Analyse de stabilité et calcul des gains

On considère les deux équations du mouvement utilisées pour simuler le balancement du pendule :

$$\begin{cases} d_{11}\ddot{q}_1 + d_{12}\ddot{q}_2 = -h_1 - \phi_1 \\ d_{21}\ddot{q}_1 + d_{22}\ddot{q}_2 = \tau - h_2 - \phi_2 \end{cases}$$

Ces deux équations sont équivalentes à :

$$\begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} \\ d_{21} & d_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -h_1 - \phi_1 \\ \tau - h_2 - \phi_2 \end{pmatrix}$$

Pour obtenir un système de la forme : $M\dot{x} = N(x)$, on ajoute des lignes et colonnes à chaque membre du système tout en gardant sa validité :

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & d_{11} & d_{12} \\ 0 & 0 & d_{21} & d_{22} \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -h_1 - \phi_1 \\ \tau - h_2 - \phi_2 \\ \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{pmatrix}$$

Pour obtenir un système du type $\dot{x} = h(x)$, nous allons inverser la matrice M via la formule :

$$M^{-1} = (det(M))^{-1} com^t(M)$$

avec

$$det(M) = d_{11}d_{22} - d_{12}d_{21}$$

d'où

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{d_{22}}{det(M)} & -\frac{d_{12}}{det(M)} & 0 & 0 \\ -\frac{d_{21}}{det(M)} & \frac{d_{11}}{det(M)} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ce qui nous donne :

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{d_{22}}{det(M)} & -\frac{d_{12}}{det(M)} & 0 & 0 \\ -\frac{d_{21}}{det(M)} & \frac{d_{11}}{det(M)} & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -h_1 - \phi_1 \\ \tau - h_2 - \phi_2 \\ \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \dot{x} = h(x) = \begin{pmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \frac{d_{22}}{det(M)}(-h_1 - \phi_1) - \frac{d_{12}}{det(M)}(\tau - h_2 - \phi_2) \\ -\frac{d_{21}}{det(M)}(-h_1 - \phi_1) + \frac{d_{11}}{det(M)}(\tau - h_2 - \phi_2) \end{pmatrix}$$

Et enfin, afin d'obtenir le système linéaire, soit un système de type $\dot{x} = Ax$, on calcul :

$$A_{ij} = \frac{\partial h_i(x)}{\partial x_j}|_{x=0}\ (x-0)$$

d'où

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} & A_{34} \\ A_{41} & A_{42} & A_{43} & A_{44} \end{pmatrix}$$

Avec,

$$\begin{cases} A_{31} = -[(\frac{d_{22}}{det(M)}\frac{\partial \phi_1}{\partial q_1}) + (\frac{d_{12}}{det(M)}\frac{\partial(\tau-\phi_2)}{\partial q_1})]\ |_{x=0} \\ \\ A_{32} = -[(\frac{d_{22}}{det(M)}\frac{\partial \phi_1}{\partial q_2}) + (\frac{\partial}{\partial q_2}\frac{d_{12}}{det(M)})(\tau-\phi_2) + (\frac{d_{12}}{det(M)}\frac{\partial(\tau-\phi_2)}{\partial q_2})]\ |_{x=0} \\ \\ A_{33} = -[(\frac{d_{12}}{det(M)}\frac{\partial \tau}{\partial \dot{q}_1})]\ |_{x=0} \\ \\ A_{34} = -[(\frac{d_{12}}{det(M)}\frac{\partial \tau}{\partial \dot{q}_2})]\ |_{x=0} \\ \\ A_{41} = [(\frac{d_{21}}{det(M)}\frac{\partial \phi_1}{\partial q_1}) + (\frac{d_{11}}{det(M)}\frac{\partial(\tau-\phi_2)}{\partial q_1})]\ |_{x=0} \\ \\ A_{42} = [\frac{\partial}{\partial q_2}(\frac{d_{21}}{det(M)})(h_1+\phi_1) + \frac{d_{21}}{det(M)}\frac{\partial \phi_1}{\partial q_2} + (\frac{\partial}{\partial q_2}\frac{d_{11}}{det(M)})(\tau - h_2 - \phi_2) + \frac{d_{11}}{det(M)}\frac{\partial(\tau-\phi_2)}{\partial q_2}]\ |_{x=0} \\ \\ A_{43} = -[(\frac{d_{11}}{det(M)}\frac{\partial \tau}{\partial \dot{q}_1})]\ |_{x=0} \\ \\ A_{44} = -[(\frac{d_{11}}{det(M)}\frac{\partial \tau}{\partial \dot{q}_2})]\ |_{x=0} \end{cases}$$

