Fachbereich Informatik
Sigrid Weil

Uebung 4

Aufgabe 4.1
Es sei $\mathcal{U}$ eine beliebige nichtleere Menge und die Relation $D : \wp(\mathcal{U}) \rightharpoondown \wp(\mathcal{U})$ definiert durch

$$\forall M, N \in \wp(\mathcal{U}) \quad MDN :\Leftrightarrow M \cap N = \emptyset$$

Untersuchen Sie die Relation D („Disjunktheit von Mengen“) auf Reflexivität, Irreflexivität, Symmetrie, Antisymmetrie, Asymmetrie, Transitivität.

Aufgabe 4.2
Student Ben Besserwisser behauptet:
„Jede (binäre homogene) Relation, die symmetrisch und transitiv ist, ist auch reflexiv.“

Sein Beweis lautet:
Wenn R symmetrisch ist, dann ist mit xRy immer auch yRx erfüllt. Dann kann man aber die Transitivitäts-Eigenschaft auf xRy und yRx anwenden und es folgt: xRx, also ist R auch reflexiv.

Studentin Irma Immerschlau glaubt, dass sie ein Gegenbeispiel gefunden hat:
Sie behauptet, dass die Relation $xRy :\Leftrightarrow (x \cdot y \text{ ist ungerade })$
auf der Menge der natürlichen Zahlen symmetrisch und transitiv, aber nicht reflexiv ist.

Wer von beiden hat Recht? Wo steckt der Fehler?

Aufgabe 4.3
Für eine beliebige Relation $R : A \rightharpoondown B$ definieren wir die sogenannte „converse“ Relation $R^{\smile} : B \rightharpoondown A$ durch

$$(x, y) \in R^{\smile} :\Leftrightarrow (y, x) \in R$$

Zeigen Sie: Wenn $P \subseteq A \times A$ eine partielle Ordnung ist, dann ist $P^{\smile}$ ebenfalls eine partielle Ordnung.

Aufgabe 4.4
Zeigen Sie, dass durch die folgende Matrix **keine** Äquivalenzrelation auf der Menge $\{a, b, c, d, e\}$ gegeben ist.

$x \diagdown y$	a	b	c	d	e
a	1	1	0	0	0
b	1	1	0	0	0
c	0	0	1	1	0
d	0	0	1	1	1
e	0	0	0	1	1

Aufgabe 4.5
Wir definieren auf der Menge $\mathbb{R}^2$, also der Menge der Punkte (x, y) im 2-dimensionalen Koordinatensystem, eine Relation D durch

$$(x_1, y_1)D(x_2, y_2) :\Leftrightarrow x_1^2 + y_1^2 = x_2^2 + y_2^2$$

Zeigen Sie, dass es sich um eine Äquivalenzrelation handelt.
Beschreiben Sie (geometrisch), wie die Äquivalenzklasse zu einem Punkt $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ aussieht.

Aufgabe 4.6
Wir definieren nun auf der Menge $\mathbb{R}^2$ eine Relation N durch

$$(x_1, y_1)N(x_2, y_2) :\Leftrightarrow x_1^2 + y_1^2 \leq x_2^2 + y_2^2$$

(Wir ersetzen also in der Definition von D aus Aufgabe 4.5 das Gleichheitszeichen durch ein $\leq$-Zeichen.)

Zeigen Sie, dass dies *keine* Ordnungsrelation definiert.