Klausur WiSe 2024/25
17.3.2025
Dipl. Inf. Sigrid Weil
Dr. Marco Hülsmann

Diskrete Mathematik und Lineare Algebra

Bevor Sie mit der Bearbeitung der Klausur beginnen, lesen Sie bitte folgende Hinweise:

- Jede Klausur umfasst
  - das Deckblatt
  - diese Hinweisseite
  - 11 Seiten mit 8 Aufgaben
- Unterschreiben Sie bitte auf dem Deckblatt.
- Notieren Sie **auf jedem Blatt** oben Ihre **Matrikelnummer**.
- Insgesamt sind maximal 93 Punkte erreichbar.
- Sie haben die Klausur bestanden, wenn Sie mindestens **40 Punkte** erreicht haben.

Aufgabe	1	2	3	4
Punkte	10	10	10	10
erreicht				

Aufgabe	5	6	7	8	$\sum$
Punkte	12	8	18	15	93
erreicht					

Aufgabe 1 (6 + 4 = 10 P)

a) Beweisen Sie, dass für beliebige nichtleere Mengen A, A', B, B' mit $A' \subseteq A \wedge B' \subseteq B$ gilt:

$$A' \times B' \subseteq A \times B$$

b) Zeigen Sie (zB durch ein Gegenbeispiel), dass die Aussage

$$(A \times B) \setminus (A' \times B') = (A \setminus A') \times (B \setminus B')$$

im Allgemeinen *nicht* stimmt.

Aufgabe 2 (6 + 4 = 10 P)

a) Bestimmen Sie den ggT von 330 und 78 und ermitteln Sie Koeffizienten $x, y \in \mathbb{Z}$ mit $ggT(330, 78) = 78x + 330y$.

b) Seien $a, b, c \in \mathbb{Z}$ beliebig und seien $x, y \in \mathbb{Z}$ Lösungen der Gleichung $ax + by = c$.
Zeigen Sie: $\quad ax + by = c \quad \Rightarrow \quad ggT(a, b) \mid c$

Aufgabe 3 (7 + 3 = 10 P)

a) Es sei die Relation R auf der Menge der ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$ definiert durch

$$(x, y) \in R \quad \Leftrightarrow \quad x \cdot y \geq 0$$

Zeigen Sie, dass R *keine* Äquivalenzrelation ist.
Geben Sie die Definitionen der geforderten Eigenschaften an und untersuchen Sie die Relation auf jeden Fall auf **alle** diese Eigenschaften.

b) Die Relation P auf der Menge der ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$ definiert durch

$$(x, y) \in P \quad \Leftrightarrow \quad x \cdot y > 0 \ \vee \ x = y = 0$$

ist dagegen eine Äquivalenzrelation (das brauchen Sie nicht zu beweisen).

Geben Sie die Äquivalenzklassen der Relation P an (mit Begründung).

Aufgabe 4 (5 + 5 = 10 P)
Es sei für $a \in \mathbb{R}$ die Menge $B(a) = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ a \end{pmatrix} \right\} \subseteq \mathbb{R}^3$ gegeben.

a) Für welche $a \in \mathbb{R}$ bildet die Menge $B(a)$ eine Basis des $\mathbb{R}^3$?

b) Bestimmen Sie speziell für den Wert $a = -2$ die Dimension und eine Basis des Spanns *span*$(B(-2))$.

