -Vektorraum)

$\text{Span}_{\mathbb{R}}\{1, i\} = \mathbb{C}$ ($V = \mathbb{C}$ als \mathbb{R} -Vektorraum)

$$\mathbb{C} = \left\{ \underbrace{a+ib}_{=a \cdot 1 + b \cdot i} \mid a, b \in \mathbb{R}, i^2 = -1 \right\}$$

LK aus 1 und i

(iv)

$$\text{Span}_{\mathbb{R}} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} = \mathbb{R}^n$$

sogenannte Einheitsvektoren

(v) EZS des Nullraums: \emptyset

Definition 3.6 (Einheitsvektoren). Seien $V = K^n$ (K Körper), $1 \in K$ das Einselement von K bzgl. \cdot und $0 \in K$ das Einselement bzgl. $+$. Dann heißt

$$e_i := (0 \cdots 0 \ 1 \ 0 \cdots 0) \in K^n,$$

wobei 1 an der i -ten Position steht, der i -te Einheitsvektor von K^n . Einheitsvektoren sind stets linear unabhängig und bilden ein EZS des Vektorraums K^n .

Beispiel 3.6. (Fortsetzung von Beispiel 3.5) Es gilt $\text{Span}_{\mathbb{R}} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} = \mathbb{R}^2$,

aber auch $\text{Span}_{\mathbb{R}} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} = \mathbb{R}^2$:

$$v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = v_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + v_2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (v_1, v_2 \text{ sind sog. kartesische Koordinaten})$$

Allerdings: $\text{Span}_{\mathbb{R}} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \neq \mathbb{R}^2, \text{Span}_{\mathbb{R}} \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \neq \mathbb{R}^2$ und auch

$\text{Span}_{\mathbb{R}} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\} \neq \mathbb{R}^2$: kein Vektor, der nicht auf der Geraden liegt, ist als LK darstellbar.

Frage: Gibt es ein *minimales* EZS?

Definition 3.7. Die Vektoren $a_1, \dots, a_n, n \in \mathbb{N}, \in V$ heißen *Basis* von V , falls

(i) a_1, \dots, a_n EZS von V

(ii) a_1, \dots, a_n l.u.

Beispiel 3.7. (Fortsetzung von Beispiel 3.3)

(i) $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ EZS von \mathbb{R}^2 , aber keine Basis; $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ Basis

(ii) $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ keine Basis von \mathbb{R}^3 , da schon kein EZS.

(iii) $\{1\}$ Basis von \mathbb{Q}

$\{1, \sqrt{2}\}$ Basis von $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$

$\{1, i\}$ Basis von \mathbb{C}

$\{e_1, \dots, e_n\}$ Basis von \mathbb{R}^n

(iv) Der Nullraum hat die leere Menge als einzige Basis.

Satz 3.3. Jeder endlich erzeugte K -Vektorraum hat eine Basis. Jede solche Basis ist endlich.

Beweis: Sei $\{a_1, \dots, a_n\} \in V$ ein EZS von $V \Rightarrow V = \text{Span}_{\mathbb{R}}\{a_1, \dots, a_n\}$

Nach Verkleinern erhalte a_1, \dots, a_n als minimales EZS. Wären a_1, \dots, a_n l.a., so ließe sich noch einer der Vektoren als LK der anderen darstellen $\Rightarrow a_1, \dots, a_n$ l.u., also Basis.

Sei $\{b_j\}_{j \in J}$ eine weitere Basis von $V, J \subseteq \mathbb{N}$.

\Rightarrow Jeder der Vektoren a_1, \dots, a_n läßt sich als (endl.) LK der b_j darstellen.

$\Rightarrow \exists J' \subseteq J$ endl. $V = \text{Span}_{\mathbb{R}}\{a_1, \dots, a_n\} \subseteq \text{Span}_{\mathbb{R}}\{b_j, j \in J'\} \subseteq V$

$\Rightarrow \text{Span}_{\mathbb{R}}\{b_j, j \in J'\} = V \Rightarrow \{b_j\}_{j \in J'}$ EZS von V und läßt sich wie oben zu einer Basis von V verkleinern $\Rightarrow J = J'$ endlich. \square

Definition 3.8 (Dimension). Sei V ein K -Vektorraum mit Basis $\{a_1, \dots, a_n\}, n \in \mathbb{N}$. Dann heißt $n := \dim_K V$ die Dimension von V .

Satz 3.4 (Basisergänzungssatz). Seien V ein K -Vektorraum, $a_1, \dots, a_r \in V$ ein linear unabhängiges System und $b_1, \dots, b_m \in V$ ein EZS ($r, m \in \mathbb{N}$). Dann läßt sich das System der $a_i, i = 1, \dots, r$, durch Elemente der $b_j, j = 1, \dots, m$, zu einer Basis von V ergänzen.

Korollar 3.2. In einem K -Vektorraum gilt $\dim_K V = n$ genau dann, wenn es ein l.u. System von V von n Vektoren gibt, wobei jeweils $n + 1$ Vektoren l.a. sind.

Beispiel 3.8. (i) $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ Basis von $\mathbb{R}^2 \Rightarrow \dim_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^2 = 2$

(ii) $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ lässt sich durch $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ zu einer Basis des \mathbb{R}^3 ergänzen.

(iii) $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = 2$
 $\dim_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}(\sqrt{2}) = 2$
 K Körper $\Rightarrow \dim_K K^n = n$

Satz 3.5 (Austauschsatz von Steinitz). Sei $\{b_1, \dots, b_n\}$ eine Basis des K -Vektorraums V , und sei $\{a_1, \dots, a_r\}$ eine linear unabhängige Teilmenge von V ($r, n \in \mathbb{N}$). Dann ist $r \leq n$, und es lassen sich r -viele Vektoren der $b_i, i = 1, \dots, n$, durch die $a_j, j = 1, \dots, r$, ersetzen, so daß die resultierende Menge eine Basis von V ist.

Wegen $r \leq n$ kann es höchstens so viele lineare unabhängige Vektoren wie die Anzahl an Basisvektoren geben.

Beispiel 3.9. Betrachte die Basis $B = \{e_1, e_2, e_3\} \subseteq \mathbb{R}^3$, also die Basis bestehend aus den Einheitsvektoren, und die linear unabhängige Menge $A := \{a_1, a_2\} := \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$.

Die Gleichung

$$a_1 = 2 \cdot e_1 + 1 \cdot e_2 + 0 \cdot e_3$$

läßt sich nach e_1 und e_2 auflösen (nicht aber nach e_3). Löse z.B. nach e_2 auf:

$$e_2 = a_1 - 2e_1$$

Nach dem Austauschsatz von Steinitz kann man mindestens einen Basisvektor aus B gegen einen Vektor aus A austauschen. In diesem Fall also e_2 gegen a_1 . Damit ist $\{e_1, a_1, e_3\}$ auch eine Basis des \mathbb{R}^3 . Stelle a_2 in dieser neuen Basis dar: In der alten Basis gilt

$$a_2 = 0 \cdot e_1 - 3 \cdot e_2 + 0 \cdot e_3$$

und somit

$$a_2 = 0 \cdot e_1 - 3(a_1 - 2e_1) + 0 \cdot e_3 = -3a_1 + 6e_1 + 0 \cdot e_3$$

Diese Gleichung läßt sich nach e_1 auflösen, und somit kann e_1 gegen a_2 ausgetauscht werden. Also ist auch $\{a_2, a_1, e_3\}$ eine Basis des \mathbb{R}^3 .

Basistransformation: Man kann einen Vektor $v \in V$ als LK aus Vektoren beliebiger Basen abstellen und erhält so ein neues Koordinatensystem.

Beispiel 3.10. Es gilt einerseits $1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 3 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$, aber andererseits $2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$

3.4 Lineare Abbildungen

Definition 3.9 (Lineare Abbildung). Eine Abbildung $f : V \rightarrow V'$ zwischen zwei K -Vektorräumen V und V' heißt K -Homomorphismus oder K -lineare Abbildung, falls für $a, b \in V$, $\alpha \in K$ gilt:

$$(i) \quad f(a + b) = f(a) + f(b)$$

$$(ii) \quad f(\alpha \cdot a) = \alpha \cdot f(a)$$

Man kann (i) und (ii) auch zusammenfassen und direkt fordern:

$$f(\alpha \cdot a + \beta \cdot b) = \alpha \cdot f(a) + \beta \cdot f(b), \quad a, b \in V, \quad \alpha, \beta \in K$$

Definition 3.10 (Mono-/Epi-/Isomorphismus). Eine K -lineare Abbildung $f : V \rightarrow V'$ zwischen zwei K -Vektorräumen V und V' heißt

(i) Monomorphismus, falls f injektiv ist

(ii) Epimorphismus, falls f surjektiv ist

(iii) Isomorphismus, falls f bijektiv ist

Satz 3.6. Ist $f : V \rightarrow V'$ ein Isomorphismus zwischen zwei K -Vektorräumen V und V' , so ist die Umkehrabbildung $f^{-1} : V' \rightarrow V$ wieder K -linear, also wieder ein Isomorphismus.

Beispiel 3.11.

$$f : \mathbb{R}^2 \Rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 2x - y \\ -2x + y \end{pmatrix}$$

ist \mathbb{R} -linear, denn für $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $a, b \in \mathbb{R}^2$ mit $a = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$, gilt:

$$\begin{aligned} f(\alpha a + \beta b) &= \begin{pmatrix} 2(\alpha a_1 + \beta b_1) - (\alpha a_2 + \beta b_2) \\ -2(\alpha a_1 + \beta b_1) + (\alpha a_2 + \beta b_2) \end{pmatrix} \\ &= \alpha \begin{pmatrix} 2a_1 - a_2 \\ -2a_1 + a_2 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 2b_1 - b_2 \\ -2b_1 + b_2 \end{pmatrix} \\ &= \alpha f(a) + \beta f(b) \end{aligned}$$

f ist nicht injektiv: $f(1, 2) = f(2, 4) = (0, 0)$, also kein Monomorphismus und kein Isomorphismus

f ist nicht surjektiv: $f \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x - y \\ -(2x - y) \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ wird nicht ausgenommen!

$\Rightarrow f$ ist kein Epimorphismus!

Definition 3.11 (Kern und Bild linearer Abbildungen). Sei $f : V \rightarrow V'$ eine K -lineare Abbildung zwischen zwei K -Vektorräumen V und V' . Dann heißt

$$\ker f := f^{-1}(0) = \{a \in V \mid f(a) = 0\}$$

der Kern und

$$\operatorname{im} f := f(V) = \{f(a) \mid a \in V\}$$

das Bild von f .

Korollar 3.3. $\ker f$ ist linearer Unterraum von V , und $\operatorname{im} f$ ist linearer Unterraum von V' .

Beweis: Betrachte zunächst $\ker f$:

- (i) $\ker f \neq \emptyset$, da stets $0 \in \ker f$.
- (ii) Seien $a, b \in \ker f$ und $\alpha, \beta \in K$. Da f linear ist, gilt:

$$f(\alpha a + \beta b) = \alpha f(a) + \beta f(b) = \alpha \cdot 0 + \beta \cdot 0 = 0,$$

also ist auch die LK $\alpha a + \beta b \in \ker f$.

Betrachte nun $\operatorname{im} f$:

- (i) $\operatorname{im} f \neq \emptyset$, da stets $0 \in \operatorname{im} f$, denn der Nullvektor in V' wird vom Nullvektor in V von f angenommen, denn, da f linear ist, gilt für alle $v \in V$:

$$f(0_V) = f(0 \cdot v) = 0 \cdot f(v) = 0_{V'},$$

da $f(v) \in V'$.

- (ii) Seien $a, b \in \operatorname{im} f$, d.h. $\exists_{x \in V} f(x) = a$, $\exists_{y \in V} f(y) = b$, und $\alpha, \beta \in K$. Da f linear ist, gilt:

$$f(\alpha x + \beta y) = \alpha f(x) + \beta f(y) = \alpha a + \beta b,$$

also ist auch die LK $\alpha a + \beta b \in \operatorname{im} f$.

□

Beispiel 3.12 (Fortsetzung von Beispiel 3.11).

$$\begin{aligned} \ker f &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 2x\} \\ \operatorname{im} f &= \{(z, -z) \in \mathbb{R}^2 \mid z \in \mathbb{R}\} \end{aligned}$$

Satz 3.7. Sei $f : V \rightarrow V'$ eine K -lineare Abbildung zwischen zwei K -Vektorräumen V und V' . Dann gilt:

$$(i) \quad f \text{ injektiv} \Leftrightarrow \ker f = \{0_V\}$$

$$(ii) \quad f \text{ surjektiv} \Leftrightarrow \operatorname{im} f = V'$$

Beweis: (i) ' \Rightarrow ': Der Nullvektor von V wird auf den Nullvektor von V' abgebildet. Da f injektiv, gilt $f^{-1}(0_{V'}) = \{0_V\}$, also $\ker f = \{0_V\}$.

