Klausur SoSe 2025
15.9.2025
Dipl. Inf. Sigrid Weil
Dr. Marco Hülsmann

Diskrete Mathematik und Lineare Algebra

Bevor Sie mit der Bearbeitung der Klausur beginnen, lesen Sie bitte folgende Hinweise:

- Jede Klausur umfasst
  - das Deckblatt
  - diese Hinweisseite
  - 12 Seiten mit 8 Aufgaben
- Unterschreiben Sie bitte auf dem Deckblatt.
- Notieren Sie **auf jedem Blatt** oben Ihre **Matrikelnummer**.
- Insgesamt sind maximal 96 Punkte erreichbar.
- Sie haben die Klausur bestanden, wenn Sie mindestens **40 Punkte** erreicht haben.

Aufgabe	1	2	3	4
Punkte	12	10	10	12
erreicht				

Aufgabe	5	6	7	8	$\sum$
Punkte	12	10	14	16	96
erreicht					

Aufgabe 1 (6 + 6 = 12 P)

a) Beweisen Sie, dass für beliebige Mengen A, B, C gilt:

$$A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$$

b) Bestimmen Sie mithilfe des Euklidischen Algotithmus $t := \mathrm{ggT}(528, 297)$ sowie Koeffizienten $x, y \in \mathbb{Z}$ mit $528x + 297y = t$.

Aufgabe 2 (6 + 4 = 10 P)

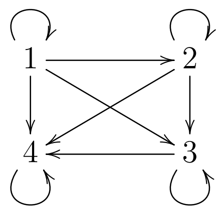
a) Es seien A, B und C drei Mengen mit jeweils mindestens zwei Elementen.
Es seien $f : A \to B$ und $g : B \to C$ zwei Funktionen (also linkstotale und rechtseindeutige Relationen).

Konstruieren Sie ein Beispiel (in der Darstellung mittels Zuordnungsgraphen) für f und g, sodass

- g nicht injektiv ist und
- $g \circ f : A \to C$ injektiv und surjektiv ist.

Begründen Sie (kurz), warum Ihr Beispiel die geforderten Eigenschaften hat.

b) Betrachten Sie die durch folgenden Graphen gegebene Relation R auf der Menge $\{1, 2, 3, 4\}$:



Handelt es sich um eine Ordnungsrelation? Geben Sie die zu kontrollierenden Bedingungen an.

Aufgabe 3 (10 P)
Beweisen Sie durch vollständige Induktion, dass folgende Aussage für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\sum_{i=1}^{n} i^3 = \Big(\sum_{i=1}^{n} i\Big)^2$$

Geben Sie den Induktionsanfang, die Induktionannahme und die Induktionsbehauptung explizit an und markieren Sie im Beweis die Stelle, an der die Ind.Annahme genutzt wird.

Folgende Formeln (die Sie sicherlich kennen) könnten hilfreich sein.

(i) $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$

(ii) $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

(iii) $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

Markieren Sie im Beweis auch die Stellen, an denen Sie eine dieser Formeln nutzen.

Aufgabe 4 (5 + 7 = 12 P)
Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ eine lineare Abbildung. Es sei weiterhin

$$U_f := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ | \ f(x, y) = (y, x)\}$$

Zeigen Sie:

a) U_f ist ein Unterraum des $\mathbb{R}^2$.

b) $U_f \cap \ker(f) = \{(0, 0)\}$

Aufgabe 5 (6 + 6 = 12P)
Es seien

$$u_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix},\ u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},\ v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

vier Vektoren des $\mathbb{R}^3$.

a) Sei M diejenige Matrix, die die Vektoren $u_1, u_2, -v_1, -v_2$ als Spalten enthält. (Achtung, Minuszeichen!) Bestimmen Sie eine Basisdarstellung des Kerns dieser Matrix!

b) Es seien nun $U = \mathrm{Span}(u_1, u_2)$ und $V = \mathrm{Span}(v_1, v_2)$ mit u_1, u_2, v_1, v_2 wie oben. Bestimmen Sie eine Basis des Schnitts $U \cap V$.

Aufgabe 6 (2 + 4 + 4 = 10 P)
Betrachten Sie für $a \in \mathbb{R}$ die folgende Abbildung $\varphi_a : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$:

$$\varphi_a(x, y) = (ax + y,\ x + ay)$$

a) Ist φ_a für alle $a \in \mathbb{R}$ linear? Begründen Sie Ihre Antwort!

b) Für welche $a \in \mathbb{R}$ ist φ_a bijektiv? Beweisen Sie Ihre Antwort!

c) Bestimmen Sie jeweils eine Basis des Bildes für $\mathrm{im}(\varphi_1)$ und $\mathrm{im}(\varphi_{-1})$.

Aufgabe 7 (8 + 4 + 2 = 14 P)
Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -3 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$$

a) Zeigen Sie, dass für das charakteristische Polynom von A gilt:

$$\chi_A(\lambda) = -(\lambda - 1)^2(\lambda - 2),\ \lambda \in \mathbb{R}$$

Lesen Sie daraus die Eigenwerte von A ab und bestimmen Sie deren Vielfachheiten!

b) Es sei $\mathrm{Eig}(A, \lambda)$ der Eigenraum von A zum Eigenwert λ. Zeigen Sie:

$$\dim(\mathrm{Eig}(A, 1)) = \dim(\mathrm{Eig}(A, 2)) = 1$$

c) Ist A diagonalisierbar? Begründen Sie Ihre Antwort.

Hinweis:
Sie dürfen die Ergebnisse einzelner Teilaufgaben auch dann verwenden, wenn Sie diese nicht (korrekt) gelöst haben!

Aufgabe 8 (3 + 4 + 3 + 6 = 16 P)
Es sei E diejenige Ebene im $\mathbb{R}^3$, die durch die drei Punkte

$$A = (4, 3, 1),\ B = (0, 2, 3) \text{ und } C = (-1, 2, 0)$$

verläuft.

a) Geben Sie die Ebene E in Parameterform an!

b) Geben Sie die Ebene E in Koordinatenform an!

c) Geben Sie die Ebene E in der Hesseschen Normalform an!

d) Sei nun E^* diejenige zu E parallele Ebene, die durch den Ursprung verläuft. Bestimmen Sie die Matrix, die die Spiegelung eines Punktes an der Ebene E^* beschreibt!