Fachbereich Informatik
Dr. Marco Hülsmann
Sigrid Weil

Uebung 9

Aufgabe 9.1
Gegeben sei die Matrix

$$A := \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 4 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

a) Bringen Sie die Matrix A auf kanonische Zeilenstufenform.

b) Bestimmen Sie eine Basis von $\ker A$.

c) Bestimmen Sie eine Basis von $\operatorname{im} A$.

Aufgabe 9.2
Gegeben sei die Matrix

$$A(a) = \begin{pmatrix} a-1 & 0 & 1 \\ 1 & -a & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$$

Dabei ist $a \in \mathbb{R}$.

a) Bringen Sie die Matrix $A(a)$ auf kanonische Zeilenstufenform.

b) Bestimmen Sie eine Basis von $\ker A$ in Abhängigkeit von a. Für welche a gilt $\ker A(a) = \{0\}$?

c) Bestimmen Sie eine Basis von $\operatorname{im} A$ in Abhängigkeit von a.

Aufgabe 9.3
Seien V und W zwei (endlich-dimensionale) K-Vektorräume. Beweisen Sie:

a) Falls $\dim(V) = \dim(W)$, so sind V und W isomorph, d.h. zeigen Sie, daß es einen Isomorphismus $f : V \to W$ gibt. Konstruieren Sie eine Abbildung, von der Sie dann nachweisen, daß sie linear, injektiv und surjektiv ist.

b) Falls $f : V \to W$ ein Isomorphismus ist, so ist auch die Umkehrabbildung $f^{-1} : W \to V$ ein Isomorphismus.

Aufgabe 9.4
$U := \{(x_1, x_2, x_3) \mid x_1 = x_2 = 2x_3\}$ ist ein Unterraum des $\mathbb{R}^3$, denn $U = \operatorname{Span}_{\mathbb{R}}(1, 1, 0.5)$. Somit gilt auch $\dim(U) = 1$.

a) Konstruieren Sie eine lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, die genau diesen Unterraum als Kern hat, für die also $\ker f = U$ gilt.

b) Konstruieren Sie eine lineare Abbildung $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, die genau diesen Unterraum als Bild hat, für die also $\operatorname{im} g = U$ gilt.