' \Leftarrow ': Da f linear ist, gilt für $v, w \in V$:

$$f(v - w) = f(v) - f(w).$$

Falls also $f(v) = f(w)$, so gilt $f(v - w) = 0_{V'}$. Da $\ker f = \{0_V\}$, gilt somit $v - w = 0_V$, also $v = w$. Damit ist f injektiv.

(ii) Folgt direkt aus der Definition der Surjektivität.

□

Satz 3.8. Sei $f : V \rightarrow V'$ eine K -lineare Abbildung zwischen zwei K -Vektorräumen V und V' . Dann gilt:

$$\dim(V) = \dim(\ker f) + \dim(\operatorname{im} f)$$

Wir werden später eine andere Form der Dimensionsformel beweisen.

Beispiel 3.13. Betrachte die Abbildung $\varphi : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^2$, gegeben durch

$$\varphi(a, b, c, d) := (a + b, c + d)$$

Es seien $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ und $(a_1, b_1, c_1, d_1), (a_2, b_2, c_2, d_2) \in \mathbb{R}^4$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} \varphi(\alpha(a_1, b_1, c_1, d_1) + \beta(a_2, b_2, c_2, d_2)) &= \varphi(\alpha a_1 + \beta a_2, \alpha b_1 + \beta b_2, \alpha c_1 + \beta c_2, \alpha d_1 + \beta d_2) \\ &= (\alpha a_1 + \beta a_2 + \alpha b_1 + \beta b_2, \alpha c_1 + \beta c_2 + \alpha d_1 + \beta d_2) \\ &= (\alpha(a_1 + b_1) + \beta(a_2 + b_2), \alpha(c_1 + d_1) + \beta(c_2 + d_2)) \\ &= \alpha(a_1 + b_1, c_1 + d_1) + \beta(a_2 + b_2, c_2 + d_2) \\ &= \alpha\varphi(a_1, b_1, c_1, d_1) + \beta\varphi(a_2, b_2, c_2, d_2) \end{aligned}$$

Damit ist φ linear. Weiterhin gilt

$$\begin{aligned} \ker \varphi &= \{(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4 \mid \varphi(a, b, c, d) = (0, 0)\} = \{(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4 \mid (a + b, c + d) = (0, 0)\} \\ &= \{(a, -a, c, -c) \in \mathbb{R}^4 \mid a, c \in \mathbb{R}\} \end{aligned}$$

Eine Basis des Kerns wäre z.B.

$$\{(1, -1, 0, 0), (0, 0, 1, -1)\}$$

Also gilt $\dim(\ker \varphi) = 2$. Das kann man auch mithilfe der Dimensionsformel zeigen: Wir stellen fest, daß φ surjektiv ist, denn es gilt sicherlich

$$\forall_{e, f \in \mathbb{R}} \exists_{a, b, c, d \in \mathbb{R}} (e, f) = (a + b, c + d)$$

Somit gilt $\text{im } \varphi = \mathbb{R}^2$, also $\dim(\text{im } \varphi) = 2$. Also folgt nach Satz 3.8:

$$\dim(\ker \varphi) = \dim(\mathbb{R}^4) - \dim(\text{im } \varphi) = 4 - 2 = 2$$

Weiterhin folgt, da $\ker \varphi \neq \{0\}$, nach Satz 3.7(i), daß φ nicht injektiv ist. Damit ist φ kein Monomorphismus. Da φ surjektiv ist, ist φ ein Epimorphismus, allerdings kein Isomorphismus.

4 Matrizen und lineare Gleichungssysteme

Betrachte das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} 5x_1 + 10x_2 + 20x_3 &= 100 \\ x_1 + x_2 + x_3 &= 10 \end{aligned}$$

Isoliere die *Koeffizienten* der *Unbekannten* x_1, x_2, x_3 und erhalte folgendes *Schema*:

$$\begin{pmatrix} 5 & 10 & 20 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

4.1 Matrizen

Definition 4.1 (Matrix). Sei K ein Körper. Ein rechteckiges Schema mit m Zeilen und n Spalten, wobei $m, n \in \mathbb{N}$, sowie $m \cdot n$ Einträgen von Elementen in K der Form

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

heißt $m \times n$ -Matrix über K . Es gilt $\forall_{i=1, \dots, m; j=1, \dots, n} a_{ij} \in K$. Schreibweise: $A = (a_{ij}) = (a_{ij})_{i=1, \dots, m; j=1, \dots, n} \in K^{m \times n}$

Korollar 4.1. Die Abbildung $f: K^n \rightarrow K^m, x \mapsto Ax$, ist eine lineare Abbildung.

Korollar 4.2. $K^{m \times n}$ ist ein Vektorraum über dem Körper K .

Definition 4.2. Sei K ein Körper und $A \in K^{m \times n}$ eine Matrix wie in Def. 4.1. Ein Vektor $z_i = (a_{i1}, \dots, a_{in}) \in K^n$ heißt i -te Zeile oder i -ter Zeilenvektor, ein Vektor $s_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix} \in K^m$

heißt j -te Spalte oder j -ter Spaltenvektor der Matrix A .

Ein Element $(a_{ij})_{i=1, \dots, m; j=1, \dots, n}$ heißt Eintrag von A .

Definition 4.3 (Zeilen-/Spaltenraum). (i) $\text{Span}_K\{z_1, \dots, z_m\}$ heißt Zeilenraum von A . Die Dimension des Zeilenraums heißt Zeilenrang.

(ii) $\text{Span}_K\{s_1, \dots, s_n\}$ heißt Spaltenraum von A . Die Dimension des Spaltenraums heißt Spaltenrang.

Definition 4.4 (Quadratische Matrix). Falls $m = n$, so heißt die Matrix quadratisch.

Beispiel 4.1. $\begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 10 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 20 \\ 1 \end{pmatrix}$ sind Spaltenvektoren von

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 10 & 20 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Zeilen:

$$\text{Span}_K \left\{ \begin{pmatrix} 5 & 10 & 20 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \right\} = \mathbb{R}^2$$

Spalten:

$$\text{Span}_K \left\{ \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 10 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 20 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} = \text{Span}_K \left\{ \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 10 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} = \mathbb{R}^2$$

Definition 4.5 (Einheitsmatrix und Nullmatrix). (i) Die sog. $n \times n$ -Einheitsmatrix setzt sich aus den Einheitsvektoren $e_i, i = 1, \dots, n$ zusammen:

$$E_n := \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(ii) Die sog. Nullmatrix besteht aus lauter Nullen.

$$N_n := \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Definition 4.6 (Matrixsumme und skalare Multiplikation). Seien $A = (a_{ij})$ und $B = (b_{ij})$ Matrizen aus $K^{m \times n}$ und $\alpha \in K$.

(i) Die Summenmatrix $A + B$ ist gegeben durch die Summe der Einträge, $A + B = (a_{ij} + b_{ij})$. Matrizen mit ungleichem Format können nicht addiert werden!!!

(ii) Die skalare Multiplikation von Matrizen $\alpha \cdot A$ ist gegeben durch $\alpha \cdot A = (\alpha \cdot a_{ij})$

Beispiel 4.2. $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow A + B = \begin{pmatrix} 1+2 & -2+2 \\ 0+1 & 1+(-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\alpha = 2 : 2 \cdot A = \begin{pmatrix} 2 \cdot 1 & 2 \cdot -2 \\ 2 \cdot 0 & 2 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Matrizen mit ungleichem Format können nicht addiert werden!

Definition 4.7 (Matrix-Vektor-Produkt). Seien $A \in K^{m \times n}$ mit Spaltenvektoren $s_1, \dots, s_n \in K^m$ und $v = (v_1, \dots, v_n) \in K^n$ ein Vektor. Dann ist das Matrix-Vektor-Produkt gegeben durch

$$A \cdot v = \sum_{i=1}^n v_i s_i \in K^m$$

(Linearkombination der Spalten von A)

Definition 4.8 (Matrixprodukt). Seien $A \in K^{m \times n}$ und $B \in K^{n \times \ell}$ mit $A = (a_{ij})$ und $B = (b_{jk})$, $m, n, \ell \in \mathbb{N}$. Dann ist das Matrixprodukt bzw. die Produktmatrix $C = A \cdot B$ gegeben durch

$$C = (c_{ik}) = \left(\sum_{j=1}^n a_{ij} b_{jk} \right) \in K^{m \times \ell}$$

Man kann dies auch mithilfe des sog. Skalarprodukts erklären: Das Skalarprodukt zweier Vektoren ist die Summe der Komponentenprodukte. Bei der Matrix-Matrix-Multiplikation werden alle Skalarprodukte der Zeilen von A und der Spalten von B gebildet.

Beispiel 4.3. (i) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 1 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + 0 \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$

(ii) $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

(iii) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ können nicht multipliziert werden!

Satz 4.1. Die Anzahl an Spalten von A muß mit der Anzahl an Zeilen von B übereinstimmen, denn ansonsten ist eine Skalarproduktbildung nicht möglich.

Definition 4.9 (Transponierte). Sei $A \in K^{m \times n}$.

Dann ist die Transponierte von A , $A^T \in K^{n \times m}$, gegeben durch

$$A^T = (a_{ij}^T) = a_{ji}, i = 1, \dots, m; j = 1, \dots, n$$

Satz 4.2. Seien $A \in K^{m \times \ell}$ und $B \in K^{\ell \times n}$: $(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$

Beweis. Es gilt

$$\begin{aligned} (A \cdot B)_{ij}^T &= (A \cdot B)_{ji} \\ &= \sum_{k=1}^n a_{jk} b_{ki} = \sum_{k=1}^n b_{ki} a_{jk} \\ &= \sum_{k=1}^n b_{ik}^T a_{kj}^T = (B^T A^T)_{ij} \end{aligned}$$

□

4.2 Lineare Gleichungssysteme

Definition 4.10 (Lineares Gleichungssystem). Seien $m, n \in \mathbb{N}$. Ein Lineares Gleichungssystem (LGS) mit m Gleichungen und n Unbekannten $x_1, \dots, x_n \in K$, wobei K ein Körper ist, ist gegeben durch

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned}$$

mit Koeffizienten $a_{ij} \in K$, $i = 1, \dots, m$; $j = 1, \dots, n$, Lösungsvektor $x = (x_1, \dots, x_n)$ und Ergebnisvektor $b = (b_1, \dots, b_m)$.

Falls $b = 0$, so heißt das LGS homogen, ansonsten inhomogen.

Definition 4.11 (Lösung eines LGS). Durch

$$(A|b) := \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix} \in K^{m \times (n+1)}$$

ist die sog. erweiterte Koeffizientenmatrix gegeben.

Ein LGS heißt lösbar, falls $\exists \hat{x} \in K^n$ $A \cdot \hat{x} = b$. \hat{x} heißt dann Lösung des LGS. Falls \hat{x} nicht existiert, so heißt das LGS nicht lösbar.

Satz 4.3. (i) Jedes homogene LGS ist lösbar.

(ii) Seien ℓ_1, ℓ_2 Lösungen und $\alpha_1, \alpha_2 \in K$. Dann ist auch die Linearkombination $\alpha_1 \ell_1 + \alpha_2 \ell_2$ Lösung.

(iii) Der Raum $\{x \in K^n \mid Ax = 0\}$ ist ein Vektorraum über K , genauer gesagt ein Unterraum von K^n , der sog. Lösungsraum.

Beweis. (i) klar, da der Nullvektor $Ax=0$ löst

$$(ii) \quad A\ell_1 = 0 \wedge A\ell_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad A(\alpha\ell_1 + \alpha\ell_2) = \alpha_1 \cdot A \cdot \ell_1 + \alpha_2 \cdot A\ell_2 = 0$$

(iii) folgt direkt aus (ii)

□

Wichtig! Die Abb. $f : K^n \mapsto K^m, x \mapsto Ax$ ist eine lineare Abbildung!

4.3 Lösung von linearen Gleichungssystemen: Gaußsches Eliminationsverfahren

Problemstellung: Sei $A \in K^{m \times n}$ eine rechteckige Matrix, d.h. $m \leq n$. Finde zu $b \in K^m$ einen Lösungsvektor $x \in K^n$ mit $Ax = b$.

Bringe A dazu auf eine sog. Zeilenstufenform:

$$\begin{pmatrix} \beta_1 & x & \cdots & x & x & x & \cdots & x & x & x & \cdots & x & x & \cdots \\ & & & \beta_2 & x & \cdots & x & x & x & \cdots & x & x & \cdots \\ & & & & & & \ddots & x & \cdots & x & x & \cdots \\ & & & & & & & & & \beta_r & \cdots \\ & & & & & & & & & 0 & 0 \\ & & & & & & & & & \vdots & \vdots \\ & & & & & & & & & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

mit Koeffizienten $\beta_1, \dots, \beta_r \in K \setminus \{0\}, r \in \mathbb{N}$, auch Pivotelemente genannt.

