Fachbereich Informatik
Dr. Marco Hülsmann
Sigrid Weil

Uebung 10

Aufgabe 10.1
Wie wir wissen, ist die *kanonische* Basis $\mathcal{K}$ des $\mathbb{R}^2$ gegeben durch die zwei Einheitsvektoren
$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Außerdem kontrolliert man leicht, dass die Menge $\mathcal{B} = \{b_1, b_2\}$ mit $b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $b_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ ebenfalls eine Basis des $\mathbb{R}^2$ bildet.

a) Stellen Sie den Vektor $u = \begin{pmatrix} 8 \\ -4 \end{pmatrix} = 8e_1 - 4e_2$ in der Basis $\mathcal{B}$ dar, d.h., bestimmen Sie die Koeffizienten α_1, α_2 in der Basisdarstellung $u = \alpha_1 b_1 + \alpha_2 b_2$.

b) Stellen Sie die Situation durch eine Zeichnung in der euklidischen Ebene dar.

c) Geben Sie eine Abbildung $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ an, die für jeden *beliebigen* Vektor $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ die Koordinaten in der Basis $\mathcal{B}$ berechnet.
Wir sagen:
f beschreibt den *Basiswechsel* von $\mathcal{K}$ zu $\mathcal{B}$.

d) Zeigen Sie, dass f eine lineare Abbildung, sogar ein Isomorphismus ist.

Aufgabe 10.2
Bei welcher der drei angegebenen Abbildungen f, g, h handelt es sich um eine *Lineare Abbildung*? Begründen Sie.

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^1, \quad f(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}) = (2x + 3y)$$

$$g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad g(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} y^2 \\ x \end{pmatrix}$$

$$h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, \quad h(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} y \\ \sqrt{2}x + 5y \\ 1 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 10.3
Untersuchen Sie folgende Lineare Abbildung auf Injektivität, Surjektivität und Bijektivität.

$$f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 2x_2 - x_3 + x_4 \\ x_1 - x_3 \end{pmatrix}$$

a) Handelt es sich um einen Mono-, Epi- oder Isomorphismus? Beweisen Sie Ihre Antwort!

b) Bestimmen Sie auch $im(f)$ sowie $ker(f)$ und $dim(im(f))$ und $dim(ker(f))$.

Aufgabe 10.4

Es sei

$$A := \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

eine beliebige invertierbare 2×2-Matrix mit $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, daß die Inverse gegeben ist durch

$$A^{-1} := \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$