Klausur SoSe 2024
27.9.2024
Dipl. Inf. Sigrid Weil
Dr. Marco Hülsmann

Diskrete Mathematik und Lineare Algebra

Bevor Sie mit der Bearbeitung der Klausur beginnen, lesen Sie bitte folgende Hinweise:

- Jede Klausur umfasst
  - das Deckblatt
  - diese Hinweisseite
  - 13 Seiten mit 9 Aufgaben
- Unterschreiben Sie bitte auf dem Deckblatt.
- Notieren Sie **auf jedem Blatt** oben Ihre **Matrikelnummer**.
- Insgesamt sind maximal 100 Punkte erreichbar.
- Sie haben die Klausur bestanden, wenn Sie mindestens **40 Punkte** erreicht haben.

Aufgabe	1	2	3	4
Punkte	10	10	10	10
erreicht				

Aufgabe	5	6	7	8	9	$\sum$
Punkte	15	15	10	15	5	100
erreicht						

Aufgabe 1 (2 + 8 = 10 P)
Es sei die Menge $M = \{a_1, a_2, \ldots\} \subseteq \mathbb{N}$ rekursiv definiert durch

$$a_i = \begin{cases} 0 & \text{für } i = 1 \\ 2 \cdot a_{i-1} + 3 & \text{für } i > 1 \end{cases}$$

a) Berechnen Sie die Werte a_2 und a_3.

b) Beweisen Sie durch vollständige Induktion: für alle $n \in \mathbb{N}$ ist

$$a_n = 3 \cdot (2^{n-1} - 1)$$

Geben Sie Ind.Anfang, Ind.Annahme und Ind.Behauptung explizit an und markieren Sie im Beweis die Stelle, an der die Ind.Annahme verwendet wird.

Aufgabe 2 (5 + 5 = 10 P)

a) Bestimmen Sie mit dem Euklidischen Algorithus: $ggT(132, 55)$

b) Bestimmen Sie mithilfe von a) zwei Zahlen $x, y \in \mathbb{Z}$ so, dass $ggT(132, 55) = 132x + 55y$.

Aufgabe 3 (4 + 6 = 10 P)
Es seien f und g zwei Funktionen : $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ (also *funktionale, linkstotale* Relationen $\subseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$) und es sei $h = g \circ f$.
Es seien nur die in der Tabelle angegebenen Werte bekannt, die übrigen Funktionswerte kennen wir nicht, insbesondere ist keine Funktionsvorschrift bekannt.

x	$f(x)$	$g(x)$	$h(x)$
-1	-3		1
2		a	-3
4	2	0	5
5	b		0

a) Bestimmen Sie allein aus der Tabelle den Wert a.

b) Begründen Sie, warum allein aus den in der Tabelle angegebenen Werten der Wert b nicht eindeutig bestimmt werden kann.
Welche zusätzliche Voraussetzung müsste erfüllt sein, damit auch der Wert b bestimmt werden könnte?

Aufgabe 4 (1 + 2 + 3 + 4 = 10 P)

a) Geben Sie die Definition für Reflexivität einer Relation an.

b) Geben Sie die Definition für Transitivität einer Relation an.

c) Zeigen Sie, dass die Relation $S := \{(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid x = 1\}$ **nicht** reflexiv ist.

d) Zeigen Sie, dass die Relation $S := \{(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid x = 1\}$ transitiv ist.

Aufgabe 5 (5 + 10 = 15 P)

a) Zeigen Sie, dass $\mathcal{B} = \{\vec{b_1}, \vec{b_2}, \vec{b_3}\}$ mit

$$\vec{b_1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \vec{b_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \ \vec{b_3} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

eine Basis des $\mathbb{R}^3$ ist.

b) Stellen Sie den Vektor $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ in der Basis $\mathcal{B}$ dar.

Rechnen Sie nicht nur, sondern **erläutern Sie Ihren Ansatz**!