et le calcul des dérivées partielles suivant :

$$d_{11} : \begin{cases} \frac{\partial d_{11}}{\partial q_1}\ |_{x=0} = \frac{\partial d_{11}}{\partial \dot{q}_1}\ |_{x=0} = \frac{\partial d_{11}}{\partial \dot{q}_2}\ |_{x=0} = 0 \\ \\ \frac{\partial d_{11}}{\partial q_2}\ |_{x=0} = -2m_2 l_1 l_{c_2} sin(q_2) \end{cases}$$

$$d_{12} : \begin{cases} \frac{\partial d_{12}}{\partial q_1}\ |_{x=0} = \frac{\partial d_{11}}{\partial \dot{q}_1}\ |_{x=0} = \frac{\partial d_{11}}{\partial \dot{q}_2}\ |_{x=0} = 0 \\ \\ \frac{\partial d_{12}}{\partial q_2}\ |_{x=0} = -m_2 l_1 l_{c_2} sin(q_2) \end{cases}$$

$$d_{22} : \left\{ \frac{\partial d_{22}}{\partial q_1}\ |_{x=0} = \frac{\partial d_{22}}{\partial q_1}\ |_{x=0} = \frac{\partial d_{22}}{\partial \dot{q}_1}\ |_{x=0} = \frac{\partial d_{22}}{\partial \dot{q}_2}\ |_{x=0} = 0 \right.$$

$$h_1 : \left\{ \frac{\partial h_1}{\partial q_1} \right|_{x=0} = \frac{\partial h_1}{\partial q_1} \left|_{x=0} = \frac{\partial h_1}{\partial \dot{q_1}} \right|_{x=0} = \frac{\partial h_1}{\partial \dot{q_2}} \left|_{x=0} = 0\right.$$

$$h_2 : \left\{ \frac{\partial h_2}{\partial q_1} \right|_{x=0} = \frac{\partial h_2}{\partial q_1} \left|_{x=0} = \frac{\partial h_2}{\partial \dot{q_1}} \right|_{x=0} = \frac{\partial h_2}{\partial \dot{q_2}} \left|_{x=0} = 0\right.$$

$$\phi_1 : \begin{cases} \frac{\partial \phi_1}{\partial \dot{q_1}} \left|_{x=0} = \frac{\partial \phi_1}{\partial \dot{q_2}} \right|_{x=0} = 0 \\ \\ \frac{\partial \phi_1}{\partial q_1} \left|_{x=0} = -(m_1 l_{c_1} + m_2 l_1) g sin(q_1^d) - m_2 l_{c_2} g sin(q_1^d + q_2^d)\right. \\ \\ \frac{\partial \phi_1}{\partial \dot{q_2}} \left|_{x=0} = -m_2 l_{c_2} g sin(q_1^d + q_2^d)\right. \end{cases}$$

$$\phi_2 : \begin{cases} \frac{\partial \phi_2}{\partial \dot{q_1}} \left|_{x=0} = \frac{\partial \phi_2}{\partial \dot{q_2}} \right|_{x=0} = 0 \\ \\ \frac{\partial \phi_2}{\partial q_1} \left|_{x=0} = \frac{\partial \phi_2}{\partial q_2} \right|_{x=0} = -m_2 l_{c_2} g sin(q_1^d + q_2^d) \end{cases}$$

