

1. [Code](#)
 1. [Introduction](#)
 1. [Code](#)
 1. [Remarque](#)
 2. [Question](#)
 3. [Definition :](#)
 2. [Ensemble préfix](#)
 1. [Proposition](#)
 2. [Exercice :](#)
2. [Code correcteurs d'erreur](#)
 1. [Généralité](#)
 2. [Distance de Hamming](#)
 1. [Remarque :](#)

Code

1. Introduction

- A Alphabet fini
- A^* Ensemble des mots sur A
- w:
 - le mot vide ϵ
 - $w = a_1 \dots a_n$ avec $a_1 \dots a_n \in A$
- $|w| = m$ longueur de w
- $|\epsilon| = 0$
- $u \in A^*, v \in A^*$
 - $u = a_1 \dots a_l$ et $v = b_1 \dots b_k$
 - $u.v = a_1 \dots a_l.b_1 \dots b_k$ **concatenation**
- on as $u.\epsilon = u = \epsilon.u$
- $u, v, t \in A^*$
 - $(u.v).t = u.(v.t)$
- $A^* = A^* \setminus \{\epsilon\}$

1.1. Code

$$A = \{a, b, c, d, e\}$$

$$B = \{0, 1\}$$

$$\text{Codage : } \Phi : A \rightarrow B^+$$

$$\Phi : a \rightarrow 00$$

$$\Phi : b \rightarrow 01$$

$$\Phi : c \rightarrow 10$$

$$\Phi : d \rightarrow 110$$

$$\Phi : e \rightarrow 111$$

$$\Phi(abca) = \Phi(a)\Phi(b)\Phi(c)\Phi(a)$$

Remarque

On a :

- $\Phi(u, v) = \Phi(u) \cdot \Phi(v)$
- $\Phi(\epsilon) = \epsilon$

$$\Phi(abca) = 00011000$$

1.2. Question

Φ^{-1} Bien définie ?

$\Phi^{-1}(00011000) = abca$ est bien définie (**injective**)

1.3. Definition :

Φ est une fonction de codage **si** Φ est **injective**

($\Phi : A \rightarrow B^+$ étendu à A)

Soit $G = \Phi(A)$ (ensemble de mot):

$C = \{00, 01, 10, 110, 111\}$ G est un code **si et seulement si** tout mot de C^+ a une décomposition unique en mot de G .

G est un code **si et seulement si** pour tout mot de $u \in G^+$:

- si $u = u_1 \dots u_m$ avec $u_1 \dots u_m \in G$
- et $u = u'_1 \dots u'_k$ avec $u'_1 \dots u'_k \in G$
- alors $m = k$ et $u_1 = u'_1 \dots u_k = u'_k$

Soit $G = \{00, 01, 10, 110, 111\}$ est un code.

Supposons que $u_1 \dots u_k = u'_1 \dots u'_m$

$$u_1 \dots u_k \in G$$

$$u'_1 \dots u'_m \in G$$

En plus avec k minimal

$$u_1 \dots u_k = u'_1 \dots u'_m \text{ si } u_1 = 00 \text{ alors } u'_1 = 00 \text{ } u_2 \dots u_k = u'_2 \dots u'_m$$

Contredit minimalité de k .

2. Ensemble préfix

E est un préfix:

- Si $u \in E$ et $u.v \in E$
- Alors $v = \epsilon$

Aucun mot de E n'est le préfix d'un autre mot de E

2.1. Proposition

Si E est un préfix alors E est un code.

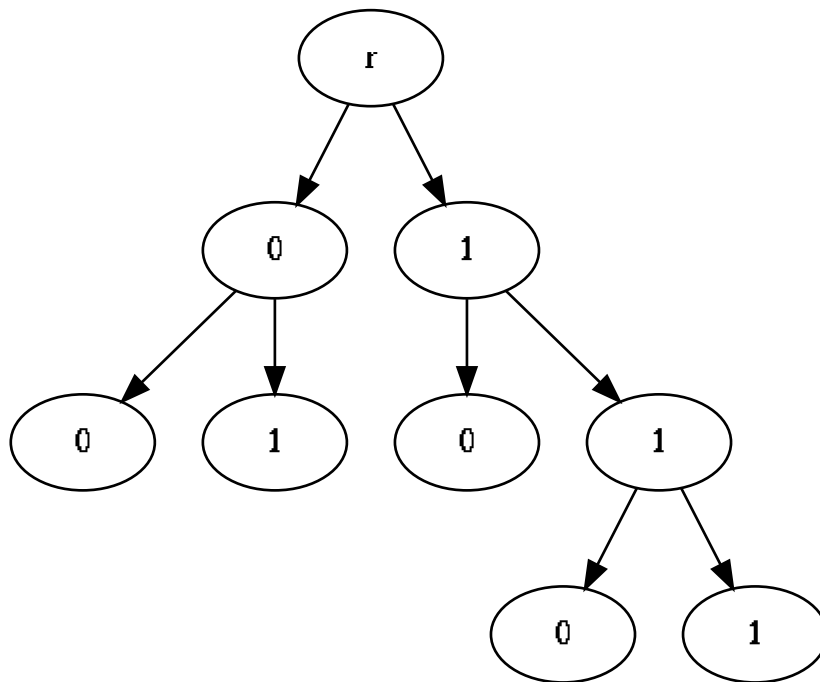
- $x \in E, u \in E^*$
- $y \in E, v \in E^*$