Pivotspalten: $P = \{j \in \{1, \dots, n\} \mid \exists i \in \{1, \dots, m\} \ a_{ij} = \beta_k, \ k \in \{1, \dots, r\} \ \wedge \ i = k\}, (|P| = r)$

Nicht-Pivotspalten: $\bar{P} = \{1, \dots, n\} \setminus P$

Falls A quadratisch, so ist B eine obere Dreiecksmatrix mit β_1, \dots, β_r auf der Diagonalen.

Matrixoperationen zur Zeilenreduktion:

1) Multipliziere eine Zeile mit $\alpha \in K$:

$$\begin{pmatrix} \vdots \\ a_{i*} \\ \vdots \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \vdots \\ \alpha a_{i*} \\ \vdots \end{pmatrix}$$

Dabei ist a_{i*} die i -te Zeile der Matrix.

2) Addiere zu Zeile k das α -fache von Zeile i :

$$\begin{pmatrix} \vdots \\ a_{i*} \\ \vdots \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \vdots \\ a_{i*} \\ \vdots \\ a_{k*} + \alpha a_{i*} \\ \vdots \end{pmatrix}$$

3) Vertausche zwei Zeilen i und k :

$$\begin{pmatrix} \vdots \\ a_{i*} \\ \vdots \\ a_{k*} \\ \vdots \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \vdots \\ a_{k*} \\ \vdots \\ a_{i*} \\ \vdots \end{pmatrix}$$

Diese Matrixoperationen sind mit sogenannten Elementarmatrizen darstellbar: $\tilde{A} = L \cdot A$. Dies sei dem Leser zur Übung überlassen.

Sei $S = (S_k)_{k \in \mathbb{N}}$ eine Folge von Elementarmatrizen. Dann gilt:

$$\exists_{r \in \mathbb{N}} \prod_{t=1}^t L_{t-k+1} \cdot A = L_k \cdots L_1 \cdot A = B$$

(in Zeilenstufenform) Erzeugung der ersten Stufe:

$$B_1 = \left(\begin{array}{cccc|cccc} \beta_1 & * & \dots & * & * & \dots & * \\ 0 & 0 & & 0 & & & \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & & \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & & \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & & \\ 0 & 0 & & 0 & & & \end{array} \right) \quad B_2$$

für alle $2 \leq i \leq m$: Ziehe von Zeile i das $\frac{a_{i1}}{a_{11}}$ -fache von Zeile 1 ab
(falls Pivotelement $\beta_1 = a_{11} \neq 0$, ansonsten vertausche Zeilen) und wende Verfahren wiederum auf B_2 an.

Definition 4.12 (Rang). Die maximale Anzahl linear unabhängiger Zeilen- bzw. Spaltenvektoren einer Matrix $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ heißt Rang von A . Schreibweise: $\text{rg}(A)$ oder $\text{rang}(A)$.

Korollar 4.3. Es gilt stets $\text{rg}(A) \leq \min\{m, n\} = m$

Betrachte nochmal Zeilenstufenform:

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & & & & & & & \\ & 1 & & & & & & \\ & & 1 & & & & & \\ & & & 1 & & & & \\ & & & & 1 & & & \\ & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & \\ & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & \end{array} \right) \begin{array}{l} \} \text{rg}(A)=|P| \\ \} \text{Nullzeilen} \end{array}$$

die letzten $m - \text{rg}(A)$ Zeilen sind als LK aus den anderen $\text{rg}(A)$ Zeilen von A darstellbar!

$A \in K^{m \times n}$, $b \in K^m$; löse LGS $Ax=b$

Bringe $(A|b)$ mit Elementarmatrizen auf Zeilenstufenform

Es gibt 3 Fälle: ($(A|b)$ sogenannte erweiterte Koeffizientenmatrix)

$$(A|b) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|cccc} \text{Stufenform} & & & & & & & \\ & 1 & & & & & & \\ & & 1 & & & & & \\ & & & 1 & & & & \\ & & & & 1 & & & \\ & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & \\ & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & \end{array} \right), e = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{m - \text{rg}(A)}$$

(i) $0 = 1$ ist falsche Aussage \Rightarrow LGS nicht lösbar

(ii) $A \in K^{n \times n}$ quadratisch

$$A \in K^{n \times n} \text{ quadratisch}$$

$$(A|b) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & * & & * & c_1 & & & \\ & 1 & & * & & & & \\ & & 1 & * & & & & \\ & & & 1 & & & & \\ & 0 & & & 1 & & & \\ & & & & & 1 & & \\ & & & & & & 1 & \\ & & & & & & & 1 \end{array} \right)$$

\Rightarrow Die Lösung des LGS ist eindeutig

(iii) \Rightarrow Die Lösung des LGS ist mehrdeutig, d.h., es gibt mehrere verschiedene Lösungen.
(im Falle $K = \mathbb{R}$ sogar unendlich viele)

Man kann $|\overline{P}|$ Variablen frei wählen:

$$(A|b) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{c|c} \text{Zeilenelemente} & \text{Spalten} \\ \hline 0 & \begin{smallmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{smallmatrix} \end{array} \right)$$

$$x_i := \lambda_i, i \in \bar{P} \text{ (z.B. } \lambda_i = 0)$$

Bestimme restliche Variablen durch Rückwärtseinsetzen:

$$\text{Sei } B = (\beta_{ij})_{i=1, \dots, m} \Rightarrow \forall_{k \in P} x_k = \left(c_k - \sum_{j \in \bar{P}} \beta_{kj} \lambda_j \right) / \beta_k$$

$$\text{Für } \lambda_j = 0, j \in \bar{P}, \text{ gilt: } \forall_{k \in P} x_k = c_k / \beta_k$$

Dies gilt nur, wenn man fordert, dass in der Zeilenstufenform über den Pivotelementen Nullen stehen (sog. kanonische Zeilenstufenform)!

$$\text{Ansonsten: Rückwärtseinsetzen } x_k = \left(c_k - \sum_{j=k+1}^n \beta_{kj} x_j \right) / \beta_k$$

Wir betrachten i.f. nur noch die kanonische Zeilenstufenform. Sei weiterhin $P = \{1, \dots, \bar{k}\}, \bar{P} = \{\bar{k} + 1, \dots, u\}$ für $\bar{k} \in \mathbb{N}$ (ggf. Spalten umordnen!) Dann ist

$$\bar{x} := \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{\bar{k}} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \in K^n$$

eine spezielle Lösung des LGS. Für die allgemeine Lösung betrachte für $j \in \bar{P}$:

$$\ell_j := \begin{pmatrix} -\frac{\beta_{1j}}{\beta_1} \\ \vdots \\ -\frac{\beta_{kj}}{\beta_k} \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \in K^n$$

Dabei ist der letzte Teil von ℓ_j der j -te Einheitsvektor in $K^{\bar{P}}$.

$\Rightarrow \tilde{x} := \bar{x} + \sum_{j \in \bar{P}} \lambda_j \ell_j$ ebenfalls Lösung (da bel. Wahl der λ_j möglich)

$$\Rightarrow \underbrace{A\tilde{x}}_{=b} = \underbrace{A\bar{x}}_{=b} + A \left(\sum_{j \in \bar{P}} \lambda_j \ell_j \right) \Rightarrow A \left(\sum_{j \in \bar{P}} \lambda_j \ell_j \right) = 0$$

Die ℓ_1, \dots, ℓ_n , sind eine Basis des sog. Kerns von A .

Definition 4.13 (Kern einer Matrix). Die Menge $\ker A := \{x \in K^n \mid Ax = 0\}$ heißt Kern von A .

Satz 4.4 (Dimensionsformel). Es gilt

$$\dim(\ker A) + \operatorname{rg}(A) = \dim(K^n) = n$$

Definition 4.14 (invertierbare Matrix). Eine quadratische Matrix $A \in K^{m \times m}$ heißt invertierbar, falls $\exists B \in K^{m \times m} \ A \cdot B = B \cdot A = E_m$. Schreibweise: $B = A^{-1}$ (inverse Matrix)

Korollar 4.4. Sei $A \in K^{m \times m}$ eine invertierbare Matrix. Dann hat das LGS $Ax = b$, $b \in K^m$, die eindeutige Lösung $x = A^{-1}b \in K^m$.

Beweis. Für $x = A^{-1}b$ gilt $Ax = A(A^{-1}b) = (AA^{-1})b = E_m b = b$

Multipliziere A^{-1} von links

$$\Rightarrow A^{-1}(Ax) = (A^{-1}A)x = x = A^{-1}b$$

□

Es sind nicht alle Matrizen invertierbar!

Best. von A^{-1} durch Gauß-Elimination mit erweiterter Koeffizientenmatrix $(A|E_m) \rightarrow (E_m|A^{-1})$.
Falls links Nullzeilen entstehen, ist A nicht invertierbar.

Die Menge der Matrizen bildet mit $+$ und \cdot einen Ring mit Einselement.

Satz 4.5 (Inverse Matrix für $m = 2$). Für $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ gilt im Falle von $ad - bc \neq 0$:

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

Beweis: in der Übung!

Gauß tut's!

Sei $L = L_1 \dots L_k$ eine Folge von Elementoperationen., $k \in \mathbb{N}$.

$\Rightarrow L^{-1} = (L_1 \dots L_k)^{-1} = L_k^{-1} \dots L_1^{-1}$ wieder Folge von Elementoperationen.

Es gilt: $A \cdot \ell = b \Leftrightarrow L \cdot (A \cdot \ell) = L \cdot b$, da L invertierbar

$\Leftrightarrow (L \cdot A) \cdot \ell = L \cdot b = c$

4.4 Determinanten

Definition 4.15 (Determinante). Sei $A \in K^{m \times m}$, $m \geq 2$, und $A_{ij} \in K^{(m-1) \times (m-1)}$ diejenige Matrix, die entsteht, wenn man Zeile i und Spalte j streicht. Dann heißt $\det(A) := a_{11}$ für $A \in K^{1 \times 1}$ und

$$\det(A) := \sum_{i=1}^m (-1)^{i+1} a_{i1} \det(A_{i1})$$

die Determinante von A . Schreibweisen: $\det(A) = \det(a_{ij}) = |A|$

Berechnung von Determinanten Vorzeichenschema:

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mm} \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} + & - & + & - & \cdots \\ - & + & - & + & \cdots \\ + & - & + & - & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{vmatrix}$$

$$\det(A) = a_{11} \det(A_{11}) - a_{21} \det(A_{21}) + \dots + (-1)^{m-1} a_{m1} \det(A_{m1})$$

$m = 2$: $\det(A) = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$ Man muß die Determinante nicht notwendigerweise nach der ersten Spalte entwickeln. Alle Zeilen und Spalten sind erlaubt! Wähle die Zeilen/Spalten mit den meisten Nullen!

Beispiel 4.4. $\det \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} - 0 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}$

$$= 1 \cdot (-1 - 6) + 1 \cdot (8 - (-2)) = -7 + 10 = 3$$

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} - 4 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + 2 \cdot \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= 1 \cdot (-7) - 4 \cdot (-2) + 2 \cdot (+1) = -7 + 8 + 2 = 3$$

Satz 4.6. Sei $A = K^{m \times m}$ eine obere bzw. untere Dreiecksmatrix, d.h., alle Einträge unterhalb bzw. oberhalb der Diagonalen sind Null, oder eine Diagonalmatrix, d.h. alle Einträge außer der Diagonaleinträge sind Null. Dann ist die Determinante gleich dem Produkt der Diagonalelemente, also

$$\det(A) = \prod_{i=1}^m a_{ii}$$

Insbesondere gilt $\det(E_m) = 1$.

Beweis: in der Übung

Tipp: vollständige Induktion!

(Man muss $\det(A)$ nicht nach der ersten Spalte entwickeln. Alle Zeilen und Spalten sind erlaubt!)

Satz 4.7. Sei $A \in K^{m \times m}$ eine quadratische Matrix. Dann gilt:

- (i) Vertauscht man zwei Zeilen oder Spalten von A , so ändert sich das Vorzeichen von $\det(A)$.
- (ii) Multipliziert man eine Zeile oder Spalte mit einem Skalar, so wird auch $\det(A)$ mit diesem Skalar multipliziert.
- (iii) Zieht man das Vielfache einer Zeile von einer anderen Zeile ab, so ändert sich die Determinante nicht.
- (iv) Zwei Zeilen bzw. Spalten von A sind genau dann linear abhängig, wenn $\det(A) = 0$.
- (v) $\det(A^T) = \det(A)$

Beweis. (i) -(iii) Übung

(iv) später

- (v) Sei L eine der drei Elementaroperationen aus (i)–(iii)
 $\Rightarrow \det(L) \in \{-1, \alpha, 1\} \wedge \det(LA) = \det(L) \cdot \det(A)$

Induktiv: Sei $L_1, \dots, L_k, k \in \mathbb{N}$, Folge von Elementaroperationen
 $\Rightarrow \det(L_1 \dots L_k) \cdot A = \det(L_1) \dots \det(L_k) \cdot A$

1.Fall: A nicht invertierbar

$\Leftrightarrow A$ lässt sich nicht durch Elementarop. auf Einheitsmatrix bringen, es entstehen Nullzeilen

\Leftrightarrow dasselbe gilt für A^T (Nullspalten)

$\Leftrightarrow A^T$ nicht invertierbar

Also, falls A nicht invertierbar, gilt $\det(A) = \det(A^T) = 0$, wg. (iv).

