Bonusaufgabe 2

Sei A eine Algebraische Struktur, für $A \in (\mathbb{R}\setminus\{1\}, *)$
mit Folgender Verknüpfung: $a * b := a + b - ab$, $a, b \in \mathbb{R}\setminus\{1\}$.

Satz: zz. das $A(\mathbb{R}\setminus\{1\}, *)$ eine Abelsche Gruppe bildet

1. Abgeschlossenheit: zz. das $\forall_{a,b} \in \mathbb{R}\setminus\{1\}$ $a * b \in \mathbb{R}\setminus\{1\}$ gilt.

Beweis:

$$\begin{aligned} a * b &= a + b - ab \\ &= 1 + a + b - ab - 1 \\ &= 1 + a \cdot (1 - b) + b - 1 \\ &= 1 + a(1 - b) + (1 - b) \\ &= 1 + \underbrace{(a-1) \cdot (b-1)}_{\neq 0} \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ die Verknüpfung ist wohldefiniert. qed.

2. Assoziativgesetzt: zz. das $\forall_{a,b,c} \in A$ $(a * b) * c = a * (b * c)$ gilt.

Beweis:

$$\begin{aligned} (a * b) * c &= (a + b - ab) * c \\ &= (a + b - ab) + c - (a + b - ab) \cdot c \\ &= a + b - ab + c - ac - bc + abc \\ &= \underbrace{a + (b + c - bc) - a \cdot (b + c - bc)}_{\text{Entspricht der Def. der Verknüpfung.}} \\ &= a * (b + c - bc) \\ &= a * (b * c) \end{aligned}$$

qed.

3. Kommutativgesetzt: zz. das $\forall_{a,b} \in A$ $a * b = b * a$

Beweis:

$$\begin{aligned} a * b &= a + b - ab \\ &= b + a - ba \\ &= b * a \end{aligned}$$

qed

4. Einselement: zz. das ein Element $e \in A$ existiert mit $e * a = a * e = a$

Beweis:

Sei $e = 0 \in A$ das neutrale Element,
denn für alle $a \in A$ gilt.
$a * 0 = 0 * a = 0 + a - 0 \cdot a = a$ qed.

5. Inverses Element: zz. das $a * b = b * a = e$

Beweis:

Das inverse Element von $a \in A$ ist $b = \frac{a}{a-1} \in A$ (da $a \neq 1$ und $a \neq a-1$), den

$$\begin{aligned} a * b &\overset{3)}{=} b * a = \frac{a}{a-1} * a = \frac{a}{a-1} + a - \frac{a}{a-1} \cdot a \\ &= \frac{1}{a-1} (\underbrace{a + a^2 - a - a^2}_{0}) = 0 = e. \end{aligned}$$

qed

Damit ist gezeigt das $A(\mathbb{R}\setminus\{1\}, *)$ eine Abelsche gruppe ist.