Aufgabe 6 (2 + 3 + 4 + 6 = 15 P)

a) Zeigen Sie, dass

$$\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3,\ \varphi(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 3x - 2y \\ y - z \\ x + z \end{pmatrix}$$

eine lineare Abbildung ist.

b) Ist die Abbildung injektiv/surjektiv/bijektiv? Begründen Sie!

c) Berechnen Sie die Bilder $\varphi(b_i)$ der Vektoren $\{\vec{b_1}, \vec{b_2}, \vec{b_3}\}$ aus Aufgabe 5.

d) Stellen Sie φ bzgl der Basis $\mathcal{B}$ aus Aufgabe 5 dar, dh.:
Geben Sie eine Matrix V an, die der Abbildungsmatrix von φ bzgl der Basis $\mathcal{B}$ entspricht.
Rechnen Sie nicht nur, sondern **erläutern Sie Ihren Ansatz**!

Hinweis:
Sie können die Tatsache ausnutzen, dass die Matrix B der Basisvektoren und ihre Inverse gegeben sind durch

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \qquad B^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 7 (6 + 2 + 2 = 10 P)
Wir betrachten die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 2 \\ -1 & 5 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

a) Zeigen Sie, dass die Vektoren $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, v = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, w = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Eigenvektoren von A sind.
Was können Sie daraus über die Eigenwerte von A schließen? Wieviele bzw welche Eigenwerte hat A?

b) Was können Sie daraus über $det(A)$ schließen (ohne die Determinante explizit zu berechnen)?

c) Was können Sie daraus über die Lösungsmenge des LGS $Ax = \vec{0}$ schließen?

Begründen Sie Ihre Antworten!

Aufgabe 8 (3 + 4 + 2 + 2 + 4 + 5 = 20 P)
Wir betrachten folgende Punkte im $\mathbb{R}^3$

$$P = (0,\ 2,\ 1), \quad Q = (1,\ 0,\ -1), \quad R = (0,\ 1,\ 1)$$

Sei E die durch die Punkte bestimmte Ebene.

(Die Punkte entsprechen den Vektoren aus Aufgabe 5. Wir wissen also, dass die drei entsprechenden Vektoren $\vec{p}, \vec{q}, \vec{r}$ linear unabhängig sind. Daraus folgt, dass die drei Punkte in eindeutiger Weise eine (affine) Ebene im $\mathbb{R}^3$ beschreiben.)

a) Geben Sie die Ebene E in Parameterform an.

b) Geben Sie die Ebene E in Hesse'scher Normalform an.

c) Beweisen Sie, dass die Ebene E **nicht** durch den Ursprung (Nullpunkt) verläuft.

d) Sei $\tilde{E}$ die zu E parallele Ebene durch den Ursprung. Diese Ebene bildet einen Unterraum des $\mathbb{R}^3$. Geben Sie eine Basis für diesen Unterraum an.

e) Geben Sie eine Formel für die Spiegelung eines Vektors x an der Ebene $\tilde{E}$ an.

Aufgabe 9 (5 P)
Beweisen Sie die Aussage aus dem Aufgabentext von Aufgabe 8:

> Wenn $\vec{p}, \vec{q}, \vec{r}$ linear unabhängig sind, dann ist durch die entsprechenden Punkte P, Q, R in **eindeutiger** Weise eine Ebene bestimmt.

Genauer lautet die Behauptung:

> Wenn $\vec{p}, \vec{q}, \vec{r}$ linear unabhängig sind, dann sind auch die Vektoren $\vec{u} := \vec{q} - \vec{p}$ und $\vec{v} := \vec{r} - \vec{p}$ linear unabhängig.

Beweisen Sie diese Aussage **indirekt** durch Kontraposition!

Machen Sie deutlich, wovon Sie ausgehen („Annahme“), was „zu zeigen“ ist und wo die Begründung („Beweis:“ oder „dazu:“) beginnt.