2.Fall: A invertierbar

$$\Rightarrow \exists L_1, \dots, L_k \text{ Elementarop. } L_1, \dots, L_k \cdot A = E_m$$

$$\Rightarrow A = L_k^{-1} \dots L_1^{-1} \cdot E_m = L_k^{-1} \dots L_1^{-1}$$

$$\Rightarrow A^T = (L_k^{-1} \dots L_1^{-1})^T = (L_1^{-1})^T \dots (L_k^{-1})^T$$

$$\Rightarrow \det(A^T) = \det((L_1^{-1})^T) \dots \det((L_k^{-1})^T)$$

$$= \det(L_1^{-1}) \dots \det(L_k^{-1})$$

$$= \det(L_k^{-1}) \dots \det(L_1^{-1})$$

$$= \det(L_k^{-1} \dots L_1^{-1}) = \det(A)$$

Transposition der Elementarop. ändert nichts an der Determinante (Übung)

□

Satz 4.8. (Determinantenmultiplikationssatz) Für $A, B \in K^{m \times m}$ gilt
 $\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B)$

Beweis. 1.Fall: $\det(A) = 0$

$$\Rightarrow \exists L_1, \dots, L_k \text{ Elem.-op. } L_k \dots L_1 \cdot A \text{ hat Nullzeilen}$$

$$\Rightarrow L_k \dots L_1 \cdot A \cdot B \text{ hat ebenfalls Nullzeilen}$$

$$\Rightarrow \det(L_k \dots L_1 \cdot A) = \det(L_k \dots L_1 \cdot A \cdot B) = 0$$

$$\Rightarrow \underbrace{\det(L_k) \dots \det(L_1)}_{\neq 0} \cdot \det(A)$$

$$= \underbrace{\det(L_k) \dots \det(L_1)}_{\neq 0} \cdot \det(A \cdot B) = 0$$

$$\Rightarrow \det(A) = \det(A \cdot B) = 0$$

2.Fall: $\det(A) \neq 0$

$\Rightarrow A$ ist Folge von inversen Elementarop.

$$A = L_1^{-1} \dots L_k^{-1} \cdot E_m = L_1^{-1} \dots L_k^{-1}$$

$$\Rightarrow \det(A \cdot B) = \det(L_1^{-1} \dots L_k^{-1} \cdot B)$$

$$= \det(L_1^{-1}) \dots \det(L_k^{-1}) \cdot \det(B)$$

$$= \det(A) \cdot \det(B)$$

□

Korollar 4.5. (i) Für $n \in \mathbb{N}$ gilt $\det(A^n) = (\det(A))^n$

(ii) Ist A invertierbar, so gilt $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$

(iii) Ist $A \in K^{2 \times 2}$ gilt $A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$

Beweis. (i) $\det(A^n) = \det(A \dots A) = \det(A) \dots \det(A) = (\det(A))^n$

(ii) Es gilt $A \cdot A^{-1} = E_m$
 $\Rightarrow \det(A \cdot A^{-1}) = \det(E_m) = 1$
 Satz 4.8 $\Rightarrow \det(A) \cdot \det(A^{-1}) = 1$
 $\det(A) \neq 0 \Rightarrow \det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$

□

Satz 4.9 (Determinantenentwicklungssatz). *Es ist egal, nach welcher Zeile oder Spalte die Determinante entwickelt wird.*

4.5 Wichtige algebraische Strukturen in der Linearen Algebra

Satz 4.10 (Ring der Matrizen). *Die Menge der Matrizen $K^{n \times n}$, bildet zusammen mit der Matrixaddition und -multiplikation einen Ring mit Einselement $E_n \in K^{n \times n}$. Da bzgl. \cdot im allgemeinen keine Kommutativität gilt und nicht alle Matrizen invertierbar sind, bildet die Menge der Matrizen keinen Körper.*

Satz 4.11 (Spezielle und allgemeine lineare Gruppe). *Die Abbildung $\det : (K^{n \times n} \setminus \{0\}, \cdot) \rightarrow (K \setminus \{0\}, \cdot)$ ist ein Homomorphismus. Die sog. spezielle lineare Gruppe*

$$\mathcal{SL}_n^K := \{A \in K^{n \times n} \mid \det(A) = 1\}$$

bildet eine Untergruppe der Gruppe der invertierbaren Matrizen \mathcal{GL}_n^K (sog. allgemeine lineare Gruppe).

5 Eigenwerte und Eigenvektoren

5.1 Polynome und der Fundamentalsatz der Algebra

Definition 5.1. Sei R ein Ring.

(i) Für Koeffizienten $a_0, \dots, a_n \in R$, $n \in \mathbb{N}_0$ und $x \in R$ heißt

$$P(x) := a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_{n-1}x^{n-1} + a_nx^n = \sum_{i=0}^n a_i x^i$$

Polynom über R .

(ii) Falls existent, so heißt

$$a_k := a_{\max\{i \mid 0 \leq i \leq n, a_i \neq 0\}}$$

führender Koeffizient von P . $\text{grad}(P) := k$ heißt Grad von P . Falls $a_k = 1$, so heißt P normiert oder monisch. Polynome vom Grad 1 heißen linear. Polynome mit $a_k = 1 \wedge \forall_{0 \leq i \leq k-1} a_i = 0$, heißen Monome.

(iii) Die Menge aller Polynome über R wird mit $R[x]$ bezeichnet.

(iv) Seien $P, Q \in R[x]$, $P = \sum_{i=0}^m a_i x^i$, $Q = \sum_{i=0}^n b_i x^i$ zwei Polynome über R mit $\text{grad}(P) = m$

und $\text{grad}(Q) = n$. Dann heißt $P + Q = \sum_{k=0}^s c_k x^k$ mit $s \leq \max\{m, n\}$ und $c_k = a_k + b_k$, $0 \leq k \leq \min\{m, n\}$ und

$$c_k = \begin{cases} a_k, & n < k \leq m, \quad n < m \\ b_k, & m < k \leq n, \quad m < n \end{cases}$$

die Summe von P und Q .

(iv) $P \cdot Q = \sum_{i=0}^s d_i x^i$ mit $d_i = \sum_{k=0}^i a_k b_{i-k}$, $0 \leq i \leq m+n$, $s \leq m+n$ (Gleichheit, falls R ein Körper ist), wobei $a_k = 0$ für $k > m$ und $b_k = 0$ für $k > n$, ist das Produkt von P und Q .

(v) P und Q heißen gleich, falls Grad und Koeffizienten gleich sind.

$(R[x], +, \cdot)$ bildet einen kommutativen Ring mit Einselement, den sog. Polynomring.

Beweisskizze: Einselement bzgl. $+$: Nullpolynom, bzgl. \cdot : 1-Polynom, additives Inverses existiert, multiplikatives nur für konstante Polynome.

Beispiel 5.1. $P(x) = x^2 + 3x - 1$, $Q(x) = 2x^3 - 5x^2 + 7$
(Polynome über \mathbb{R})

$$\implies (P + Q)(x) = 2x^3 - 4x^2 + 3x + 6 \quad (5.1)$$

$$(P \cdot Q)(x) = 2x^5 - 5x^4 + 7x^2 + 6x^4 - 15x^3 + 21x - 2x^3 + 5x^2 - 7 \quad (5.2)$$

$$= 2x^5 + x^4 - 17x^3 + 12x^2 + 21x - 7 \quad (5.3)$$

Definition 5.2 (Nullstellen und Vielfachheiten). Sei $P \in \mathbb{R}[x]$. $x_0 \in \mathbb{R}$ heißt Nullstelle von P , falls $P(x_0) = 0$.

$$\max\{k \in \mathbb{N}_0 \mid (x - x_0)^k \mid P\}$$

(der zweite senkrechte Strich ist die Teilbarkeitsrelation!) heißt Vielfachheit der Nullstelle x_0 in P . Ist die Vielfachheit 1, so heißt x_0 einfache Nullstelle. Ist die Vielfachheit 2, so heißt x_0 doppelte Nullstelle. Ist die Vielfachheit 3, so heißt x_0 dreifache Nullstelle usw.

Beispiel 5.2. $P(x) = x^5 + 3x^4 - 12x^3 - 12x^2 - 13x - 15 \in \mathbb{R}[x]$

durch Probieren: $x_0 = -1$

Polynomdivision durch $x + 1$, denn

$(x + 1) \cdot Q(x) =: P(x) = 0$, falls $x_0 = -1$

($Q(x)$ Polynom mit $\text{grad}(Q) \leq 4$)

$(x^5 + 3x^4 - 12x^3 - 12x^2 - 13x - 15) : (x + 1) = x^4 + 2x^3 - 14x^2 + 2x - 15 =: Q(x)$

$$\begin{array}{r} x^5 + 3x^4 - 12x^3 - 12x^2 - 13x - 15 \\ - x^5 - x^4 \\ \hline 2x^4 - 12x^3 \\ - 2x^4 - 2x^3 \\ \hline - 14x^3 - 12x^2 \\ 14x^3 + 14x^2 \\ \hline 2x^2 - 13x \\ - 2x^2 - 2x \\ \hline - 15x - 15 \\ 15x + 15 \\ \hline 0 \end{array}$$

Weitere NS durch Probieren: $x_0 = 3$

$Q(x) : (x - 3) = x^3 + 5x^2 + x + 5 =: R(x)$

Weitere NS durch Probieren: $x_0 = -5$

$R(x) : (x + 5) = x^2 + 1 \geq 1 > 0 \Rightarrow$ keine NS in \mathbb{R}

Zerlegung von P :

$$P(x) = (x + 1)^1(x - 3)^1(x + 5)^1(x^2 + 1)$$

$\Rightarrow -1, 3, -5$ einfache NSn

Es gibt noch weitere NSn von P , allerdings nicht in \mathbb{R} .

Die Gleichung $x^2 = -1$ ist in \mathbb{R} nicht lösbar.

→ Einführung der imaginären Zahl i mit $i^2 = -1$.

→ Körper der komplexen Zahlen (Gauß, 1831)

$a + ib$; $a, b \in \mathbb{R}$

→ Körpererweiterung von \mathbb{R} :

Erweiterungskörper $\mathbb{C} := \mathbb{R}(i) := \{a + ib \mid a, b \in \mathbb{R}; i^2 = -1\}$

Es gilt: $\mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$, Isomorphismus: $\Phi(a + ib) = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$

Körpereinbettung von \mathbb{C} in $\mathbb{R} : a \mapsto (a, 0), a \in \mathbb{R}$

Neutrales Element in \mathbb{C} bzgl. '+': $0 = 0 + i \cdot 0 \in \mathbb{R}$

Neutrales Element in \mathbb{C} bzgl. '·': $1 = 1 + i \cdot 0 \in \mathbb{R}$

Sei $z = a + ib \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(z) := a$ (Realteil), $\operatorname{Im}(z) := b$ (Imaginärteil)

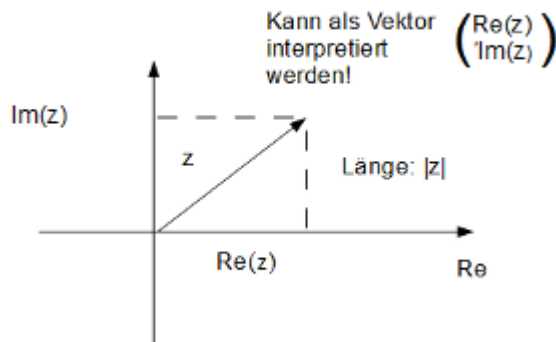
Es gilt $\operatorname{Im}(z) = 0 \Rightarrow z \in \mathbb{R}$

Additives Inverses: $-a - ib \in \mathbb{C}$

Multiplikatives Inverses: $\frac{a}{a^2+b^2} - i\frac{b}{a^2+b^2}$

Betrag: $|z| = \sqrt{a^2 + b^2} = \left\| \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \right\|$

Komplexe Zahlenebene:



Rechenregeln in \mathbb{C} :

Seien $z_1 = a + ib, z_2 = c + id \in \mathbb{C}$

$z_1 \pm z_2 = a \pm c + i(b \pm d)$

$z_1 \cdot z_2 = (a + ib)(c + id) = ac + ibc + iad + i^2bd$
 $= ac + i(bc + ad) - bd$
 $= (ac - bd) + i(bc + ad)$

$$z_2 \neq 0 : \frac{z_1}{z_2} = \frac{a+ib}{c+id} = \frac{a+ib}{c+id} \cdot \frac{c-id}{c-id}$$

$$\begin{aligned} 3. \text{ binom. Formel} &= \frac{ac - 2bd + i(bc - ad)}{c^2 - i^2 d^2} \\ &= \frac{ac + bd + i(bc - ad)}{c^2 + d^2} = \frac{ac + bd}{|z_2|^2} + i \cdot \frac{bc - ad}{|z_2|^2} \end{aligned}$$

Alle algebraischen Gleichungen werden in \mathbb{C} lösbar!

