Klausur WS 2022/23
13.3.2023
Dipl. Inf. Sigrid Weil
Dr. Marco Hülsmann

Diskrete Mathematik und Lineare Algebra

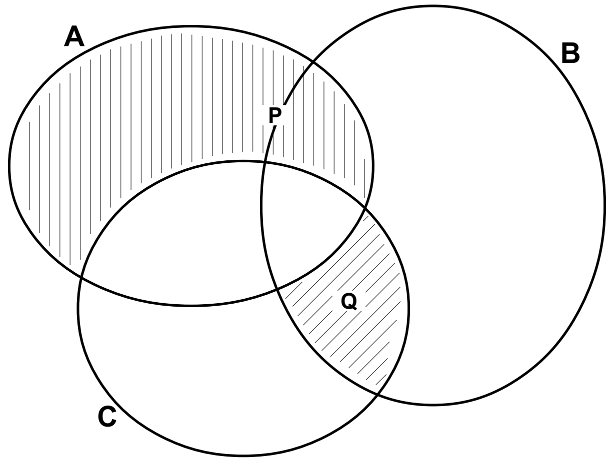
Bevor Sie mit der Bearbeitung der Klausur beginnen, lesen Sie bitte folgende Hinweise:

- Jede Klausur umfasst
  - das Deckblatt
  - diese Hinweisseite
  - 16 Seiten mit 8 Aufgaben
- Unterschreiben Sie bitte auf dem Deckblatt.
- Notieren Sie **auf jedem Blatt** oben Ihre **Matrikelnummer**.
- Insgesamt sind maximal 100 Punkte erreichbar.
- Sie haben die Klausur bestanden, wenn Sie mindestens **40 Punkte** erreicht haben.

Aufgabe	1	2	3	4
Punkte	10	12	18	12
erreicht				

Aufgabe	5	6	7	8	$\sum$
Punkte	10	12	12	14	100
erreicht					

Aufgabe 1 (2 + 4 + 4 = 10 P)
Betrachten Sie das Venn-Diagramm



a) Sei P die in der Abbildung durch senkrechte Schraffur gekennzeichnete Menge. Beschreiben Sie P mithilfe der Mengen A, B und C und der Mengenoperationen $\cup, \cap$ und Komplementbildung.

b) Sei Q die in der Abbildung durch diagonale Schraffur gekennzeichnete Menge. Geben Sie einen zu „$x \in Q$" äquivalenten logischen Ausdruck an, der außer der Variablenbezeichnung x nur die Zeichen bzw Operatoren $\in, \notin, \vee, \wedge$ und die Mengen A, B und C benutzt.

c) Zeigen Sie, dass für beliebige Mengen A, B, C stets gilt:
$A \subseteq B \;\Rightarrow\; (A \times C) \subseteq (B \times C)$
Strukturieren Sie Ihren Beweis gut, indem Sie deutlich kennzeichnen, wovon Sie ausgehen und was zu zeigen ist.

Aufgabe 2 (4 + 4 + 4 = 12 P)
Es sei $\varphi : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ definiert durch $\varphi(x) = x^2 - 2x + 1$.

a) Zeigen Sie, dass φ *nicht* injektiv ist.

b) Zeigen Sie, dass φ *nicht* surjektiv ist.

c) Beweisen Sie:
Für jede Menge M und jede beliebige *injektive* Funktion $f : M \to M$ und alle Funktionen $g : M \to M$ und $h : M \to M$ gilt:

$$f \circ g = f \circ h \;\Rightarrow\; g = h$$

Strukturieren Sie Ihren Beweis gut, indem Sie deutlich kennzeichnen, wovon Sie ausgehen und was zu zeigen ist.

Aufgabe 3 (6 + 4 + 8 = 18 P)
Es sei die Relation $R \subseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ definiert durch

$$xRy \;:\Leftrightarrow\; |x - y| = 1$$

(dabei ist $|.|$ die übliche Betragsfunktion, dh. $|x - y| = 1 \Leftrightarrow (x - y = 1$ oder $x - y = -1))$

Wie üblich sei R^n definiert durch $R^n = \begin{cases} id_{\mathbb{Z}} & \text{falls } n = 0 \\ R \fatsemi R^{n-1} & \text{sonst} \end{cases}$

a) Zeigen Sie: R ist weder reflexiv noch transitiv, aber symmetrisch.

b) Zeigen Sie: R^2 ist reflexiv.

c) Zeigen Sie durch vollständige Induktion:

$$\forall n \in \mathbb{N}_0 : \quad R^n \subseteq R^{n+2}$$

Geben Sie explizit die Ind. Annahme und die Ind. Behauptung an und markieren Sie im Beweis die Stelle, an der die Ind. Annahme benutzt wird.