1. Formules

$\dot{L} = -(m_1 + m_2) g X_G$
$\ddot{L} = -(m_1 + m_2) g \dot{X}_G$
$\tau = k_{dd} \ddot{L} + k_d \dot{L} + k_p L + \tau^d$
$\tau^d = m_2 l_{c2} g \cos(q_1 + q_2)$
$\tau = -k_v \dot{X}_G - k_x X_G + k_p L + \tau^d$
$\dot{x} = f(x) + g(x).u$
$\dot{x} = Ax$
$\lambda^4 + (b_1 k_{dd} - b_2 k_p) \lambda^3 + (b_3 k_d - : \alpha) \lambda^2 + (b_4 k_p) \lambda + a =$
$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = -p$
$(\lambda + p)^4 = \lambda^4 + 4p\lambda^3 + 6p^2 \lambda^2 + 4p^3 \lambda : +p^4 =$

2. Explication des formules et variables

l_1 Longueur de l'objet1, cet objet est attaché au sol par un point fixe.

l_2 Longueur de l'objet2, cet objet est attaché à l'objet1 par une jointure à une de ses éxtrémités.

q_1 Angle de l'objet 1 par rapport au sol, au niveau de la jointure.

q_2 Angle de l'objet 2 par rapport au (sol ou de l'objet 1 ? ?), au niveau de la jointure.

m_1 Masse de l'objet1 la masse est considédée uniforme.

m_2 Masse de l'objet2 la masse est considédée uniforme.

l_{c1} Longueur entre une éxtrémité et le centre de masse (pas sûr) ($\Longleftrightarrow$ barycentre ?). Le point change en fonction de l'inclinaison de l'objet non ? - Et pour trouver le barycentre comme ça il faut utiliser une intégrale ?

l_{c2}

I_1 Moment d'inertie de l'objet1.

I_2 Moment d'inertie de l'objet2.

2. Autres Variables

L

Moment angulaire par rapport a un point le point choisi est le point de contact au sol.

$X_G = 0$

Signifie que mon centre de masse "global" est aligné avec le point de contact au sol "= 0".

$L = 0$

Comme L est exprimé en fonction du point de contact au sol avoir $L = 0$ signifie que l'on veut que toutes les forces s'annule ? ? ?.

$\dot{X}_G = 0$.

$\dot{q}_1 = \dot{q}_2 = 0$

Dérivé de q_i par rapport au temps on veut que $\dot{q}_1 = \dot{q}_2$ soit égal a 0 signifie que nos angles ne bougent pas (on se déplace pas)

$L = \dot{L} = \ddot{L} = 0$ Comme on veut que $X_G = 0$ et $\dot{X}_G = 0$ et que $\dot{L}$ et $\ddot{L}$ sont exprimmés respectivement en fonction de $X_G = 0$ et $\dot{X}_G = 0$ on a donc que $L = \dot{L} = \ddot{L} = 0$

k_{dd}

k_d

k_p

τ Je pense que τ représente notre configuration actuelle https ://en.wikipedia.org/wiki/Torque. Si τ^d est le moment de la force désiré alors on est equilibré si $\tau = \tau^d$. Car pour un équilibre on veut $L = \dot{L} = \ddot{L} = 0$.

τ^d

q_1^d

q_2^d

$k_v = (m_1 + m_2)gk_{dd}$

$k_x = (m_1 + m_2)gk_d$

$x = (q_1 - q_1^d, q_2 - q_2^d, \dot{q}_1, \dot{q}_2)$

$u = \tau$

$\dot{x} = h(x)$

$A = \frac{\partial h}{\partial x} \mid x = 0$.
b_i

a Accélération.

α Angular acceleration.