Die Gleichung $x^2 + 1 = 0$ hat die Lösungen $x = i$ und $x = -i$

Zerlegung von P :

$$P(x) = (x + 1)(x - 3)(x + 5)(x + i)(x - i)$$

Satz 5.1. (Fundamentalsatz der Algebra)

Jedes nichtkonstante Polynom $P \in \mathbb{C}[x]$ hat in \mathbb{C} genau $\text{grad}(P)$ Nullstellen. Diese müssen nicht paarweise verschieden sein und sind mit ihren Vielfachheiten gezählt. Falls die Koeffizienten von P reell sind und $z = a + i \cdot b$ Nullstelle ist, dann auch die sog. konjugiert-komplexe Zahl $\bar{z} = a - i \cdot b$.

5.2 Das charakteristische Polynom

Motivation: Matrix $A \in K^n$ bildet Vektor $v \in K^n \setminus \{0\}$ auf die Gerade ab, die durch v aufgespannt wird:

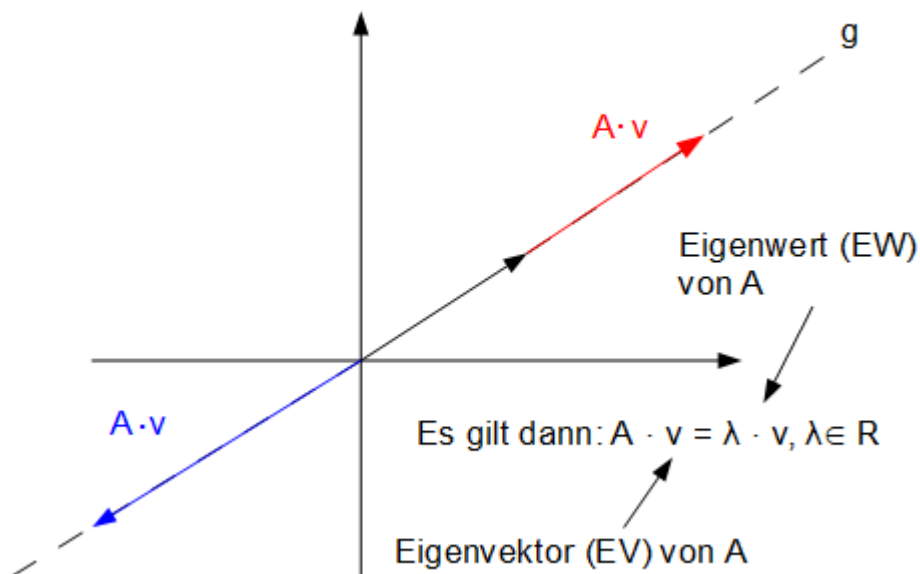
Definition 5.3 (Eigenwerte und Eigenvektoren). Sei $A \in K^{m \times m}$ eine quadratische Matrix. Ein Skalar $\lambda \in K$ heißt Eigenwert von A zum Eigenvektor $v \in K^m \setminus \{0\}$ von A , falls

$$A \cdot v = \lambda \cdot v$$

Es gilt $A \cdot v = \lambda \cdot v \Leftrightarrow (A - \lambda \cdot E_m) \cdot v = 0$. Die Matrix $A - \lambda \cdot E_m$ ist nicht regulär (nicht invertierbar, Beweis in den Übungen!). D.h., die Lösung des LGS ist mehrdeutig, und somit gibt es unendlich viele Eigenvektoren. Der Nullvektor ist per Definition als Eigenvektor ausgeschlossen!

Definition 5.4 (Charakteristisches Polynom). Das Polynom $\chi_A(\lambda) := \det(A - \lambda \cdot E_m)$ heißt charakteristisches Polynom von A .

Die Eigenwerte sind genau die Nullstellen von χ_A . Nach dem Fundamentalsatz der Algebra existieren stets m Eigenwerte (mit Vielfachheiten gezählt), die auch komplex sein können. Falls $\lambda \in \mathbb{C}$ Eigenwert einer reellen Matrix A ist, dann auch der dazu konjugiert-komplexe Eigenwert $\bar{\lambda}$.



Beispiel 5.3. (Eigenwerte)

$$(i) \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \chi_A(\lambda) = \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 1 & 1-\lambda \end{pmatrix} = (1-\lambda)^2 - 2$$

$$= \lambda^2 - 2\lambda - 1 = 0$$

$$\lambda_1 = 1 \pm \sqrt{2} \text{ Eigenwerte von } A$$

$$(ii) \quad A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \chi_A(x) = \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & -2 \\ 1 & 1-\lambda \end{pmatrix}$$

$$= (1-\lambda)^2 + 2 = \lambda^2 - 2\lambda + 3 = 0$$

$$\Rightarrow \lambda_1 = 1 \pm \sqrt{-2}$$

$$= 1 \pm i\sqrt{2}$$

Beispiel 5.4. (Eigenvektoren) Löse $(A - \lambda E_2) v = 0, \lambda = 1 + \sqrt{2}$

$$\begin{pmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 1 & 1-\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -\sqrt{2} & 2 \\ 1 & -\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$-\sqrt{2} \cdot v_1 + 2v_2 = 0$$

$$v_1 - \sqrt{2} \cdot v_2 = 0 \Rightarrow v_1 = \sqrt{2} \cdot v_2$$

$$\text{z.B. } v_2 = 1 \Rightarrow v_1 = \sqrt{2}$$

$$v = \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}$$

Diagonalisierung:

Sei $A \in \mathbb{R}^n$ Suche invertierbare Matrix $V \in \mathbb{R}^n$ mit $V^{-1} \cdot A \cdot V = D = \begin{pmatrix} d_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & d_n \end{pmatrix}$
 (Ergebnis: d_i sind EWe und Spalten von V müssen Basis aus EVn bilden!)

Definition 5.5 (Ähnliche Matrizen). Zwei Matrizen $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ heißen ähnlich, wenn es eine invertierbare Matrix $S \in \mathbb{R}^{n \times n}$ gibt mit $B = S^{-1} \cdot A \cdot S$ bzw. $S \cdot B = A \cdot S$
 $\Rightarrow A$ muss also zur Diagonalmatrix D ähnlich sein, d.h. diagonalisierbar

Definition 5.6 (Diagonalisierbarkeit). Eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ heißt diagonalisierbar, wenn sie zu einer Diagonalmatrix ähnlich ist.

Satz 5.2. Eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ist genau dann diagonalisierbar, wenn sie eine Basis V aus Eigenvektoren besitzt. Die Diagonalisierung lautet

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix} = V^{-1} \cdot A \cdot V,$$

wobei $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ die Eigenwerte von A sind und V als Spalten die Eigenvektoren $v_1, \dots, v_n \in \mathbb{R}^n$ von A enthält.

Korollar 5.1. Ähnliche Matrizen haben dieselben Eigenwerte.
 Seien A, B ähnlich.

$$\begin{aligned} \Rightarrow \exists S \text{ inv. } B &= S^{-1} \cdot A \cdot S & \Rightarrow Bv &= \lambda v \\ \text{Sei } \lambda \text{ EW zu } B & & \Rightarrow (S^{-1}AS)v &= \lambda v \\ & & \Rightarrow A(Sv) &= \lambda(Sv) \Rightarrow \lambda \text{ EV zu } A \text{ mit EV } Sv \\ \text{Sei } \lambda \text{ EW zu } A & & \Rightarrow Av &= \lambda v \\ & & \Rightarrow (SBS^{-1})v &= \lambda v \\ & & \Rightarrow B(S^{-1}v) &= \lambda(S^{-1}v) \\ \Rightarrow \lambda \text{ EW zu } B & \text{ mit EV } S^{-1}v \end{aligned}$$

Satz 5.3. Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine Matrix mit Eigenwerten $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ und Eigenvektoren $v_1, \dots, v_n \in \mathbb{R}^n$. Sei $r \in \mathbb{N}$ so, daß $\lambda_1, \dots, \lambda_r \in \mathbb{R}$ paarweise verschieden sind. Dann sind die zugehörigen Eigenvektoren $v_1, \dots, v_r \in \mathbb{R}^n$ linear unabhängig.

Beweis. (durch Induktion über r)

IA: ($r = 1$) klar, ein EV $v_1 \neq 0$ l.u.

IS: $r - 1 \Rightarrow r$

IV: $r - 1$ EVn zu EWn l.u.

Es gelte: $\sum_{i=1}^r \alpha_i v_i = 0$ für $\alpha_1, \dots, \alpha_r \in \mathbb{R}$ für $r > 1$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^r \lambda_i \alpha_i v_i = \sum_{i=1}^r A \alpha_i v_i = A \sum_{i=1}^r \alpha_i v_i = 0$$

Aber auch insbesondere: $\sum_{i=1}^r \lambda_1 \alpha_i v_i = 0$

$$\Rightarrow \sum_{i=2}^r (\lambda_i - \lambda_1) \alpha_i v_i = 0$$

v_2, \dots, v_r sind $r - 1$ EVn zu verschiedenen EWn

$$\Rightarrow v_2, \dots, v_r \text{ l.u.}$$

$$\Rightarrow (\lambda_i - \lambda_1) \alpha_i = 0, \quad i = 2, \dots, r$$

$$\Rightarrow \alpha_i = 0, \quad i = 2, \dots, r$$

$$\Rightarrow \alpha_1 v_1 = 0 \Rightarrow \alpha_1 = 0$$

$$\text{also insgesamt: } \alpha_1 = \dots = \alpha_r = 0 \Rightarrow v_1, \dots, v_r \text{ l.u.}$$

□

Definition 5.7. Sei $\lambda \in \mathbb{R}$ ein Eigenwert einer Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Dann heißt

$$\mathcal{U}_\lambda := \ker(A - \lambda E_n) = \{v \in \mathbb{R}^n \mid A \cdot v = \lambda \cdot v\}$$

Eigenraum zum Eigenvektor λ .

Satz 5.4. Es seien $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ und $b \in \mathbb{R}^n$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

- (i) Die Lösung des LGS $(A|b)$ ist eindeutig.
- (ii) $\ker A = \{0\}$, d.h. der Kern von A besteht nur aus dem Nullvektor.
- (iii) A ist invertierbar.
- (iv) $\det(A) \neq 0$.
- (v) $\text{rg}(A) = n$.

(vi) $\lambda = 0$ ist kein Eigenwert von A .

Beweis: (durch Ringschluß)

Zeige zunächst: $\text{rg}(A) < m \Rightarrow \det(A) = 0$. Ist eine Zeile von A eine Linearkombination von anderen Zeilen, was durch $\text{rg}(A) < m$ ja gegeben ist, kann diese Zeile durch Subtraktion dieser Linearkombination zur Nullzeile gemacht werden. Der Wert der Determinante ändert sich dabei nicht. Es folgt:

$$\det(A) = \det \begin{pmatrix} x & \cdots & x \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ x & \cdots & x \\ 0 & \cdots & 0 \\ x & \cdots & x \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ x & \cdots & x \end{pmatrix} = 0 \cdot \det \begin{pmatrix} x & \cdots & x \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ x & \cdots & x \\ * & \cdots & * \\ x & \cdots & x \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ x & \cdots & x \end{pmatrix}$$

Dabei stehen x und $*$ für irgendwelche beliebigen Zahlen. Die Nullzeile entsteht dadurch, daß man die $*$ -Zeile mit 0 multipliziert. Diese 0 kann man vor die Determinante schreiben.

Wir haben jetzt: $\det(A) \neq 0 \Rightarrow \text{rg}(A) = m$. Daraus folgt wiederum, daß man bei einer Zeilenreduktion von $(A|E_m)$ keine Nullzeile erzeugen kann. Damit ist A invertierbar. Wegen

$$Ax = b \Leftrightarrow x = A^{-1}b$$

ist damit das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ eindeutig lösbar. Damit ist auch das lineare Gleichungssystem $Ax = 0$ eindeutig lösbar, woraus direkt $\ker A = \{0\}$ folgt. Damit kann auch $\lambda = 0$ kein Eigenwert von A sein, denn ansonsten würde

$$A \cdot v = 0 \cdot v = 0$$

gelten mit einem Eigenvektor $v \neq 0$, was ein Widerspruch zu $\ker A = \{0\}$ wäre. Weiterhin gilt, falls $\lambda = 0$:

$$\det(A) = 0 \Rightarrow \det(A - \lambda E_m) = 0 \Rightarrow \lambda = 0 \text{ Eigenwert}$$

Also im Umkehrschluß: $\lambda = 0$ kein Eigenwert $\Rightarrow \det(A) \neq 0$

Insgesamt haben wir gezeigt:

$$\begin{aligned} \det(A) \neq 0 &\Rightarrow \text{rg}(A) = m \Rightarrow A \text{ invertierbar} \Rightarrow \text{LGS } Ax = b \text{ eindeutig lösbar} \\ &\Rightarrow \ker A = \{0\} \Rightarrow \lambda = 0 \text{ kein Eigenwert} \Rightarrow \det(A) \neq 0 \end{aligned}$$

Damit ist der Ringschluß komplett. □

5.3 Definitheit von Matrizen

Definition 5.8 (Definitheit). Sei A eine $n \times n$ -Matrix.