Aufgabe 5 (5 + 5 + 2 = 12 P)
Betrachten Sie die Lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$, die durch die folgende Zuordnungsvorschrift gegeben ist.

$$f(\vec{x}) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 15 \end{pmatrix} \cdot \vec{x}$$

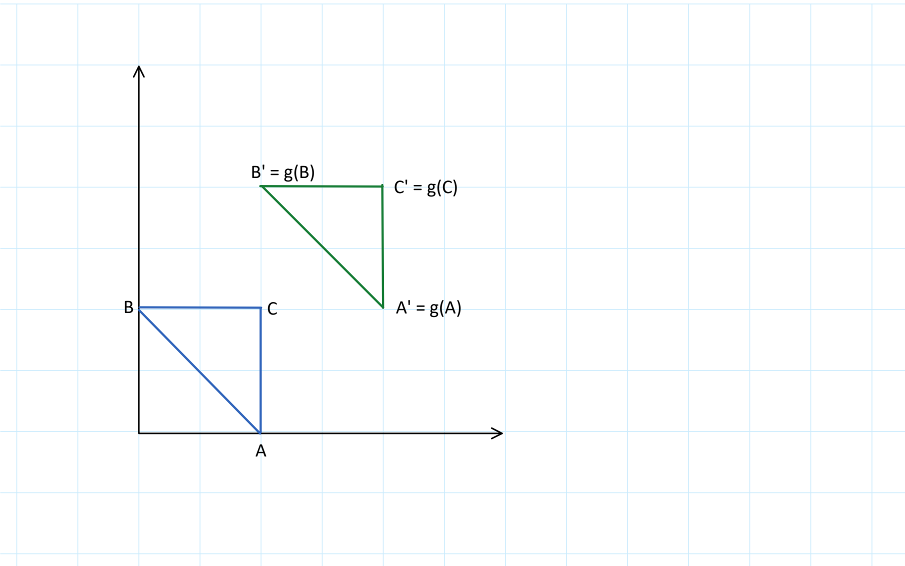
a) Bestimmen Sie die Dimensionen von $im(f)$ und $ker(f)$.

(weiterer Aufgabenteil auf der folgenden Seite)

b) Bestimmen Sie eine Basis von $ker(f)$.

c) Machen Sie die Probe zu b)! Was muss für den/die gefundenen Basisvektor(en) gelten?

Aufgabe 6 (5 + 3 = 8 P)
Wir suchen eine Abbildung $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, die jeden Punkt (und damit jedes Objekt) des $\mathbb{R}^2$ um je eine Längeneinheit nach rechs oben *verschiebt*.
Zum Beispiel soll das Dreieck mit den Eckpunkten $A = (1, 0), B = (0, 1), C = (1, 1)$ zu den Punkten $A' = (2, 1), B' = (1, 2), C' = (2, 2)$ verschoben werden (vgl Skizze).



a) Zeigen Sie, dass es keine *lineare Abbildung* gibt, die dies leistet.

b) Geben Sie eine (nicht-lineare) Abbildung an, die diese Verschiebung bewirkt.

Aufgabe 7 (4 + 6 + 8 = 18 P)
Sei die Matrix $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ gegeben durch

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$$

a) Zeigen Sie, dass $\lambda_1 = -1$ und $\lambda_2 = 2$ die Eigenwerte von A sind.

b) Zeigen Sie, dass A diagonalisierbar ist, also dass es eine invertierbare Matrix V gibt, für die gilt

$$V^{-1}AV = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

(weiterer Aufgabenteil auf der folgenden Seite)

c) Sei wieder A die Matrix aus a) und sei D die Diagonalmatrix $D = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Zeigen Sie durch vollständige Induktion, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$A^n = V \cdot D^n \cdot V^{-1}$$

Sie können diesen Teil auch dann lösen, wenn Sie b) nicht beantworten konnten bzw wenn Sie V nicht kennen.

Aufgabe 8 (4 + 6 + 5 = 15 P)
Es sei F diejenige Ebene im $\mathbb{R}^3$, die durch die drei Punkte
$A = (1, 0, -1), B = (2, 1, 3)$ und $C = (-4, 1, 0)$ verläuft.

a) Geben Sie die Ebene F in Parameterform an.

b) Geben Sie die Ebene F in Hessescher Normalform an.

c) Sei nun F^* diejenige zu F parallele Ebene, die durch den Ursprung verläuft.
Bestimmen Sie die Matrix, die die Spiegelung eines Punktes an der Ebene F^* beschreibt.