
Eine kleine Sammlung von Aufgaben zur Vollständigen Induktion

Aufgabe 2.1

Beweisen Sie mittels vollständiger Induktion, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{i(i+1)} = \frac{n}{n+1}$$

Aufgabe 2.2

Zeigen Sie durch vollständige Induktion, dass für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt:

$$4n^3 - n \text{ ist durch 3 teilbar.}$$

Aufgabe 2.3

Zeigen Sie durch vollständige Induktion, dass für alle $n \in \mathbb{N}_{\geq 3}$ gilt:

$$n^2 - 2n - 1 > 0$$

Aufgabe 2.4

Es sei $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ rekursiv definiert durch

$$f(x) = \begin{cases} 2 & \text{falls } x = 1 \\ f(x-1) + 2x & \text{sonst} \end{cases}$$

Beweisen Sie:

Für alle $x \in \mathbb{N}$ ist $f(x) = x(x+1)$

Aufgabe 2.5

Beweisen Sie, dass für jede natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}$ gilt:

Wenn $T \subseteq \mathbb{N}$ eine Teilmenge ist mit $|T| = n$, so hat T ein kleinstes Element.

Aufgabe 2.6

Beweisen Sie, dass für jede natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ gilt:

$$\prod_{i=2}^n \left(1 - \frac{i-1}{i}\right) = \frac{1}{n!}$$