- (i) A heißt positiv definit (pd), falls $\forall_{x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}} \langle x, Ax \rangle > 0$.
- (ii) A heißt positiv semidefinit (psd), falls $\forall_{x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}} \langle x, Ax \rangle \geq 0$.
- (iii) A heißt negativ (semi-)definit (nd/nsd), falls $-A$ positiv (semi-)definit ist.
- (iv) A heißt indefinit, falls $\exists_{x,y \in \mathbb{R}^n} \langle x, Ax \rangle > 0 \wedge \langle y, Ay \rangle < 0$.

Satz 5.5. Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Dann gilt:

- (i) A hat nur reelle Eigenwerte.
- (ii) A hat eine Orthonormalbasis aus Eigenvektoren.

Beispiel 5.5. $A = \begin{pmatrix} 4 & 12 \\ 12 & 11 \end{pmatrix}$ symm.

EW: $\lambda_1 = 20, \lambda_2 = -5; \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$

EVn: $v_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \quad v_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix}$

$\langle v_1, v_2 \rangle = 0$

ONB: $\frac{1}{5} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix}$

Korollar 5.2. Falls $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ symmetrisch und $\lambda \in \mathbb{R}$ ein Eigenwert mit Vielfachheit k ist, so hat λ auch einen k -dimensionalen Eigenraum U_λ .

Beweis. Die zu λ gehörigen EVn bilden den Eigenraum von λ . Da es zu λ genau k linear unabhängige EVn gibt und diese nach Satz 5.5 (ii) eine ONB bilden, gilt $\dim_{\mathbb{R}}(U_\lambda) = k$. □

Satz 5.6. Eine symmetrische Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ist genau dann positiv definit, wenn alle ihre Eigenwerte echt positiv sind.

Definition 5.9 (Hauptminor). Die Determinante der linken oberen $k \times k$ -Untermatrix einer Matrix heißt der k -te Hauptminor, Bezeichnung: M_k .

Beispiel 5.6. (i) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}; M_1 = \det(2) = 2$

$$M_2 = \det \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = 5$$

$$M_3 = \det(A) = 2 \cdot \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 2 \cdot 5 - 2 = 8$$

$$(ii) \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 3 \\ -2 & 3 & 1 \end{pmatrix}; \quad M_1 = \det(1) = 1$$

$$M_2 = \det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = 1; \quad M_3 = \det(A) = 1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -7 - 7 - 2 \cdot 7 = -28$$

Satz 5.7 (Kriterium von Sylvester). *Es gilt:*

- (i) A *pd* $\Leftrightarrow \forall_{k=1,\dots,n} M_k > 0$
- (ii) A *nd* $\Leftrightarrow \forall_{k=1,\dots,n} (-1)^k M_k > 0$
- (iii) $\forall_{k=1,\dots,n-1} M_k > 0 \wedge M_n = \det(A) = 0 \Rightarrow A$ *psd*
- (iv) $\forall_{k=1,\dots,n-1} (-1)^k M_k > 0 \wedge M_n = \det(A) = 0 \Rightarrow A$ *nsd*
- (v) $M_n \neq 0$, aber weder (i) noch (ii) trifft zu $\Rightarrow A$ *indefinit*
- (vi) $M_k > 0 \wedge M_\ell < 0$ für k, ℓ ungerade $\Rightarrow A$ *indefinit*
- (vii) A hat mindestens ein echt positives und ein echt negatives Diagonalelement $\Rightarrow A$ *indefinit*

Beispiel 5.7. (i) $M_1, M_2, M_3 > 0 \Rightarrow A$ *pd*

- (ii) weder $M_1, M_2, M_3 > 0$
noch $M_1 < 0 (\Rightarrow (-1)^1 > 0)$, $M_2 > 0 (\Rightarrow (-1)^2 M_2 > 0)$,
 $M_3 < 0 (\Rightarrow (-1)^3 M_3 > 0)$
(abwechselndes VZ, mit ' $<$ ' beginnend) $\Rightarrow A$ weder *pd* noch *nd*
 $M_3 \neq 0 \Rightarrow A$ *indefinit*

Allgemeine Vorgehensweise zur Definitheitsprüfung:

- 1) Hat A Diagonalgestalt? Dann sind EWe auf Diagonale ablesbar; entscheide Definitheit direkt.
- 2) Falls nein, bestimme alle Hauptminoren von A .
- 3) Alle Hauptminoren $> 0 \Rightarrow A$ *pd*
- 4) Abwechselndes VZ der Hauptminoren (mit ' $<$ ' beginnend) $\Rightarrow A$ *nd*
- 5) letzter Hauptminor $M_n = \det(A) = 0 \Rightarrow$ Semidefinitheit
- 6) bislang keine Entscheidung getroffen, also „ansonsten“: A *indefinit*

Hinweis: Satz 5.7 (viii) sehr nützlich, um direkt auf Indefinitheit zu entscheiden.

Satz 5.8 (Definitheit der Inversen). *Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ positiv definit. Dann ist A invertierbar, und A^{-1} ist auch positiv definit.*

Beweis. Da A pd, gilt $\det(A) \neq 0$ (sonst wäre A nach dem Kriterium von Sylvester semidefinit).
 $\Rightarrow A$ invertierbar.

Da A pd, gilt $\forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \langle x, Ax \rangle > 0$

Sei $y = Ax$ beliebig. Dann gilt: $x = A^{-1}y$, da invertierbar. Also gilt auch: $\langle A^{-1}y, A(A^{-1}y) \rangle > 0$
für $y \in \mathbb{R}^n$ beliebig, denn die Abbildung $x \mapsto Ax$ ist bijektiv.

$\Rightarrow \langle A^{-1}y, y \rangle = \langle y, A^{-1}y \rangle > 0 \Rightarrow A^{-1}$ pd □

Satz 5.9. Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Dann gilt:

- (i) A und A^T haben dieselben Eigenwerte.
- (ii) AA^T und $A^T A$ haben dieselben Eigenwerte. Ist v Eigenvektor von AA^T ($A^T A$), so ist $A^T v$ (Av) Eigenvektor von $A^T A$ (AA^T).
- (iii) AA^T und $A^T A$ sind positiv semidefinit. Falls A invertierbar, so sind sie positiv definit. Sie sind symmetrisch und haben somit reelle Eigenwerte. Diese sind positiv und echt positiv, falls A invertierbar.

Beweis: (i) Sei $\lambda \in \mathbb{C}$ EW von A

$$\begin{aligned} \Rightarrow \det(A^T - \lambda E_n) &= \det((A - \lambda E_n)^T) \\ &= \det(A - \lambda E_n) = 0 \\ \Rightarrow \lambda &\text{ EW von } A^T \end{aligned}$$

(ii) Sei $\lambda \in \mathbb{C}$ EW von AA^T zum EV $v \in \mathbb{C}^n$

$$\begin{aligned} \Rightarrow AA^T v &= \lambda v \\ \Rightarrow A^T A(A^T v) &= \lambda(A^T v) \\ &\Rightarrow \lambda \text{ EW von } A^T A \text{ zum EV } A^T v \end{aligned}$$

Sei $\lambda \in \mathbb{C}$ EW von $A^T A$ zum EV $v \in \mathbb{R}^n$.

$$\begin{aligned} \Rightarrow A^T Av &= \lambda v \\ \Rightarrow AA^T(Av) &= \lambda(Av) \\ &\Rightarrow \lambda \text{ EW von } AA^T \text{ zum EV } Av \end{aligned}$$

(iii) Wegen $(AA^T)^T = (A^T)^T A^T = AA^T$ und $(A^T A)^T = A^T (A^T)^T = A^T A$ sind AA^T und $A^T A$ symmetrisch \Rightarrow ihre EWe sind reell.

Wegen $\forall x \in \mathbb{R}^n \langle x, AA^T x \rangle = x^T (AA^T x) = (A^T x)^T (A^T x) = \langle A^T x, A^T x \rangle \geq 0$ (Skalarprodukt pd) und $\langle x, A^T A x \rangle = x^T (A^T A x) = (Ax)^T Ax = \langle Ax, Ax \rangle \geq 0$, sind AA^T und $A^T A$ psd. Da sie symmetrisch sind, sind alle EWe ≥ 0 .

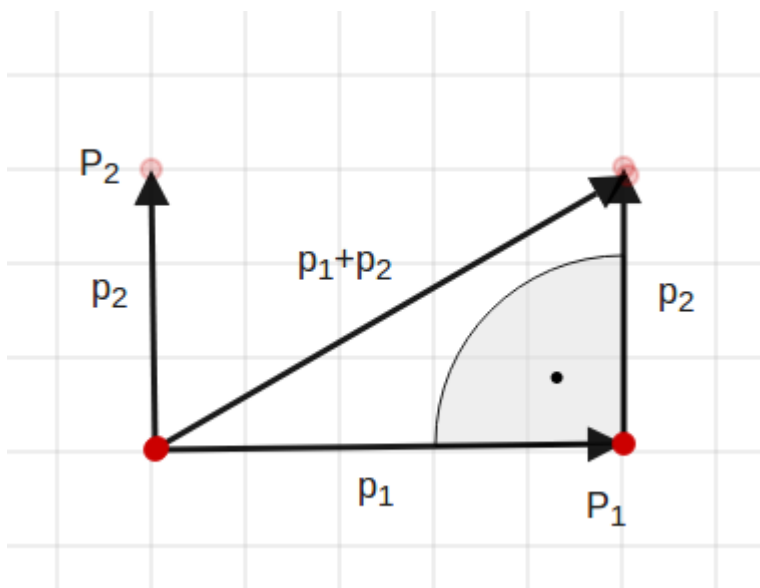
Ist A invertierbar, so gilt $\ker A = \ker A^T = \{0\}$, und es gilt

$\forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \langle Ax, Ax \rangle \neq 0 \wedge \langle A^T x, A^T x \rangle \neq 0 \Rightarrow \forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\} AA^T, A^T A$ pd \Rightarrow alle EWe > 0

□

6 Euklidische Räume

6.1 Skalarprodukt und Orthogonalräume



Motivation: Längen/Abstände von Vektoren via Pythagoras:

Betrachte die Punkte $P_1(x_1, y_1)$ und $P_2(x_2, y_2)$.

$||\overrightarrow{OP_1}|| = ||p_1|| = \sqrt{x_1^2 + y_1^2}$ (Länge des Ortsvektors von P_1)

$||\overrightarrow{OP_2}|| = ||p_2|| = \sqrt{x_2^2 + y_2^2}$ (Länge des Ortsvektors von P_2)

$d(p_1, p_2) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$ (Abstand zwischen den Punkten P_1 und P_2)

Betr. Funktion :

$$\begin{aligned}
 \langle p_1, p_2 \rangle &:= \frac{1}{2} (||p_1 + p_2||^2 - ||p_1||^2 - ||p_2||^2) \\
 &= \frac{1}{2} ((x_1 + x_2)^2 + (y_1 + y_2)^2 - x_1^2 - y_1^2 - x_2^2 - y_2^2) \\
 &= \frac{1}{2} (2(x_1x_2 + y_1y_2)) \\
 &= x_1x_2 + y_1y_2 \\
 &= 0 \\
 \Leftrightarrow ||p_1 + p_2||^2 &= ||p_1||^2 + ||p_2||^2
 \end{aligned}$$

d.h. p_1, p_2 stehen aufeinander senkrecht

Winkel $\omega \in [0, \pi)$ zwischen zwei Vektoren x und y und Länge eines Vektors x :

$$\begin{aligned} \cos(\omega) &= \frac{\langle x, y \rangle}{||x|| \cdot ||y||} \\ ||x|| &= \sqrt{\langle x, x \rangle} \end{aligned}$$

Definition 6.1 (Bilinearform). Sei V ein K -Vektorraum. Eine Abbildung $\Phi : V \times V \rightarrow K$ heißt Bilinearform, falls für $x, x_1, x_2, y, y_1, y_2 \in V$ und $\alpha \in K$ gilt:

- (i) $\Phi(x_1 + x_2, y) = \Phi(x_1, y) + \Phi(x_2, y)$
- (ii) $\Phi(\alpha x, y) = \alpha \Phi(x, y)$
- (iii) $\Phi(x, y_1 + y_2) = \Phi(x, y_1) + \Phi(x, y_2)$
- (iv) $\Phi(x, \alpha y) = \alpha \Phi(x, y)$,

also wenn sie linear in beiden Argumenten ist.