Hinweis: Sie dürfen die in den Aufgabenteilen a) und b) gemachten Aussagen benutzen, auch wenn Sie sie nicht beweisen konnten.

Aufgabe 4 (6 + 6 = 12 P)

a) Es seien zwei Unterräume $W_1, W_2 \subseteq \mathbb{R}^4$ gegeben durch ihre Basen

$$B_1 = \{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}\}, \quad B_2 = \{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}\}$$

Berechnen Sie eine Basis von $\mathit{span}(B_1 \cup B_2)$.

b) Wir betrachten die beiden Unterräume des $\mathbb{R}^4$:
$U_1 = \{x \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 + 2x_3 - x_4 = 0 \ \wedge \ x_2 = x_4\}$ und
$U_2 = kern(A)$ für $A = \begin{pmatrix} -3 & -5 & 6 & 0 \\ -3 & -4 & 0 & 3 \end{pmatrix}$
Bestimmen Sie eine Basis für den Unterraum $U_1 \cap U_2$.
Erläutern Sie Ihr Vorgehen!
Hinweis: Es ist nicht nötig, Basen der beiden Unterräume zu bestimmen.

Aufgabe 5 (2 + 2 + 2 + 4 = 10 P)
Gegeben seien die beiden Abbildungen $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ und $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ mit

$$f(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}) := \begin{pmatrix} 5x_2 - x_1 \\ x_1 + 2x_2 \\ 2x_1 \end{pmatrix} \text{ für } x_1, x_2 \in \mathbb{R}$$

$$g(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}) := \begin{pmatrix} x + y \\ x + z \end{pmatrix} \text{ für } x, y, z \in \mathbb{R}$$

a) Bestimmen Sie $dim(ker(f))$ und $dim(im(f))$.

b) Beweisen oder widerlegen Sie: f ist injektiv.

c) Beweisen oder widerlegen Sie: f ist surjektiv.

d) Bilden Sie $g \circ f$. Zeigen Sie, dass diese Abbildung bijektiv ist.

Aufgabe 6 (4 + 8 = 12 P)
Durch

$$f_t(\vec{x}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & t \end{pmatrix} \cdot \vec{x}$$

ist für jedes $t \in \mathbb{R}$ eine lineare Abbildung $f_t : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ gegeben.

a) Für welche $t \in \mathbb{R}$ ist f_t bijektiv?

b) Bestimmen Sie (in Abhängigkeit von t) je eine Basis von $kern(f_t)$ und von $im(f_t)$.

(Tipp: Determinanten könnten helfen)

Aufgabe 7 (4 + 2 + 4 + 2 = 12 P)
Es sei die (Ursprungs-)Ebene F im $\mathbb{R}^3$ gegeben durch $F = \{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mid 4x - 4y + 2z = 0\}$

a) Bestimmen Sie eine Basis von F.

b) Prüfen Sie, ob die Punkte $R = (2, -1, 3)$ und $Q = (-1, 3, 8)$ in der Ebene F liegen.

c) Bestimmen Sie die Householdermatrix H, die die Spiegelung eines Punktes an der Ebene F beschreibt.

d) Die Projektionsmatrix P der Ebene ist gegeben durch

$$P = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 5 & 4 & -2 \\ 4 & 5 & 2 \\ -2 & 2 & 8 \end{pmatrix}$$

(Das brauchen Sie nicht nachzuweisen.)
Bestimmen Sie die Punkte R' und Q', die durch Projektion von R bzw Q auf die Ebene F entstehen.

Aufgabe 8 (10 + 4 = 14 P)
Es sei die Matrix A gegeben durch

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 4 & -2 \\ 4 & 5 & 2 \\ -2 & 2 & 8 \end{pmatrix}$$

Das charakteristische Polynom von A ist $\chi(\lambda) = -\lambda^3 + 18\lambda^2 - 81\lambda$
(Das brauchen Sie nicht nachzuweisen.)

a) Bestimmen Sie die Eigenwerte und jeweils eine Basis des Eigenraums.

   Bemerkung:
   Es handelt sich bei A um ein Vielfaches der Projektionsmatrix aus Aufgabe 7.

b) Sei U eine beliebige Hyperebene des $\mathbb{R}^m$ und sei P die Projektionsmatrix auf U.
Zeigen Sie:
Jeder Basisvektor v von U ist Eigenvektor von P. (Zu welchem Eigenwert?)
(Tipp: Skalarprodukte)