Aufgabe 2.1
Es seien die Relationen R und S (beide $\subseteq \{a,b,c\} \times \{0,8,15\}$) gegeben durch

$$R = \{(b,0),(a,8),(b,15),(c,15),(c,8),(a,0)\}$$

$$S = \{(a,0),(a,15),(b,8),(c,8)\}$$

a) Stellen Sie die Relationen R und S sowohl graphisch als auch tabellarisch dar.

b) Stellen Sie $R \cup S$ graphisch dar.

c) Stellen Sie $R \cap S$ in Tabellenform dar.

Aufgabe 2.2
Für ganze Zahlen $a, b \in \mathbb{Z}$ sagen wir „a ist Teiler von b" gdw. $\exists q \in \mathbb{Z}: \; b = a \cdot q$.

Dadurch ist eine Relation „|" (die „Teilbarkeitsrelation") auf den ganzen Zahlen definiert. Wir schreiben in diesem Fall $a|b$.

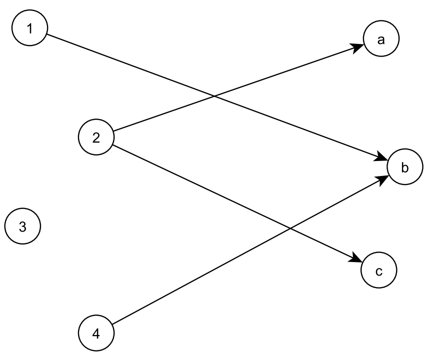
a) Welche der folgenden Paare sind Elemente von | ?
$(-2,-4)$ $(-1,-1)$ $(0,1)$ $(1,2)$ $(2,-6)$ $(3,12)$ $(4,-15)$

b) Beweisen Sie:
$\forall a,b,c,x,y \in \mathbb{Z}: \; a|b \wedge a|c \Rightarrow a|(xb+yc)$

Aufgabe 2.3
a) Durch die folgende Tabelle ist eine Relation $R \subseteq \{1,2,3,4\} \times \{a,b,c\}$ gegeben. Ist die Relation linkstotal / rechtstotal / linkseindeutig / rechtseindeutig? Begründen Sie.

	a	b	c
1		×	
2	×		×
3			
4		×	

b) Verändern Sie den Graphen durch Entfernen oder Hinzufügen von Pfeilen und/oder Elementen so, dass die dargestellte Relation bijektiv und linkstotal, aber nicht rechtseindeutig (funktional) ist.



Aufgabe 2.4
Es seien $R \subseteq A \times B$ und $S \subseteq B \times D$ zwei Relationen.
Sei $C = im(R) \cap \mathit{Def}_S$.

Beweisen Sie oder widerlegen Sie durch ein Gegenbeispiel:

a) $R \fatsemi S = \emptyset \Rightarrow C = \emptyset$

b) $R \fatsemi S \neq \emptyset \Rightarrow C \neq \emptyset$

Aufgabe 2.5
Wir betrachten die Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $\quad g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ und $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, die definiert sind durch

$$f(x) := (x, x-3) \qquad g(x,y) := \frac{1}{2}(x+y) \qquad h(x) := (x,x)$$

a) Zeigen Sie, dass f injektiv, aber nicht surjektiv ist.

b) Zeigen Sie, dass g nicht injektiv, aber surjektiv ist.

c) Bestimmen Sie $(f \circ g) \circ h$.