Φ heißt symmetrisch, falls $\Phi(x, y) = \Phi(y, x)$ für $x, y \in V$, und nicht ausgeartet (oder nicht entartet), falls

$$\forall_{y \in V} \Phi(x, y) = 0 \Rightarrow x = 0 \wedge \forall_{x \in V} \Phi(x, y) = 0 \Rightarrow y = 0.$$

Sie heißt (das gilt nur in angeordneten Körpern!) positiv definit, falls

$$\forall_{x \in V} \Phi(x, x) \geq 0, \wedge \Phi(x, x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

Ergänzung: Sei $K = \mathbb{C}$ (komplexe Zahlen)

$$\mathbb{C} = \mathbb{R}(i) = \{a + ib \mid a, b \in \mathbb{R}, i^2 = -1\}$$

konjugiert-komplexe Zahl zu $\alpha = a + ib$: $\bar{\alpha} = a - ib$

Φ heißt Sesquilinearform, falls in (iv) gilt:

$$\Phi(x, ay) = \bar{a} \Phi(x, y)$$

Beispiel 6.1. $V = \mathbb{R}^2$, $\Phi : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto x_1 y_2 - x_2 y_1$,

wobei $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$. Dann gilt für $a = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \in V$ und $\alpha \in \mathbb{R}$:

(i)

$$\begin{aligned} \Phi(a + b, y) &= \Phi\left(\begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}\right) \\ &= (a_1 + b_1)y_2 - (a_2 + b_2)y_1 \\ &= (a_1 y_2 - a_2 y_1) + (b_1 y_2 - b_2 y_1) \\ &= \Phi(a, y) + \Phi(b, y) \end{aligned}$$

(ii)

$$\begin{aligned}\Phi(\alpha x, y) &= \Phi\left(\begin{pmatrix} \alpha x_1 \\ \alpha x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}\right) \\ &= \alpha x_1 y_2 - \alpha x_2 y_1 = \alpha(x_1 y_2 - x_2 y_1) = \alpha \Phi(x, y)\end{aligned}$$

(iii)

$$\begin{aligned}\Phi(x, a+b) &= \Phi\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_1+b_1 \\ a_2+b_2 \end{pmatrix}\right) \\ &= x_1(a_2+b_2) - x_2(a_1+b_1) \\ &= (x_1 a_2 - x_2 a_1) + (x_1 b_2 - x_2 b_1) \\ &= \Phi(x, a) + \Phi(x, b)\end{aligned}$$

(iv)

$$\begin{aligned}\Phi(x, \alpha y) &= \Phi\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \alpha y_1 \\ \alpha y_2 \end{pmatrix}\right) \\ &= x_1(\alpha y_2) - x_2(\alpha y_1) = \alpha(x_1 y_2 - x_2 y_1) = \alpha \Phi(x, y)\end{aligned}$$

Also ist Φ eine Bilinearform. Wegen

$$\begin{aligned}\Phi(x, y) &= x_1 y_2 - x_2 y_1 \\ \Phi(y, x) &= y_1 x_2 - y_2 x_1 \\ &= -\Phi(x, y) \neq \Phi(x, y) \text{ i.a.}\end{aligned}$$

ist Φ nicht symmetrisch.

Es gilt $\Phi(x, x) = x_1 x_2 - x_2 x_1 = 0$ für beliebige $x \in V$, also nicht nur für den Nullvektor. Damit ist Φ nicht positiv definit.

Es gelte $\Phi(x, y) = x_1 y_2 - x_2 y_1 = 0$ für beliebige $y \in \mathbb{R}^2$

$$\Rightarrow x_1 y_2 = x_2 y_1 \text{ für } \underline{\text{beliebige}} \ y \in \mathbb{R}^2$$

$$\Rightarrow x_1 = x_2 = 0$$

Also ist Φ nicht entartet.

An dieser Stelle noch ein Beispiel für eine entartete Bilinearform:

Betrachte $\Phi_a(x, y) := x_1 y_2 - a x_2 y_1$, $a \in \mathbb{R}$.

Für $a = 0$ gilt $\Phi_0(x, y) = x_1 y_2$. Ist dies gleich 0 für beliebige $y \in \mathbb{R}^2$, so folgt zwar $x_1 = 0$, aber x_2 kann immer noch beliebig gewählt werden. Also gilt:

$$\Phi_a \text{ entartet} \Leftrightarrow a = 0$$

Definition 6.2 (positiv (semi-)definite Bilinearform). Eine symmetrische Bilinearform $\Phi : V \times V \rightarrow K$, wobei K ein angeordneter Körper ist, heißt positiv semidefinit (psd), falls $\forall x \in V \ \Phi(x, x) \geq 0$. Gilt sogar $\forall x \in K \setminus \{0\} \ \Phi(x, x) > 0$, so heißt sie positiv definit (pd).

Definition 6.3 (Skalarprodukt). Sei Φ eine symmetrische und positiv definite Bilinearform. Dann heißt Φ auch Skalarprodukt auf dem K -Vektorraum V .
Bezeichnung: $\Phi(\cdot, \cdot) = \langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \rightarrow K$

Definition 6.4 (Euklidischer/unitärer Vektorraum). Sei V ein K -Vektorraum und $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ein Skalarprodukt auf V . Dann heißt das Paar $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ für $K = \mathbb{R}$ euklidischer und für $K = \mathbb{C}$ unitärer Vektorraum.

Satz 6.1 (Das Skalarprodukt). Sei K ein Körper und $V = K^n, n \in \mathbb{N}$. Die Abbildung $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \rightarrow K$ mit

$$\langle x, y \rangle := \sum_{i=1}^n x_i y_i$$

für $x = (x_1, \dots, x_n), y = (y_1, \dots, y_n) \in K^n$ ist ein nicht-entartetes Skalarprodukt, in dieser Vorlesung das Skalarprodukt.

Satz 6.2 ((Cauchy-)Schwarzsche Ungleichung). Es gilt:

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^n \quad \langle x, y \rangle^2 \leq \langle x, x \rangle \cdot \langle y, y \rangle$$

mit Gleichheit genau dann, wenn x und y linear abhängig sind.

Beachte:

$$\begin{aligned} \langle x, y \rangle^2 &\leq \langle x, x \rangle \cdot \langle y, y \rangle \\ \Leftrightarrow \quad \langle x, y \rangle^2 &\leq \|x\|^2 \cdot \|y\|^2 \\ \Leftrightarrow \quad |\langle x, y \rangle| &\leq \|x\| \cdot \|y\| \end{aligned}$$

Beweis. Seien $\alpha, \beta \in K$ und $x, y \in V$ bel. Da das Skalarprodukt pd ist, gilt

$$\begin{aligned} 0 &\leq \langle \alpha x + \beta y, \alpha x + \beta y \rangle \\ &= \alpha^2 \langle x, x \rangle + 2\alpha\beta \langle x, y \rangle + \beta^2 \langle y, y \rangle \end{aligned}$$

1. Fall: $\langle x, x \rangle = \langle y, y \rangle = 0$, wähle $\alpha = -1, \beta = \langle x, y \rangle$

$$\Rightarrow 0 \leq 2\alpha\beta \langle x, y \rangle = -2(\langle x, y \rangle)^2 \leq 0$$

Also gilt überall Gleichheit.

$$\begin{aligned} \Rightarrow \quad \langle x, y \rangle^2 &= 0 \\ \Rightarrow \quad \langle x, y \rangle^2 &\leq 0 \cdot 0 = \langle x, x \rangle \cdot \langle y, y \rangle \end{aligned}$$

2. Fall: $\langle x, x \rangle > 0, \langle y, y \rangle \geq 0$

$$\begin{aligned} \Rightarrow 0 &\leq \langle x, y \rangle^2 \langle x, x \rangle - 2 \langle x, y \rangle^2 \langle x, x \rangle + \langle x, x \rangle^2 \langle y, y \rangle \\ &= -\langle x, y \rangle^2 \langle x, x \rangle + \underbrace{\langle x, x \rangle^2 \langle y, y \rangle}_{>0} \\ \Rightarrow 0 &\leq -\langle x, x \rangle^2 + \langle x, x \rangle \cdot \langle y, y \rangle \\ \Rightarrow \langle x, y \rangle^2 &\leq \langle x, x \rangle \cdot \langle y, y \rangle \end{aligned}$$

3. Fall: $\langle y, y \rangle > 0, \langle x, x \rangle > 0$ Analog (vertausche die Rollen von x und y)

Zeige noch:

$$\begin{aligned} \langle \cdot, \cdot \rangle \text{ pd} &\Rightarrow (\langle x, y \rangle^2 = \langle x, x \rangle \cdot \langle y, y \rangle \\ &\Leftrightarrow x, y \text{ l.a.}) \end{aligned}$$

' \Leftarrow ': Seien x, y l.a. $\Rightarrow \exists_{\alpha \in K \setminus \{0\}} y = \alpha x$. Für $x, y = 0$ gilt trivialerweise Gleichheit. Es gilt:

$$\begin{aligned} \langle x, y \rangle^2 &= \langle x, \alpha x \rangle^2 \\ &= |\alpha \langle x, x \rangle| \cdot |\alpha \langle x, x \rangle| \\ &\stackrel{\langle \cdot, \cdot \rangle \text{ pd}}{=} |\alpha| \cdot \langle x, x \rangle \cdot |\alpha| \cdot \langle x, x \rangle \\ &= \alpha^2 \cdot \langle x, x \rangle \cdot \left\langle \frac{1}{\alpha} y, \frac{1}{\alpha} y \right\rangle \\ &= \alpha^2 \cdot \langle x, x \rangle \cdot \frac{1}{\alpha^2} \langle y, y \rangle \\ &= \langle x, x \rangle \cdot \langle y, y \rangle \end{aligned}$$

' \Rightarrow ': Sei $\langle x, y \rangle^2 = \langle x, x \rangle \cdot \langle y, y \rangle$. Setze wieder $\alpha = -\langle x, y \rangle, \beta = \langle x, x \rangle$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} &\langle \alpha x + \beta y, \alpha x + \beta y \rangle \\ &= \langle x, y \rangle^2 \langle x, x \rangle - 2 \langle x, y \rangle^2 \langle x, x \rangle + \underbrace{\langle x, x \rangle^2 \langle y, y \rangle}_0 = 0 \\ &= \langle x, y \rangle^2 \langle x, x \rangle \end{aligned}$$

Da das Skalarprodukt pd ist, gilt $\alpha x + \beta y = 0$. Betrachte noch die folgende Fallunterscheidung:

1. Fall: $x = 0 \Rightarrow x, y$ l.a. (trivialerweise)

2. Fall: $x \neq 0 \Rightarrow \beta = \langle x, x \rangle > 0$, da $\langle \cdot, \cdot \rangle$ pd. Also ist der Nullvektor nicht-trivial darstellbar, und x, y sind l.a. \square

Definition 6.5 (Orthogonalität). Sei $\langle \cdot, \cdot \rangle$ eine symmetrische Bilinearform auf einem K -Vektorraum V , insbesondere das Skalarprodukt aus Satz 6.1. Zwei Vektoren $x, y \in V$ heißen orthogonal bzw. stehen senkrecht aufeinander, falls $\langle x, y \rangle = 0$. Schreibweise: $x \perp y$

Definition 6.6 (Orthonormalität). Zwei orthogonale Vektoren $x, y \in V$ heißen orthonormal, falls zusätzlich $\langle x, x \rangle = \langle y, y \rangle = 1$ gilt. Ein System $x_1, \dots, x_n \in V, n \in \mathbb{N}$, heißt Orthonormalsystem, falls

$$\forall_{i,j=1,\dots,n} \langle x_i, x_j \rangle = \delta_{ij} := \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$$

(sog. Kronecker-Delta).

Beispiel 6.2. (i)

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

sind orthogonal, denn

$$\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle = 1 \cdot (-1) + 1 \cdot 1 = 0$$

Sie sind aber nicht orthonormal, denn

$$\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle = 2 \neq 1$$

Winkel $\omega \in [2, \pi)$ zwischen $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$:

$$\begin{aligned} \cos(\omega) &= \frac{\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle}{\left\| \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\| \cdot \left\| \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\|} = \frac{\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle}{\sqrt{\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle} \cdot \sqrt{\left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle}} \\ &= \frac{0}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = 0 \\ \Rightarrow \quad \omega &= \frac{\pi}{2} \quad (= 90^\circ) \end{aligned}$$

(ii) Die Einheitsvektoren

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

bilden ein Orthonormalsystem des \mathbb{R}^n . Jedes Skalarprodukt induziert eine sog. Norm (Länge eines Vektors)!

