Fachbereich Informatik
Dr. Marco Hülsmann
Sigrid Weil

Uebung 11

Aufgabe 11.1
Bestimmen Sie die Determinante:

a)

$$A_1 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1-a & 2 \end{pmatrix}$$

Für welche Werte von $a \in \mathbb{R}$ ist A_1 invertierbar?
Geben Sie für diese Werte auch die Inverse A_1^{-1} an.

b)

$$A_2 = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 2 & -2 \\ 4 & 7 & -3 & 5 \\ 3 & 0 & 8 & 0 \\ -5 & -1 & 6 & 9 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 11.2
Eine Matrix $A \in K^{n\times n}$ heißt „*obere Dreiecksmatrix*", wenn für die Einträge a_{ij} mit $i > j$ der Matrix gilt: $a_{ij} = 0$

Zeigen Sie durch vollständige Induktion über n:
Für jede obere Dreiecksmatrix A ist die Determinante gleich dem Produkt der Diagonalelemente:

$$\det(A) = \prod_{i=1}^{n} a_{ii}$$

Tipp: Entwicklung der Determinante nach der ersten Spalte!

Aufgabe 11.3
Geben Sie allgemein Matrizen aus $\mathbb{R}^{n\times n}$ an, welche die folgenden Elementaroperationen durchführen, und überlegen Sie sich, wie die Inversen sowie die Transponierten davon aussehen und dass es sich dabei auch wieder um Elementarmatrizen handelt.
Sie $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine beliebige quadratische Matrix.

a) $M(i, \alpha)$: Multiplikation einer Zeile i mit einem Skalar $\alpha \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$. Geben Sie hierzu auch die Determinante an sowie die Determinante der Inversen und der Transponierten!
Überlegen Sie sich weiterhin: $\det(M(i, \alpha) \cdot A) = \alpha \cdot \det(A)$.

b) $A(i, j, \alpha)$: Addition des α-fachen einer Zeile j zu einer Zeile $i \neq j$. Geben Sie hierzu auch die Determinante an sowie die Determinante der Inversen und der Transponierten!
Überlegen Sie sich weiterhin: $\det(A(i, j, \alpha) \cdot B) = \det(B)$.

c) $V(i, j)$: Vertauschung zweier Zeilen i und j. Die Determinante ist gleich -1, und es gilt:
$\det(V(i, j) \cdot A) = -\det(A)$ (das brauchen Sie nicht zu beweisen!).

Diese Aufgabe werden wir aus Zeitgründen nicht mehr besprechen können und ist daher zum privaten Üben vorgesehen:

Aufgabe 11.4
Lösen Sie diese Aufgabe **ohne** das Gauss-Verfahren!

a) Es seien v_1, v_2, v_3 die drei Spaltenvektoren von
$$M(a) = \begin{pmatrix} 1 & 2-a & a^2-2 \\ 0 & a & 0 \\ 1 & 2-\frac{a}{2} & -2+\frac{a}{2} \end{pmatrix}$$
Für welche $a \in \mathbb{R}$ ist $Span(v_1, v_2, v_3) = \mathbb{R}^3$?

b) Geben Sie $rg(M(a))$ in Abhängigkeit von a an. (Begründen Sie Ihre Antwort, ohne das Gauss-Verfahren zu verwenden!)

c) Beweisen Sie: Für beliebige $(n \times n)$-Matrizen A und B gilt: $det(A \cdot B) = det(B \cdot A)$