$x.u = y.v$ alors $x = y$

2.2. Exercice :

Trouver un code qui n'est ni préfix ni suffix.

Préfix: sur $\{0, 1\}$



Φ : Codage de taille fixe

$\forall a, a' \in A \mid \Phi(a) \mid = \mid \Phi(a') \mid$

G code $\forall w, w' \in \text{text}G \mid w \mid = \mid w' \mid$

Code correcteurs d'erreur

1. Généralité

On considère uniquement des codes binaires à longueur fixe

$\{0, 1\}$ la longueur l

m un mot : $\langle u_1, u_e \rangle$ $u_i \in \{0, 1\}$

vecteur sur $\langle \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \rangle^l$

$\langle \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \rangle$

$$\begin{cases} 0 + 0 &= 0 \\ 0 + 1 &= 1 = 1 + 0 \\ 1 + 1 &= 0 \end{cases}$$

espace vectoriel $\langle \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \rangle^l$

$$\langle u_1, \dots, u_l \rangle + \langle u'_1, \dots, u'_l \rangle = \langle u_1 + u'_1, \dots, u_l + u'_l \rangle$$

$$\langle 00010 \rangle + \langle 11010 \rangle = \langle 11000 \rangle$$

$$\langle u \rangle + \langle v \rangle = \vec{0}$$

$$0. \langle u \rangle = \vec{0}$$

$$1. \langle u \rangle = \langle u \rangle$$

2. Distance de Hamming

$$a, b \in \langle \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \rangle$$

$$d(a, b) = 0 \text{ si } a = b$$

$$d(a, b) = 1 \text{ sinon}$$

$$d(\langle u_1, \dots, u_l \rangle, \langle u'_1, \dots, u'_l \rangle) = d(\langle u_1 + u'_1, \dots, u_l + u'_l \rangle) = \sum_{i=1}^l d(u_i + u'_i)$$

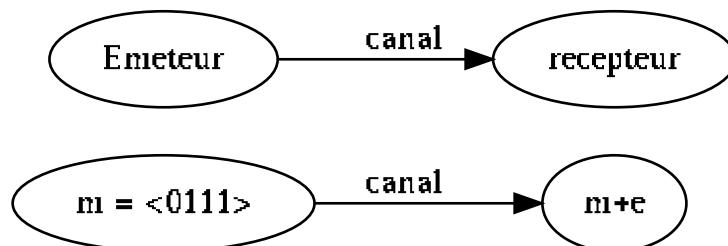
$$u = 00001110$$

$$v = 01011010$$

$$d(u, v) = 3$$

2.1. Remarque :

- d est une distance
- $d(u, u) = 0$
- $d(u, v) = d(v, u)$
- $d(u, u) \leq d(u, x) + d(x, v)$
- $d(u + x, v + x) = d(u, v)$



ou e est l'erreur

Le canal peut inverser 1 bit ou plus

$$e = \langle 0, 0, 0, 0 \rangle$$

$$e = \langle 1, 0, 0, 0 \rangle$$

$$e = \langle 0, 1, 0, 0 \rangle$$

$$e = \langle 0, 0, 1, 0 \rangle$$

$$e = \langle 0, 0, 0, 1 \rangle$$

G un ensemble (de vecteur) $d(G) = \min d(x, y) \ x, y \in G, x \neq y$

$$C = \langle 0001, 1100, 1001 \rangle \quad d(C) = 1$$

Corriger des erreur ?

$$\text{recu } m' = m + e$$

à partir de m' (avec des info sur e)

Trouver m