Definition 6.7 (Norm). Sei V ein K -Vektorraum. Eine Abbildung $\|\cdot\| : V \rightarrow K$ heißt Norm, falls für alle $x, y \in V$ und $\alpha \in K$ gilt:

(i) $\|x\| > 0$ für $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$ (Definitheit)

(ii) $\|\alpha x\| = |\alpha| \cdot \|x\|$ für $\alpha \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}^n$ (Homogenität)

(iii) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ für $x, y \in \mathbb{R}^n$ (Dreiecksungleichung)

Korollar 6.1. Jedes Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ induziert eine Norm $\|\cdot\| : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}, \quad x \in V$$

Beweis. (i)

$$\begin{aligned} \|x\| &= \sqrt{\langle x, x \rangle} \geq 0 \\ \|x\| = 0 &\Rightarrow \langle x, x \rangle = 0 \\ &\stackrel{\langle \cdot, \cdot \rangle \text{ pd}}{\Rightarrow} x = 0 \\ x = 0 &\Rightarrow \|x\| = 0 \end{aligned}$$

(ii)

$$\|\alpha x\| = \sqrt{\langle \alpha x, \alpha x \rangle} = \sqrt{\alpha^2 \langle x, x \rangle} = |\alpha| \sqrt{\langle x, x \rangle} = |\alpha| \cdot \|x\|$$

(iii) Es gilt für $x, y \in V$ nach der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung:

$$\begin{aligned} \|x + y\|^2 &= \langle x + y, x + y \rangle \\ &= \langle x, x \rangle + 2\langle x, y \rangle + \langle y, y \rangle \\ &= \|x\|^2 + 2\langle x, y \rangle + \|y\|^2 \\ &\leq \|x\|^2 + 2|\langle x, y \rangle| + \|y\|^2 \\ &\leq \|x\|^2 + 2\|x\| \cdot \|y\| + \|y\|^2 \\ &= (\|x\| + \|y\|)^2 \end{aligned}$$

□

Definition 6.8 (Orthogonalraum). Sei V ein K -Vektorraum. Sei $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \rightarrow K$ eine symmetrische Bilinearform, insbesondere das Skalarprodukt aus Satz 6.1. Sei weiterhin U ein Unterraum von V . Dann heißt

$$U^\perp := \{v \in V \mid \langle u, v \rangle = 0, \quad u \in U\}$$

der Orthogonalraum von U .

Satz 6.3. Der Orthogonalraum U^\perp ist ein Unterraum von V .

Beweis. Da $0 \in U^\perp$, ist $U^\perp \neq \emptyset$. Zeige:

$$\forall_{x, y \in U^\perp} \forall_{\alpha, \beta \in K} \alpha x + \beta y \in U^\perp$$

Es gilt für $z \in U$:

$$\begin{aligned} \langle z, \alpha x + \beta y \rangle &= \alpha \langle z, x \rangle + \beta \langle z, y \rangle \\ &\stackrel{x, y \in U^\perp}{=} \alpha \cdot 0 + \beta \cdot 0 = 0 \end{aligned}$$

□

Satz 6.4. Sei U ein Unterraum von $K^n, n \in \mathbb{N}, K$ Körper. Dann gilt:

- (i) $\dim(U) + \dim(U^\perp) = \dim(K^n) = n$
- (ii) $(U^\perp)^\perp = U$
- (iii) $(K^n)^\perp = \{0\}$

Beweis. (i) Sei $\{v_1, \dots, v_k\}$ Basis von $U, k \in \mathbb{N}$. Betrachte das LGS

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_k \end{pmatrix} x = 0$$

$$\Rightarrow \dim(U^\perp) = \dim \left(\ker \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_k \end{pmatrix} \right) = n - \operatorname{rg} \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_k \end{pmatrix} = n - k = \dim(K^n) - \dim(U)$$

(ii) klar nach Definition

(iii) Betr. Basis $\{e_1, \dots, e_n\}$ von K^n
Dann gilt:

$$y = (y_1, \dots, y_n) \in (K^n)^\perp \Leftrightarrow \forall_{1 \leq i \leq n} \langle y, e_i \rangle = 0$$

kann nur gelten, wenn $y = 0$.

□

Abschlussfrage: Gibt es selbstorthogonale Vektoren?

→ Kodierungstheorie: 'Dualer Code' C^\perp , rechne in Binärzahlen:

$$\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle = 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 = 1 + 1 = 0$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ „selbstorthogonal“?}$$

Antwort: In unserer Definition nicht, da sonst die positive Definitheit des Skalarprodukts verletzt wäre und das Skalarprodukt dann keine Norm induzieren würde. In der Kodierungstheorie darf man strenggenommen kein Skalarprodukt zugrundelegen, sondern nur eine symmetrische Bilinearform!

6.2 Direkte Summen

Seien $a_1, \dots, a_r \in V, r \in \mathbb{N}$ und V ein K -Vektorraum

Betrachte lineare Unterräume

$$Ka_i := \text{Span}_K\{a_i\}, \quad i = 1, \dots, r$$

$$a_i \text{ EZS} \implies \forall b \in V \quad b = \sum_{i=1}^r b_i, \quad b_i \in Ka_i$$

$$a_i \text{ Basis} \implies \text{Darstellung eindeutig (sog. direkte Summe)}$$

Definition 6.9 (Summe von Unterräumen). Seien $U_1, \dots, U_r, r \in \mathbb{N}$, Unterräume eines K -Vektorraums V . Dann ist die Summe dieser Unterräume gegeben durch

$$\sum_{i=1}^r U_i := \left\{ \sum_{i=1}^r b_i \mid b_i \in U_i, \quad i = 1, \dots, r \right\}$$

Korollar 6.2. Korollar 7.4 $\sum_{i=1}^r U_i$ ist ein Unterraum von V .

Satz 6.5. Für eine Summe $U = \sum_{i=1}^r U_i, r \in \mathbb{N}$, von Unterräumen U_1, \dots, U_r sind äquivalent:

(i) Jedes $b \in U$ hat eine eindeutige Darstellung $b = \sum_{i=1}^r b_i$ mit $b_i \in U_i, i = 1, \dots, r$.

(ii) Es gilt $\forall_{p=1, \dots, r} U_p \cap \sum_{i \neq p} U_i = \{0\}$.

Beweis. (i) \Rightarrow (ii): Sei $p \in \{1, \dots, r\}$ und $b \in U_p \cap \sum_{i \neq p} U_i$

Für $\tilde{b} \in \sum_{i \neq p} U_i$ gilt $\tilde{b} = \sum_{i \neq p} b_i, b_i \in U_i$

$$\Rightarrow -\tilde{b} + \sum_{i \neq p} b_i = 0$$

(i) \Rightarrow Der Nullvektor hat die eindeutige Darstellung $\sum_{i=1}^r b_i = 0$

$$\Rightarrow \tilde{b} = 0$$

$$\Rightarrow U_p \cap \sum_{i \neq p} U_i = \{0\}$$

(ii) \Rightarrow (i): Es gelte für $b \in V$

$$b = \sum_{i=1}^r b_i = \sum_{i=1}^r b'_i \Rightarrow \sum_{i=1}^r (b_i - b'_i) = 0$$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow b_1 - b'_1 + b_2 - b'_2 + \dots + b_p - b'_p + \dots + b_r - b'_r = 0 \\ &\Rightarrow b_p - b'_p = - \sum_{i=1}^r (b_i - b'_i) \in U_i \cap \sum_{i \neq p} U_i = \{0\}, p = 1, \dots, n \Rightarrow \forall_{i=1, \dots, p} b_i = b'_i \\ &\Rightarrow \text{Darstellung eindeutig} \end{aligned}$$

□

Definition 6.10 (Direkte Summe). Sei $U = \sum_{i=1}^r U_i$, $r \in \mathbb{N}$, von Unterräumen U_1, \dots, U_r eines K -Vektorraums V . $U = \bigoplus_{i=1}^r U_i$ heißt direkte Summe der U_i , falls die äquivalenten Bedingungen aus Satz 6.5 erfüllt sind.

Beispiel 6.3.

$$\begin{aligned} K = \mathbb{R}, \quad U_i &= \mathbb{R} \cdot \text{Span}_{\mathbb{R}}\{e_i\}, \quad i = 1, \dots, n \\ \Rightarrow \mathbb{R}^n &= \bigoplus_{i=1}^n \mathbb{R} \cdot \text{Span}_{\mathbb{R}}\{e_i\} \\ &= \bigoplus_{i=1}^n \{\alpha e_i \mid \alpha \in \mathbb{R}\} \end{aligned}$$

Dabei handelt es sich um eine direkte Summe der x_i -Achsen.

Resultat von Satz 6.5: Sind die U_i paarweise orthogonal, so gilt

$$V = \bigoplus_{i=1}^n U_i$$

und somit

$$\dim(V) = \sum_{i=1}^n \dim(U_i)$$

was übrigens auch ohne die Voraussetzung der Orthogonalität gilt.

Beispiel 6.4.

$$n = \dim(\mathbb{R}^n) = \sum_{i=1}^n \dim(\mathbb{R} \cdot \text{Span}_{\mathbb{R}}\{e_i\}) = \sum_{i=1}^n 1 = n$$

\mathbb{R}^n kann auch als direkte Summe von Ebenen/Hyberebenen aufgebaut werden.

6.3 Ebenen, Drehungen und Spiegelungen

Ebenen Die Parameterdarstellung einer Ebene im \mathbb{R}^3 lautet

$$x = a + \lambda u_1 + \mu u_2, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R},$$

wobei $a \in \mathbb{R}^3$ ein Ortsvektor ist, der zu einem Punkt auf der Ebene zeigt, und $u_1, u_2 \in \mathbb{R}^3$ die sog. *Richtungsvektoren* sind.

Eine Koordinatendarstellung erreicht man mit dem sog. *Normalenvektor* $n \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$, der senkrecht auf der Ebene bzw. auf beiden Richtungsvektoren steht (auch *Normalform* genannt):

$$\langle n, x \rangle = c, \quad c \in \mathbb{R} \Leftrightarrow n_1 x_1 + n_2 x_2 + n_3 x_3 = c$$

wobei $n = (n_1, n_2, n_3)^T$ und $x = (x_1, x_2, x_3)^T$.

Vektorprodukt Das sog. *Vektorprodukt* zweier Vektoren $a = (a_1, a_2, a_3)^T, y = (b_1, b_2, b_3)^T$, auch *vektorielles* oder *äußeres Produkt* oder *Kreuzprodukt* genannt, ist gegeben durch

$$a \times b := \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} \\ - \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

und ergibt den Vektor, der auf a und b senkrecht steht. a, b und c bilden ein sog. *Rechtssystem*.

Geometrische Bedeutung des Vektorprodukts Die Norm des Vektorprodukts ist gleich dem Flächeninhalt des Parallelogramms, welches von a und b aufgespannt wird. Somit ergibt sich der Winkel θ zwischen a und b gemäß $\|a \times b\| = \|a\| \|b\| \sin(\theta)$.

Hessesche Normalform Mithilfe des Vektorprodukts läßt sich der Normalenvektor einer Ebene aus den beiden Richtungsvektoren bestimmen. Dividiert man die Ebenengleichung durch dessen Norm, so erhält man die sog. *Hessesche Normalform*

$$\langle n_0, x \rangle = d$$

mit $n_0 := \frac{n}{\|n\|}$. $d = \frac{c}{\|n\|}$ ist der Abstand der Ebene zum Koordinatenursprung. n_0 heißt *Normaleneinheitsvektor*.

Definition 6.11 (Orthogonale Matrix). Eine Matrix $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$ heißt *orthogonal*, falls

$$Q^T Q = E_n$$

, d.h., die Spaltenvektoren bilden eine Orthonormalbasis: $\langle q_i, q_j \rangle = \delta_{ij}$, $i, j = 1, \dots, n$.

Korollar 6.3. (i) Q orthogonal $\Rightarrow Q$ invertierbar mit $Q^{-1} = Q^T$

(ii) Q orthogonal $\Rightarrow Q^T$ orthogonal mit $Q^T Q = Q Q^T = E_n$

Satz 6.6 (Eigenschaften orthogonaler Matrizen). Sei $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$ orthogonal. Dann gilt:

(i) $\det(Q) \in \{-1, 1\}$

- (ii) $\forall_{x,y \in \mathbb{R}^n} \langle Qx, Qy \rangle = \langle x, y \rangle$ und
 $\forall_{x \in \mathbb{R}^n} \|Qx\| = \|x\|$ (euklidische Norm), d.h. die Abbildung $x \mapsto Qx$ ist winkel- und längentreu.

Satz 6.7 (Drehungen und Spiegelungen). *Die orthogonale Matrix*

$$Q = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{pmatrix}$$

beschreibt im \mathbb{R}^2 eine Drehung um den Winkel $\varphi \in [0, 2\pi)$.

Die orthogonale Matrix

$$H = E_n - 2nn^T$$

beschreibt eine Spiegelung um eine Ebene mit Normalenvektor n . Dabei ist $E_n - nn^T$ die sog. Projektionsmatrix auf die Ebene (orthogonale Projektion).

Drehmatrizen im \mathbb{R}^3 :

- um die x -Achse: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) \\ 0 & \sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{pmatrix}$
- um die y -Achse: $\begin{pmatrix} \cos(\varphi) & 0 & \sin(\varphi) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(\varphi) & 0 & \cos(\varphi) \end{pmatrix}$
- um die z -Achse: $\begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) & 0 \\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$